arXiv:2601.14170v1 [math.PR] 20 Jan 2026

指数随机图模型与 Erd˝os–R´enyi 模型之间的 Wasserstein 距离

Vilas Winstein 加州大学伯
克利分校vilas@berkeley.edu

2026年1月21日

摘要

铁磁指数随机图模型（指数随机图模型）是一类随机图模型，其中某些小型结构（如三角形）的出现受到鼓励；它们可以通过对 Erd˝os–R´enyi 模型施加特定非线性哈密顿量的指数倾斜而构造。这些模型是若干 *metastable wells* 的混合，每一种在宏观上都表现得像 Erd˝os–R´enyi 模型，对于子图计数呈现相同的大数定律 [CD13]。然而，在微观尺度上，这些亚稳态势阱与 Erd˝os–R´enyi 模型截然不同，两种测度之间的全变差距离趋于 1 [MX23]。本文通过给出两个模型之间距离的一个精确界（相差至多一个常数因子），澄清了这一情况。该距离是在使平均差异最小的耦合下，两者不同的边的平均数量。具体而言，我们证明这一距离为 $\Theta(n^{3/2})$，从而精确量化了这些模型之间的差异。

过去已有文献给出过这种形式的上界 [RR19], 但仅适用于 *subcritical*（高温）参数区间。我们采用一种新的证明技巧，将这一上界推广至*supercritical* （低温）参数区间，并证明了一个匹配的下界。此前，这种下界仅出现在满足“无三角形”条件的指数随机图模型特殊情形的亚临界区间 [DF25]。为证明存在三角形时的下界，我们引入了对 *discretederivative* 哈密顿量的近似，该近似以边附近三角形和楔形（二星）的局部计数来控制指数随机图模型的动力学性质。这一近似是本文在技术和概念上的主要贡献，我们也期望它能在多种其他情境中发挥作用。此外，我们还通过一种新的自举论证，证明了指数随机图模型下 *marginal edge probability* 的一个界。此前已有文献给出过这样的界 [FLSW25], 但同样仅限于亚临界区间，且采用了不同的证明策略。

目录

1 引言 **2**
1.1 问题设定与相关工作 .21.2 结果陈述与一些证明思路 .61.3 文章概要 .81.4 致谢 .8

2 亚稳态混合及其后果 **8**
2.1 亚稳态混合 .92.2 亚稳态混合的后果 .10

3 边的边缘概率 **13**
3.1 通过自举获得上界 .133.2 不存在下界 .17

4 哈密顿量微分的涨落 哈密顿量微分 18
4.1 哈密顿量微分向更简单的变量的约化 .184.2 通过近似 FKG 不等式得到涨落下界 .26

5 Wasserstein 距离
29
5.1 最优耦合 .29
5.2 主要结果的证明 .29
5.3 通过顶点度中心极限定理证明下界的另一种方法 .30

1 引言

给定定义在 n 个带标签顶点上的简单图上的函数 H x，相应的指数~随机图模型（ERGM）的一个样本是随机图 X，满足对任意 x，我们有

$$\mathbb{P}[\widetilde{X} = x] \propto e^{n^2 \mathsf{H}(x)}. \tag{1}$$

请注意，在本文中，函数 H(x)（我们称之为哈密顿量）对于典型的稠密图 x 取值为 1 阶，而 n^2 的缩放确保上述测度是非平凡的（即既非近似均匀，也不会集中在 H 的极大值点上）。

指数随机图模型已被用作具有各种聚类性质的复杂网络模型，并已应用于社会学和生物学等领域 [FS86, HL81, WF94]。统计物理学家也对这些模型做出了早期的非严格分析 [BJK04, PN04, PN05]。从数学角度看，指数随机图模型是简单而自然的自旋系统，包含高阶（即不只是成对）相互作用；它们吸引了概率学家、统计学家和计算机科学家的关注，他们从多个角度研究这些模型，包括大偏差和相变 [CD13, RS13, RY13],、分布极限定理 [MX23, FLS24, FLSW25, Win25b],、混合时间和抽样 [BBS08, DEY19, RR19, BNN24],、测度集中 [SS20, GN24, Win25a], 以及随机局部化 [EG18a,EG18b,MP24]。此外，指数随机图模型可用于研究受约束、具有异常数量三角形或其他子图的随机图 [RRS14, LZ15]。我们对指数随机图模型的定义所生成的样本是稠密图，但近期也有一些研究探讨了能生成稀疏图的改进模型 [YZ17, CD24]。此处省略了许多重要文献；这份引文列表并非意在面面俱到，而是旨在展现这一领域的广度。

在本文中，正如我们将在下文第1.1节中定义的那样，我们考虑的哈密顿量 H 可以写成子图密度的有限线性组合，且所有非线性项的系数均非负；我们称之为铁磁区间。铁磁性是一种正相关条件，结果表明它会带来均匀的大尺度行为。具体而言，在这一假设下，ERGM测度可分解为有限混合的测度 $\mathcal{M}(n,p)$（其中 p 取遍某个有限集合），每个测度在宏观尺度上关于割距离都接近一个 Erd˝os–R´enyi 模型 $\mathcal{G}(n,p)$ [CD13]。这一点将在下文第1.1.1节中精确定义。另一方面，在微观尺度上，测度 $\mathcal{M}(n,p)$ 与 $\mathcal{G}(n,p)$ 尽可能相距甚远，也就是说，它们的全变差距离趋于 1，当$n \to \infty$ [MX23], 时；这一点将在下文第1.1.2节中讨论。

因此，割距离过于粗糙，无法区分 $\mathcal{M}(n,\ p)$ 和 $\mathcal{G}(n,\ p)$，而全变差距离又过于精细，无法比较它们。这促使我们考虑介于这两个极端之间的距离，一种自然的选择是汉明距离 $\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x,\ y)$，它统计图 x和 y 不同的边数。本文的主要结果是

$$\mathbb{E}[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X,Y)] = \Theta(n^{3/2})$$

在 $X \sim \mathcal{M}(n,\ p)$ 和 $Y \sim \mathcal{G}(n,\ p)$ 之间使该期望最小化的最优耦合下。为证明这一点，尤其是证明下界时，我们采用一种视角，将自然的指数随机图模型 Glauber 动力学下的更新概率视为其本身的随机变量。随后，我们分析这些变量，并通过仅计算每条边附近的两种特定结构（三角形 $\triangle$和楔形 $\wedge$），精确理解该动力学。

1.1 问题设置与相关工作

我们研究没有自环的 n 个顶点无向图 x。这些图的顶点集为 $[n] = \{1,\dots,n\}$，边集为 $\subseteq \binom{[n]}{2}$，即 $[n]$ 的二顶点子集的集合，也就是完全

图 K_n。因此，我们可以将 n 个顶点的图 x 视为从 $\binom{[n]}{2}$ 到 $\{0,1\}$ 的函数，并用 $x(e)$ 表示边 e 属于该图 x 的指示函数。

对于任意固定的图 G 和一个有 n个顶点的图 x，我们用 $\mathsf{N}_G(x)$ 表示 x中G 的同态数量。同态是指将 G 的边映射到 x 的边的映射 $\mathcal{V}(G) \to [n]$ （这里，$G(G)$ 表示 G 的顶点集，类似地，$\mathcal{E}(G)$ 表示 G的边集）。我们不要求这些同态是单射，也不要求它们是诱导的；换言之，非边不必映射为非边。例如，如果 $G = \wedge$ 是一个楔形图（也称为二星），那么

$$\mathsf{N}_\wedge(x) = \sum_{v_1,v_2,v_3 \in [n]} x(\{v_1,v_2\}) \cdot x(\{v_2,v_3\}).$$

请注意，在上述表达式中，由于我们考虑的是没有自环的图 x，因此将 $x(\{v,v\})$ 视为零。对于任意固定的图 G，我们还将同态密度定义为

$$\mathfrak{t}(G,x) \coloneqq \frac{\mathsf{N}_G(x)}{n^{|\mathcal{V}(G)|}},$$

因此，$\mathfrak{t}(G,\ x)$ 是均匀随机映射 $\mathcal{V}(G) \to [n]$ 是从 G 到x的同态的概率。对于固定的有限图 G_0，G_1，……，G_K（其中我们始终令 G_0 为一条单边），以及参数向量 $\beta = (\beta_0,\ \beta_1,\ \ldots\ldots,\ \beta_K) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K_{>0}$，我们将 ERGM 哈密顿量 H 定义如下：

$$\mathsf{H}(x) = \sum_{j=0}^{K} \beta_j \cdot \mathfrak{t}(G_j,x). \tag{2}$$

我们再次指出，我们假设每个 β_j （除 β_0外）均为正；这称为铁磁性假设，它会使宏观尺度上的行为在一定程度上趋于均匀，正如1.1.1节将要讨论的那样。重要的是，铁磁性假设还使我们能够采用由 [MW26]最近推导出的 FKG 不等式的一个近似版本。

随机图有无条件ERGM测度的分布，前提是采用此哈密顿量H时，（1）成立。稍后，我们将用 X （不带波浪号）表示从 ERGM测度在某个特定集合上作条件化后得到的样本，该集合将在下一小节中说明。还请注意，我们常用v 和e 表示所考虑图 G的顶点数和边数，并用vj 和ej 表示 G_j 在 ERGM规范中图的顶点数和边数。

1.1.1 亚稳态势阱与 Erd˝os–R´enyi 模型在割距离下的不可区分性

在 [CD13] 中通过大偏差原理证明，任何铁磁性指数随机图模型都可分解为若干测度的混合，我们称之为 亚稳态势阱或相测度，并且每个亚稳态势阱内的条件分布在割距离意义下都接近相应的 Erd˝os–R´ényi 模型。

为说明这一结果，我们简要介绍图子和割距离。若想更全面地了解这一主题，请参阅 [Lov12]。图子是一个对称可测函数 $W\colon [0,1]^2 \to [0,1]$，它推广了图的邻接矩阵这一概念。特别地，对于任意图 x，都有一个图子 W_x 表示 x，其定义如下：

$$W_x = \sum_{\{u,v\} \in \binom{[n]}{2}} x(\{u,v\}) \cdot \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{u-1}{n},\frac{u}{n}\right) \times \left[\frac{v-1}{n},\frac{v}{n}\right)} + \mathbf{1}_{\left[\frac{v-1}{n},\frac{v}{n}\right) \times \left[\frac{u-1}{n},\frac{u}{n}\right)} \right).$$

