arXiv:2601.14151v1 [math.CO] 20 Jan 2026

增长网格的可实现燃烧密度

Jordan Barrett Karen Gunderson 达尔豪斯大学 曼尼托巴大学
jbarrett@dal.ca karen.gunderson@umanitoba.ca
JD Nir Pawe-l Pra-lat 奥克兰大学 多伦多都会大学
jdnir@oakland.edu pralat@torontomu.ca

2026年1月21日

摘要

图燃烧是图上的离散时间过程，其中顶点依次被激活，燃烧顶点会随着时间推移使其邻点燃烧。在本研究中，我们关注一种动态图景：图随时间增长，并且在每一步中，我们在增长网格 $G_n = [-f(n)\ f(n)]^2$ 中燃烧顶点。我们研究形式为 $f(n) = \lceil cn^\alpha \rceil$ 的函数所对应的可实现燃烧密度集合，其中 $\alpha \geq 1$和 $c > 0$。我们证明，对于 $\alpha = 1$，可实现密度的集合为 $[1/(2c^2), 1]$, ；对于$1 < \alpha < 3/2$， $[0, 1]$ 中的每个密度都可实现；而对于 $\alpha = 3/2$，可实现密度的集合为 $[0,(1 + \sqrt{6c})^{-2}]$。

1 引言

图燃烧是一种离散时间过程，用于模拟影响力在网络中的传播。顶点有两种状态：燃烧 或未燃烧。每一轮中，一个燃烧顶点会使其所有邻点变为燃烧状态，并选取一个新的火源 ： 无论其邻点状态如何，也无论其先前状态如何，该顶点的状态都会变为燃烧。重复更新，直到所有顶点都处于燃烧状态。图 G 的燃烧数 记作 $b(G)$，是使图 G 中所有顶点燃烧所需的最少轮次数。

图燃烧最早见于 Alon 的一篇论文 [1], ，该研究受到英特尔的 Brandenburg 和 Scott 提出的问题启发，并将其表述为涉及一组处理器的传播问题。随后，Bonato、Janssen 和 Roshanbin [6, 7, 13] 独立研究了这一问题；他们不仅提出了图燃烧这一名称，还给出了界，并刻画了各种图类的燃烧数。此后，这一问题受到广泛关注（例如 [2, 3, 8, 9, 10, 11, 12]），研究者尤其关注所谓的点燃数猜想：每个包含 n 个顶点的连通图，最多需要 $\lceil \sqrt{n} \rceil$ 轮次即可燃烧。

Bonato、Gunderson 和 Shaw [5], 首次提出了燃烧密度的概念，以不断增长的图序列取代静态网络。在这一范式中，可能不存在某一轮使所有顶点都处于燃烧状态。因此，我们考察燃烧顶点数占顶点总数的比例。

设 $\mathcal{G} = (G_n,\ n \geq 1)$ 为一列连通图，满足对于所有 $n \geq 1$，G_n 是 G_{n+1} 的诱导子图。接下来，设 $\mathcal{V} = (v_n,\ n \geq 1)$ 为一列顶点，满足对于所有 $n \geq 1$，$v_n \in V(G_n) \cup \{\emptyset\}$。我们考虑在 $\mathcal{G}$ 上进行如下燃烧过程，其激活序列为 $\mathcal{V}$。从空图 G_0 和由燃烧顶点构成的空集 B_0 开始，对于 $n \geq 1$,

1. 向 G_{n-1} 添加顶点和边，以构造 G_n,
2. 将 B_n 设为 B_{n-1} 与 G_n 中 B_{n-1} 的邻域内各顶点的并集，最后
3. 如果 $v_n \neq \emptyset$，则将 v_n 添加到 B_n。

我们可以将其视为一个随时间进行的过程：在每个时间间隔内，图不断增长，火势不断传播，并有一个新的顶点被点燃；我们通常将时间 t 时的过程称为回合 t。我们不要求 v_t 在被激活时尚未燃烧，也不要求 $v_t \notin \{v_1, \ldots, v_{t-1}\}$。同样，我们允许激活序列在第 t 回合“跳过”，方法是令 $v_t = \emptyset$。我们唯一坚持的要求是，对于至少一个 t，$v_t \neq \emptyset$。燃烧过程的示例见图 1。

对于图序列 $\mathcal{G}$ 和激活序列 $\mathcal{V}$，分别将 $\mathcal{V}$ 在 $\mathcal{G}$ 中的下燃烧密度 和上燃烧密度 定义为

$$\underline{\delta}(\mathcal{G}, \mathcal{V}) := \liminf_{n\to\infty} \frac{|B_n|}{|V(G_n)|} \qquad \text{and} \qquad \overline{\delta}(\mathcal{G}, \mathcal{V}) := \limsup_{n\to\infty} \frac{|B_n|}{|V(G_n)|}.$$

显然，$0 \leq \underline{\delta}(\mathcal{G}, \mathcal{V}) \leq \overline{\delta}(\mathcal{G}, \mathcal{V}) \leq 1$。如果对于某一对 $(\mathcal{G}, \mathcal{V})$，有 $\underline{\delta}(\mathcal{G}, \mathcal{V}) = \overline{\delta}(\mathcal{G}, \mathcal{V})$，那么我们称此值为 $\mathcal{V}$ 在 $\mathcal{G}$ 中的燃烧密度，并记作 $\delta(\mathcal{G}, \mathcal{V})$。注意，如果激活序列 $\mathcal{V} = (v_n, n \geq 1)$ 对所有 n 都满足 $v_n = \emptyset$，那么 $\delta(\mathcal{G}, \mathcal{V}) = 0$。为避免这种平凡情形，我们假设激活序列至少包含一些顶点，并称这类序列为非空序列。最后，记 $P(\mathcal{G}) \subseteq [0, 1]$ 为 $\mathcal{G}$ 中可实现的燃烧密度集合，定义如下:

$$P(\mathcal{G}) := \{\rho \in [0, 1] : \text{存在一个非空激活序列 } \mathcal{V}, \text{ 使得 } \delta(\mathcal{G}, \mathcal{V}) = \rho\}.$$

本文研究整数格上的网格图序列 $\mathcal{G}$。我们记作$G = [a, b] \times [c, d]$，其中 G 是顶点集为 $[a, b] \times [c, d]$、且连接彼此距离为 L_1的顶点对的网格图。我们用 $[a, b]^2$ 作为 $[a, b] \times [a, b]$的简写。

设 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是严格递增函数，令 $G_n = [-f(n)\ f(n)]^2,$，并定义$\mathcal{G}(f) = \big(G_n,\ n \geq 1\big)$。Bonato、Gunderson 和 Shaw 证明了:

定理 ([5])。 设 $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个非递减函数。

(a) 如果 $f(n) = \lceil cn \rceil$ 对某个 $c \geq 1$成立，那么 $P(\mathcal{G}(f)) = [1/(2c^2), 1]$。

(b) 如果 $f(n) = \lceil cn^{3/2} \rceil$ 对某个 $c > 0$ 成立，那么存在一个激活序列 $\mathcal{V}$，使得$\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}) > 0$。

(c) 如果 $f(n) = \omega(n^{3/2})$，那么 $P(\mathcal{G}(f)) = \{0\}$。

我们的主要贡献是拓展了他们的结果，确定了对于所有形如 $\lceil cn^\alpha \rceil$的函数，在 $\mathcal{G}(f)$ 中可实现的燃烧密度集合，其中 $\alpha \geq 1$，且 c是一个正实数。请注意，如果 $\alpha = 1$，那么我们要求 $c \geq 1$，否则网格的增长速度会慢于火势传播，因此 $P(\mathcal{G}(f)) = \{1\}$ 显然成立。

定理 1.1。取正实数 c 和 α，并令 $f(n) = \lceil cn^\alpha \rceil$。

(a) 如果 $\alpha = 1$ 且 $c \geq 1$，那么 $P(\mathcal{G}(f)) = [1/(2c^2)$ $, 1]$。*(b)* 如果 $\alpha \in (1, 3/2)$，那么 $P(\mathcal{G}(f)) = [0, 1]$。
(c) 如果 $\alpha = 3/2$，那么 $P(\mathcal{G}(f)) = [0, (1 + \sqrt{6}c)$ $^{-2}]$。*(d)* 如果 $\alpha > 3/2$，那么 $P(\mathcal{G}(f)) = \{0\}$。

注意，Bonato、Gunderson 和 Shaw 证明了情形 (a)，并证明了定理 1.1 中情形 (d) 所能得到的最强推广；具体而言，若 $f(n) = \omega(n^{3/2})$，则 $P(\mathcal{G}(f)) = \{0\}$。我们对定理 1.1 的贡献在于证明了情形 (b) 和 (c)。事实上，对于更广泛的一类函数，我们确定了 $P(\mathcal{G}(f))$。在定理 1.1 的情形 (a) 和 (c) 中，我们实际上证明了一个更一般的结果，该结果适用于具有类似渐近行为的函数。

定理 1.2. 取正实数 c 和 α，并假设 $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 严格递增且满足 极限$_{n\to\infty}\, n^{-\alpha} f(n) = c$.

