编织融合 1-范畴的 2-范畴 S 矩阵是一个特征标表

Alea Hofstetter [a], Christoph Schweigert [b]

[a] 汉堡大学数学系，代数与数论研究领域，
Bundesstraße 55, D –20146 汉堡

[b] 汉堡大学数学系，代数与数论研究领域，
Bundesstraße 55, D –20146 汉堡

arXiv:2601.14168v1 [math.QA] 20 Jan 2026

Abstract
编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 上的半单模范畴构成一个连通融合 2-范畴 Mod($\mathcal{C}$)。它的 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}$(Mod($\mathcal{C}$)) 是一个编织融合 2-范畴。Johnson-Freyd 和 Reutter [JR24] 为每个编织融合 2-范畴关联了一个矩阵值不变量，即 2-范畴 S矩阵。本文简要研究 $\mathcal{Z}$(Mod($\mathcal{C}$)) 这一矩阵作为编织融合 1-范畴 $\mathcal{C}$ 的不变量，并证明它归结为 $\mathcal{C}$的 M¨uger 中心的特征标表。

1 引言

带编织单体范畴在量子拓扑和表示论中无处不在，并且一直受到广泛研究，尤其是融合范畴的情形。事实上，融合范畴的分类长期以来都是一个活跃的研究领域，因此，拥有可计算的不变量来区分它们至关重要。对于模融合范畴，模数据数十年来一直被用作不变量，但 [MS21] 的结果表明，不等价的模范畴可能具有相同的模数据。

因此，寻找更多不变量是合理的，例如：任一带编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 都可通过其半单模范畴导出一个连通融合 2-范畴，进而得到一个四维拓扑场论。其 Drinfeld 中心是一个编织融合 2-范畴，Johnson-Freyd 和 Reutter [JR24] 为其赋予了一种矩阵值不变量，我们称之为 2-范畴 S-矩阵。由此产生的问题是：这是否是带编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 的另一种有趣不变量?

对于编织刚性融合范畴，我们在这篇短文中给出的答案很遗憾是否定的：我们在主要定理 3.1 中证明，2-范畴的 S-矩阵等于 $\mathcal{C}$ 的 M¨uger 中心的特征标表。我们通过计算尖点编织融合范畴的 S-矩阵，验证了这一结果。在此过程中，我们还进一步了解了编织模范畴的结构，以及任意编织幺半范畴的正则模范畴的模编织结构。

我们以融合 2-范畴的莫里塔理论中的一些近期结果为背景，结束这篇简短的引言。莫里塔理论在此具有重要意义，因为根据 [D´ec25，定理 2.3.2] ，莫里塔等价的融合 2-范畴具有相同的 Drinfeld 中心。已有研究表明 [D´ec25，定理 4.1.6] ，一个融合 2-范畴与一个强融合 2-范畴和一个可逆融合 2-范畴的 2-Deligne 积莫里塔等价，即其形式为 Mod($\mathcal{C}$) 的融合 2-范畴，其中 $\mathcal{C}$ 是一个非退化带编织融合 1-范畴。后者对 Drinfeld 中心没有贡献 [D´ec25，推论 5.3.3] ，因此就我们的目的而言可以忽略不计。根据 [JY21] ，这些范畴由一个群以及（超）上同调理论中的某个余循环所支配。遗憾的是，这并不适合作为计算的直接起点：目前，在所谓的费米情形下，很难将这些余循环明确写出。因此，我们决定在本文中采用直接方法来处理这一问题，而这些方法本质上是 1-范畴的。我们的结果与 [D´ec25] 中提出的更为全面的理论一致。

在第 2 节中，我们回顾相关概念和命题，并在命题 2.2 中对正则模范畴上的模编织进行分类。第 3.1 节介绍新的结果：将 2-范畴 S-矩阵与 M¨uger 中心的特征标表相对应，参见定理 3.1。在第 3.2 节中，我们明确计算带编织尖点融合范畴的 S-矩阵。

致谢

我们感谢 Theo Johnson-Freyd、Hannes Kn¨otzele 和 David Reutter 与我们进行讨论。作者感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过德国卓越战略资助：卓越集群 2121“量子宇宙”（项目编号 390833306），以及合作研究中心 SFB 1624“高阶结构、模空间与可积性”（项目编号 506632645）。

2 预备知识与定义

我们在 $\mathbb{K}$ 上工作，其中 $\mathbb{K}$ 是一个零特征代数闭域。所有范畴均假定为 $\mathbb{K}$-线性的。1-范畴用花体字母表示 $\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$，……，2-范畴用断裂字体表示 $\mathfrak{B}$，$\mathfrak{C}$，……。

融合 1-范畴是一个刚性半单线性幺半范畴，其中简单对象的同构类只有有限多个，且单位对象是简单的。融合 1-范畴上的编织是从张量积到反向张量积的相干自然同构。融合 2-范畴的概念由 [DR18] 引入。融合 2-范畴同样具有编织的概念。不过，自然同构被等价所取代，因此我们还需要一些相干数据。关于编织 2-范畴的一般概念，请参阅 [Cra98]。我们假设读者熟悉（编织）融合 1-范畴和（编织）融合 2-范畴的概念。不过，本文的核心概念将在下文回顾。

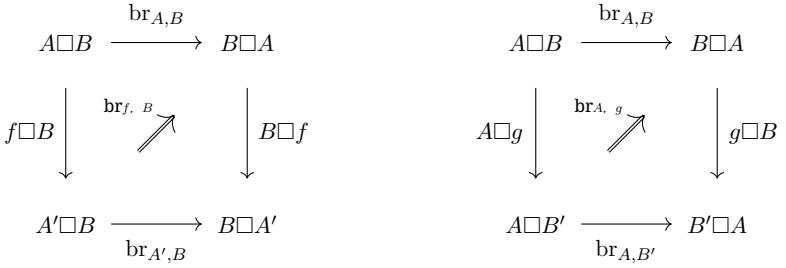
设 $(\mathcal{C}, \mathcal{I}, \otimes, c)$ 是一个编织融合 1-范畴。这里，$\mathcal{I} \in \mathcal{C}$ 表示单位对象，$\otimes$ 表示幺半群积，而 $(c_{X,Y}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X)_{X,Y\in\mathcal{C}}$ 表示编织。通常，我们在记号中省略单位对象、幺半群积和编织。此外，我们通常假设 $\mathcal{C}$ 是严格的。我们也将使用图形演算来表示编织，如下所示。





编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 的 Müger 中心（也称为对称中心）是全单范畴 $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$，由满足以下条件的对象 $X \in \mathcal{C}$ 构成：对于所有 $Y \in \mathcal{C}$，双重编织 $c_{Y,X} \circ c_{X,Y}$ 都是平凡的。一个（不一定带编织的）融合 1-范畴 $\mathcal{C}$ 的 Drinfeld 中心是一个编织融合 1-范畴，其对象是由 $\mathcal{C}$ 中的对象及其上的半编织组成的配对。我们将其记为 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$。

带编织单2-范畴记作 $(\mathfrak{B}, \mathcal{I}, \square, \mathrm{br})$，其中 $\mathcal{I}$表示单位对象，$\square$表示张量积，br 表示编织。2-态射的垂直复合记作 $\cdot_v$，水平复合记作 $\cdot_h$。此外，我们假设底层的2-范畴是严格的。关于单结构和编织严格性的其他假设，将在需要时说明。对于每一对对象 $A, B \in \mathfrak{B}$，编织由1-态射 $\mathrm{br}_{A,B} : A\square B \to B\square A$ 组成，这些态射汇集成一个自然等价，并且在修正意义下与张量积相容。此外，对于所有1-态射 $f : A \to A'$和 $g : B \to B'$ 2，我们有填充自然性方块的同构：