注意，如果两个图子在经过保测双射置换 $[0,1]$ 后于一个满测度集合上相等，我们就认为它们相同，因此映射 $x \mapsto W_x$ 不是单射。尽管如此，我们通常会直接将图 x 理解为图子 W_x，而不再另行说明。

对于任意固定的 n，我们都可以通过以下步骤从图子 W 中抽样得到一个随机的 n-顶点图 Y：首先，为 $v \in [n]$ 均匀且独立地抽样 n 个点 $s_v \in [0,1]$。然后，对于每个 $\{u,v\} \in \binom{[n]}{2}$，令 $Y(\{u,v\})$ 为相互独立的 Ber($W(s_u,\ s_v)$) 变量。利用这种抽样概念，我们可以通过定义 $\mathfrak{t}(G,\ W)$ 来定义图子的子图密度，即它表示从图子中抽取的一个 v-顶点样本 Y 包含图 G 作为子图的概率（两个图都定义在同一个带标号顶点集 [v] 上）。

根据这一定义，$\mathsf{t}(G,\ W_x)\ =\ \mathsf{t}(G,\ x)$，并且我们可以将哈密顿量 H 的定义扩展为任意图子的函数。

我们可以用割距离比较图子，其定义如下：

$$\mathbf{d}_{\square}(W,W') \coloneqq \inf_{\substack{\sigma:[0,1]\to[0,1]\\ \text{measure-preserving}\\ \text{bijection}}} \sup_{S,T\subseteq[0,1]} \left| \int_S \int_T (W(\sigma(s),\sigma(t)) - W'(s,t))\, ds\, dt \right|.$$

本文余下部分不会用到割距离的这一表述，但值得指出的是，在割距离下收敛等价于所有子图密度都收敛：

$$\mathbf{d}_{\square}(W_n,W)\to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{t}(G,W_n)\to \mathsf{t}(G,W) \quad \text{for all } G.$$

我们指出，这种等价关系可以定量化 [LS06、BCL+08]，但这与本文无关。

文献 [ZHL+21] 中的主要结果（一定义指数随机图模型下）时，以高概率接近一个常数图子 $W_p(s,t)\ =\ p$，其中 p 是以下自由能函数在 $[0,1]$上的一个极大值点：

$$L_\beta(q) \coloneqq \mathsf{H}(q) - \frac{1}{2}(q\log q + (1-q)\log(1-q)). \tag{3}$$

这里，我们将 $\mathsf{H}(q)\ =\mathsf{H}(W_q)$ 记作 $\mathsf{H}(q)\ =\mathsf{H}(W_q)$；由于若 G 有 e 条边，则 $\mathsf{t}(G,W_q)\ =q^{\mathsf{e}}$，这只是 q 的一个多项式。我们提醒读者，多项式 H 隐式地依赖于参数向量 β。令 M_β 表示 L_β 在 $[0,1]$ 上的全局极大值点集合；注意这是一个有限集合。于是，结合文献 [CD13] 中的定理 3.2 和 4.1 可知，对任意 $\eta>0$，存在常数 $C(\eta)\ c(\eta)\ >0$，使得

$$\mathbb{P}\left[\min_{p\in M_\beta} \mathbf{d}_{\square}(\widetilde{X},W_p) > \eta\right] \le C(\eta)\cdot e^{-c(\eta)\cdot n^2}. \tag{4}$$

现在我们选择 $\eta\ \ >0$ 足够小（取决于 ERGM 规范），使得割距离球 s

$$\mathcal{B}_p^\eta \coloneqq \{W \text{ graphon} : \mathbf{d}_{\square}(W,W_p) < \eta\}$$

当 p 在 M_β 中变化时彼此不相交。此外，对于每个 $p\in M_\beta$，定义 $\mathcal{M}(n,p)$ 为在 $\mathcal{B}_p^\eta$ 条件下的指数随机图模型分布。这里我们将一个有 n 个顶点的图 x 与其图子表示 W_x 等同。请注意，为了记号简洁，我们省略了 $\mathcal{M}(n,p)$ 对 η 的依赖，但读者应牢记这种依赖。由于集合 $\mathcal{B}_p^\eta$ 在自然动力学下相对稳定，我们将测度 $\mathcal{M}(n,p)$ 称为上文提到的亚稳态势阱。

根据这些定义，(4) 说明指数随机图模型分布可分解为测度 $\mathcal{M}(n,p)$ 的有限混合，其中 $p\in M_\beta$，且 $e^{-\Omega(n^2)}$ 全变差距离误差。此外，考虑 (η) 中任意小的 4 值可知，对于 $X\sim\mathcal{M}(n,p)$，有

$$\mathbf{d}_{\square}(X,W_p)\xrightarrow{\mathbb{P}}0$$

作为 $n\to\infty$。还可以很容易地验证，对于 $Y\sim\mathcal{G}(n,\ p)$（Erd˝os–R´enyi 模型），我们有

$$\mathbf{d}_{\square}(Y,W_p)\xrightarrow{\mathbb{P}}0$$

同样成立；由于 W_p 是确定性的，因此可得

$$\mathbf{d}_{\square}(X,Y)\xrightarrow{\mathbb{P}}0 \tag{5}$$

在 $X\sim\mathcal{M}(n,p)$ 与 $Y\sim\mathcal{G}(n,p)$ 之间的任意耦合下。因此，测度 $\mathcal{M}(n,p)$ 与 $\mathcal{G}(n,p)$ 在割距离的自然（宏观）尺度上无法区分。

1.1.2 全变差距离的不可比性

另一方面，在全变差距离的（微观）尺度上，测度 $\mathcal{M}(n,p)$ 与$\mathcal{G}(n,p)$ 尽可能地相距甚远。也就是说，$\mathbf{d}_{\mathrm{TV}}(\mathcal{M}(n,p)\ \mathcal{G}(n,p)) \to 1$ 对任意 $p \in M_\beta$ 均为 $n \to \infty$。

这一点最初由 [MX23] 在二星指数随机图模型的具体情形下证明。在该情形中，在哈密顿量（2）的定义中，我们取 $K=1$ 和 $G_1 = \wedge$ 为二星图或楔形图。在这种情况下，[MX23，推论 1.9] 给出了一个统计检验，用于以 $\sqrt{n}$-一致估计量的形式确定参数 β_0 和 β_1 $\hat{}\hat{}\hat{}\beta_0$ 以及 β_1（注意，该文章使用了不同的记号）。换言之，$\beta_0(x)$ 和 $\beta_1(x)$ 是 $\tilde{}$ 个 n 个顶点图 x 的函数，使得当从参数为 β_0 和 β_1 的完整二星指数随机图模型分布中抽取 X 时，我们有

$$\mathbb{P}\Big[\Big|\hat{\beta}_0(\widetilde{X}) - \beta_0\Big| > \lambda n^{-1/2}\Big] \le C_\lambda$$

$\hat{}\tilde{}$ 在 n 中一致地成立，其中某个常数为 $C_\lambda \to 0$，当 $\lambda \to \infty$ 时成立；类似地，$\beta_1(X)$ 估计 β_1。由于 Erd˝os–R´enyi 模型也属于参数满足 $\beta_1 = 0$ 的指数随机图模型，我们可以利用这些估计量来区分指数随机图模型与 Erd˝os–R´enyi 模型，并发现完整二星指数随机图模型分布与任意 Erd˝os–R´enyi 模型之间的全变差距离在 $n \to \infty$ 时趋于 1。由于在这一特殊情形下，分解为亚稳态势阱时，至多两个不同且对称的势阱具有相等权重，这也表明，对于二星指数随机图模型，$\mathbf{d}_{\mathrm{TV}}(\mathcal{M}(n,p)\ \mathcal{G}(n,p)) \to 1$ 在 $n \to \infty$ 时。

尽管本文仅考虑参数固定的情形 β，但值得一提的是，[MX23] 的可区分性结果在 [BN18] 中得到扩展，研究了β_1 随 n变化的二星指数随机模型分布。具体而言，若 $\beta_1 \gg n^{-1/2}$，则可以将二星指数随机图模型与 Erd˝os–R´enyi 模型区分开来；若 $\beta_1 \ll n^{-1/2}$，则无法区分。

对于更一般的指数随机图模型，我们尚未在文献中见到关于 $\mathbf{d}_{\mathrm{TV}}(\mathcal{M}(n,p)\ \mathcal{G}(n,p)) \to 1$这一事实的明确表述，但我们预计这一结果可由 [FLS24,Win25b,MW26]，的中心极限定理推出，这些定理应能支持构造参数估计量。不过，在相共存情形（即 $|M_\beta| > 1$）下可能存在一些技术难点，因为除二星情形外，亚稳态势阱的相对权重仍是一个尚未解决的问题；而在二星情形下，对称性意味着它们的权重相等。此外，在临界情形下（将在下文第 1.1.3 节中定义），目前还没有可用的分布极限定理。在任何（非临界）情形下，$\mathbf{d}_{\mathrm{TV}}(\mathcal{M}(n,p)\ \mathcal{G}(n,p)) \to 1$ 这一事实都可直接作为下文主要结果定理 1.1 的推论得出。

为了与（5）的形式相匹配，我们可以将以下事实重新表述为：$\mathbf{d}_{\mathrm{TV}}(\mathcal{M}(n,p)\ \mathcal{G}(n,p)) \to 1$ 这一事实：

$$\mathbf{1}_{\{X \neq Y\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 \tag{6}$$

对于 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$ 与 $Y \sim \mathcal{G}(n,p)$ 之间的任意耦合。

1.1.3 汉明-Wasserstein 距离与温度区域

正如我们在（5）和（6）中所看到的，在 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$ 与 $Y \sim \mathcal{G}(n,p)$ 的任意耦合下，

$$\mathbf{d}_{\square}(X,Y) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \qquad \text{and} \qquad \mathbf{1}_{\{X \neq Y\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

这两个距离都无法捕捉 X 与 Y之间的定量差异。这表明，我们应当寻找一种比 $\mathbf{1}_{\{x \neq y\}}$ 更粗、比 $\mathbf{d}_{\square}(x,y)$ 更细的距离。

一个初步想法是，在某个最优耦合下，量化 $\mathbf{d}_{\square}(X,Y)$ 收敛到零的速率。根据上述结果，我们必须有

$$1 \gg \mathbb{E}[\mathbf{d}_{\square}(X,Y)] \gtrsim n^{-2}$$

在使这一期望最小化的最优耦合下，因此考虑 $n^2\mathbf{d}_{\square}(x,y)$ 或许是很自然的。不过，还有一种更简单、也更容易理解的距离，其尺度与 $n^2\mathbf{d}_{\square}(x,y)$ 大致相同，即汉明距离 $\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x,y)$。它定义为 x与 y 不同的边的数量，也就是说，

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x,y) \coloneqq \sum_{e \in \binom{[n]}{2}} |x(e) - y(e)|.$$

当然，如果 $X \sim \mathcal{M}(n,\ p)$ 和 $Y \sim \mathcal{G}(n,\ p)$ 是独立地抽取的样本，那么 $\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X,\ Y)$ 很可能是 n^2 量级，但我们可以通过对 X 和 Y 进行最优耦合做得更好。因此，我们的主要目标是理解

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}(\mathcal{M}(n,p),\mathcal{G}(n,p)) \coloneqq \inf_{\substack{X\sim\mathcal{M}(n,p)\\ Y\sim\mathcal{G}(n,p)}} \mathbb{E}[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X,Y)], \tag{7}$$

其　　我们称之为汉明-*Wasserstein* 距离，或简称 Wasserstein 距离　　.