(a) 若 $\alpha = 1$ 且 $c \geq 1$，则 $P(\mathcal{G}(f)) = [1/(2c^2), 1]$。

(c) 若 $\alpha = 3/2$，则 $P(\mathcal{G}(f)) = [0, (1 + \sqrt{6}c)^{-2}]$。

在定理 1.1 的剩余情形，即情形 (b) 中，我们证明一个类似的推广，但需要附加一个假设。若函数 f 满足受控增长条件 或具有受控增长，则称其

i) 对所有充分大的 n，$f(n + 1) > f(n)$,

ii) 对每个满足 $\epsilon(n) = o(n)$ 的函数 $\epsilon\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，都有 $f(n+\epsilon(n)) = (1+o(1))f(n)$，并且

iii) 对于每个常数 $c > 0$，都存在一个常数 $d > 0$，使得当 n 充分大时，$f(n + cn) \geq ($ $1 + d)f(n)$。

定理 1.3。设 $f\colon\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 满足受控增长条件，并假设 $f(n)=\omega(n)$ 以及 $f(n)=o(n^{3/2})$。那么 $P(\mathcal{G}(f))=[0,1]$。

我们还给出了一些例子（见例 2.8），说明若 f 不满足受控增长条件，定理 1.3 可能不成立。

本文余下部分安排如下。第 2 节介绍一些辅助观察，以简化其他证明。具体而言，在第 2.1 小节中，我们将说明如何方便地修改激活序列而不影响燃烧密度。此外，限制为递增函数 f（n）也是合理的——见第 2.2 小节。进而，这表明我们可以方便地修改增长函数——见第 2.3 小节。本节最后简要讨论对增长函数作某种限制的必要性。第 3 节用于证明定理 1.3，该定理蕴含定理 1.1 (b)。定理 1.2 的证明见第 4 节，该定理蕴含定理 1.1 (c)。最后，我们提出几个开放问题——见第 5 节。

2 预备结果

我们提出了一系列引理，这些引理结合起来后，能够让我们以相当大的幅度修改燃烧过程，同时保持下燃烧密度和上燃烧密度不变。尽管本节的结果并非全部都是证明三个主要定理所必需的，但我们仍将它们一并列出，因为它们为分析燃烧过程提供了一套工具。

对于一个燃烧过程 $(\mathcal{G},\ \mathcal{V})$，用 $B_t[i]$ 表示 B_t 的一个子集：如果在该过程中仅激活 $\mathcal{V}$ 中的 i^{th} 顶点，那么该子集中的顶点仍会被烧到。注意，

$$B_t=\bigcup_{i\in[t]}B_t[i]\,,$$

还要注意，$B_t[i]\cap B_t[j]$ 不一定为空。最后，注意，$B_t[i]$ 不一定是以 v_i 为中心、半径为 $t-i$ 的球，其中 v_i 位于 G_t中。例如（见图 1），如果$f(1)=f(2)=1$，$f(3)=3$，并且在第 1 回合激活顶点 $(1,\ 1)$，那么 $B_1[3]$并不是以 $(1,\ 1)$ 为中心、半径为 2 的球。然而，如果 f 严格递增，那么 $B_t[i]$ 实际上就是以 v_i 为中心、半径为 $t-i$ 的球，其中 v_i 位于 G_t中。

2.1 关键引理（第一部分）：调整激活序列

在这组三个引理中，我们将说明如何延迟激活序列、裁剪其前端，以及对其进行逐点扰动，同时不改变下燃烧密度和上燃烧密度。对于这些引理，我们假设 f 具有受控增长。

引理 *2.1*。固定 $k\geq 1$，设 $\mathcal{O}=(v_n,n\geq 1)$ 是 $\mathcal{G}(f)$ 上的激活序列，且设 $\mathcal{D}=(u_n,n\geq 1)$ 是修改后的激活序列，其中 $u_1=\cdots=u_k=\emptyset$ 且 $u_{k+i}=v_i$ 对所有 $i\geq 1$ 均成立。则 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{D})=\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{O})$，且 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{D})=\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{O})$。

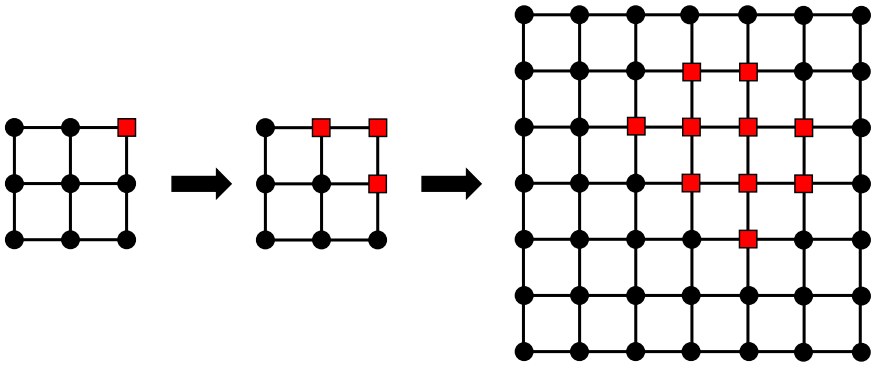

图 1：包含 $f(1) = f(2) = 1$ 和 $f(3) = 3$的燃烧过程的前三个回合。顶点 (1,1) 在第 1 回合被激活，此后没有其他顶点被激活。燃烧顶点以红色方块突出显示。

为便于阅读，我们分别将 $(\mathcal{G}, f, \mathcal{O})$ 和 $(\mathcal{G}, f, \mathcal{D})$ 称为原始和延迟燃烧过程。

证明。记 $B_t^{\mathcal{O}}$和 $B_t^{\mathcal{D}}$分别为原始过程和延迟过程在时间 t之后的燃烧顶点集合。现在令 $v_i \in \mathcal{O}$，并注意到 $v_i = u_{i+k} \in \mathcal{D}$。因此，$v_i$ 在原始过程中比在延迟过程中早 k轮被激活，这意味着 v_i 在延迟过程中燃烧的顶点数不超过原始过程，即，

$$B_t^{\mathcal{D}}[i+k] \subseteq B_t^{\mathcal{O}}[i]\,.$$

此外，由于 $B_t^{\mathcal{D}}[1] = \cdots = B_t^{\mathcal{D}}[k] = \emptyset$，我们有

$$B_t^{\mathcal{D}} = \bigcup_{i\in[n]} B_t^{\mathcal{D}}[i] \subseteq \bigcup_{i\in[n]} B_t^{\mathcal{O}}[i] = B_t^{\mathcal{O}}\,,$$

由此可得 $\delta(\mathcal{G}, f, \mathcal{D}) \leq \delta(\mathcal{G}, f, \mathcal{O})$ 且 $\delta(\mathcal{G}, f, \bar{\mathcal{D}}) \leq \delta(\mathcal{G}, f, \bar{\mathcal{O}})$。

对于另一个方向，我们比较燃烧集 $B_t^{\mathcal{O}}[i]$ 和 $B_{t+k}^{\mathcal{D}}[i+k]$。若 $t = i$，则 $B_i^{\mathcal{O}}[i] = \{v_i\}$ 和 $B_{i+k}^{\mathcal{D}}[i+k] = \{u_{i+k}\}$，且这两个集合等价。现在假设对于某个任意的 $t \geq i$，$B_t^{\mathcal{O}}[i] \subseteq B_{t+k}^{\mathcal{D}}[i+k]$ 成立，并考察两个燃烧过程各自的下一步。对于原过程，$B_{t+1}^{\mathcal{O}}[i]$是由 $B_t^{\mathcal{O}}[i]$构造而成：先加入 G_{t+1}中所有相邻顶点，再加入 v_{t+1}。类似地，对于延迟过程，$B_{t+k+1}^{\mathcal{D}}[i+k]$ 是由 $B_{t+k}^{\mathcal{D}}[i+k]$ 构造而成：先加入 G_{t+k+1}中所有相邻顶点，再加入 $u_{t+k+1} = v_{t+1}$。因此，由于 $G_{t+1} \subseteq G_{t+k+1}$ 且 $B_t^{\mathcal{O}}[i] \subseteq B_{t+k}^{\mathcal{D}}[i+k]$，可得 $B_{t+1}^{\mathcal{O}}[i] \subseteq B_{t+k+1}^{\mathcal{D}}[i+k]$。由归纳法，我们已经证明

$$B_t^{\mathcal{O}}[i] \subseteq B_{t+k}^{\mathcal{D}}[i+k]\,,$$

对所有 $t \geq i$ 均成立。因此，

$$\frac{|B_{t+k}^{\mathcal{D}}|}{|V(G_t)|} \geq \frac{|B_t^{\mathcal{O}}|}{|V(G_t)|}\,.$$

最后，由于 $f(n)$ 具有受控增长，当 $t \to \infty$ 和 k 固定时，我们有 $|V(G_{t+k})| = (1+o(1))|V(G_t)|$，这意味着

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{|B^{\mathcal{D}}_{t+k}|}{|V(G_{t+k})|} = \liminf_{t\to\infty} \frac{|B^{\mathcal{D}}_{t+k}|}{|V(G_t)|} \geq \liminf_{t\to\infty} \frac{|B^{\mathcal{O}}_{t}|}{|V(G_t)|},$$