对于单体2-范畴 $\mathfrak{C}$，有 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$ 的概念，其定义与1-范畴情形类似（比较 [Cra98，第3.1节；1], [DN21，第2节3]）。

融合 1-范畴中的两个简单对象，根据 Schur引理，要么同构，要么它们之间只有零态射。这也意味着，对于所有简单对象 $X \in \mathcal{C}$，每个自同态$f : \ X \to X$ 都由 $\mathbb{K}$ 中的一个标量定义。我们将这个标量记作 $\langle f \rangle \in \mathbb{K}$。对于融合 2-范畴，情况则更为复杂：不等价的对象之间也可能存在非平凡态射。这引出了一个更粗的等价关系：

$$X \sim Y \text{ if there is a non-zero 1-morphism } f : \ X \to Y$$

（比较 [JR24，定理 2.7]）。相应的等价类称为 $\mathfrak{C}$ 的分支或舒尔等价类。我们用 $\pi_0(\mathfrak{C})$表示分支集合。本文将研究一个赋予任意编织融合 2-范畴 $\mathfrak{B}$的矩阵，称为 2-范畴S-矩阵；集合 $\pi_0(\mathfrak{B})$ 中的元素为其行标记。

具有一个分支的融合 2-范畴称为连通的。它可以由一个编织融合 1-范畴 $\mathcal{C}$ 按如下方式得到。取有限半单（右）模范畴的融合 2-范畴 $\mathrm{Mod}(\mathcal{C})$，或者等价地，取可分代数对象 [DR18，《构造 2.1》19]。反之，设 $\mathfrak{C}$为一个融合 2-范畴，其单体单位为 $\mathcal{I}$，那么 $\mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{I})$ 是一个编织融合 1- 范畴。事实上，所有连通融合 2- 范畴都可以作为某个编织融合 1- 范畴的模范畴出现：

命题 2。1 *[DR18，《注记 2.1》22]* 设 $\mathfrak{C}$ 为一个连通融合 *2*-范畴。单位对象的自同态所成的 *1*-范畴 $\mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{I})$ 是一个编织融合 *1*-范畴，并且

$$\mathfrak{C} \overset{\otimes}{\simeq} \mathrm{Mod}(\mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{I})).$$

接下来我们将重点研究一类特定的编织融合 2-范畴：连通融合 2-范畴 $\mathfrak{C}$ 的 2-范畴 Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$；根据 [JR24，引理 2.18]，它是一个（编织）融合 2-范畴。

对于连通融合 2-范畴 $\mathfrak{C} = \mathrm{Mod}(\mathcal{C})$，其中 $\mathcal{C}$ 是一个编织融合 1-范畴，2-范畴 Drinfeld 中心有两种等价的描述方式：通过可分半编织代数，以及通过有限半单编织模范畴。可分半编织代数 (A, γ) 是 $\mathcal{C}$ 中的一个可分代数 A，并带有额外的半编织结构 γ，该结构需满足与乘法和编织相容的条件，详见 [JR24，第 2.4] 节。配以满足与编织及额外半编织相容条件的双模，它们构成一个编织融合 2-范畴 sHBA($\mathcal{C}$)。更多详情请参见 [JR24，第 2.4] 节。另一个等价的编织融合 2-范畴是有限半单编织（右）$\mathcal{C}$-模范畴所构成的 2-范畴 BrMod($\mathcal{C}$)，其对象是有限半单 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$，并带有一个自然同构 $(\sigma_{M,X}\colon M\triangleleft X \to M\triangleleft X)_{X\in\mathcal{C},\, M\in\mathcal{M}}$（比较 [JR24，第 2.2], [节； 4]DN21，第 4] 节）。模编织 σ 必须满足

$$\sigma_{M,\mathcal{I}} = \mathrm{id}_M \tag{1}$$

对所有 $M \in \mathcal{M}$，以及以下关于 $\mathcal{C}$ 上的编织与张量积的两个相容条件：

$$\begin{array}{ccc}
(M\triangleleft X)\triangleleft Y & \xrightarrow{\sigma_{M\triangleleft X,Y}} & (M\triangleleft X)\triangleleft Y \\
{\scriptstyle m^{-1}_{M,X,Y}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m^{-1}_{M,X,Y}} \\
M\triangleleft(X\otimes Y) & & M\triangleleft(X\otimes Y) \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_M\triangleleft c_{X,Y}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_M\triangleleft c^{-1}_{Y,X}} \\
M\triangleleft(Y\otimes X) & & M\triangleleft(Y\otimes X) \\
{\scriptstyle m_{M,Y,X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_{M,Y,X}} \\
(M\triangleleft Y)\triangleleft X & \xrightarrow{\sigma_{M,Y}\triangleleft\mathrm{id}_X} & (M\triangleleft Y)\triangleleft X
\end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{ccc}
M\triangleleft(X\otimes Y) & \xrightarrow{\sigma_{M,X\otimes Y}} & M\triangleleft(X\otimes Y) \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_M\triangleleft c^{-1}_{Y,X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_M\triangleleft c_{X,Y}} \\
M\triangleleft(Y\otimes X) & & M\triangleleft(Y\otimes X) \\
{\scriptstyle m_{M,Y,X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_{M,Y,X}} \\
(M\triangleleft Y)\triangleleft X & & (M\triangleleft Y)\triangleleft X \\
& {\scriptstyle \sigma_{M\triangleleft Y,X}}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \sigma_{M,Y}\triangleleft\mathrm{id}_X} & \\
& (M\triangleleft Y)\triangleleft X &
\end{array} \tag{3}$$

编织融合 1-范畴 $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$ 的正则模范畴总是可以赋予一个由 $\mathcal{C}$ 上的双重编织 c 定义的模编织，即 $\sigma_{Y,X} = c_{X,Y}\circ c_{Y,X}\colon Y\triangleleft X \to Y\triangleleft X$。为便于后续使用，我们描述正则模范畴上的所有模编织。

命题 2.2设 $\mathcal{C}$ 是一个编织幺半范畴。（这里无需作出任何额外假设，例如线性或有限性。）那么任意幺半自同构 $(\eta_X)_{X\in\mathcal{C}}$

恒等函子 *on* $\mathcal{C}$，配备其平凡的幺半函子结构，可通过以下方式在正则 $\mathcal{C}$-模范畴上给出一个模编织

$$\sigma_{Y,X} \coloneqq c_{X,Y} \circ c_{Y,X} \circ (Y \otimes \eta_X) : Y \otimes X \to Y \otimes X. \tag{4}$$

反过来，正则模范畴上的任意模编织都具有这种形式。

证明。 我们可以假设 $\mathcal{C}$ 是严格的。对于恒等函子的任意幺半自同构 η，我们有 $\eta_{\mathcal{I}} = \mathrm{id}_{\mathcal{I}}$，因此等式 (1) 自动成立。直接计算可知，(4) 确实定义了一个满足 (2) 和 (3) 的模编织。

反过来，设 σ 是正则模范畴 $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$上的模编织。那么，结合条件 (2) 和 (3) 可得

$$\sigma_{\mathcal{I},X\otimes Y} = (X \otimes \sigma_{\mathcal{I},Y}) \circ (\sigma_{\mathcal{I},X} \otimes Y) = (\sigma_{\mathcal{I},X} \otimes Y) \circ (X \otimes \sigma_{\mathcal{I},Y}) \tag{5}$$

对所有对象 X，$Y \in \mathcal{C}$均成立。同构 $\sigma_{\mathcal{I},\,X}\colon\ X \cong \mathcal{I} \otimes X \to \mathcal{I} \otimes X \cong X$ 是自然的，并且根据 (5) 构成一个幺半自同构。 □