指数随机图模型与相应的 Erd˝os–R´enyi 模型之间的汉明–Wasserstein距离最早由 [RR19]在亚临界或高温情形中进行研究，该情形定义为满足以下条件的参数范围：β 函数 L_β （3）有唯一的局部极大值点 p ，且在该点处严格凸，即L''_β（p） < 0。这恰好是以下参数范围：在此范围内，*Glauber* 动力学以正确的条件概率逐条重新抽取边，并能快速混合 [BBS08]。这种快速混合是许多有用结果的基础；如 [RR19] 所示，它可用于给出汉明-Wasserstein 距离的上界：

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}(\mathcal{M}(n,p),\mathcal{G}(n,p)) \lesssim n^{3/2}.$$

注意，在亚临界情形中，亚稳态势阱始终只有一个，因为亚稳态势阱对应于 $p \in M_\beta$，即 L_β的全局极大值点集合。因此，在这种情形下，我们可以直接取完整的指数随机图模型分布，而不必使用 $\mathcal{M}(n,\ p)$。

此外，在亚临界区间， [GN24] 证明了一个高斯集中不等式，可用于推导出一个替代性证明，得到 $O(n^{3/2}\sqrt{\log\ n})$ 的（稍宽松）上界，其中涉及 $\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}(\mathcal{M}(n,p)\ \mathcal{G}(n,p))$。随后， [Win25a]将这一集中不等式推广到了超临界区间内的非临界亚稳态势阱 $\mathcal{M}(n,p)$。超临界区间（或低温区域）指的是这样一组参数β：在该区域内， L_β有多个局部极大值点，并且在至少一个全局极大值点处， L_β 严格凸。我们令 $U_\beta \subseteq M_\beta$ 表示满足 $L''_\beta(p) < 0$ 的全局极大值点 p 的集合。 $O(n^{3/2}\sqrt{\log\ n})$ 的上界也由 [Win25a] 推广到了 $p \in U_\beta$ 的任意亚稳态势阱 $\mathcal{M}(n,p)$，但相共存情形除外（此时 $|M_\beta| > 1$）；在这种情形下，如果 ERGM规范中的某些图含有环，则不在推广范围内。相共存的非森林情形中，证明所缺少的部分是亚稳态势阱内的一个 FKG不等式，而 [MW26] 给出了这一结果，从而将 $O(n^{3/2}\sqrt{\log n})$ 的上界推广到了 $p \in U_\beta$ 的所有亚稳态势阱 $\mathcal{M}(n,p)$。迄今为止，尚未探讨 $p \in M_\beta \setminus U_\beta$ 的临界情形；事实上，这种结果在该情形下是否成立也尚不明确。

本文通过证明 $\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}(\mathcal{M}(n,p)\ \mathcal{G}(n,p)) \lesssim n^{3/2}$，从而弥合了对数差距；该结论适用于超临界区间内的任意 $p \in U_\beta$。更重要的是，我们还证明了一个匹配的下界，同样适用于所有参数区间内的 $p \in U_\beta$。迄今为止，这一下界只在一种特殊指数随机图模型的亚临界区间中得到过，该模型的 ERGM 规范所包含的图均不含三角形 G_j DF [。要涵盖存在三角形的情形，需要新的思路；尤其是，我们提出了一种新的模型动力学行为近似方法，这是本文的主要贡献，并且我们预计它将在各种其他应用中发挥作用。此外，我们还将得到边际边概率 25]($\mathbb{E}[X]e$与] ($\mathbb{E}[Y]e$之间的距离上界] $= p$，这在超临界区间内是一个新结果。

1.2 结果陈述及一些证明思路

回顾一下， U_β 表示满足 $L''_\beta(p) < 0$的 L_β 的全局极大值点 $p \in [0,1]$ 集合（定义见式(3)）。在本节中，固定 $p \in U_\beta$，并令 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$，回顾第1.1.1节中亚稳态势阱测度 $\mathcal{M}(n,p)$的定义。注意， $\mathcal{M}(n,p)$隐式依赖于一个全局选定的割距离球半径 $\eta > 0$；不过，由于只要 η 足够小，结果便不依赖于 η ，因此我们在记号中省略这一依赖。此外，令 $\mathcal{G}(n,p)$表示 Erd˝os–R´enyi 测度。

我们的主要结果是关于 $\mathcal{M}(n,\ p)$与 $\mathcal{G}(n,\ p)$之间汉明-Wasserstein 距离的一个尖锐（在常数因子意义下）双边界。为证明下界，我们引入以下非退化假设：

假设： 在 ERGM规范 中，至少有一个图 G_j 不是边的不交并。 (8)

回想一下，在定义 ERGM 哈密顿量时，我们已假设 $\beta_j > 0$ 对于 $j \neq 0$ 成立，因此，任何满足上述假设的 ERGM，其哈密顿量中都会包含一个对应于非退化图的非零项。我们指出，该假设对于上界并非必要，但我们预计在退化情形下，上界不会是最优的，因此主结果均在这一假设下完整陈述。

定理 1.1 。 在非退化假设 (8)下，我们有 $\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}(\mathcal{M}(n,p)\ \mathcal{G}(n,p)) = \Theta(n^{3/2})$.

在定理 1.1的证明过程中，我们还将推导出以下关于 $\mathcal{M}(n,p)$ 下边的边缘概率的界。这将 [FLSW25, 命题 11] 从参数的亚临界区间推广到超临界区间的亚稳态势阱，尽管我们采用了不同的推理思路。我们还指出，这一结果回应了超临界区间中的 [Win25a猜想 21]。

定理 1.2。 对于 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$，有 $\mathbb{E}[X(e)] = p + O(n^{-1})$。

我们简要讨论一下这两个结果背后的思路，尤其是定理 1.1。首先注意到，给定图中其余部分时，边指示变量的条件期望，即

$$\mathbb{E}[X(e)|X(e') \text{ for all } e' \neq e], \tag{9}$$

可以显式地写成图 X的函数。暂且将这个变量记为 $\hat{}p_e(X)$，不过我们很快会引入更明确的记号。定理 1.2 陈述的是

$$|\mathbb{E}[\hat{p}_e(X)] - p| \lesssim n^{-1},$$

然而，事实证明（见下文引理5.1 ），定理 1.1 的陈述是

$$\mathbb{E}[|\hat{p}_e(X) - p|] = \Theta(n^{-1/2}).$$

因此，为了证明我们的结果，特别是定理1.1中的下界，我们需要精确理解随机变量 $\hat{}p_e(X)$的分布。我们所提出的主要工具是一个近似表达式，它仅用两个简单量来表示 $\hat{}p_e(X)$： X 中包含边 e 的三角形数量，以及 X 中包含 e的楔形（二星）数量。我们将这一事实的精确表述推迟到下文推论 4.4 ，现在先简要介绍其证明思路。

首先，由（1），条件期望（9）可用哈密顿量表示如下：

$$\hat{p}_e(X) = \frac{e^{n^2\mathsf{H}(X^{+e})}}{e^{n^2\mathsf{H}(X^{-e})} + e^{n^2\mathsf{H}(X^{+e})}} = \frac{e^{n^2\partial_e\mathsf{H}(X)}}{1 + e^{n^2\partial_e\mathsf{H}(X)}} = \varphi(n^2\partial_e\mathsf{H}(X)).$$

这里我们引入记号 x^{+e} 和 x^{-e}，分别表示添加或删除边 e 后的图 x；此外还引入离散导数 $\partial_e f(x) = f(x^{+e}) - f(x^{-e})$，以及函数 $\varphi(s) = \frac{e^s}{1+e^s}$。表达式 $\varphi(n^2\partial_e\mathsf{H}(X))$ 虽然更长，但比 $\hat{}p_e(X)$表达的信息更丰富，今后我们将用它表示这个量。注意，如果 X 接近割距离球 $\mathcal{B}_p^\eta$的边界，上述等式实际上并不成立，因为在这种情况下，重新采样边 e 后得到 X^{+e} 的概率可能为零，而不是 $e^{n^2\mathsf{H}(X^{+e})}$ （对于 X^{-e}，情况也类似）。不过，我们暂且忽略这个技术细节。

现在，回顾哈密顿量的定义（2），我们可以写成

$$n^2\partial_e\mathsf{H}(x) = \sum_{j=0}^{K} \beta_j \frac{\partial_e\mathsf{N}_G(x)}{n^{\mathsf{v}_j-2}}, \tag{10}$$

其中，v_j 表示ERGM规范中图 G_j 的顶点数。注意，量$\partial_e\mathsf{N}_G(x)$与 x^{+e} 中 G的同态数量相同，且这些同态使用边 e。为与后文的记号保持一致，我们引入符号$\mathsf{N}_G(x,e)$表示同一量，并将其视为一种独立的同态计数。