极限上确界的情形也类似。该不等式表明 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{D}) \geq \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$ 且 $\underline{\delta}(\mathcal{G}(f), \mathcal{D}) \geq \underline{\delta}(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$，从而完成证明。 □

引理 *2.2*。固定 $k \geq 1$，设 $\mathcal{O} = (v_n, n \geq 1)$ 是 $\mathcal{G}(f)$ 上的激活序列，且对某个 $i > k$ 有 $v_i \neq \emptyset$；再设 $\mathcal{T} = (u_n, n \geq 1)$ 是修改后的激活序列，满足 $u_1 = \cdots = u_k = \emptyset$，并且对所有 $i > k$ 都有 $u_i = v_i$。那么 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{T}) = \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$ 且 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{T}) = \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$。

为便于阅读，我们将 $(\mathcal{G}(f), \mathcal{T})$ 称为截短的燃烧过程。

证明。记 $B^{\mathcal{O}}_t$ 和 $B^{\mathcal{T}}_t$ 分别为原过程和截短过程在时间 t 后的燃烧集合。注意到 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{T}) \leq \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$ 且 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{T}) \leq \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$ 是显然的，因为对所有 $t \geq 1$ 都有 $B^{\mathcal{T}}_t \subseteq B^{\mathcal{O}}_t$。

对于另一个方向，令 $\ell > k$ 满足 $V(G_k) \subseteq B^{\mathcal{T}}_\ell$。这样的 ℓ 存在，因为存在某个时刻 $s \geq k$，使得 $B^{\mathcal{T}}_s$ 非空；并且在时刻 $s + 2f(s) + 1$ 之后，所有 G_s （从而所有 G_k）都已燃烧。令 $\mathcal{D}$ 为激活序列：对于所有 $i \geq 1$，它在第 $i + \ell$ 轮激活 v_i，且此前不激活任何顶点；也就是说，$(\mathcal{G}(f), \mathcal{D})$ 是引理 2.1 中将 k 替换为 ℓ 后的延迟过程。然后，记 $B^{\mathcal{D}}_t$ 为延迟过程中时间 t 之后的燃烧顶点集合，则有

$$B^{\mathcal{D}}_t[\ell + i] \subseteq \bigcup_{j\in[\ell]} B^{\mathcal{T}}_t[j] \qquad \text{for } 1 \leq i \leq k, \text{ and}$$
$$B^{\mathcal{D}}_t[\ell + i] \subseteq B^{\mathcal{T}}_t[i] \qquad \text{for } i > k,$$

第一个包含关系源于以下事实：在时刻 $\ell + 1$ 之前，v_1、……、$v_k \in V(G_k)$ 已经在修剪过程中燃烧；第二个包含关系则是因为 v_i 是 $\mathcal{T}$ 中的 i^{th} 激活顶点，也是 $\mathcal{D}$ 中的 $(\ell + i)^{\text{th}}$ 激活顶点。因此，$B^{\mathcal{D}}_t \subseteq B^{\mathcal{T}}_t$，所以 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{T}) \geq \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{D})$，且 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{T}) \geq \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{D})$。此外，根据引理 2.1，有 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{D}) = \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$，且 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{D}) = \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$。综合可得，$\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{T}) \geq \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$，且 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{T}) \geq \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$，证明完毕。 □

引理 *2.3.* 固定 $d \geq 1$，设 $\mathcal{O} = (v_n, n \geq 1)$ 和 $\mathcal{P} = (u_n, n \geq 1)$ 是 $\mathcal{G}(f)$ 上的激活序列，并满足对所有 $n \geq 1$，$\mathit{dist}_{G_n}(v_n, u_n) \leq d$。那么 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{P}) = \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$，且 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{P}) = \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O})$。

在这种情况下，我们称 $(\mathcal{G}(f), \mathcal{P})$ 为扰动过程。

证明。由对称性，只需证明 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O}) \leq \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{P})$ 且 $\delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{O}) \leq \delta(\mathcal{G}(f), \mathcal{P})$。令 $\mathcal{D}$ 为激活序列，它在时间 $i + d$ 点燃 v_i，对所有 $i \geq 1$ 均如此，且此前不点燃任何顶点，即延迟过程。于是，$\mathcal{D}$中的任意顶点在

点燃时，已经在扰动过程中被某个顶点点燃，该顶点 (a) 距离至多为 d，且 (b) 提前 d 回合被激活。因此，$_\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{D}) \leq \delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{P})$ 且 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{D}) \leq \delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{P})$，再结合引理 2.1，即完成证明。

□

总之，引理 2.1、2.2 和 2.3 告诉我们，可以延迟、截短和扰动激活序列，而不改变下燃烧密度和上燃烧密度。

2.2 限定讨论范围

三个主要目标中的两个，即定理 1.1 和定理 1.3，涉及几乎严格递增的函数。此时，我们将注意力限定于事实上严格递增的函数。这样做是为了忽略某些边界情况：在这些情况下，f 可能并非每一步都增长，从而使燃烧集无法以恒定速率向四个方向向外扩展（例如图 1）。我们给出一个简单的引理，为这一限定提供依据。

引理 *2.4*。固定 $n_0 \geq 1$，并令 f 满足：*(a)* 对所有 $n \geq n_0$，$f(n) \geq n$；*(b)* 对所有 $n \geq n_0$，$f(n+1) - f(n) > 0$。那么，存在一个严格递增函数 g，使得：*(a)* 对所有充分大的 n，$f(n) = g(n)$；*(b)* $P(\mathcal{G}(f)) = P(\mathcal{G}(g))$。

证明。设 $\rho \in P(\mathcal{G}(f))$，并设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{G}(f)$ 的一个激活序列，使得 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}) = \rho$。将 $\mathcal{V}$ 的前 n_0 项替换为 $\emptyset$，定义激活序列 $\mathcal{T}$。根据引理 2.2，$\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{O}) = \delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{T})$。接着定义 g，使得对于 $n < n_0$，$g(n) = n$；对于 $n \geq n_0$，$g(n) = f(n)$。由于在 n_0 之后的每一轮中，$\mathcal{G}(g) = \mathcal{G}(f)$，所以 $(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{T})$ 的燃烧集与 $(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{T})$ 的燃烧集相同，因此 $\delta(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{T}) = \rho$。对称地，若 $\mathcal{O}$ 达到 $\delta(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{O}) = \rho$，则存在 $\mathcal{T}$，使得 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{T}) = \rho$。 □

这一限制的一个直接好处体现在下面的引理中。

引理 2.5。设 f 严格递增。对于 $\mathcal{G}(f)$ 上的任意激活序列 $(v_n, n \geq 1)$，

(a) $B_t[i]$ 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$中以 v_i 为中心、半径为 $t - i$ 的球，且

(b) $|B_t| \leq \frac{2t^3+t}{3}$。

证明。命题 (a) 立即由以下事实得出：如果 f 是严格递增的，并且$v_i \in G_i$，那么 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 中所有与 v_i 的距离为 k 的点都必须位于 G_{i+k}中。

对于命题 (b)，我们有 $|B_t[i]| = (t-i+1)^2 + (t-i)^2$ 当 $v_i \neq \emptyset$ 时成立，而 $|B_t[i]| = 0$

在其他情况下成立。因此，

$$\begin{aligned}|B_t| &\leq \sum_{i=1}^{t} |B_t[i]| = \sum_{i=1}^{t} \Big((t-i+1)^2 + (t-i)^2\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{t} \Big(j^2 + (j-1)^2\Big) = \sum_{j=1}^{t} j^2 + \sum_{j=0}^{t-1} j^2 \\ &= \frac{t(t+1)(2t+1)}{6} + \frac{(t-1)t(2t-1)}{6} \\ &= \frac{2t^3+t}{3}\,,\end{aligned}$$

从而完成了该引理的证明。 □

注意到，引理 2.5 立即推出定理 1.1 的情形 (d)，因为燃烧顶点的数量始终为 $O(t^3)$，而该情形中的顶点数量为 $\omega(t^3)$。

2.3 关键引理第 2 部分：处理增长函数

第一组关键引理的目标都是修改激活序列。现在我们转而讨论能够修改增长函数的引理。根据引理 2.4，在这些引理的证明中，我们可以假设增长函数是严格递增的。

引理 2.6。设 f、g 为递增函数，且 f、g 中至少有一个具有受控增长，并且 极限$_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$。则

(a) f 和 g 都具有受控增长，并且

(b) $P(\mathcal{G}(f)) = P(\mathcal{G}(g))$.

证明。从（a）开始，由于 f 和 g 均为递增函数，因此它们都满足受控增长条件中的条件（i）。现在假设 f 具有受控增长，并令 $\epsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$满足 $\epsilon(n) = o(n)$。于是

$$\begin{aligned}g(n+\epsilon(n)) &= (1+o(1))f(n+\epsilon(n)) \\ &= (1+o(1))f(n) \\ &= (1+o(1))g(n)\,.\end{aligned}$$

因此， g 满足受控增长条件中的条件（ii） t.