例 2.3 考虑 $\mathcal{C} = \mathrm{vect}_G$，即有限阿贝尔群 G 上有限维 G-分次 $\mathbb{C}$-向量空间构成的阿贝尔范畴。对于 vect_G，若其底层张量积函子是向量空间的 G-分次张量积，则其编织和结合子可通过阿贝尔 3-余循环 $[(\Psi,\ \Omega)] \in H^3_{ab}(G,\ \mathbb{C}^*)$ 分类；等价地，也可通过二次型 $q\colon\ G \to \mathbb{K}^\times$ 分类（参见 [MS89，附录 E] 和 [FRS04]）。我们固定一个阿贝尔三上同调 $(\Psi,\ \Omega)$，它定义了 vect_G 上的编织。

根据命题 2.2，我们需要对恒等幺半函子的幺半自同构 η 进行分类。它们由自同构 η_g 给出：$U_g \to U_g$ 是恒等态射 $\eta_g = \varphi(g)\,\mathrm{id}_{U_g}$的标量倍数。根据幺半性，$\varphi$ 是 G上的一个特征。

稍后我们将证明，除去 Schur 等价，这些都是有限半单不可分解的编织 vect_G-模范畴。

命题 2.4 对于编织融合 *1*-范畴 $\mathcal{C}$，我们有

$$\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{BrMod}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{sHBA}(\mathcal{C})$$

作为编织融合 *2*-范畴。

第一部分的证明参见 [DN21, 定理 4.11]；第二部分的证明参见 [JR24, 定理 2.40]。

如上所述，编织融合 2-范畴的 S-矩阵已被定义，参见 [JR24, 第 2.7] 小节。为方便读者，我们回顾其定义以及最相关的计算概念。

构造 2.5设 $\mathfrak{B}$ 为一个编织融合 2-范畴。设 $A \in \mathfrak{B}$ 为一个简单对象，$b : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ 为单位对象的一个简单 1-自同态。 $\mathfrak{B}$ 上的编织给出 2-同构

$$\begin{aligned} \mathrm{br}_{A,b}&:\ \mathrm{br}_{A,\mathcal{I}} \circ (A\Box b) \Rightarrow (b\Box A) \circ \mathrm{br}_{A,\mathcal{I}}\ , \\ \mathrm{br}_{b,A}&:\ \mathrm{br}_{\mathcal{I},A} \circ (b\Box A) \Rightarrow (A\Box b) \circ \mathrm{br}_{\mathcal{I},A}\ . \end{aligned}$$

根据我们施加的严格性，$\mathcal{I}\Box A = A = A\Box\mathcal{I}$ 以及 $\mathrm{br}_{\mathcal{I},\ A}$ 和 $\mathrm{br}_{A,\ \mathcal{I}}$ 都是平凡的。因此我们得到 2-同构

$$\begin{aligned} \mathrm{br}_{A,b}&:\ A\Box b \Rightarrow b\Box A, \\ \mathrm{br}_{b,A}&:\ b\Box A \Rightarrow A\Box b. \end{aligned}$$

现在，我们可以将全辫定义为以下复合

$$\mathrm{br}_{b,A} \cdot_v \mathrm{br}_{A,b} \colon\ A\Box b \Rightarrow A\Box b.$$

为得到标量，假设 $b \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{I},\ \mathcal{I})$ 是简单的。此外，选取对偶数据

$$\mathrm{ev}_b \colon\ b \circ b^* \to \mathrm{id}_{\mathcal{I}},$$
$$\mathrm{coev}_b \colon\ \mathrm{id}_{\mathcal{I}} \to b^* \circ b$$

以及类似地的其他侧对偶 ${}^*b$，还有一个 2-同构 $\alpha_b \colon\ {}^*b \Rightarrow b^*$。注意，$\alpha_b$ 仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{I},\ \mathcal{I})$ 是半单的 [Eti+16，命题 4.8.1] 时才必然存在。令 d_{α_b} 为定义 2-自同态 $\mathrm{ev}_b \cdot_v (\mathrm{id}_b \Box \alpha_b) \cdot_v \mathrm{coev}_{{}^*b}$ 的标量。现在，我们将 $R_{A,\ b} \colon \mathrm{id}_A \Rightarrow \mathrm{id}_A$ 定义为如下 2-自同态

$$\frac{1}{d_{\alpha_b}}((A\Box \mathrm{ev}_b) \cdot_v ((\mathrm{br}_{b,A} \cdot_v \mathrm{br}_{A,b})\Box \alpha_b) \cdot_v (A\Box \mathrm{coev}_{{}^*b})). \tag{6}$$

由于 $A \in \mathfrak{B}$ 是简单的，1-态射 $\mathrm{id}_A \in \mathrm{End}_{\mathfrak{B}}(A)$ 是简单的，因此，根据 Schur引理，$R_{A,\ b}$ 作为 2-态射是恒等态射的倍数。我们将这个标量记为$S_{A,\ b}$。

引理 2.6 标量 $S_{A,\ b}$ 仅取决于 $A \in \mathfrak{B}$ 的 *Schur* 等价类。此外，它与同构类 $b \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{I},\mathcal{I})$ 的代表元无关。

证明。 假设 $f \colon\ A \to B$ 是 $\mathfrak{B}$中的一个非零 1-态射。编织的自然性（见[Cra98, p.194]），连同 $\mathrm{br}_{\mathcal{I},\ }$、$\mathrm{br}_{\ \mathcal{I}}$ 为平凡态，以及 $\mathfrak{B}$ 的单结构中的交换 2-同构保持恒等态射这一性质，推出

$$\mathrm{br}_{b,A} = \mathrm{br}_{b,B}\,.$$

此外，设 $b' \colon\ \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ 是另一个属于同一等价类的简单对象，也就是说，存在一个非零 2-同构 $\alpha \colon\ b \Rightarrow b'$。那么

$$(A\Box\alpha) \cdot_v \mathrm{br}_{b,A} = \mathrm{br}_{b',A} \cdot_v (\alpha\Box A)$$

同样由自然性可得（见 [BN96, 引理 7, 第 2 个条件]）。 □

引理 2.7 标量 $S_{A,b}$ 与所选的 *2*-同构 $\alpha_b \colon\ {}^*b \Rightarrow b^*$无关。

证明。 这类似于融合 1-范畴中迹定义良好这一事实。下面详述其证明。设 $\alpha_b \colon\ {}^*b \Rightarrow b^*$ 是任意选取的 2-同构。假设$\alpha'_b \colon\ {}^*b \Rightarrow b^*$ 是另一个选取的 2-同构。那么 $\alpha'_b = \alpha_b \cdot_v \alpha_b^{-1} \cdot_v \alpha'_b$，且 $\alpha_b^{-1} \cdot_v \alpha'_b \colon\ {}^*b \to {}^*b$是一个 2-自同构。因此，对于固定的 $\alpha_b \colon\ {}^*b \Rightarrow b^*$，任何其他选取的 2-同构 α'_b 都可由某个简单对象的 2-同构 $\psi_b \colon\ {}^*b \to {}^*b$ 通过 $\alpha'_b = \alpha_b \cdot_v \psi_b$定义。此外，$\psi_b$ 是 $\mathrm{End}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{I})$ 中简单对象之间的态射，因此由某个标量确定。因此，

$$d_{\alpha'_b} = d_{\alpha_b \cdot_v \psi_b} = \langle \mathrm{ev}_b \cdot_v (\mathrm{id}_b \Box (\alpha_b \cdot_v \psi_b)) \cdot_v \mathrm{coev}_{{}^*b} \rangle = \langle \psi_b \rangle \cdot d_{\alpha_b}.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}&\langle (A\Box \mathrm{ev}_b) \cdot_v ((\mathrm{br}_{b,A} \cdot_v \mathrm{br}_{A,b})\Box (\alpha_b \cdot_v \psi_b)) \cdot_v (A\Box \mathrm{coev}_{{}^*b}) \rangle \\ &\qquad = \langle \psi_b \rangle \cdot \langle (A\Box \mathrm{ev}_b) \cdot_v ((\mathrm{br}_{b,A} \cdot_v \mathrm{br}_{A,b})\Box \alpha_b) \cdot_v (A\Box \mathrm{coev}_{{}^*b}) \rangle.\end{aligned}$$

因此，$S_{A,\ b}$ 与 2-同构 α_b 的选择无关，因为 $\langle \psi_b \rangle$ 同时出现在 $S_{A,\ b}$ 定义的分子和分母中。

□

鉴于最后两个引理，我们可以定义 2-范畴的 S-矩阵 x.