我们论证的核心是，对于任意图 G，用 $\mathsf{N}_\triangle(X,e)$ 和 $\mathsf{N}_\wedge(X,e)$ 的线性组合，在 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$ 下近似量 $\mathsf{N}_G(X,e)$，其中 $\triangle$ 和 $\wedge$ 分别表示三角形图和楔形图（二星）。这一近似的直观理解可以从动力学角度入手：考虑通过 Glauber 动力学 (X_t) 从 $\mathcal{M}(n,p)$ 中抽样；在每一步中，均匀随机地选取一条边，并按照正确的条件分布重新抽样（即其出现的概率由 (9) 给出）。我们将比较 $\mathsf{N}_G(X_t,e)$ 在此动力学下的变化过程，与 $\mathsf{N}_\triangle(X_t,e)$ 和 $\mathsf{N}_\wedge(X_t,e)$ 的变化过程。如果选中的边 e' 与 e 不相邻，那么 $\mathsf{N}_\triangle(X_t,e)$ 和 $\mathsf{N}_\wedge(X_t,e)$ 都不会发生变化。相应地，在这种情况下，$\mathsf{N}_G(X_t,e)$ 虽然可能发生变化，但事实证明，其变化幅度

与选中边相邻于 e时所引起的变化相比可以忽略不计。在这种情况下，$\mathsf{N}_G(X_t, e)$ 可能发生很大变化，但我们可以将这一变化精确地匹配为$\mathsf{N}_\triangle(X_t, e)$ 的变化与 $\mathsf{N}_\wedge(X_t, e)$ 的变化的线性组合。这一分析的结果见下文的命题 4.1 。

我们指出，在以往关于指数随机图的研究中 [SS20, FLS24, Win25b], ，曾使用对 $\mathsf{N}_G(X)$（即总同态计数）的线性近似。换言之，研究者将 $\mathsf{N}_G(X)$ 与总边数的某个倍数进行比较。对于使用某个特定顶点的同态数量，也曾通过与该顶点的度进行线性比较，这在 [Win25b] 中同样有用。另一方面，考虑 $\mathsf{N}_G(X, e)$（即使用某条特定边的同态数量）时，线性近似就是仅与 $\mathsf{N}_\wedge(X, e)$ 进行比较。正如 [DF25], 所示，这种近似确实有一定作用，但前提是 ERGM规范中的所有图都不含三角形。

另一方面，正如我们的结果所示，当 ERGM规范中存在包含三角形的图时，$\mathsf{N}_\triangle(X, e)$ 这一项不可或缺。甚至可以针对 Erd˝os–R´enyi 模型 $Y \sim \mathcal{G}(n, p)$ 做一个简单的粗略计算，从而发现 $\mathsf{N}_\triangle(Y, e)$ 无法通过 $\mathsf{N}_\wedge(Y, e)$ 的任何常数倍得到良好近似。因此，本工作的主要技术和概念贡献之一，是处理 $\mathsf{N}_\triangle(X, e)$ 和 $\mathsf{N}_\wedge(X, e)$ 都发挥作用的情形。我们还提及，在本文准备期间，另一篇文章 [FLSW25] 被发布到了 arXiv，该文在参数的亚临界区间使用了类似的近似。文中利用这种近似，证明了在给定边数的指数随机图模型样本中楔形数量的中心极限定理，展示了这类非线性近似的多用途性。

最后，我们要指出，定理 1.1 的下界实际上还有另一种证明，该证明依赖于作者的另一项成果 [Win25b，定理 1。3]这是 Chris Jones 在本文准备期间作者所作的一次报告后指出的，我们经其许可在第 5.3 节重现这一论证。不过，由于 [Win25b，定理 1。3] 本身的证明相当复杂，我们认为本文正文中给出的定理 1.1 的原始论证更加自洽，也更具“赤手空拳”的特点。此外，原始证明还有一个优点，即它促成了前述近似；该近似能够对指数随机图模型 Glauber动力学提供更加精细的控制。我们预计，这一结果（由下文的命题 4.1 和推论 4.4 所体现）将在许多其他情境中发挥作用。

1.3 文章概述

我们首先在第 2 节汇集文献中近期为指数随机图模型的亚稳态势阱发展出的多种实用工具，即集中性与 FKG 不等式。

接着，我们在第 3 节证明定理 1.2，提出一种用于上界的新自举论证，并讨论为何不存在相应的下界。在第 3.1 节中，我们还给出若干在全文中会用到的引理。

随后，我们在第 4 节证明命题 4.1 和推论 4.4，以 $\mathsf{N}_\triangle(X, e)$ 和 $\mathsf{N}_\wedge(X, e)$ 表示 $\varphi(n^2\partial_e\mathsf{H}(X))$ 对 $X \sim \mathcal{M}(n, p)$ 的近似。我们还证明了近似变量的涨落下界，并由此得到 $\varphi(n^2\partial_e\mathsf{H}(X))$ 的涨落下界。

最后，在第 5 节中，我们利用前几节的所有结果，简要证明定理 1.1，并给出下界的另一种证明。

1.4 致谢

我获得了美国国家科学基金会研究生研究奖学金（资助编号 DGE 2146752）的部分支持。感谢我的导师 Shirshendu Ganguly 提出这个课题并与我进行了有益的讨论。也感谢 Xiao Fang 和 Nathan Ross 对本文初稿提出的宝贵意见，并感谢 Chris Jones 指出了定理 1.1 中下界的另一种证明。

2 亚稳态混合及其后果

本节将陈述下文所需的若干前提。其中最重要的是亚稳态混合这一概念，它是一种强大的工具，可帮助我们推导出各种有用的结论。我们将在下文第2.1 节简要介绍指数随机图模型亚稳态混合的相关结果，并在第 2.2 节陈述后续将用到的推论。

2.1 亚稳态混合

关于指数随机图模型 Glauber 动力学混合时间的研究可追溯至 [BBS08]，他们通过证明该动力学在一个“良好”集合 Γ_p^ε （将在下文定义）中呈现压缩，且该集合也是一个吸引阱，从而证明了亚临界（高温）区域内的快速混合。随后， [BNN24] 证明，在亚稳态势阱测度 $\mathcal{M}(n,p)$下， Γ_p^ε也很大，由此得到亚稳态混合；也就是说，当初始条件取自 Erd˝os–R´enyi 模型 $\mathcal{G}(n,p)$时，从温启动出发可快速混合至平稳状态。 [Win25a] 对此作了进一步分析，提取出 Γ_p^ε 的一个连通子集 Λ^* ，且该子集仍然很大。从不一定是温启动的初始状态出发应用路径耦合时，连通性是一项重要性质；对于我们的应用而言，尤其是在推导集中不等式时（如 [Win25a, Win25b]所做），它也至关重要。

为准确表现并避免混淆，本节用 $\widetilde{X}_t^x$ 表示对于完整无条件 ERGM Glauber 动力学（即相对于完整无条件 ERGM 测度的 Glauber 动力学）。只有当该动力学试图离开 $\mathcal{B}_p^\eta$ 所定义的割距离球 $\mathcal{M}$（n， p）时，它才会与条件动力学（X_t^x）有所不同；此时无条件动力学会继续运行，而条件动力学则保持不动。

为解释亚稳态混合，我们先回顾一下 Γ_p^ε 中定义的 [BBS08]“良好”集合。直观地说，在这个集合中，指数随机图模型 Glauber 动力学的行为与按照包含概率 p简单地对边进行重新采样非常相似。为精确描述这一点，对于任意具有 G 个v 个顶点和e 条边的有限图，以及任意潜在边 $e \in \binom{[n]}{2}$，定义如下：

$$r_G(x,e) := \left(\frac{N_G(x,e)}{2\mathsf{e}n^{\mathsf{v}-2}}\right)^{\frac{1}{\mathsf{e}-1}},$$

回顾一下，$\mathrm{N}_G(x,\ e)$ 表示 x^{+e} 中使用边 e 的 G 同态数量。为说明这一设定的动机，请注意，若 $Y \sim \mathcal{G}(n,\ p)$，则 $r_G(Y,\ e) \approx p$ 以高概率成立。此外，无条件 ERGM Glauber 动力学的更新概率恰好为

$$\mathbb{P}\left[\widetilde{X}_1^x(e)=1\right] = \varphi(n^2\partial_e \mathsf{H}(x)) = \varphi\left(2\sum_{j=0}^{K}\beta_j \mathsf{e}_j \cdot r_{G_i}(x,e)^{\mathsf{e}_j-1}\right),$$

回忆哈密顿量的定义（2），其中 G_j 是 ERGM 规范中的图（具有 v_j 个顶点和 e_j 条边），对应于 $0 \le j \le K$。我们还提醒读者，函数 $\varphi(s) = \frac{e^s}{1+e^s}$ 是在第 1.2 节中引入的。容易验证，每个 $p \in U_\beta$ （即 L_β 在（3）中定义的严格凹全局最大值点集合）都是映射的一个吸引不动点

$$q \mapsto \varphi(2\mathsf{H}'(q)) = \varphi\left(2\sum_{j=0}^{K}\beta_j \mathsf{e}_j q^{\mathsf{e}_j-1}\right),$$

因此，如果所有 $r_G(x,\ e)$ 都接近 p，那么 X_1^x 也应具有这一性质。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们定义

$$\Gamma_p^\varepsilon := \left\{x \in \{0,1\}^{\binom{[n]}{2}} : \begin{array}{l} |r_G(x,e)-p| \le \varepsilon \text{ for all } e \in \binom{[n]}{2} \text{ and for all graphs} \\ G \text{ with vertex count at most } \max\{\mathsf{v}_j : 0 \le j \le K\} \end{array}\right\}.$$

根据这个定义，以下引理对任意 $p \in U_\beta$ 都成立。事实上，对于任意 p，只要它是映射 $q \mapsto \varphi(2\mathsf{H}'(q))$ 的吸引不动点，该引理同样成立；这等价于它是函数 L_β 在（3）中定义的局部极大值点，不过我们不会在如此一般的情形下使用它。这里我们再次使用第 x^{+e} 节和 x^{-e} 1.2 节中引入的记号，分别表示添加或移除边后的图 x。此外，我们指出，*Glauber* 动力学链之间的单调耦合，针对 $\{0,1\}^{\binom{[n]}{2}}$ 上的链，是指所有链都选择同一条均匀随机抽取的边进行更新，并对边指示变量对应的后续伯努利随机变量进行最优耦合。