现在固定 $c > 0$，并令 $d > 0$ 满足：对于充分大的 n， $f(n+cn) \geq (1+d)f(n)$。那么

$$\begin{aligned}g(n+cn) &= (1+o(1))f(n+cn) \\ &\geq (1+o(1))(1+d)f(n) \\ &= (1+d+o(1))g(n)\,.\end{aligned}$$

因此，对于充分大的 n， $g(n+cn) \geq (1+d/2)g(n)$，这意味着 g 满足受控增长条件的 (iii)。因此，若 f 具有受控增长，则 g 也具有受控增长；由对称论证可知，若 g 具有受控增长，则 f 也具有受控增长。

继续讨论 (b)，令 $\mathcal{G}(f) = (G_n^{(f)}, n \geq 1)$ 和 $\mathcal{G}(g) = (G_n^{(g)}, n \geq 1)$。令 $\rho \in P(\mathcal{G}(f))$，并设 $\mathcal{V} = (v_n, n \geq 1)$ 是 $\mathcal{G}(f)$ 上的一个激活序列，使得 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}) = \rho$。按如下方式归纳定义 $\mathcal{G}(g)$ 上的激活序列 $\mathcal{V}' = (v'_n, n \geq 1)$。首先，如果$v_1 \in V(G_1^{(g)})$，则令 $v'_1 = v_1$；否则令 $v'_1 = v_0 := (0, 0)$。接着，对于 $n \geq 1$ 和$k \geq 0$，若 $v'_n = v_{n-k}$，则在 $v_{n-k+1} \in V(G_{n+1}^{(g)})$ 时令 $v'_{n+1} = v_{n-k+1}$，否则令 $v'_{n+1} = \emptyset$。换言之，$\mathcal{V}'$ 按照与 $\mathcal{V}$ 相同的顺序燃烧相同的顶点，只不过 $\mathcal{V}'$ 会“等待”，直到能够在 $\mathcal{G}(g)$ 中燃烧正确的顶点。我们断言 $\delta\big(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{V}'\big) = \delta\big(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{V}'\big) = \rho$。

首先，注意到 $\mathcal{V}'$ 是 $\mathcal{G}(f)$ 和 $\mathcal{G}(g)$ 上定义良好的激活序列。此外，在任意回合 t 之后，$\mathcal{V}'$ 在 $\mathcal{G}(f)$ 中烧毁的顶点数至多为 $\mathcal{V}$ 烧毁的顶点数。因此，$\delta\big(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}'\big) \leq \delta\big(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}\big) = \rho$。接下来，由于 $|V(G_n^{(g)})| = (1+o(1))|V(G_n^{(f)})|$，且在任何时刻，$(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{V}')$ 中的燃烧顶点集合都相同，我们得到

$$\overline{\delta}\big(\mathcal{G}(g), \mathcal{V}'\big) = \overline{\delta}\big(\mathcal{G}(f), \mathcal{V}'\big) \leq \delta\big(\mathcal{G}(f), \mathcal{V}\big) = \rho\,.$$

剩下要证明的是 $\delta\big(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{V}'\big) \geq \rho$。对于每个 $n \geq 1$，定义 $\epsilon(n)$ 为满足 $g(n+\epsilon(n)) \geq f(n)$ 的最小非负整数。我们声称 $\epsilon(n) = o(n)$。反设存在常数 $c > 0$ 和一个递增序列 $(n_i, i \geq 1)$，使得对所有 $i \geq 1$ 都有 $\epsilon(n_i) \geq cn_i$。那么，对于每个 $i \geq 1$，由 ϵ 的最小性可知 $g(n_i + \epsilon(n_i) - 1) < f(n_i)$。根据受控增长条件的条件 (ii)，这个不等式意味着 $g(n_i + \epsilon(n_i)) = (1+o(1))f(n_i)$，进而可得

$$g(n_i + cn_i) \leq g(n_i + \epsilon(n_i)) = (1+o(1))f(n_i) = (1+o(1))g(n_i)\,.$$

然而，根据受控增长条件的条件 (iii)，我们可以找到一个常数$d > 0$，使得对于充分大的 n， $g(n+cn) \geq (1+d)g(n)$。因此，假设 $\epsilon(n) \neq o(n)$ 会导致矛盾，从而 $\epsilon(n) = o(n)$。

最后，根据 ϵ 的定义，$(v_i,\ i \in [n]) \subseteq \mathcal{V}$ 中不属于 $(v'_i,\ i \in [n])$ 的唯一激活器顶点数量至多为

$$\epsilon_{\max}(i) := \max_{i \in [n]} \epsilon(i)\,,$$

因此，到第 t 回合结束时，$(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{V}')$中的燃烧顶点数量至少等于到第 $t - \epsilon_{\max}$回合结束时，$(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V})$中的燃烧顶点数量（$t$） $= (1-o(1))t$。令B_t和B'_t分别表示到第

回合 t结束时，我们有

$$\begin{aligned}\frac{|B'_t|}{|V(G_t^{(g)})|} &\geq \frac{|B_{t-\epsilon_{\max}(t)}|}{|V(G_t^{(g)})|}\\ &= (1+o(1))\frac{|B_{t-\epsilon_{\max}(t)}|}{|V(G_t^{(f)})|}\\ &= (1+o(1))\frac{|B_{t-\epsilon_{\max}(t)}|}{|V(G_{t-\epsilon_{\max}(t)}^{(f)})|}\,,\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为 f 满足受控增长条件的条件（i）。因此，

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{|B'_t|}{|V(G_t^{(g)})|} \geq \liminf_{t\to\infty}\frac{|B_t|}{|V(G_t^{(f)})|}\,,$$

这意味着 $\delta\big(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{V}'\big) \geq \delta\big(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}\big) = \rho$。

因此，$\delta\big(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{V}'\big)$ 有明确定义，且等于 ρ。由对称性，我们证明了$P(\mathcal{G}(f)) = P(\mathcal{G}(g))$，从而证明完毕。 □

下一个引理是我们将定义在 $\mathcal{G}(f)$ 上、满足 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}) = \rho$ 的激活序列 $\mathcal{V}$转换为定义在 $\mathcal{G}(f)$ 上、满足 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}') = c^2\cdot\rho$ 的新激活序列 $\mathcal{V}'$ 的关键，其中任意 $c\in(0,1)$ 均适用。

引理 2.7。设 f、g：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为严格递增函数，满足 $f\leq g$（逐点），且 $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = c$ 对某个 $c\in(0\ 、\ 1)$ 成立。则 $\rho\in P(\mathcal{G}(f))$ 蕴含 $c^2\rho\in P(\mathcal{G}(g))$。

证明。设 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{G}(f)$ 上的一个激活序列，使得 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}) = \rho$，并将 $\mathcal{V}$ 视为 $\mathcal{G}(g)$ 上的一个激活序列。那么，对所有 $n\geq 1$，$\mathcal{V}$ 都有定义，且 $[-f(n)\ f(n)]^2\subseteq[-g(n)\ g(n)]^2$。此外，由于 f 和 g 都严格递增，截至第 t 回合结束时的燃烧顶点集合 B_t 在 $(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V})$ 和 $(\mathcal{G}(g)\ \mathcal{V})$ 中相同。因此，记 $\mathcal{G}(f)$ 为 $=(G_n^{(f)}, n\geq 1)$，并记 $\mathcal{G}(g)$ 为 $=(G_n^{(g)}, n\geq 1)$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{|B_t|}{|V(G_t^{(f)})|} &= \frac{|B_t|}{(2f(t)+1)^2}\\ &= (1+o(1))\frac{1}{c^2}\frac{|B_t|}{(2g(t)+1)^2}\\ &= (1+o(1))\frac{1}{c^2}\frac{|B_t|}{|V(G_t^{(g)})|}\,,\end{aligned}$$

这意味着

$$\delta(\mathcal{G}(f),\mathcal{V}) = c^2\delta(\mathcal{G}(g),\mathcal{V}) = c^2\rho\,,$$

至此，证明结束。 □

2.4 受控增长的必要性

我们给出一个例子，说明要在 $\mathcal{G}(f)$ 上达到燃烧密度， f 的增长至少需要受到某种 限制。

例 2.8. 令 $g(n) = \lceil n^{4/3} \rceil$ 并定义 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为 $f(1) = g(1) = 1$ 且

$$f(n) = \begin{cases} g(n) & \text{if } n = 2^k \text{ for some } k \in \mathbb{N}, \text{ and} \\ f(n-1) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

固定 n ，并令 k 为满足 $2^k \le n$的最大整数。那么

$$\lceil n^{4/3} \rceil = g(n) \ge f(n) = (2^k)^{4/3} = \frac{1}{2^{4/3}}(2^{k+1})^{4/3} \ge \frac{1}{2^{4/3}} n^{4/3},$$

因此 $f(n) = \Theta\left(n^{4/3}\right)$，从而 $f(n) = \omega(n)$ 且 $f(n) = o(n^{3/2})$。然而，对于 $\mathcal{G}(f)$ 中任意激活序列 $\mathcal{V}$ ，存在无穷多个回合 t ，使得

$$\frac{|B_t|}{|V(G_t)|} \ge \frac{(2^{4/3})^2|B_t|}{|V(G_{t+1})|} + o(1) \ge \frac{(2^{4/3})^2|B_{t+1}|}{4|V(G_{t+1})|} + o(1) = \frac{2^{2/3}|B_{t+1}|}{|V(G_{t+1})|} + o(1)\,,$$