定义 2.8*([JR24，引理 2.56])* 设 $\mathfrak{B}$ 为一个编织融合 *2*-范畴。*2*-范畴S-矩阵是如下函数

$$S:\ \pi_0\mathfrak{B}\times\pi_0\operatorname{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{I},\mathcal{I})\to\mathbb{K}:\ (A,b)\mapsto S_{A,b}.$$

其中，$\pi_0\mathfrak{B}$ 表示 *2*-范畴 $\mathfrak{B}$ 的舒尔等价类集合，而 $\pi_0\operatorname{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{I},\mathcal{I})$表示融合 *1*-范畴 $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{B}}(\mathcal{I},\mathcal{I})$中对象的同构类集合。

现在我们转而讨论前面提到的那类特殊的编织融合 2-范畴：即连通融合 2-范畴的 Drinfeld 中心情形，也就是对于某个编织融合 1-范畴 $(\mathcal{C},c)$，$\mathfrak{B}=\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))$。在这种情况下，我们可以更明确地计算 S-矩阵配对。回顾以下命题，它涉及 $\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))$ 的单位对象的自同态空间与 $\mathcal{C}$ 的 M¨uger 中心之间的关系。该命题见 [JR24，引理 2.16]。

命题 2.9 对于编织融合 *1*-范畴 $\mathcal{C}$，$\operatorname{Hom}^{\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))}(\mathcal{I},\mathcal{I})$ 与 $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$作为编织融合 *1*-范畴等价。

证明。 根据定理 2.4，我们不直接构造 $\operatorname{Hom}^{\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))}(\mathcal{I},\mathcal{I})$ 与 $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ 之间的等价，而是构造 $\operatorname{Hom}^{\mathrm{BrMod}(\mathcal{C})}(\mathcal{I},\mathcal{I})$ 与 $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ 之间的等价。我们考虑

$$(\mathcal{C}_{\mathcal{C}},(\sigma_{Y,X}=c_{X,Y}\circ c_{Y,X})_{X\in\mathcal{C},Y\in\mathcal{C}_{\mathcal{C}}})$$

$\mathcal{C}$ 中的单体单位。一个编织模态射

$$F:(\mathcal{C}_{\mathcal{C}},\sigma)\to(\mathcal{C}_{\mathcal{C}},\sigma)$$

特别地，它是正则 $\mathcal{C}$-模范畴 F 的一个模函子：$\mathcal{C}_{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$，因此由某个对象 $A\in\mathcal{C}$, $F(\mathcal{I}_{\mathcal{C}})=A$ 定义。要使 F 成为编织模函子，我们必须对所有 $X\in\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}&F(\sigma_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}},X})=\sigma_{F(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}),X}\\ \Leftrightarrow\ &F(c_{X,\mathcal{I}_{\mathcal{C}}}\circ c_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}},X})=c_{X,F(\mathcal{I}_{\mathcal{C}})}\circ c_{F(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}),X}\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{id}_{A\otimes X}=c_{X,A}\circ c_{A,X}.\end{aligned}$$

因此，F 是编织模函子，当且仅当 $A\in\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$。这就建立了该等价。

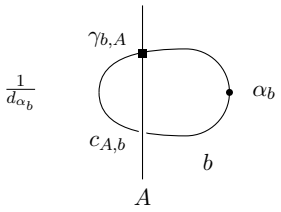
□

利用前一个命题中关于 S 矩阵一个指标的等价，以及通过 $\mathcal{C}$ 中的可分半编织代数和 $\mathcal{C}$ 上的有限半单编织模范畴分别对 $\mathfrak{B}=\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))$ 的两种描述来处理另一个指标，可以给出两个显式公式，用于计算 $\mathfrak{B}$ 的 2-范畴 S 矩阵。

观察 2。10 [JR24，例 2.54，例 2.55] 首先，考虑 $(A,\ \gamma)\in\mathrm{sHBA}(\mathcal{C})$ 中的某个可分半编织代数、sHBA 中的简单对象，以及作为 $\operatorname{Hom}^{\mathrm{sHBA}(\mathcal{C})}(\mathcal{I},\ \mathcal{I})$ 中简单对象的简单 $b\in\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$。为 b 选取一些对偶数据，并选取一个同构$\alpha_b:\ {}^*b\to b^*$。于是我们有

$$S_{((A,\gamma),b)}=\frac{1}{d_{\alpha_b}}\langle((\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{ev}_b)\cdot((\gamma_{b,A}\circ c_{A,b})\otimes\alpha_b)\circ(\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{coev}_{{}^*b})\rangle$$

这里，我们可以应用 Schur引理，因为可以看到 $(\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{ev}_b)\cdot((\gamma_{b,A}\circ c_{A,b})\otimes\alpha_b)\circ(\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{coev}_{{}^*b})$ 是一个 2-态射 ${}_AA_A\to{}_AA_A$，其中 ${}_AA_A$ 被视为半编织双模，因而是 sHBA 中的一个 1-态射 $(A,\gamma)\to(A,\gamma)$。图示如下，我们可以将这个 2-态射表示为:



请注意，我们使用由 γ 定义的半编织双模 ${}_AA_A$ 上的半编织，该双模记作$\gamma_{-,A}$。

-

对于 $\mathfrak{B}$ 中对象的另一种描述，考虑 $(\mathcal{M},\sigma) \in \mathrm{BrMod}(\mathcal{C})$，这是 $\mathcal{C}$ 上的有限半单编织模范畴，也是 $\mathrm{BrMod}(\mathcal{C})$ 中的简单对象。如上所述，令 $b \in \mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ 为在 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{sHBA}(\mathcal{C})}(\mathcal{I},\mathcal{I})$ 中视为简单对象的简单对象。再次为 b 选取一些对偶数据以及一个同构 $\alpha_b : {}^*b \to b^*$。于是，我们可以通过以下方式计算任意简单 $M \in \mathcal{M}$ 的 2-范畴 S-矩阵

$$S_{((\mathcal{M},\sigma),b)} = \frac{1}{d_{\alpha_b}}\langle (M \cong M \triangleleft I \overset{(\mathrm{id}_M \triangleleft \mathrm{coev}_b)}{\longrightarrow} M \triangleleft (b \otimes b^*) \cong (M \triangleleft b) \triangleleft b^* \overset{\sigma_{M,b} \triangleleft \mathrm{id}_b^*}{\longrightarrow} (M \triangleleft b) \triangleleft b^* \cong M \triangleleft (b \otimes b^*) \overset{(\mathrm{id}_M \triangleleft \mathrm{ev}_b)}{\longrightarrow} M \triangleleft I \cong M)\rangle$$

对于所有简单 $M \in \mathcal{M}$，$S_{((\mathcal{M},\sigma),b)}$ 的值都是常数。

在具体例子中，我们将使用后一个公式。对于一般情形，我们注意到，无需通过带编织的模范畴或半编织代数显式计算 2-范畴 S-矩阵，而是可以遵循 [JR24 定理 2.57] 的证明，转而考虑 Drinfeld 中心的 1-范畴 S-矩阵的部分内容，Drinfeld 中心取自 $\mathcal{C}$。