引理 2.1 （ [BBS08]中的引理 18）。 对于所有 $p \in U_\beta$，存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\kappa > 0$，使得若 $x \in \Gamma_p^\varepsilon$，则对于所有 $e \in \binom{[n]}{2}$，在单调耦合下，我们有

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}\left(\widetilde{X}_1^{x^{+e}}, \widetilde{X}_1^{x^{-e}}\right)\right] \le 1 - \frac{\kappa}{n^2}.$$

如上所述， [BNN24] 证明了 Γ_p^ε 在相位测度 $\mathcal{M}(n,\ p)$ 下对于任意 $p \in U_\beta$也很大，从而导致亚稳态混合。这里重要的是， p 并不只是 局部 极大化 L_β，因为 [BNN24] 的方法似乎不适用于此类情形；此外，一个有趣的问题是，这样的结果能否推广到这些“较小”的亚稳态势阱。无论如何，下面的结果改进了 [BNN24] 的结果，表明 Γ_p^ε 中实际上存在一个大的子集，该子集在作为一个连通 对象考察时最近邻汉明立方体 $\{0,1\}^{\binom{[n]}{2}}$ 的诱导子图。在此结果中，$\mathrm{indiam}(\Lambda^*)$ 表示根据内部汉明距离$\mathbf{d}_{\Lambda^*}$定义的直径，其中$\mathbf{d}_{\Lambda^*}(x,\ y)$ 是完全包含在 Λ^* 内的 x 和 y 之间最短路径的汉明长度。特别地，$\mathrm{indiam}(\Lambda^*) < \infty$ 这一事实意味着上述连通性。

命题 2.2（ [Win25a]的命题 5.9。对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个集合 $\Lambda^* \subseteq \mathcal{B}_p^{\eta/2} \cap \Gamma_p^\varepsilon$，使得$\mathrm{indiam}(\Lambda^*) \le 2n^2$ 且 $\mathbb{P}[X \in \Lambda^*] \ge 1 - e^{-\Omega(n)}$ 若 $X \sim \mathcal{M}(n,\ p)$，并且满足：若$\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x,\ \Lambda^*) \le 1$，则

$$\mathbb{P}\Big[X_t^x \notin \Gamma_p^\varepsilon \cap \mathcal{B}_p^{\eta/2} \text{ for some } t \le n^3\Big] \le e^{-\Omega(n)}.$$

事实 $\Lambda^* \subseteq \mathcal{B}_p^{\eta/2}$除了 Γ_p^ε 之外的重要性在于，当动力学从 $\mathcal{B}_p^{\eta/2}$开始时，它将没有机会尝试离开 $\mathcal{B}_p^\eta$，至少当 n足够大时是如此。这意味着，如果 $\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x, \Lambda^*) \le 1$~，那么 X_1^x 和 X_1^x （分别进行一步无条件动力学和条件动力学）具有完全相同的分布，因此我们可以对条件动力学使用引理 2.1给出的收缩估计。利用这一点，我们陈述一个简洁的结果，以刻画从良好连通集 Λ^* 中或其附近开始的链的混合行为；该集合由命题 2.2保证存在。按照惯例，我们令 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$以及（X_t^x）表示从 x开始的条件动力学。我们还稍微滥用记号，对随机变量 A 和 B 写作 $\mathbf{d}_{\mathrm{TV}}(A,B)$，以表示 A 和 B的分布之间的全变差距离。

引理 2.3 ([Win25a]中的引理 5.12。存在常数 $C, c > 0$ 使得

$$\mathbf{d}_{\mathrm{TV}}(X_{n^3}^x, X) \le e^{-cn}$$

对所有满足 x $\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x, \Lambda^*) \le 1$ 的情形，在单调耦合下有

$$\mathbb{E}\Big[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X_t^x, X_t^{x'})\Big] \le C\Big(1 - \frac{\kappa}{n^2}\Big)^t$$

对所有满足 $x \in \Lambda^*$ 和 x' 的情形，其中 $\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x,x') = 1$，以及所有 $t \le n^3$。

2.2 亚稳态混合的后果

现在我们来陈述接下来将用到的亚稳态混合的后果。这些后果可分为两类：第一类是各种集中不等式及相关事实；第二类是近似 FKG 不等式及其推论。

2.2.1 集中不等式

首先，我们有一个集中不等式，它几乎可以直接用于指数随机图模型样本的利普希茨观测量。为陈述该不等式，我们先引入函数在 n 个顶点图 x 上的利普希茨向量这一概念。若 f具有利普希茨向量 $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$，则称之为利普希茨向量，其中 $|f(x^{+e}) - f(x^{-e})| \le \mathcal{L}_e$对所有 $e \in \binom{[n]}{2}$ 以及所有$x \in \{0,1\}^{\binom{[n]}{2}}$均成立。与上文一样， $x^{\pm e}$ 表示通过添加或删除边 e 得到的图 x。如果 f具有利普希茨向量 $\mathcal{L}$，我们也称 f 是 $\mathcal{L}$-Lipschitz。在下面的结果中，按照惯例， $X \sim \mathcal{M}(n,\ p)$。

定理 2.4 （ [Win25a]中的定理 1.1）。 存在常数 $C,\ c > 0$ 它们仅取决于 *ERGM* 规范以及 $p \in U_\beta$ 的选择，使得对于所有 $\mathcal{L}$*-Lipschitz* f 以及所有满足 $\lambda \ge 0$ 的 $\lambda \le c\|\mathcal{L}\|_1$,

$$\mathbb{P}[|f(X) - \mathbb{E}[f(X)]| > \lambda] \le 2\exp\left(-c \cdot \max\left\{\frac{\lambda^2}{n^2\|\mathcal{L}\|_\infty^2}, \frac{\lambda^2}{\|\mathcal{L}\|_1\|\mathcal{L}\|_\infty} - \exp\left(\frac{C\lambda}{\|\mathcal{L}\|_\infty} - cn\right)\right\}\right) + e^{-cn}.$$

这个结果易于应用，但未必总能给出最优界限，因为利普希茨向量这一概念相当粗略，往往无法足够精确地刻画我们所考虑量的行为，以满足结果所需的精度。因此，我们需要将定理 2.4 与下述结果结合起来。该结果篇幅稍长，但灵活性更强，最初由 [BBL22], 提出，不过我们采用的是 [Win25a、Win25b] 中给出的版本，它更适用于我们的应用。该结果的适用范围比指数随机图模型更广；为陈述该结果，令 X 为取值于某个有限状态空间 Ω 的随机变量。我们还用（X_t^x）表示一个以 X 的分布为平稳分布、并从$X_0^x = x$出发的马尔可夫链。最后，我们用 P 表示该马尔可夫链的转移核。

定理 2.5 ([BBL22], 推论 4.4（ [Win25a]）。设 $\Lambda \subseteq \Omega$ 和 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，其中某些正数为 V、J、ε、δ、M，某个时间为 $T \in \mathbb{N}$，某个点为 $z \in \Lambda$。

(i) 我们对 f 的方差代理量有一个界：对所有 $x \in \Lambda$,

$$\sum_{x' \in \Omega} P(x, x') \sum_{t=0}^{T-1} \Big(\mathbb{E}[f(X_t^x)] - \mathbb{E}[f(X_t^{x'})] \Big)^2 \leq V.$$

(ii) 我们对以两个相邻初始状态出发的马尔可夫链之间、用 f 衡量的未来期望差异有一个界：对所有 $x \in \Lambda$ 和 $x' \in \Omega$ 中满足 $P(x, x') > 0$ 的状态，以及对所有 $t \geq 0$,

$$\Big| \mathbb{E}[f(X_t^x)] - \mathbb{E}[f(X_t^{x'})] \Big| \leq J.$$

(iii) 从 z出发时，马尔可夫链以高概率在 Λ 中停留时间 T :

$$\mathbb{P}[X_t^z \in \Lambda \text{ for } 0 \leq t < T] \geq 1 - \epsilon.$$

(iv) 从 z 出发时，马尔可夫链相对于 f 快速混合：

$$\mathbf{d}_{\mathrm{TV}}(f(X_T^z), f(X)) \leq \delta.$$

(v) 函数 f 接近其均值且有界：对所有 $x \in \Omega$,

$$|f(x) - \mathbb{E}[f(X)]| \leq M.$$

那么对于所有 $\lambda \geq 2\delta M$，我们有

$$\mathbb{P}[|f(X) - \mathbb{E}[f(X)]| > \lambda] \leq 2 \exp\left(- \frac{(\lambda - 2\delta M)^2}{2V + \frac{4}{3} J(\lambda - 2\delta M)} \right) + \epsilon + \delta.$$

严格来说，这个结果并不是亚稳态混合的推论。相反，我们将利用亚稳态混合的结果来应用它，从而得到一个界。在这一过程中，一个重要且有用的工具是下面这个引理，它允许我们将 Π 仅仅是较大的集合 Λ 提升为具有所需性质的集合，以便有效地应用定理2.5 。这里，我们回到指数随机图模型的设定，其中 $X \sim \mathcal{M}(n, p)$ 和 (X_t^x) 是条件 ERGM Glauber 动力学，并令 Λ^* 表示命题2.2中的集合。

引理 2.6（ [Win25b]中的引理 4.3）。假设 $\Pi \subseteq \mathcal{B}_p^\eta$ 满足 $\mathbb{P}[X \in \Pi] \geq 1 - \exp\big(-\Omega(n^\xi)\big)$，其中$\xi \in (0,1)$。那么存在一个集合 $\Lambda \subseteq \Lambda^*$，使得对于所有 x 满足$\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x, \Lambda) \leq 1$的情形，我们有

$$\mathbb{P}[X_t^x \in \Pi \text{ for all } 0 \leq t \leq n^3] \geq 1 - \exp\big(-\Omega(n^\xi)\big).$$

此外，存在某个 $z \in \Lambda$ 使得

$$\mathbb{P}[X_t^z \in \Lambda \text{ for all } 0 \leq t \leq n^3] \geq 1 - \exp\big(-\Omega(n^\xi)\big).$$