第二个不等式源于这样一个事实： $|B_{t+1}| \le 4|B_t| + 1$，因为每个在回合 t 燃烧的顶点，在回合 $t+1$ 最多能使另外 4 个顶点燃烧。因此，$\frac{|B_t|}{|V\ G_t\ ()|}$ 要么发散，要么收敛到 0 ； 无论哪种情况，我们都没有 $P(\mathcal{G}(f)) = [0,1]$。

正如例 2.8 所示，如果没有受控增长条件的条件 (ii)， f 可能会出现突然的“跳跃”，这对应于 $|B_t|/|V(G_t)|$ 无穷多次波动。然而，我们并未声称受控增长条件对于定理 1.3、引理 2.6 或引理 2.7 是必要的。我们将在本文的结论部分进一步讨论这一主题。

3 定理 1.3 的证明

我们将使用 Mitsche、Pra-lat 和 Roshanbin 关于固定网格图的燃烧数的以下结果。注意到，该结果后来已在 [4] 中推广到更高维。

定理 3.1 （Mitsche、Pra-lat、Roshanbin， [10]）。

$$b([m] \times [n]) = \begin{cases} (1+o(1))\sqrt[3]{3mn/2}, & n \ge m = \omega(\sqrt{n}) \\ \Theta(\sqrt{n}), & m = O(\sqrt{n}) \end{cases}$$

我们首先证明定理 1.3，说明如何达到密度 1。

引理 3.2. 令 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足受控增长条件以及 $f(n) = o(n^{3/2})$。那么，存在一个激活序列 $\mathcal{V}$，作用于 $\mathcal{G}(f)$，使得 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V}) = 1$。

证明。 无论截至第 t 步激活了哪些顶点，定理 3.1 都告诉我们，最多只需 $\Theta(f(t)^{2/3})$ 步，就能烧尽 G_t 的所有顶点。这一事实促使我们采用以下策略。

1. 将 $(t_i, i \geq 1)$ 记为按归纳方式定义的序列： $t_1 = 1$ 且 $t_{i+1} = t_i + \tau_i$，其中τ_i 是根据定理 3.1 燃烧 G_{t_i} 所需的时间。

2. 对每个 $i \geq 1$，选取一个激活序列 $\mathcal{V}_i = (v_t, t_i < t \leq t_{i+1})$，使其燃烧 G_{t_i}中的所有元素。

3. 令 $\mathcal{V}$ 为 $(\mathcal{V}_i)$ $i \geq 1$ 的串接。

这 $\mathcal{V}$ 给出

$$\frac{|B_{t_{i+1}}|}{|V(G_{t_{i+1}})|} \geq \frac{|V(G_{t_i})|}{|V(G_{t_{i+1}})|} = \frac{(2f(t_i)+1)^2}{(2f(t_i+\tau_i)+1)^2} = (1+o(1))\left(\frac{f(t_i)}{f(t_i+\tau_i)}\right)^2 .$$

由定理 3.1，并结合 $f(n) = o(n^{3/2})$这一事实，我们知道 $\tau_i = \Theta(f(t_i)^{2/3}) = o(t_i)$。因此，由于 f 满足受控增长条件的条件（i），我们有

$$\frac{|B_{t_{i+1}}|}{|V(G_{t_{i+1}})|} \geq (1+o(1))\left(\frac{f(t_i)}{(1+o(1))f(t_i)}\right)^2 = (1+o(1)),$$

因此

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|B_{t_i}|}{|V(G_{t_i})|} = 1 .$$

这证明 $\mathcal{V}$ 包含一个燃烧密度收敛到 1 的子序列。最后，对于任意 $t_i < t < t_{i+1}$，我们有

$$\frac{|B_t|}{|V(G_t)|} \geq \frac{|V(G_{t_{i-1}})|}{|V(G_{t_{i+1}})|}$$

并且我们还有

$$|V(G_{t_{i-1}})| = (2f(t_{i-1})+1)^2 = (2(f(t_{i+1}) - \tau_i - \tau_{i+1})+1)^2 = (2f(t_{i+1})+1)^2 - O(f(t_{i+1})^{5/3}) ,$$

这意味着

$$\frac{|B_t|}{|V(G_t)|} \geq (1-o(1))\frac{|V(G_{t_{i+1}})|}{|V(G_{t_{i+1}})|} \to 1 ,$$

由此完成证明。 □

现在我们可以直接由引理 2.7 和 3.2 推出定理 1.3。

定理 *1.3* 的证明。设 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个具有受控增长的严格递增函数，使得 $f(n)=\omega(n)$ 且 $f(n)=o(n^{3/2})$。于是 $|V(G_n)|=\omega(n^2)$，因此激活序列 $\mathcal{V}=(v_1,\ n\geq 1)$ 由一个重复出现的顶点构成，满足 $|B_n|=O(n^2)$，从而$\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V})=0$。

现在固定 $\rho\in(0,1]$，并令 $g(n):=\lceil\sqrt{\rho}f(n)\rceil$。注意，尽管 g 满足受控增长条件的 (ii) 和 (iii)，因为 $\sqrt{\rho}f(n)\leq g(n)\leq\sqrt{\rho}f(n)+1$，但对于所有充分大的 n，$g(n+1)>g(n)$ 未必成立。例如，如果$f(n+1)=f(n)+1$对无穷多个 n成立，那么 $g(n+1)=g(n)$ 就会无穷多次成立。因此，我们递归地定义 $g^+(n)$，令 $g^+(0)=g(0)$，且 $g^+(n):=\max\{g(n)\ g^+(n-1)+1\}$。由于 $g(n)=\omega(n)$，我们有 $g^+(n)\leq g(n)+n=(1+o(1))g(n)$。最后，由引理 3.2，$1\in P(\mathcal{G}(g^+))$，根据引理 2.7可知 $\rho\in P(\mathcal{G}(f))$，由此证明完毕。 □

3.1 定理 1.1 (b) 的证明

本节将使用以下引理，从定理 1.3 推出定理 1.1 (b)。

引理 3.3。固定 $\alpha>1$ 和 $c>0$。那么 $f(n)=\lceil cn^\alpha\rceil$ 满足受控增长条件。

证明。只需证明 $g(n)=cn^\alpha$ 满足受控增长条件，因为 $g(n)\leq f(n)\leq g(n)+1$。由中值定理，条件（i）立即成立，因为$c(n+1)^\alpha-cn^\alpha\in[\alpha cn^{\alpha-1},\alpha c(n+1)^{\alpha-1}]$，且当 n 充分大时，$\alpha cn^{\alpha-1}\geq 1$。

接下来考虑条件（ii），我们有

$$g(n+\epsilon(n))=c(n+\epsilon(n))^\alpha=(1+o(1))cn^\alpha=(1+o(1))g(n)\,,$$

因此，g 满足受控增长条件的条件（ii）。

对于条件 (iii)，固定一个常数 $b>0$。那么，当 $\alpha\geq 1$ 时，

$$g(n+bn)=c(n+bn)^\alpha=cn^\alpha(1+b)^\alpha\geq cn^\alpha+bcn^\alpha=(1+b)g(n)\,,$$

这意味着 g 满足受控增长条件的条件 (iii)。 □

定理 *1.1 (b)* 的证明。设 $c>0$ 和 $\alpha\in(1,3/2)$，并设 $f(n)=\lceil cn^\alpha\rceil$。那么 $f(n)=\omega(n)$，且 $f(n)=o(n^{3/2})$；由引理 3.3，f 具有受控增长。因此，由定理 1.3，$P(\mathcal{G}(f))=[0,1]$。 □

4 定理 1.1(c) 的证明

在第 4 节中，固定 $c>0$，并设 $f(n)=\lceil cn^{3/2}\rceil$。我们首先证明，$(1+\sqrt{6c})^{-2}$是 $P(\mathcal{G}(f))$ 中最大密度的紧界。

引理 4.1。取定 $c>0$，并令 $f(n)=\lceil cn^{3/2}\rceil$。那么

(a) 存在一个激活序列 $\mathcal{V}$，属于 $\mathcal{G}(f)$，使得 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V})=(1+\sqrt{6c})^{-2}$，并且

(b) 对于 $\mathcal{V}$ *in* $\mathcal{G}(f)$ 中的所有激活序列，我们有 $\overline{\delta}(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V})\leq(1+\sqrt{6c})^{-2}$。

4.1 上界

我们先证明引理 4.1 (b)，因为它更直接。 .