观察 2.11令 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 表示编织融合 1-范畴 $\mathcal{C}$ 的 Drinfeld 中心。Drinfeld 中心是一个编织融合 1-范畴，其 S-矩阵记为 $S^{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$。2-范畴 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))$ 给出一个编织融合 2-范畴。其 S-矩阵记为 $S^{\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))}$。JR24 定理 2.57] 的 [指出，2-范畴的 $S^{\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))}$ 由 1-范畴的 $S^{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$ 经以下两步得到：

1. $S^{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$ 的行和列分别由 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 的简单对象标记。我们可以通过以下方式将 $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ 嵌入 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$：
$$X \mapsto (X, c_{-,X})$$
对于 $X \in \mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$。注意，对于 M¨uger 中心，我们只有一个将$\mathcal{Z}_2(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 的典范嵌入，因为编织 $c_{-,X}$ 与逆编织 c_X^{-1} ,对于 $-X \in \mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ 重合。因此，考虑 $|\pi_0(\mathcal{Z}(\mathcal{C}))| \times |\pi_0(\mathcal{Z}_2(\mathcal{C}))|$ 矩阵 $S^{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}_{\mathcal{Z}\ \mathcal{C}}{}_{(-)\ \mathcal{Z}_2(\mathcal{C})}$ 是有意义的，即 $S^{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$，其中我们只考虑由 $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ 中简单对象索引的列。我们得到一个秩为 $|\pi_0(\mathcal{Z}_2(\mathcal{C}))|$ 的矩阵，因为 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 是一个非退化融合 1-范畴。

2. 矩阵 $S^{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}_{\mathcal{Z}\ \mathcal{C}}{}_{(-)\ \mathcal{Z}_2(\mathcal{C})}$ 具有 $|\pi_0(\mathcal{Z}_2(\mathcal{C}))|$ 线性无关的行。其余各行只是这些行的副本。删除冗余行后，我们得到 $S^{\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))}$。这是因为 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 是 $\mathrm{BrMod}(\mathcal{C})$ 的生成元。更多细节请参阅[JR24, 定理 2.57]。

因此，与其通过考察带编织的模范畴或半编织代数的舒尔等价类来显式计算 $S^{\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))}$，不如考虑 $S^{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}_{\mathcal{Z}\ \mathcal{C}}{}_{(-)\ \mathcal{Z}_2(\mathcal{C})}$，并找出 $|\pi_0(\mathcal{Z}_2(\mathcal{C}))|$ 个线性无关的行。在这种特殊情况下，线性相关的行其实完全相同，因此不如直接找出 $|\pi_0(\mathcal{Z}_2(\mathcal{C}))|$ 个两两不同的行。这些行构成 $S^{\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))}$-矩阵。

3 主要结果和示例

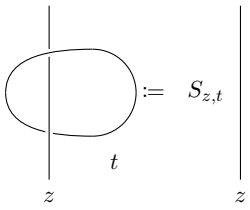
本节计算与带编织的幺半对偶融合 1-范畴 $\mathcal{C}$相关联的 2-范畴 S-矩阵。我们将得到与 $\mathcal{C}$的 M¨uger 中心相关联的群的特征标表。我们通过计算一类例子中的 2-范畴 S-矩阵来验证这一结果；在这类例子中，我们显式地将带编织的模范畴按舒尔等价分类。

3.1 主要结果

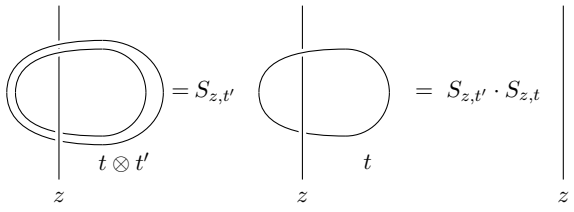
令 Rep(G) 表示有限维 $\mathbb{K}$- G 表示构成的范畴，并将其视为具有平凡编织的编织幺半范畴。令 $z \in G$ 为一个二阶中心元，则 Rep(G，z) 表示同一个幺半范畴，不过其编织由 z 定义，参见 [Eti+16，例 9.9.1(3)]。回忆一下，每个对称融合 1-范畴 $\mathcal{C}$ 都与 Rep(G) 或 Rep(G，z) 编织幺半等价，其中 G 是某个有限群，且 $z \in G$ 是一个二阶中心元，参见 [Eti+16，定理 9.9.22、定理 9.9.26]。在第一种情形下，$\mathcal{C}$ 称为 Tannakian；在第二种情形下，$\mathcal{C}$ 称为超 Tannakian。

定理 3.1 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半对偶编织融合 *1*-范畴，其 *M¨uger* 中心与 $\mathrm{Rep}(G)$ 或 $\mathrm{Rep}(G, z)$ 编织等价，其中 G 是一个有限群，且 $z \in G$ 是一个二阶中心元。那么，$\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathcal{C}))$ 的 *2*-范畴 S-矩阵在行列置换后，是 G 的特征标表。

证明。 根据观察 2.11，我们通过 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 的 1-范畴 S-矩阵，计算 $\mathcal{Z}$(Mod($\mathcal{C}$)) 的 2-范畴 S-矩阵。假设 $\mathcal{C}$ 为严格的。考虑由 $\mathcal{C}$ 上的编织给出的包含映射 τ： $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C})$，它从 M¨uger 中心映入 Drinfeld 中心。令 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中由 τ 定义的子范畴。令 $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$，并令 $t \in \mathcal{T}$ 为简单对象。 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 的 1-范畴 S-矩阵中，以 t 标记的列和以 z 标记的行所对应的项定义如下。



由于我们假设 $\mathcal{C}$ 具有幺半对偶结构，因此省略同构 α_t 和因子 d_{α_t}。此外，图示的编织是 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的编织。令 t，$t' \in \mathcal{T}$ 为简单对象。于是，根据 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中编织的幺半性以及幺半对偶结构，我们得到如下结果。



(7)

若 $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ 是 Tannakian 的，则令 G 为一个有限群，使得 Rep(G)$^{\otimes}$ $\overset{br}{\simeq}$ $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$。令 $\tilde{\tau}$: Rep(G) $\hookrightarrow \mathcal{Z}$($\mathcal{C}$) 为由前述编织单体等价以及 M¨uger 中心到 Drinfeld 中心的包含映射所给出的编织单体嵌入。在超 Tannakian 情形下，令 $z \in G$

为一个二阶中心元，使得 Rep(G, z) $\otimes$, $br.$ $\mathcal{Z}_2$($\mathcal{C}$)，并令 $\tilde{\tau}$: Rep(G, z) $\hookrightarrow$ $\mathcal{Z}$($\mathcal{C}$) 为相应的编织单体嵌入。在这两种情况下，对于固定的 $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$，我们得到一个映射

$$S_{z,_}: K_0(\mathrm{Rep}(G)) \to \mathbb{K}$$

由简单对象构成的 K_0(Rep(G)) 基底上的定义为 $t \mapsto S_{z,\tilde{\tau}(t)}$。证明的其余部分如下：

(i) 我们注意到 $S_{z,}$ 是一个环同态。(ii) 我们注意到，每个 $g \in G$ 都定义了一个环同态 χ (g) : K_0(Rep(G)) $\to \mathbb{K}$: $(V, \rho_V) \mapsto \chi_{(V,\rho_V)}(g)$。(iii) 我们注意到，所有环同态 K_0(Rep(G)) $\to \mathbb{K}$ 都给出形式为 χ(g) 的特征映射。