此外，我们还需要另一个结果，以便更精确地控制动态过程，并达到我们所需的界限。为陈述该结果，我们引入以下局部汉明距离；这种距离仅衡量指定顶点 $v \in [n]$ 或边 $e \in \binom{[n]}{2}$附近两个图之间的差异：

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}^{\mathrm{loc}(v)}(x,x') \coloneqq \sum_{e \ni v} |x(e) - x'(e)|, \qquad \mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}^{\mathrm{loc}(e)}(x,x') \coloneqq \sum_{e' \cap e \neq \varnothing} |x(e') - x'(e')|. \tag{11}$$

以下结果及其推论可以帮助我们控制这些量。与上文一样，我们用 X_t^x表示条件 ERGM Glauber 动力学，并再次用 Λ^* 表示命题 2.2中的集合。此外，我们用 $x^{\oplus e}$ 表示图 x，其中边 e的状态已翻转。

命题 2.7 ([Win25b]中的命题 1.7)。存在常数 $C > 0$ 使得以下结论成立。设 $v \in [n]$ 和 $e \in \binom{[n]}{2}$ 满足 $v \notin e$。假设 $x \in \Lambda^*$，并令 $x' = x^{\oplus e}$。那么对所有 $t \geq 0$，有

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}^{\mathrm{loc}(v)}(X_t^x, X_t^{x'})\right] \leq \frac{C}{n}.$$

以下推论显然成立，因为如果 $e = \{u, v\}$ 那么 $\mathbf{d}^{\mathrm{loc}(e)}$汉明距离$(x,\ x') \leq \mathbf{d}^{\mathrm{loc}(u)}$汉明距离$(x,\ x') + \mathbf{d}^{\mathrm{loc}(v)}$汉明距离$(x,\ x')$。

推论 2.8. 存在某个常数 $C > 0$，使得下述结论成立。设 $e, e' \in \binom{[n]}{2}$ 满足 $e \cap e' = \varnothing$。假设 $x \in \Lambda^*$，并令 $x' = x^{\oplus e'}$。那么对所有 $t \geq 0$，我们都有

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}^{\mathrm{loc}(e)}(X_t^x, X_t^{x'})\right] \leq \frac{C}{n}.$$

2.2.2 近似 FKG 不等式

除了集中不等式之外，亚稳态混合的另一个重要推论是下述关于 $\mathcal{M}(n,\ p)$ 的近似 FKG 不等式，我们将在后文反复用到。这里，$\|f\|_\infty$ 指任意 n 阶图 x 上 $f(x)$ 可能取得的最大值。若对于所有 $x \in \{0,1\}^{\binom{[n]}{2}}$ 和所有 $e \in \binom{[n]}{2}$，函数 f 都满足 $f(x^{+e}) \geq f(x^{-e})$，则称其为逐坐标递增函数。

定理 2.9 （ [MW26]中的定理 1.2）。设 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$。那么存在某个常数 $c > 0$，使得对于任意坐标单调递增的 f 和 g，

$$\mathrm{Cov}[f(X), g(X)] \geq -e^{-cn}\|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

近似 FKG 不等式的一个有用推论是以下结果，它控制了指数随机图模型样本中边指示变量的多线性矩。该结果最初由 [GN24] 在亚临界参数区间内利用 [New80，BS98] 基于 FKG不等式给出的协方差界证明。后来，[Win25a，MW26] 将其推广到超临界区间的亚稳井。

命题 2.10 （ [MW26]中的命题 5.3）。固定一个整数 k。存在某个常数 $C > 0$，使得若 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$ 和 e_1，……，$e_k \in \binom{[n]}{2}$ 是互不相同的边，则

$$\left| \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{k} X(e_j)\right] - \mathbb{E}[X(e)]^k \right| \leq \frac{C}{n},$$

其中，e 表示 $\binom{[n]}{2}$ 中的任意一条边。

最后，作为命题 2.10 和定理 2.4 的推论，我们得到关于边的边缘概率的以下先验界；该结果也首先由 [GN24] 在亚临界情形下证明，随后由 [Win25a在超临界区间的亚稳态势阱26]中推广。

命题 2.11 （ [MW26]的命题 5.4）。存在某个常数 $C > 0$，使得如果 $X \sim \mathcal{M}(n,\ p)$，则

$$|\mathbb{E}[X(e)] - p| \leq C\sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

对任意 $e \in \binom{[n]}{2}$。

3 边的边际概率

本节中　　我们证明定理 1.2，这改进了命题2.11 ，并证明实际上

$$|\mathbb{E}[X(e)] - p| \lesssim n^{-1},$$

其中，按照惯例，$X \sim \mathcal{M}(n,\ p)$。我们预计，该上界在一般情况下是最优的，即通常无法改进，这一点可由 [Win25a]中给出的模拟结果予以证明。然而，即使在类似于（8）的非退化假设下，一般情况下也不存在相匹配的下界；这一点将在第3.2节中解释。

3.1 通过自举得到上界

本节下面对定理1.2 的证明可以看作一种自举论证：将一个次优的上界（本例中由命题2.11给出）改进为最优上界。为此，我们对 $\mathbb{E}[X(e)] - p$应用适当的泰勒展开，通过匹配各项，我们发现次优误差界被提升到一个较高的幂次，因而被吸收，只留下阶为 n^{-1}的最优上界，而这最终可追溯至命题2.10中出现的误差。

我们先给出几个引理，讨论重要量 $X \sim \mathcal{M}(n,\ p)$ 的性质$n^2\partial_e\mathsf{H}(X)$，该量已在第 1.2 节讨论。这些结果是命题2.10以及定理2.4的应用，并将在定理 1.2 的证明中多处用到，之后也会用于定理 1.1。

首先，我们用边的边缘概率 $n^2\partial_e\mathsf{H}(X$的多项式函数来近似其期望值$\mathbb{E}[X(e)]$。回顾第 1.1.1 节，我们将 H 不仅视为图的函数，也视为 $q \in [0,1]$的多项式函数：将子图密度 $\mathfrak{t}(G,\ q)$ 解释为 q^{e}，其中 G 有 e 条边。

引理 3.1. 设 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$。则有

$$\left|\mathbb{E}\left[n^2\partial_e\mathsf{H}(X)\right] - 2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])\right| \lesssim n^{-1}.$$

引理 *3.1* 的证明。 回顾分解（10），我们有

$$n^2\partial_e\mathsf{H}(x) = \sum_{j=0}^{K} \beta_j \frac{\mathsf{N}_{G_j}(x,e)}{n^{\mathsf{v}_j-2}}, \tag{12}$$

其中，$\mathsf{N}_G(x,\ e)$ 表示图 G 到 x^{+e} 的同态中使用边 e 的数量。这里提醒读者，G_j 是 ERGM 规范中的图，而 G_j 有 v_j 个顶点和 e_j 条边。

对于每个图 G，数量 $\mathsf{N}_G(x,e)$ 可写成一组指示函数之和，分别对应于各种映射 $\mathcal{V}(G) \to [n]$ 覆盖边 e 且为 x^{+e} 中同态的事件。若 G 有 v 个顶点和 e 条边，则共有 $2\mathsf{e}n^{\mathsf{v}-2}$ 个这样的指示函数；因子 $2\mathsf{e}$ 来自选择映射到 e 的边 $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}(G)$，以及选择方向，即 $\mathfrak{e} = \{\mathfrak{u},\mathfrak{v}\}$ 是通过 $\mathfrak{u} \mapsto u$ 和 $\mathfrak{v} \mapsto v$ 映射到 $e = \{u,v\}$，还是通过 $\mathfrak{u} \mapsto v$ 和 $\mathfrak{v} \mapsto u$ 映射到 $e = \{u,v\}$。因子 $n^{\mathsf{v}-2}$ 来自选择 G 其余顶点的映射位置。求和中的映射除 $O(n^{\mathsf{v}-3})$ 外均为单射，而单射是同态的指示函数就是 $\mathsf{e}-1$ 个不同边变量的乘积（因为按 $\mathsf{N}_G(x,e)$ 的定义，边 e 总是包含在内）。因此，命题 2.10 得出

$$\mathbb{E}[\mathsf{N}_G(X,e)] = 2\mathsf{e}n^{\mathsf{v}-2}\mathbb{E}[X(e)]^{\mathsf{e}-1} + O(n^{\mathsf{v}-3}),$$

其中误差项既来自非单射映射的数量，也来自命题 $O(n^{-1})$ 中的误差 2.10。因此，由（12）可得

$$\mathbb{E}\left[n^2\partial_e\mathsf{H}(X)\right] = 2\sum_{j=0}^{K} \beta_j\mathsf{e}_j\mathbb{E}[X(e)]^{\mathsf{e}_j-1} + O\left(n^{-1}\right),$$

而上面的和恰好等于 $2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])$，证明完毕。 □

接下来，我们利用定理 2.4 提供的高斯集中不等式，给出 $n^2\partial_e\mathsf{H}(X)$ 的中心矩上界。

引理 3.2。 令 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$。那么对于任意 $k \geq 1$，有

$$\mathbb{E}\Big[\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - \mathbb{E}[n^2\partial_e \mathsf{H}(X)]\big|^k\Big] \lesssim n^{-k/2}.$$

引理的证明 *3.2*。 再次使用分解（12）；我们将对每一项应用定理 2.4，然后合并所得的界。首先注意，$j=0$ 对应于单边的项已经满足 $\mathsf{N}_{G_0}(x,e) \equiv 2$ 为常数，这意味着该项对中心矩没有贡献，因此只需对函数 2.4 应用定理 $\mathsf{N}_G(x,e)$；其中 G 是一个具有 $\mathsf{v} \geq 3$ 个顶点和 e 条边的图。

因此，我们来计算这类 $\mathsf{N}_G(x,e)$ 的利普希茨向量 $\mathcal{L}$。首先，该量不依赖于 $x(e)$，所以我们可以取 $\mathcal{L}_e = 0$。其次，对于所有与 e 相邻的 e'，有 $\lesssim n^{\mathsf{v}-3}$ 个从 G 到 x、同时使用 e 和 e' 的映射，因此这些 e' 可以取 $\mathcal{L}_{e'} \lesssim n^{\mathsf{v}-3}$。最后，对于所有与 e 不相邻的 e''，有 $\lesssim n^{\mathsf{v}-4}$ 个使用 e 和 e'' 的映射，因此这些 e'' 可以取 $\mathcal{L}_{e''} \lesssim n^{\mathsf{v}-4}$。由此，利普希茨向量的范数满足

$$\|\mathcal{L}\|_\infty \lesssim n^{\mathsf{v}-3}, \qquad \text{and} \qquad \|\mathcal{L}\|_1 \lesssim n \cdot n^{\mathsf{v}-3} + n^2 \cdot n^{\mathsf{v}-4} \lesssim n^{\mathsf{v}-2}.$$