引理 *4.1 (b)* 的证明。令 $\mathcal{V}=(v_n,\ n\geq 1)$ 为 $\mathcal{G}(f)$ 上的激活序列，固定 $\varepsilon\in(0,\ 1)$，并令 $t=(1+\varepsilon)n$。定义 $B_t^{(\mathrm{old})}\subseteq B_t$ 为 $\bigcup_{i=1}^{n}B_t[i]$ 中顶点的集合，并定义$B_t^{(\mathrm{new})}\subseteq B_t$ 为 $\bigcup_{i=n+1}^{t}B_t[i]$ 中顶点的集合。注意到 $B_t=B_t^{(\mathrm{old})}\cup B_t^{(\mathrm{new})}$，因此$|B_t|\leq|B_t^{(\mathrm{old})}|+|B_t^{(\mathrm{new})}|$。

为了给 $|B_t^{(\mathrm{old})}|$ 设定上界，注意球 $B_t[1]$、.....、$B_t[n]$ 的中心都在 $V(G_n)$ 中，这意味着 $\bigcup_{i=1}^{n}B_t[i]$ 至多覆盖 $V(G_n)\subseteq V(G_t)$ 中的每个顶点，以及距离 $V(G_n)$ 不超过 $t-n=\varepsilon n$ 的每个顶点。由于 G_n 的周长长度为 $\Theta(n^{3/2})$，我们得到

$$|B_t^{(\mathrm{old})}|\leq|V(G_n)|+O(n^{5/2})=4c^2n^3+O(n^{5/2})\,.$$

对于 $|B_t^{(\mathrm{new})}|$，我们立即得到上界

$$|B_t^{(\mathrm{new})}|\leq\sum_{i=n+1}^{t}|B_t[i]|=\frac{2(t-n)^3+(t-n)}{3}=\frac{2(\varepsilon n)^3}{3}+O(n)\,.$$

因此，

$$|B_t|\leq\left(4c^2+\frac{2\varepsilon^3}{3}\right)n^3+O(n^{5/2})\,,$$

所以

$$\frac{|B_t|}{|V(G_t)|}\leq f(c,\varepsilon)+O(n^{-1/2}),\qquad\text{with } f(c,\varepsilon)=\frac{4c^2+\frac{2\varepsilon^3}{3}}{4c^2(1+\varepsilon)^3}.$$

由于

$$f'_\varepsilon(c,\varepsilon)=\frac{-6c^2+\varepsilon^2}{2c^2(1+\varepsilon)^4},$$

令 $\varepsilon=\sqrt{6}c$ 使 $|B_t|/|V(G_t)|$ 的上界最小，我们得出

$$\overline{\delta}(\mathcal{G}(f),\mathcal{V})\leq\frac{4c^2+\frac{2\varepsilon^3}{3}}{4c^2(1+\varepsilon)^3}=\frac{1+\frac{2(\sqrt{6}c)^3}{12c^2}}{(1+\sqrt{6}c)^3}=\frac{1+\sqrt{6}c}{(1+\sqrt{6}c)^3}=\frac{1}{(1+\sqrt{6}c)^2},$$

证明至此完成。 □

4.2 下界

本节通过描述在 $\mathcal{G}(f)$ 中构造激活序列$\mathcal{V}$，证明引理 4.1 (a)，使得 $\delta(\mathcal{G}(f)\ \mathcal{V})=(1+\sqrt{6}c)^{-2}$。正如引理 4.1 (b) 的证明中所指出的，我们的策略确保围绕新激活顶点的球基本保持互不相交，而围绕较早激活顶点的球则必然相交，并且这些球

几乎烧掉了截至这些较早激活的顶点被激活时所添加的所有顶点。

该策略的核心是明确描述如何使用一定数量的激活顶点来燃烧指定高度和宽度的矩形。在描述这一策略时，我们暂时使用可能不是整数的实数来表示激活顶点。随后，我们将说明如何递归地应用这一矩形燃烧策略来燃烧$\mathcal{G}(f)$。最后，我们通过估算新旧激活顶点的贡献来分析燃烧密度。

下面说明为何可以使用实数作为激活顶点。对于递增函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，考虑定义在实紧空间序列 $(S_n(f)\ n\geq 1)$ 上的如下燃烧过程，其中 $S_n(f) = [-f(n)\ f(n)+1]^2$，以及激活点序列 $((x_n,y_n)\ n\geq 1)$，其中 $(x_n,y_n)\in S_n(f)\cup\{\emptyset\}$。请注意，仅在此描述中，我们将$[-f(n)\ f(n)+1]^2$写作实紧空间，而不是整数格。对于每个时刻 t，

1. 空间从 $S_{t-1}(f)$ 扩展到 $S_t(f)$，

2. 如果单位正方形 $[a,a+1]\times[b,b+1]$ 中的每个点都处于燃烧状态，那么四个正方形 $[a-1,a]\times[b,b+1]$、$[a+1,a+2]\times[b,b+1]$、$[a,a+1]\times[b-1,b]$和$[a,a+1]\times[b+1,b+2]$ 中的每个点都会改变状态，变为燃烧状态，最后

3. 单位正方形 $[x_t,x_t+1]\times[y_t,y_t+1]$ 中的每个点都会改变状态，变为燃烧状态。

如果一个单位正方形没有完全位于 S_t中，我们就不点燃该正方形中的任何部分。燃烧密度定义为处于燃烧状态的空间所占比例的极限。

显然，若将 $((x_n,y_n)\ n\geq 1)$ 选为整数坐标对，则这一燃烧过程与整数格上的燃烧过程相同。此外，类似于我们证明引理 2.1 的方法，可以看出，$\mathcal{V}=((x_n,y_n)\ n\geq 1)$ 上的燃烧密度与 $\mathcal{V}^*=((\lfloor x_n\rfloor,\lfloor y_n\rfloor)\ n\geq 1)$ 上的燃烧密度相同：一方面，我们可以将 $\mathcal{V}$ 延迟一回合，这样，由 $\mathcal{V}$ 引起的所有燃烧也会由 $\mathcal{V}^*$ 引起；另一方面，我们可以将 $\mathcal{V}^*$ 延迟一回合，产生相反的效果。因此，在接下来的策略中，我们有理由选择实坐标，而不是整数坐标。

4.2.1 燃烧一个矩形

设 R 是一个宽为 w、高为 ℓ 的矩形。这样的矩形几乎可以被长半径为 1（因此面积为 2）的菱形覆盖，这些菱形的中心位于点 $(i,\ j)$，其中 $0\leq i<w$、$0\leq j<\ell$ 和 $i+j\equiv 1$ 模 2。图 2 展示了这种近似覆盖。现在假设我们最多只能使用 t 个菱形，并希望在 R 中重现这种铺砌图案。在这种情况下，我们选择唯一的半径 r，使得 $t=w\ell/2r^2$，并通过以半径为 r 的菱形铺砌 R；这些菱形的中心位于点 $(r\cdot i,\ r\cdot j)$，其中 $0\leq i<w/r$、$0\leq j<\ell/r$ 和 $i+j\equiv 1$ 模 2。注意，这种铺砌所需的菱形数量为 $\lfloor w/r\rfloor\cdot\lfloor\ell/r\rfloor/2\leq w\ell/2r^2=t$。

现在，我们通过菱形将这种近似覆盖转化为一种策略，用于在激活顶点数量有限的情况下燃烧矩形格图。请注意，在接下来的引理中，我们不会假设每个回合都激活顶点。这样做的原因是，我们的

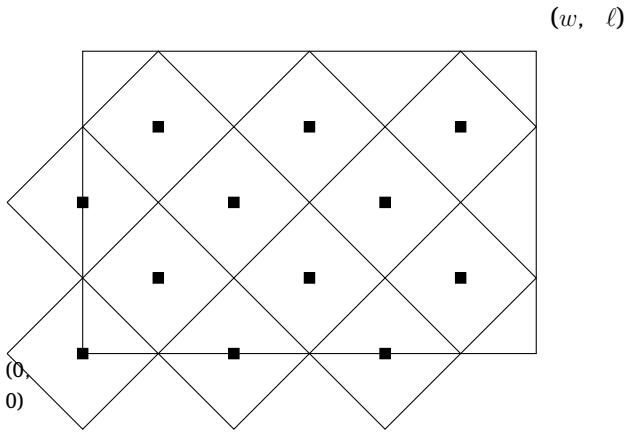

图 2：由菱形瓦片构成的 $w \times \ell$ 矩形的近似覆盖，菱形瓦片以点 (i, j) 为中心，其中 $0 \le i \le w$、$0 \le j \le \ell$ 满足 $i + j \equiv 1 \mod 2$。为简化起见，图中绘制的是边缘平滑的菱形。实际上，每个菱形都是由燃烧方格组成的菱形，其边缘呈阶梯状。

最终策略要求同时燃烧 4 个矩形，这意味着我们需要一种高效燃烧矩形的策略，而不必在每个回合都燃烧它。

引理 4.2。设 $G = [0, w] \times [0, \ell]$，固定 $t > 0$，令 $r = \sqrt{w\ell/2t}$，并令 S 为满足 $0 \le i \le w/r$、$0 \le j \le \ell/r$ 且 $i + j \equiv 1$ 模 2 的点集$(r \cdot i, r \cdot j)$。现在假设 $\mathcal{V}$ 是 G 的一个激活序列，它 ***(a)*** 以任意顺序激活 S 中的所有顶点，***(b)*** 不激活 S 之外的任何顶点，且 ***(c)*** 在第 $\tau \ge t$ 回合结束。那么

(a) *在回合 n with $1 \le n \le r$ 中，燃烧球两两不相交，并且*

(b) on turns n with $n \ge r + \tau$, there is a $1 + O\left(\frac{r(w+\ell)}{w\ell}\right)$ fraction of $V(G)$ that is burning.