对于 (i)，我们注意到 (7) 表明 $S_{z,}$ 是乘法的。由于我们是在融合范畴上进行讨论，该映射是可加的，且加法结构与张量积相容。此外，该映射是保单位的，因为单位对象的双重编织是平凡的。

(ii) 使用了特征标的标准性质。

代数 $A = K_0(\mathrm{Rep}(G)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ 已知是一个交换、结合、有单位元的半单$\mathbb{K}$-代数。由于假设基域 $\mathbb{K}$ 是代数闭的，它同构于$\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$，其中副本的数量等于元素共轭类的数量。因此，代数同态 $A \to \mathbb{K}$至多有 $|conj(G)|$ 个。由 (ii)，我们有 $|conj(G)|$ 个环同态 χ (g) : K_0(Rep(G)) $\to \mathbb{K}$: (V, ρ_V) $\mapsto \chi_{(V,\rho_V)}(g)$。每个环同态 χ : K_0(Rep(G)) $\to \mathbb{K}$ 都会给出一个代数同态 $\hat{\chi}$: $A \to \mathbb{K}$。映射 $\bar{\chi} \mapsto \tilde{\chi}$ 是单射。因此，每个环同态都具有 (ii) 中的形式。

这表明，对于任意 $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$，$S_{z,}$ 都具有某个 $g \in G$ 所对应的 χ (g) 形式。由此可知，我们找到的值 $S_{z,\ t}$仅为特征值。我们知道，在 $\mathcal{Z}$($\mathcal{C}$) 的 S 矩阵中，由 $\mathcal{T}$ 标记的各行所构成的矩阵里，存在一个唯一的秩为 $|\Pi_0(Z_2(\mathcal{C}))|$ 的可逆矩阵（行列置换意义下唯一）。该矩阵给出了 $\mathcal{Z}$ (Mod($\mathcal{C}$)) 的 2-范畴 S矩阵。由于矩阵元素 $S_{z,\ t}$ 仅为特征值，且 G 的特征标表是一个秩为 $|conj(G)| = |\Pi_0(Z_2(\mathcal{C}))|$ 的可逆矩阵，因此我们得到的 G 的特征标表，正是我们要找的可逆（子）矩阵。于是， $\mathcal{Z}$(Mod($\mathcal{C}$)) 的 2-范畴 S矩阵就是 G的特征标表。

□

3.2 示例

现在我们转向一类具体的例子，在这类例子中，无需借助观察 2.11 即可直接计算 2-范畴 S 矩阵。我们将对所有有限半单不可分解的带编织的模范畴按等价分类，并描述其舒尔等价类。

设 G 为有限阿贝尔群，vect$_G$ 为有限维 G 分次 $\mathbb{C}$ 向量空间构成的 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴。我们固定一个阿贝尔三上同调 (Ψ,Ω)，它赋予 vect$_G$ 编织幺半范畴 $\mathcal{C}$ 的结构。

为了计算 S-矩阵 $\mathcal{Z}$(Mod($\mathcal{C}$))，我们首先描述 $\mathcal{C}$ 的 M¨uger 中心。简单对象 $U_l \in$vect$_G^{(\Psi,\Omega)}$ with $l \in G$ 属于 M¨uger 中心 $\mathcal{Z}_2$(vect$_G^{(\Psi,\Omega)}$)，当且仅当对所有 $g \in G$,

$$\Omega(g,l)\Omega(l,g) = 1.$$

这类 l 构成的子集确实是一个子群，我们将其记为 $Z_2(G)$：单位对象 U_e 属于 M¨uger 中心，而编织与单结构的相容性意味着 $Z_2(G)$ 在乘法下封闭。结合 [Gal25], 的例 2.1(3) 和引理 3.2，我们看到结合子在 M¨uger 中心上的限制 $\Psi_{Z_2(G)}$ 是平凡的。因此，作为对称幺半范畴，M¨uger 中心等价于 $\mathrm{vect}^{(1,\Omega_{Z_2(G)})}_{Z_2(G)}$，其中 $\Omega^{Z_2(G)}$ 是 Ω 在 $Z_2(G)$ 上的限制。

根据 [Ost03，例 2.1]，我们知道，$\mathrm{vect}^{(\Psi,\Omega)}_G$ 中的半单不可分解代数都由 G的 Ψ-平凡化子群定义，即一个子群 $H \leq G$ 连同一个 2-上链$\mu \in C^2(H,\ \mathbb{C}^*)$，使得 $d\mu = \Psi_H$。上链 μ赋予对象 A_H:$= \oplus_{h\in H} U_h$以结构，使其成为 $\mathrm{vect}^{(\Psi,\Omega)}_G$ 中的结合可分幺代数 $A_{(H,\mu)}$。任意有限半单不可分解的（右）$\mathrm{vect}^{(\Psi,\Omega)}_G$-模范畴都等价于 $\mathrm{vect}^{(\Psi,\Omega)}_G$ 中某个左 $A_{(H,\mu)}$-模的范畴，其中 Ψ是一个平凡化子群（H，μ）；我们将其记为 $\mathcal{M}_{(H,\mu)}$。

下一个引理将例 2.3 从正则模范畴上的编织分类推广到所有不可分解模范畴上的编织。它还给出了模范畴不具备模编织结构的具体例子。

引理 3.2 设(H,μ) 是 G 的一个 Ψ-平凡化子群，它定义了 $\mathrm{vect}^{(\Psi,\Omega)}_G$ 上的模范畴 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(H,\mu)}$。模编织 $\mathcal{M}$ 存在，当且仅当 $H \leq Z_2(G)$。$\mathcal{M}$ 上的任意模编织都可通过用 G 的一个不可约特征标扭曲单值而得到。每个不可约特征标都可用于这种扭曲。

证明。设 $U_g, U_h \in \mathrm{vect}^{(\Psi,\Omega)}_G$ 是幺半范畴中的简单对象。设 K 是商集 G/H 的一组代表元。任意元素 $k \in K$ 都定义模范畴 $\mathcal{M}_{(H,\mu)}$ 中的一个简单对象 M_k，即由 U_k 诱导的 $A_{(H,\mu)}$-模。根据模编织 σ 的定义，我们有

$$\sigma_{M_k \triangleleft U_h, U_g} = \Omega(g,h)\Omega(h,g)(\sigma_{M_k,U_g} \triangleleft \mathrm{id}_{U_h}).$$

注意，对于 $g \in G$， $M_k \triangleleft U_g$ 在 $\mathcal{M}_{(H,\mu)}$ 中是简单对象；对于 $h \in H$，我们甚至有 $M_k \triangleleft U_h \cong M_k$

因此，

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{M_k,U_g}\rangle &= \langle \sigma_{M_k \triangleleft U_h, U_g}\rangle \\ &= \Omega(g,h)\Omega(h,g)\langle \sigma_{M_k,U_g} \triangleleft \mathrm{id}_{U_h}\rangle \\ &= \Omega(g,h)\Omega(h,g)\langle \sigma_{M_k,U_g}\rangle.\end{aligned}$$

因此，只有当对所有 $g \in G$ 都有 $\Omega(g,h)\Omega(h,g)$ 等于 1 时，模编织才可能存在，这表明 H 必须是 $Z_2(G)$ 的子群。

进一步考察模编织的定义可知，模编织由 G 的特征标给出：对于 $g \in G$ 和 $k \in K$，由 G 上的特征标 χ 定义的模编织为

$$\sigma_{M_k,U_g} = \Omega(g,k)\Omega(k,g)\chi(g)\,\mathrm{id}_{M_k \otimes U_g}.$$

注意，这一定义良好：对于 G/H 中属于同一等价类的不同代表元 k, k'，$\Omega(g,k)\Omega(k,g)$ 的取值相同，因为 $H \leq Z_2(G)$ 且 $\Omega(g,k)\Omega(k,g)$ 作为映射是双线性的。经检查可知，每个特征标都给出一个模编织。