因此，使用定理 2.4 上界中最大值的第二个表达式，我们得到常数 C，$c>0$使得

$$\mathbb{P}[|\mathsf{N}_G(X,e) - \mathbb{E}[\mathsf{N}_G(X,e)]| > \lambda] \leq 2\exp\left(-c\frac{\lambda^2}{n^{2\mathsf{v}-5}} + ce^{C\lambda n^{3-\mathsf{v}} - cn}\right) + e^{-cn}$$

对于 $\lambda \leq cn^{\mathsf{v}-2}$。如果我们只考虑 $\lambda \leq n^{\mathsf{v}-2.1}$，调整常数后，上界就变为 $2\exp\big(-c\lambda^2 n^{5-2\mathsf{v}}\big)$，因为其他项可以忽略。因此我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[|\mathsf{N}_G(X,e) - \mathbb{E}[\mathsf{N}_G(X,e)]|^k\Big] &= k\int_0^\infty t^{k-1}\mathbb{P}[|\mathsf{N}_G(X,e) - \mathbb{E}[\mathsf{N}_G(X,e)]| > t]\,dt \\ &\leq 2k\int_0^{n^{\mathsf{v}-2.1}} t^{k-1}\exp\big(-ct^2n^{5-2\mathsf{v}}\big)\,dt + 2k\int_{n^{\mathsf{v}-2.1}}^{O(n^{\mathsf{v}-2})} t^{k-1}\exp\big(-cn^{0.8}\big)\,dt.\end{aligned}$$

这里，第二个积分上界中的 $O(n^{\mathsf{v}-2})$ 是 $\mathsf{N}_G(x,\ e)$ 的任意普适上界；在第二个积分中，我们直接代入差值大于 $n^{\mathsf{v}-2.1}$ 而非大于 t 的概率，从而得到后者的一个上界。因此，第二个积分就是 $\exp\big(-\Omega(n^{0.8})\big)$，因为这些上界至多是多项式级别的。至于第一个积分，其上界（相差常数因子）为

$$\lesssim \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1}\exp\big(-ct^2n^{5-2\mathsf{v}}\big)\,dt \lesssim \sqrt{n^{2\mathsf{v}-5}}\cdot\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{n^{2\mathsf{v}-5}}Z\right)^{k-1}\right],$$

其中 Z 是一个标准正态随机变量。上面的右侧为 $\lesssim n^{(\mathsf{v}-2.5)k}$，因此我们得到

$$\mathbb{E}\Big[|\mathsf{N}_G(X,e) - \mathbb{E}[\mathsf{N}_G(X,e)]|^k\Big] \lesssim n^{(\mathsf{v}-2.5)k}.$$

现在将其应用于求和式（12）。由于对于任意由正数构成的有限序列 $(a_j)_{j=1}^m$，我们有

$$\left(\sum_{j=1}^m a_j\right)^k \leq m^k\left(\max_{1\leq j\leq m} a_j\right)^k \leq m^k\sum_{j=1}^m a_j^k, \tag{13}$$

我们得到

$$\mathbb{E}\Big[\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - \mathbb{E}[n^2\partial_e \mathsf{H}(X)]\big|^k\Big] \lesssim (K+1)^k\sum_{j=0}^K \beta_j^k n^{2k-\mathsf{v}_j k}n^{(\mathsf{v}_j-2.5)k} \lesssim n^{-0.5k},$$

由此完成证明。 □

我们还将引理3.1 和3.2 结合起来，得到以下界；该界将在定理1.2的证明中频繁使用。

引理 3.3。 设 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$。那么对于任意 $k \geq 1$，我们有

$$\mathbb{E}\Big[\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])\big|^k\Big] \lesssim n^{-k/2}.$$

证明。 首先注意，由（13）再次可得

$$\left|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])\right|^k \le 2^k\left|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - \mathbb{E}[n^2\partial_e \mathsf{H}(X)]\right|^k + 2^k\left|\mathbb{E}[n^2\partial_e \mathsf{H}(X)] - 2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])\right|^k.$$

现在，引理 3.1 表明第二项为 $\lesssim n^{-k}$ ，而引理 3.2 表明第一项的期望为 $\lesssim n^{-k/2}$，由此得到所需结果。 □

有了引理 3.1、3.2和3.3 之后，现在我们可以利用自举论证证明定理 1.2 ，将 $\sqrt{n^{-1}\log n}$ 的先验界改进为最优界 n^{-1}。

定理 *1.2*的证明。 首先，正如第 1.2 节的讨论所述，对于 $\varphi(s) = \frac{e^s}{1+e^s}$，我们有

$$\mathbb{E}[X(e)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(e)|X(e') \text{ for } e' \neq e]] = \mathbb{E}\big[\varphi(n^2\partial_e \mathsf{H}(X))\big] \pm e^{-\Omega(n^2)}. \tag{14}$$

为验证这一点，注意到在给定所有其他边变量的条件下， $X(e$的条件期望确实为$\varphi(n^2\partial_e \mathsf{H}(X))$，只要 $X \in \mathcal{B}_p^{\eta/2}$，而这一情况发生的概率至少为 $1 - e^{-\Omega(n^2)}$ 根据式（4）。因此，由于$p = \varphi(2\mathsf{H}'(p))$，只需证明

$$\mathbb{E}\big[\varphi(n^2\partial_e \mathsf{H}(X)) - \varphi(2\mathsf{H}'(p))\big] \lesssim n^{-1}.$$

我们先将 φ 在 $2\mathsf{H}'(p)$ 附近作泰勒展开，展开至三阶如下：

$$\varphi(n^2\partial_e \mathsf{H}(X)) - \varphi(2\mathsf{H}'(p)) = \varphi'(2\mathsf{H}'(p)) \cdot \big(n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big) \tag{15}$$

$$+ \frac{\varphi''(2\mathsf{H}'(p))}{2} \cdot \big(n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big)^2 \tag{16}$$

$$+ O\Big(\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big|^3\Big). \tag{17}$$

我们将对上述量取期望，然后把所有的 $n^2\partial_e \mathsf{H}(X)$ 替换为 $2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])$，并追踪累积的误差。我们的目标是证明 $\mathbb{E}[X(e)]$ 近似为映射 $q \mapsto \varphi(2\mathsf{H}'(q))$ 的一个不动点；而该映射在我们考察的区间内有唯一的不动点，即 p。由此可得， $\mathbb{E}[X(e)]$ 接近 p。

我们先将（15）中的第二个因子展开为

$$n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p) = \big(n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])\big) + \big(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]) - 2\mathsf{H}'(p)\big), \tag{18}$$

并注意到，根据引理（18）的期望为 $\lesssim n^{-1}$ 3.1。因此，由于 $\varphi'(s) \le \frac{1}{4}$ 对所有 $s \in \mathbb{R}$均成立，我们得到

$$\mathbb{E}[(15)] = \varphi'(2\mathsf{H}'(p)) \cdot \big(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]) - 2\mathsf{H}'(p)\big) + O\big(n^{-1}\big). \tag{19}$$

类似地，我们将（16）中的第二个因子展开为

$$\big(n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big)^2 = \big(n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])\big)^2 \tag{20}$$

$$+ 2\big(n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])\big) \cdot \big(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]) - 2\mathsf{H}'(p)\big) \tag{21}$$

$$+ \big(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]) - 2\mathsf{H}'(p)\big)^2.$$

现在，根据引理 20的期望为 $\lesssim n^{-1}$ 3.3；与上一段类似，根据引理21， $\lesssim n^{-1}$ 的期望也为 3.1。注意， （21）中的第二个因子是确定性的，且根据我们的先验界，其阶至多为$\sqrt{n^{-1}\log n} \lesssim 1$ 。因此，由于 $\varphi''(s) \lesssim 1$ 对 $s \in \mathbb{R}$ 成立，我们得到

$$\mathbb{E}[(16)] = \frac{\varphi''(2\mathsf{H}'(p))}{2} \cdot \big(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]) - 2\mathsf{H}'(p)\big)^2 + O\big(n^{-1}\big). \tag{22}$$

最后，利用不等式 $|a+b|^3 \le 8|a|^3 + 8|b|^3$ （如式（13）所示），我们将式（17）界定为

$$\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big|^3 \le 8\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])\big|^3 \tag{23}$$

$$+ 8\big|2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]) - 2\mathsf{H}'(p)\big|^3. \tag{24}$$

式（23）的期望为 $\lesssim n^{-3/2}$，根据引理 3.3。又由于 H' 是多项式，因此在区间$[0,1]$, 上是 Lipschitz 的。由命题 2.11 中的先验边缘界（该命题指出 $\mathbb{E}[X\ (e)\ ]=p+O\ (\sqrt{n^{-1}}$对数 $n)\ )$，可得式（24）为 $\lesssim n^{-3/2}$对数$^{3/2}$ (n)。因此，总的来说，我们有

$$\mathbb{E}[(17)] \lesssim n^{-3/2}\log^{3/2}(n). \tag{25}$$

结合（19）、（22）和（25），我们得到

$$\mathbb{E}\big[\varphi(n^2\partial_e\mathsf{H}(X))-\varphi(2\mathsf{H}'(p))\big]=\varphi'(2\mathsf{H}'(p))\cdot(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])-2\mathsf{H}'(p)) + \frac{\varphi''(2\mathsf{H}'(p))}{2}\cdot(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])-2\mathsf{H}'(p))^2+O\big(n^{-1}\big).$$

现在再进行一次泰勒展开，上式右端为

$$\varphi(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]))-\varphi(2\mathsf{H}'(p))+O\Big(\big|2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])-2\mathsf{H}'(p)\big|^3\Big)+O(n^{-1}),$$