证明。从 (a) 开始，$\mathcal{V}$ 中任意两个顶点之间的最小距离为 $2r$。此外，在回合 $\lfloor r \rfloor$结束时，所有球的半径至多为 $\lfloor r \rfloor - 1$。因此，这些球两两不相交。

继续证明 (b)，回合 $\lceil r \rceil + \tau$ 之后，所有球的半径至少为 r。对于任意 $(x, y) \in [0, w - r] \times [0, \ell - r]$，令 i, j为满足$r \cdot i \le x < r \cdot (i + 1)$ 和 $r \cdot j \le y < r \cdot (j + 1)$ 的唯一非负整数。

情形 1： 假设 $i + j \equiv 0$ 模 2。那么 $(r \cdot i, r \cdot j)$ 和 $(r \cdot (i + 1)\ r \cdot (j + 1))$ 都是激活顶点。此外，在 L^1 范数下，

$$||(x, y) - (r \cdot i, r \cdot j)||_1 + ||(x, y) - (r \cdot (i + 1), r \cdot (j + 1))||_1 = 2r,$$

含义（x，y）与两个激活顶点之一的距离至多为 r。

情况 2： 假设 $i+j \equiv 1$ 模 2。那么（$r \cdot i$， $r \cdot$（$j+1$））和（$r \cdot$（$i+1$） $r \cdot j$）都是激活顶点。此外，在 L^1 范数下，

$$||(x,y)-(r \cdot i, r \cdot (j+1))||_1 + ||(x,y)-(r \cdot (i+1), r \cdot j)||_1 = 2r,$$

这意味着（x， y）与两个激活顶点之一的距离至多为 r 。

因此， $[0, w-r] \times [0, \ell - r]$ 在时间 $r+\tau$ 后被覆盖，也就是说，至多有 $r\ell + rw + r^2$ 个顶点未被覆盖。由于

$$\frac{r\ell + rw + r^2}{w\ell} = O\left(\frac{r(w+\ell)}{w\ell}\right),$$

这就完成了证明。 □

4.2.2 使用矩形递归燃烧

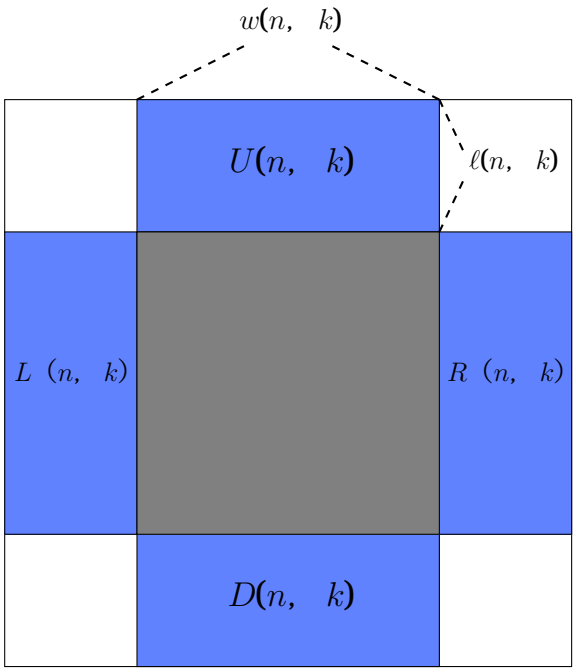

图 3：灰色中心正方形表示 G_n ，整个正方形表示 G_{n+k}。四个标记矩形各有两条边长为 $w(n,\ k) = 2cn^{3/2}$ ，另有两条边长为 $\ell(n,\ k) = c\left((n+k)^{3/2} - n^{3/2}\right)$。

设 $\mathcal{G}(f) = (G_n,\ n \geq 1)$、$U(n,\ k)$ $L(n,\ k)$ $R(n,\ k)$ 和 $D(n,\ k)$ 为图 3 中定义的四个矩形。记

$$\ell(n,k) := f(n+k) - f(n) = c\left((n+k)^{3/2} - n^{3/2}\right)$$

and

$$w(n,k) := 2f(n) = 2cn^{3/2}$$

为每个矩形的两个不同边长； $U(n,\ k)$ 和 $D(n,\ k)$ 的高为 $h(n,\ k)$，宽为 $w(n,\ k)$；而 $L(n,\ k)$ 和 $R(n,\ k)$ 的高为 $w(n,\ k)$，宽为 $\ell(n,\ k)$。下面是由 $\ell(n,\ k)$ 的泰勒级数展开得到的一个有用等式：

$$\begin{aligned}\ell(n,k) = cn^{3/2}\left((1+k/n)^{3/2}-1\right) &= cn^{3/2}\left(1+\frac{3}{2}(k/n)+O\left((k/n)^2\right)-1\right)\\ &= \frac{3c}{2}k\sqrt{n}+O\left(\frac{k^2}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

现在，我们可以完成引理 4.1 的证明了。

引理 4.1（a）的证明。设 $t_i = i^4$，并将 $U(t_i, t_{i+1}-t_i-1)$ $L(t_i, t_{i+1}-t_i-1)$ $R(t_i, t_{i+1}-t_i-1)$ $D(t_i, t_{i+1}-t_i-1)$分别简写为 U_i、L_i、R_i、D_i。同样，将 $w(t_i, t_{i+1}-t_i-1)$ 和 $\ell(t_i, t_{i+1}-t_i-1)$分别简写为 w_i 和 ℓ_i。我们将在若干阶段内烧尽 G；阶段 i 从第 t_{i+1} 回合持续到第 $t_{i+2}-1$ 回合，专门用于烧尽四个矩形 U_i、L_i、R_i、D_i。注意，对于所有 $t \geq t_{i+1}-1$，这四个矩形都存在于 G_t 中，因此在阶段 i 期间也存在。我们为烧尽每个矩形分配相同数量的轮次（相差至多 1），这意味着我们可用于每个矩形的激活顶点数量为

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(t_{i+2}-1-t_{i+1}\right) &= \frac{1}{4}\left((i+2)^4-1-(i+1)^4\right)\\ &= \frac{1}{4}(4i^3+18i^2+28i+14)\\ &\geq i^3,\end{aligned}$$

因此，我们可以假设每个矩形恰好有 i^3 个顶点，因为我们可以跳过回合。

令 $r_i = \sqrt{w_i\ell_i/2i^3}$，并令 S 为引理 4.2 中定义的点集。对于 $\tau_i = 4i^3$，根据引理 4.2，我们可以燃烧全部四个矩形，使得

- 在回合 n 中，满足 $t_{i+1} \leq n \leq t_{i+1}+r_i-1$，在此矩形中形成的燃烧球彼此不相交，并且
- 在回合 n 中，满足 $n \geq t_{i+1}+r_i+\tau_i$，每个矩形都有一个 $1+O\left(\binom{r}{w+\ell}{w\ell}\right)$ 的部分处于燃烧状态。

因此，随着燃烧游戏的进行，t 不断增大，每组由四个矩形组成的集合 U_i，L_i，R_i，D_i 会从新球阶段（回合 t_{i+1} 到 $t_{i+1}+r_i-1$ 之间）演变为过渡阶段（回合 $t_{i+1}+r_i$ 到 $t_{i+1}+r_i+\tau_i-1$ 之间），最终进入旧球阶段（从回合 $t_{i+1}+r_i+\tau_i$ 起）。接下来只需证明，从渐近分析的角度看，这种演变达到了引理 4.1 (b) 的证明中给出的界。

注意，由 (1) 可得

$$\begin{aligned}\ell_i &= \frac{3c}{2}(t_{i+1}-t_i-1)t_i^{1/2} + O\left(\frac{(t_{i+1}-t_i-1)^2}{t_i^{1/2}}\right)\\ &= \frac{3c}{2}\left((i+1)^4 - i^4 - 1\right)i^2 + O\left(\frac{(i^3)^2}{i^2}\right)\\ &= \frac{3c}{2}(4i^3)(1+O(1/i))i^2 + O(i^4)\\ &= 6c\,i^5(1+O(1/i)),\end{aligned}$$

以及 $w_i = 2ct_i^{3/2} = 2c\,i^6$。矩形 U_i，L_i，R_i，D_i 在回合之前处于新球阶段

$$\begin{aligned}t_{i+1}+r_i-1 &\geq t_i + \left(\frac{w_i\ell_i}{2i^3}\right)^{1/2} - 1\\ &= t_i + (1+O(1/i))\left(\frac{(2c\,i^6)\,(6c\,i^5)}{2i^3}\right)^{1/2} - 1\\ &= t_i + (1+O(1/i))\left(6c^2\,i^8\right)^{1/2} - 1\\ &= t_i + \sqrt{6}ci^4 + O\left(i^3\right)\\ &\geq \left(1+\sqrt{6}c\right)t_i + O\left(i^3\right)\ .\end{aligned}$$

同样，矩形从回合开始处于旧球阶段

$$\begin{aligned}t_{i+1}+r_i+\tau_i &= t_{i+1} + \sqrt{6}ci^4 + \tau + O(i^3)\\ &\leq (1+\sqrt{6}c)t_{i+1} + \tau + O(i^3)\\ &= (1+\sqrt{6}c)t_{i+1} + 4i^3 + O(i^3)\\ &= (1+\sqrt{6}c)t_i + O(i_3)\,.\end{aligned}$$

请注意，尽管新球阶段矩形中的球彼此不重叠，但相邻矩形之间可能会发生重叠。另一方面，如果满足例如 $\min\{i,j\} < 100$，我们可以通过不燃烧（$r\cdot i$，$r\cdot j$）来修改引理 4.2 中的铺砌，并且渐近结果仍然成立。因此，我们可以忽略相邻矩形之间重叠所带来的可忽略损失。