□

最后一个引理与例 2.3 一起给出了所有有限半单不可分解的编织 $\mathrm{vect}^{(\Psi,\Omega)}_G$-模范畴（按等价分类）。下一步是计算其中哪些彼此 Schur 等价。为此，我们首先证明，编织模

范畴的 Schur 等价类总有一个代表元，其底层模范畴是正则模范畴。

命题 3.3 如上，设 (H,μ) 是 G 的一个 Ψ-平凡化子群，它定义了一个模范畴 $\mathcal{M}_{(H,\mu)}$ 。假设 σ 是 $\mathcal{M}_{(H,\mu)}$上的模编织。那么，在正则 $\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$ -模范畴上存在一个编织模结构 σ' ，使得 $(\mathcal{M},\sigma)$ 与 $(\mathrm{vect}_G,\sigma')$*Schur* 等价。

证明。 设 $U:\ \mathcal{M}_{(H,\mu)}\to$vect$_G$ 为遗忘函子。恒等映射赋予该函子从 $\mathcal{M}_{(H,\mu)}$ 到正则 vect$_G$-模的模函子结构。

令 χ为引理 3.2 中引入的 G上的特征，它定义了 $\mathcal{M}_{(H,\mu)}$上的模编织。根据例 2.3，我们在正则 vect$_G$-模上得到由同一特征定义的模编织 σ' ：

$$\sigma'_{U_e,U_g}=\chi(g)\,\mathrm{id}_{U_e\triangleleft U_g}.$$

It 现在很容易验证，借助这个 U 甚至是一个编织模函子 . □

前一个命题表明，我们只需考虑正规 $\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$ -模范畴上的编织结构，即可为每个 Schur 等价类取得一个代表。下一个命题将告诉我们，正规 vect$_G$-模范畴上的哪些编织会给出 Schur 等价的编织模范畴。

命题 3.4 设 σ_1、 σ_2 是正规 $\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$ -模范畴上的两个模编织vect_G ， 它们由 G 上的特征标 χ_1、χ_2 定义。

1. 所得到的编织模范畴 *Schur* 等价，当且仅当存在$k\in G$ 使得

$$\frac{\chi_1(g)}{\chi_2(g)}=\Omega(g,k)\Omega(k,g) \tag{8}$$

对所有 $g\in G$ 均成立。

2. 所得到的编织模范畴 *Schur* 等价，当且仅当限制到 *M¨uger* 中心 $\mathcal{Z}_2(\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)})$ 后的编织相同；也就是说，对于编织幺半范畴的 *M¨uger* 中心中的所有 $X\in\mathcal{Z}_2(\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)})$，以及模范畴中的所有 $M\in\mathrm{vect}_G$ ，

$$(\sigma_1)_{M,X}=(\sigma_2)_{M,X}.$$

证明。 1. 假设存在 $k\in G$ 使得 $\chi_1(g)\,\chi_2(g)=\Omega(g,k)\Omega(k,g)$。通过从左侧与 U_k 张量化，定义正则 $\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$ -模范畴的一个自函子F :

$$F:\ \mathrm{vect}_G\to\mathrm{vect}_G:\ _\mapsto U_k\otimes_.$$

$\mathrm{T}\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$ 上的结合子 a 赋予 F 一个（左）模函子结构 ,

$$a_{U_k,U_h,U_g}=s_{U_g,U_h}:\ F(U_h\triangleleft U_g)\to F(U_h)\triangleleft U_g.$$

这个模函子具有编织性，从而展示了 (vect$_G,\sigma_1$) 与 (vect$_G,\sigma_2$) 的 Schur 等价。

对于反向推导，假设 (vect$_G$， σ_1) 和 (vect$_G$， σ_2) 是 Schur 等价的编织模范畴，这一点由一个编织模函子所体现

$$(F:\ \mathrm{vect}_G\to\mathrm{vect}_G,(s_{X,Y}:\ F(Y\triangleleft X)\tilde{\to}F(Y)\triangleleft X)_{X,Y\in\mathrm{vect}_G}).$$

利用正则模范畴的（编织）模自函子范畴中的直和，我们可以将任意（编织）模函子写成若干模函子的直和，这些模函子将 $\mathcal{I}$ 映射到一个简单对象。对于 vect_G 这一特定情形，这样的函子会将简单对象映射到简单对象。因此，我们可以假设 F 将简单对象映射到简单对象。

因此，我们找到 $k \in G$ 使得 $F(U_e) = U_k$。将 F 是编织模函子这一条件应用于 $U_g \in \mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$，并将 U_e 视为正则 $\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$-模范畴中的一个元素，可得

$$\frac{\chi_1(g)}{\chi_2(g)} = \Omega(g,k)\Omega(k,g).$$

2. 假设由特征标 χ_1，χ_2 给出的两个模编织 Schur 等价。根据此证明的第 (1) 部分，我们找到 $k \in G$，使得对所有 $g \in G$

$$\frac{\chi_1(g)}{\chi_2(g)} = \Omega(g,k)\Omega(k,g).$$

对于 $g \in Z_2(G)$,

$$1 = \Omega(g,k)\Omega(k,g) = \frac{\chi_1(g)}{\chi_2(g)}.$$

因此，χ_1 和 χ_2 在所有 $g \in Z_2(G)$ 上都一致。因此，将模编织限制到 M¨uger 中心后，得到相同的编织。

反过来，假设对所有 $g \in Z_2(G)$，$\chi_1(g) = \chi_2(g)$，即模编织在 $\mathcal{Z}_2(\mathrm{vect}_G)$ 上相等。那么

$$\frac{\chi_1}{\chi_2} : G \to \mathbb{C}^* : g \mapsto \frac{\chi_1(g)}{\chi_2(g)}$$

是一个群同态，且 $Z_2(G) \leq \ker(\frac{\chi_1}{\chi_2})$。此外，—

$$\varphi : G \to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) : g \mapsto \Omega(_, g)\Omega(g, _)$$

是一个群同态，因为 $\Omega(\ ,?)\Omega(?,\ ) :_{_} G \times G_{_} \to \mathbb{C}^*$ 是双线性的。我们知道 $\ker(\varphi) = Z_2(G)$, 因为 $\varphi(g)(h) = \Omega(h,g)\Omega(g,h) = 1$ 对所有 $h \in G$ 成立，当且仅当 $g \in Z_2(G)$。

首先，假设 $\ker(\varphi) = Z_2(G)$ 是平凡的。则 φ 是单射，并且作为两个基数相同的有限集之间的映射，它是双射。因此，$\frac{\chi_1}{\chi_2} \in \mathrm{Im}(\varphi)$，于是存在一个 $k \in G$使得

$$\Omega(_, k)\Omega(k, _) = \frac{\chi_1}{\chi_2}(_).$$

根据该命题的第 (1) 部分，这两个带编织的模范畴是 Schur 等价的。

现在，设 $Z_2(G)$ 非平凡。注意，双群同态 $\Omega(\ ,?)\Omega(?,\ )$ 可经由 $Z_2(G)$ 分解为一个双群同态

$$\tilde{\beta} : G/Z_2(G) \times G/Z_2(G) \to \mathbb{C}^* : ([h],[g]) \mapsto \Omega(h,g)\Omega(g,h).$$

考虑

$$\varphi : G/Z_2(G) \to \mathrm{Hom}(G/Z_2(G), \mathbb{C}^*) : [g] \mapsto \tilde{\beta}(_, [g]).$$