固定回合 t，并令 n 满足 $t = n(1+\sqrt{6}c)$。接下来，令 δ 足够大，使得 $t_i < n-\delta$ 蕴含 U_i，L_i，R_i，D_i 是旧球阶段的矩形，而 $t_i > n+\delta$ 蕴含它们是新球阶段的矩形。根据前两次计算，我们可以找到这样的 δ，使得

$\delta = O(t^{3/4})$。旧球阶段矩形的总贡献至少为

$$\begin{aligned}
4\sum_{i=1}^{\lfloor (n-\delta)^{1/4}\rfloor}\left(w_i\ell_i + O\left(i^3\right)\right) &= O(n) + 4\sum_{i=1}^{\lfloor (n-\delta)^{1/4}\rfloor}\left(2ci^6\right)\left(6ci^5\right)\left(1+O(1/i)\right)\\
&= O(n) + \left(1+O(n^{-1/4})\right)4\sum_{i=1}^{\lfloor (n-\delta)^{1/4}\rfloor}\left(2ci^6\right)\left(6ci^5\right)\\
&= O(n) + \left(1+O(n^{-1/4})\right)48c^2\sum_{i=1}^{\lfloor (n-\delta)^{1/4}\rfloor} i^{11}\\
&= O(n) + \left(1+O(n^{-1/4})\right)48c^2\int_0^{n^{1/4}} x^{11}\,dx\\
&= O(n) + \left(1+O(n^{-1/4})\right)4c^2n^3\,dx\\
&= 4c^2n^3 + O(n^{3-1/4})\\
&= 4c^2n^3(1+o(1))
\end{aligned}$$

并且，新球阶段矩形的总贡献至少为 st

$$\begin{aligned}
\frac{2(t-n-\delta)^3+t}{3} &= \frac{2(\sqrt{6}cn(1+O(n^{-1/4})))^3+O(n)}{3}\\
&= \frac{2}{3}(\sqrt{6}cn)^3 + O(n^{3-1/4})\\
&= \frac{2}{3}(\sqrt{6}cn)^3(1+o(1))\,.
\end{aligned}$$

因此，回合 t 后的燃烧密度至少为

$$\begin{aligned}
\frac{4c^2n^3+\frac{2}{3}(\sqrt{6}cn)^3}{4f(t)^2} + o(1) &= \frac{c^2n^3+\frac{1}{6}(\sqrt{6}cn)^3}{f(t)^2} + o(1)\\
&= \frac{c^2n^3(1+\sqrt{6}c)}{c^2n^3(1+\sqrt{6}c)^3} + o(1)\\
&= \frac{1}{(1+\sqrt{6}c)^2} + o(1)\,,
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

4.3 更小的密度与定理 1.2 的证明

定理 *1.1 (c)* 的证明。令 $c>0$，并令 $f=\lceil cn^{3/2}\rceil$。则 $f(n)=\omega(n^2)$，这意味着激活序列 $\mathcal{V}=(v_n, n\geq 1)$ 满足对所有 n， $v_n=(0,\ 0)$ 的密度均为 0。

接下来，根据引理 4.1，$(1+\sqrt{6}c)^{-2}\in P(\mathcal{G}(f))$。现在，对于 $\rho\in(0,\ (1\mp\sqrt{6}c)^{-2})$，令 $d=\sqrt{\rho}(1\mp\sqrt{6}c)^2$，并令 $g(n)=df(n)$。于是再次根据引理 4.1，我们有 $(1+\sqrt{6}c)^{-2}\in P(\mathcal{G}(g))$，由此根据引理 2.7可得 $d^2(1+\sqrt{6}c)^{-2}=\rho\in\bar{P}(\mathcal{G}(f))$。 □

注意，这个证明完成了定理 1.1 的证明。

定理 *1.2* 的证明。如前所述，Bonato、Gunderson 和 Shaw 证明了情形 (d) 最强的可能推广。

设 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 严格递增，且 $\lim_{n\to\infty} f(n)/n = c$，其中某个 $c \geq 1$。那么，对于 $g(n) = \lceil cn \rceil$，我们有 $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$。由定理 1.1 (a)，我们有 $P(\mathcal{G}(g)) = [1/(2c^2), 1]$。因此，由引理 2.6，我们也有 $P(\mathcal{G}(f)) = [1/(2c^2), 1]$。

最后，设 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 严格递增，且 $\lim_{n\to\infty} f(n)/n^{3/2} \to c$，其中某个$c > 0$。那么，对于 $g(n) = \lceil cn^{3/2} \rceil$，我们有 $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$。由定理 1.1 (c)，我们有$P(\mathcal{G}(g)) = [0, (1+\sqrt{6c})^{-2}]$。因此，由引理 2.6，我们也有 $P(\mathcal{G}(f)) = [0, (1+\sqrt{6c})^{-2}]$。 □

5 后续方向

这项工作的一个自然延伸，是研究不断增大的 d 维网格上的可达密度。为此，我们提出如下猜想。

猜想 5.1。设 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个严格递增函数，设 $G_n = [-f(n)\ f(n)]^d$ 对某个 $d > 2$ 成立，并设 $\mathcal{G}(f) = (G_n, n \geq 1)$。

(a) 若 $f(n) = \lceil cn \rceil$ 对某个 $c \geq 1$ 成立，则 $P(\mathcal{G}(f)) = [1/(2c^d), 1]$。

(b) 若 $f(n) = \omega(n)$ 且 $f(n) = o(n^{(d+1)/d})$，则 $P(\mathcal{G}(f)) = [0, 1]$。

(c) 若 $f(n) = \lceil cn^{(d+1)/d} \rceil$ 对某个 $c > 0$ 成立，则 $P(\mathcal{G}(f)) = [0, \phi(c, d)]$ 对某个常数 $\phi(c, d)$ 成立，该常数取决于 c 和 d。

(d) If $f(n) = \omega(n^{(d+1)/d})$ *then* $P(\mathcal{G}(f)) = \{0\}$.

Blanc 和 Contat 最近的一项工作中 [4], 研究了 d 维欧几里得格上的随机点燃，他们的结果或许能为情形 (c) 下正确的函数 $\phi(c,\ d)$ 提供见解。此外，他们对 Mitsche、Pra-lat 和 Roshanbin [10] 的定理 3.1 的推广，或许能使我们的定理 1.1 (b) 证明得以推广。

未来工作的另一个方向是，找出函数 $f(n)$ 的充要增长条件，使得 $P(\mathcal{G}(f)) \neq \emptyset$，或者使得对于某个 $\rho \in (0,\ 1)$，$\rho \in P(\mathcal{G}(f))$。我们通过例子表明，要在 $\mathcal{G}(f)$ 上获得燃烧密度，至少需要对 f 的增长施加某种 限制，不过我们并未声称受控增长是可能的最弱限制。

参考文献

[1] N. Alon, 《在 n 维超立方体中传输》，《离散应用数学》37(1992) 9–11.

[2] P. Bastide、M. Bonamy、A. Bonato、P. Charbit、S. Kamali、T. Pierron 和 M. Ra- bie，《改进的点燃方法：更接近点燃数猜想》，*Electron. J.Combin.***30** (2023)，论文编号 4.2，共 12 页。[3] S. Bessy、A. Bonato、J. Janssen、D. Rautenbach 和 E. Roshanbin，《点燃数的界》，《离散应用数学》**235** (2018) 16–22。[4] G. Blanc 和 A. Contat，《欧几里得格的随机点燃》，arXiv 预印本 arXiv:2509.02562 (2025)。[5] A. Bonato、K. Gunderson 和 A. Shaw，《点燃平面：无限笛卡尔网格的密度》，《图与组合》**36(5)** (2020) 1311–1335。[6] A. Bonato、J. Janssen 和 E. Roshanbin，《将图点燃作为社会传染模型》，*Lecture Notes in Comput. Sci.* **8882(2014)**，13–22。[7] A. Bonato、J. Janssen、E. Roshanbin，《如何点燃一张图》，《互联网数学》**1-2(2016)**，85–100。[8] L. Devroye、A. Eide 和 P. Pra-lat，《随机树的点燃》，概率论电子通讯**30(2025)**：1–9。[9] M. R. Land 和 L. Lu，《图的点燃数上界》，载于《网络图的算法与模型：第 *13* 届国际研讨会》，WAW 2016，加拿大魁北克省蒙特利尔，2016 年 12 月 14–15 日，会议录 13，施普林格国际出版 (2016)，1–8。[10] D. Mitsche、P. Pra-lat 和 E. Roshanbin，《图的点燃：概率论视角》，《图与组合》**33(2)** (2017)，449–471。[11] D. Mitsche、P. Pra-lat 和 E. Roshanbin，《图乘积的点燃数》，理论计算机科学**746(2018)** 124–135。[12] S. Norin 和 J. Turcotte，《点燃数猜想渐近成立》，arXiv 预印本 arXiv:2207.04035 (2022)。[13] E. Roshanbin，《将图点燃作为社会传染模型》，博士论文，达尔豪斯大学，加拿大新斯科舍省哈利法克斯，2016 年。