此外，$\frac{\chi_1}{\chi_2}$ 也可经由 $Z_2(G)$ 分解，因为 $Z_2(G) \leq$ 核$(\frac{\chi_1}{\chi_2})$。因此，考虑

$$\widetilde{\frac{\chi_1}{\chi_2}} : G/Z_2(G) \to \mathbb{C}^* : [g] \mapsto \frac{\chi_1(g)}{\chi_2(g)}.$$

然后，我们可以按照情形 $Z_2(G) = \{e\}$ 进行，并由本定理的第 (1) 部分得出，这两个带编织的模范畴是 Schur 等价的。

□

前面的命题推出了以下关于 $\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$ 上带编织的模范畴的 Schur 等价类的定理。

定理 3.5 *Schur* 等价的不可分解有限半单编织的向量$_G^{(\Psi,\Omega)}$ -模范畴的等价类，与群 $Z_2(G)$的特征一一对应；该群定义了向量$_G^{(\Psi,\Omega)}$ 的 *M¨uger* 中心。每个 *Schur* 等价类都有一个代表元，其模范畴为正则向量$_G^{(\Psi,\Omega)}$ -模范畴，编织则由群 $Z_2(G)$的一个特征定义。

现在，既然我们已经将 $\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$ 的编织模范畴按 Schur 等价分类，就可以显式计算 2-范畴 S-矩阵，从而得到尖点编织融合范畴的定理 3.1：

推论 3.6 $\mathcal{Z}(\mathrm{Mod}(\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}))$ 的 *2*-范畴 S-矩阵等于$Z_2(G)$的特征标表，其中该群定义了向量$_G^{(\Psi,\Omega)}$ 的 *M¨uger* 中心。

证明。 阿贝尔群 $Z_2(G)$ 的特征标表的列以 $Z_2(G)$ 的元素为标记。这些元素也标记 $\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$ 的 M¨uger 中心中的简单对象的同构类，因此也标记 S-矩阵的列。特征标表的行以 $Z_2(G)$ 上的特征标为标记；根据定理 3.5，这些特征标与 $\mathrm{BrMod}(\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)})$ 的 Schur 等价类一一对应，因此也标记 S-矩阵的行。我们声称，在此对应关系下，这两个矩阵相同。

对于 $g \in Z_2(G)$，令 U_g 为 M¨uger 中心中对应的简单对象；对于 $Z_2(G)$ 上的特征标 χ，令 (vect_G, χ) 为对应的不可分解编织模范畴。为简便起见，选取 U_e 作为正则 $\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$ -模范畴中的一个简单对象。根据观察 2.10， S-矩阵的各项由下式给出

$$S_{(\mathrm{vect}_G,\chi),U_g} = \frac{1}{d_+(\alpha_{U_g})}\langle(\mathrm{id}_{U_e}\otimes \mathrm{ev}_{U_g})(\sigma_{U_e,U_g}\otimes\alpha_{U_g})\circ(\mathrm{id}_{U_e}\otimes \mathrm{coev}_{*U_g})\rangle.$$

利用 $\mathrm{vect}_G^{(\Psi,\Omega)}$ 继承自有限维向量空间对偶的幺半对偶结构，可将其简化为

$$S_{(\mathrm{vect}_G,\chi),U_g} = \langle\sigma_{U_e,U_g}\rangle = \chi(g).$$

因此，2-范畴 S-矩阵由 $Z_2(G)$ 的特征标表给出。 □

对于一般的带编织融合范畴，情况可能更为复杂。带编织的模范畴可能存在一些舒尔等价类，它们没有以正则模范畴作为底层模范畴的代表，正如下一个注记所示。

注 3.7考虑如下情形：对某个有限群 G，取带有从向量空间继承而来的对称编织的 $\mathbb{K}$-线性有限维 G-表示范畴 $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(G)$。根据标准论证，对于任意 Hopf 代数 H，群 $\mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{id}_{H-mod})$ 同构于 H 的中心类群元素群。 $\mathbb{C}G$ 中的中心类群元素恰好是 G 中的中心元素，因此 $\mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{id}_{\mathrm{Rep}(G)}) \cong Z(G)$。于是，根据命题 2.2，正则 $\mathcal{C}$-模范畴上带编织的模范畴的 Schur 等价类至多有 $|Z(G)|$ 个。然而，我们知道，这些 Schur 等价类与 M¨uger 中心的简单对象一一对应，因而也与简单 G-表示一一对应；其数量等于群 G 的共轭类数量。因此，对于非阿贝尔的 G，确实存在没有形如 $(\mathrm{Rep}(), \mathbb{K})$ 的代表元的带编织的模范畴 Schur 等价类。

其中 σ 是正则模范畴上的模编织。

注记 3.8我们简要讨论正则模范畴 $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$ 上的模编织的变形。根据命题 2.2，这些变形与恒等幺半函子的幺半自同构一一对应。根据 [FGS24，注记 4.9]，，幺半函子的导子 F对应于 Davydov-Yetter 上同调中的 1-上循环 $C^1_{DY}(F)$。对于 $F = \mathrm{id}$，它们描述了 id 的恒等幺半自同构的变形。由于我们是在 $\mathbb{K}$零特征 [的代数闭域上工作，9] FGS24，注记 4. $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$意味着 Davydov-Yetter 上同调消失，因此 上的带编织模范畴结构不存在非平凡变形。

参考文献

[BN96] John C. Baez 和 Martin Neuchl：《高维代数 I：带编织的幺半 2-范畴》。载于：Adv. Math. 121.2（1996），第 196–244 页。[Cra98] Sjoerd E. Crans：《带编织及对称编织的幺半 2-范畴的广义中心》。载于：Adv. Math. 136.2（1998），第 183–223 页。[D´ec25] Thibault D. D´ecoppet：《融合 2-范畴的 Drinfeld 中心与 Morita 等价类》。载于：Compos. Math. 161.2（2025），第 305–340 页。[DN21] Alexei Davydov 和 Dmitri Nikshych：《带编织的 Picard 群与带编织张量范畴的分次扩张》。载于：Selecta Math.（N.S.）27.4（2021），第 65 号论文，87 页。[DR18] Christopher L. Douglas 和 David Reutter：《融合 2-范畴与 4-流形的状态和不变量》。载于：arXiv 预印本 arXiv:1812.11933（2018）。[Eti+16] Pavel Etingof 等：《张量范畴》。数学调查与专著。美国数学会，2016。[FGS24] M. Faitg、A. M. Gainutdinov 和 C. Schweigert：《Davydov-Yetter 上同调与相对同调代数》。载于：Selecta Math.（N.S.）30.2（2024），第 26 号论文，80 页。[FRS04] J¨urgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert：《RCFT 关联函数的 TFT 构造 III：简单流》。载于：Nuclear Phys. B 694.3（2004），第 277–353 页。[Gal25] C´esar Galindo：《关于二次型的 Eilenberg-Mac Lane 同构的注记》。2025。arXiv：2507.15726 [math.CT]。[JR24] Theo Johnson-Freyd 和 David Reutter：《极小非退化扩张》。载于：J. Amer. Math. Soc. 37.1（2024），第 81–150 页。[JY21] Theo Johnson-Freyd 和 Matthew Yu：《没有线算符的融合 2-范畴是类群》。载于：Bull. Aust. Math. Soc. 104.3（2021），第 434–442 页。[MS21] Micha¨el Mignard 和 Peter Schauenburg：《模范畴不能由其模数据确定》。载于：Lett. Math. Phys. 111.3（2021），第 60 号论文，9 页。[MS89] Gregory Moore 和 Nathan Seiberg：《经典与量子共形场论》。载于：Comm. Math. Phys. 123.2（1989），第 177–254 页。[Ost03] Viktor Ostrik：《有限群 Drinfeld 双上的模范畴》。载于：Int. Math. Res. Not. 27（2003），第 1507–1520 页。