中间的误差项也为 $n^{-3/2}\log^{3/2}(n)$，这是由命题 2.11 的先验界以及H' 是 Lipschitz 函数这一事实得到的。因此我们发现

$$\mathbb{E}\big[\varphi(n^2\partial_e\mathsf{H}(X))-\varphi(2\mathsf{H}'(p))\big]=\varphi(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]))-\varphi(2\mathsf{H}'(p))+O(n^{-1}),$$

从两边减去 $\varphi(2\mathsf{H}'(p))$，得到

$$\mathbb{E}\big[\varphi(n^2\partial_e\mathsf{H}(X))\big]=\varphi(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]))+O\big(n^{-1}\big).$$

由于上式左端为 $\mathbb{E}[X\ (e)\ ]\pm e^{-\Omega(n^2)}$ 根据（14），我们发现

$$|\mathbb{E}[X(e)]-\varphi(2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]))|\lesssim n^{-1}. \tag{26}$$

现在，映射 $q\mapsto q-\varphi(2\mathsf{H}'(q))$ 在区间 $[p-\eta,p+\eta]$ for η足够小时有唯一零点，即 p；对于 $X\sim\mathcal{M}(n,p)$，我们先验地有 $\mathbb{E}[X(e)]\in[p-\eta,p+\eta]$（回顾一下，$\mathcal{M}(n,p)$ 的定义中涉及一个割距离误差 $\eta>0$）。此外，当 $\eta>0$ 足够小时，该映射的导数在此区间上也严格为正，因为 $\frac{d}{dq}\varphi(2\mathsf{H}'(q))<1$ at $q=p$。因此，（26）意味着

$$|\mathbb{E}[X(e)]-p|\lesssim n^{-1},$$

完成证明。 □

利用定理1.2，我们给出一个与本节前面的引理类似的推论，它将在定理1.1的证明过程中多处派上用场。

推论 3.4. 设 $X\sim\mathcal{M}(n,p)$。那么对任意 $k\geq 1$，有

$$\mathbb{E}\Big[\big|n^2\partial_e\mathsf{H}(X)-2\mathsf{H}'(p)\big|^k\Big]\lesssim n^{-k/2}.$$

推论*3.4*的证明。 我们将论证展开如下：

$$\big|n^2\partial_e\mathsf{H}(X)-2\mathsf{H}'(p)\big|^k\leq 2^k\big|n^2\partial_e\mathsf{H}(X)-2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])\big|^k+2^k|2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)])-2\mathsf{H}'(p)|^k.$$

首先，根据引理3.3，上文第一项的期望为 $\lesssim n^{-k/2}$。其次，由于 H' 是 Lipschitz 函数，定理 1.2 意味着第二项为 $\lesssim n^{-k}\leq n^{-k/2}$，证明完毕。 □

3.2 不存在下界

本节将说明，为何不存在与定理 $|\mathbb{E}[X(e)]-p|$ 中给出的上界相匹配的下界 1.2。简而言之， [FLSW25] 证明了，在参数的亚临界区间内，存在一个常数的显式公式 c^* ，使得

$$\mathbb{E}[X(e)] = p + c^* n^{-1} + O\Big(n^{-3/2}\Big). \tag{27}$$

我们将使用这个显式公式来证明 c^* 可能为零。

为了陈述 c^* 的显式公式，回顾一下， $G_0,\dots,G_K$ 是指数随机图模型规范中的图。我们还用 $\mathsf{v}_l,\mathsf{e}_l,\mathsf{s}_l,\mathsf{t}_l$ 分别表示 G_l 中顶点、边、楔形（即二星）和三角形的数量。此外，我们固定 G_l 中边的一个排序 $\mathfrak{e}_l^1,\dots\mathfrak{e}_l^{\mathsf{e}_l}$，并用 s_l^j 和 t_l^j 表示 $G_l\setminus\mathfrak{e}_l^j$ 中二星和三角形的数量。另设

$$\mathsf{S}=\sum_{l=1}^K \beta_l \mathsf{s}_l p^{\mathsf{e}_l} \qquad \text{and} \qquad \mathsf{T}=\sum_{l=1}^K \beta_l \mathsf{t}_l p^{\mathsf{e}_l}$$

那么 以下 c^* 满足 27 在亚临界区间内的取值，由 [FLSW25，引理 B。1] :

$$\begin{aligned} c^* = \frac{p(1-p)}{1-\varphi'(p)}\Bigg[\sum_{l=1}^K \beta_l \sum_{j=1}^{\mathsf{e}_l}\Bigg(4\mathsf{s}_l^j p^{\mathsf{e}_l-3}\frac{(1-p)^2\mathsf{S}}{1-2p^{-1}(1-p)\mathsf{S}} + 12\mathsf{t}_l^j p^{\mathsf{e}_l-4}(1-p)^3\mathsf{S}\Bigg) \\ + (1-2p)\Bigg(\frac{8p^{-3}(1-p)S^2}{1-2p^{-1}(1-p)\mathsf{S}} + 36p^{-4}(1-p)^2\mathsf{T}^2\Bigg) \\ - \sum_{l=1}^K \beta_l \mathsf{e}_l p^{\mathsf{e}_l-1}(\mathsf{v}_l-2)(\mathsf{v}_l-3)\Bigg]. \end{aligned}$$

注意，当 $\beta_0,\dots,\beta_K$ 处于亚临界参数区间时，最优密度 p 是参数的解析函数；因此，在亚临界区间内，取值 c^* 也是如此。比亚临界条件更强的条件是 ***Dobrushin*** 区域，其定义为

$$\mathsf{H}''(1) < 2.$$

该条件意味 味着亚临界性，因此 c^* 作为参数 [BCM24]的解析函数 .

现在，在 G_0 是一条边、 G_1 是一个二星、 G_2 是一个三角形的情况下，$\mathsf{s}_1=1$、$\mathsf{t}_1=0$、$\mathsf{s}_2=3$ 和 $\mathsf{t}_2=1$。此外，对于 $j=1,2$，有 $\mathsf{s}_1^j=\mathsf{t}_1^j=0$；对于 $j=1,2$，有 $\mathsf{s}_2^j=1$ 和 $\mathsf{t}_2^j=0$。因此，在这种情况下，我们有

$$\mathsf{S}=\beta_1 p^2+3\beta_2 p^3 \qquad \text{and} \qquad \mathsf{T}=\beta_2 p^3,$$

因此我们有

$$\begin{aligned} c^* = \frac{p(1-p)}{1-\varphi'(p)}\Bigg[\beta_1\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot p^{-1}\frac{(1-p)^2(\beta_1 p^2+3\beta_2 p^3)}{1-2p^{-1}(1-p)(\beta_1 p^2+3\beta_2 p^3)} \\ + (1-2p)\Bigg(\frac{8p^{-3}(1-p)(\beta_1 p^2+3\beta_2 p^3)^2}{1-2p^{-1}(1-p)(\beta_1 p^2+3\beta_2 p^3)} + 36p^{-4}(1-p)^2\beta_2^2 p^6\Bigg)\Bigg]. \end{aligned}$$

注意，最后一项消失了，因为 $\mathsf{v}_1=\mathsf{v}_2=3$。

现在，通过数值计算或其他方法可以验证，记 $c^*=c^*(\beta_0,\beta_1,\beta_2)$，我们有

$$c^*(0,0.01,0.01)\approx +0.000069 \qquad \text{and} \qquad c^*(0,0.1,0.1)\approx -0.119409.$$

因此，只要 c^* 是这两个值之间参数的连续函数，就必定存在一些参数值使得 $c^*=0$。我们来检验这些参数值是否确实都处于 Dobrushin 区域。我们有

$$\mathsf{H}(p)=\beta_0 p+\beta_1 p^2+\beta_2 p^3, \qquad \text{and so} \qquad \mathsf{H}''(1)=2\beta_1+6\beta_2.$$

因此，对于所有 $\beta_1,\ \beta_2 \in [0.01, 0.1]$，我们确实有 $\mathrm{H}''(1) < 2$，这意味着我们处于 Dobrushin 区域，并且 c^* 是参数的解析函数。

另请注意，我们本可以考察 [Win25a第 2], 节提供的模拟结果，并由此发现，至少从实验结果来看，对于 c^*，在相同的 ERGM 规范所定义的图中，不同的参数取值可以使其为正，也可以使其为负。β 沿着参数空间中相唯一性区域内的一条路径，从使 c^* 取正值的参数连接到使其取负值的参数，也会得出同样的结论。

4 哈密顿量微分的涨落

本节将介绍本文在技术和概念上的主要贡献：证明 $n^{-1/2}$ 的涨落具有 $n^2\partial_e\mathsf{H}(X)$ 在 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$ 下具有1.1阶下界，这对于我们证明定理 $n^2\partial_e\mathsf{H}(X$的下界至关重要。证明首先将 X 化简为其一个较简单（但仍为非线性）的函数，该函数仅取决于 e附近极局部的结构，即与某条特定边相邻的楔形和三角形的数量。我们将在第4.1节完成这一化简。随后在第4.2 节，我们将给出这个较简单函数的涨落下界，并据此推导出 $n^2\partial_e\mathsf{H}(X)$ 的涨落下界。

我们注意到，在撰写本文期间，$n^2\partial_e\mathsf{H}(X)$ 与一条边相邻的楔形和三角形数量之间的类似比较，已在 [FLSW25] 中针对亚临界区间出现，并被用于证明 X中楔形总数的中心极限定理，其中以 X中的边总数为条件。然而，我们在本工作中采用的证明技术截然不同；除了适用于超临界区间外，即使在亚临界区间也能给出更优的尾界。这得益于所采用的策略，其总体思路与 [Win25b] 中提出的一种方法相似，该方法改进了利用[SS20] 中给出的高阶集中方法所能得到的尾界；这些方法在亚临界区间用于 [FLS24、FLSW25] 。关于这两种方法比较的更多信息，读者可参阅 [Win25b，第 1.3 节。3]。

4.1 将哈密顿量微分化简为更简单的变量

我们首先回顾 (10) 和 (12) 中的分解

$$n^2\partial_e\mathsf{H}(x) = \sum_{j=0}^{K} \beta_j \frac{\mathsf{N}_G(x,e)}{n^{\mathsf{v}_j-2}}, \tag{28}$$

这里我们仍用 $\mathsf{N}_G(x,e)$ 表示 x^{+e} 中 G 的同态数量，其中同态使用边 e；这等于 $\partial_e\mathsf{N}_G(x)$。本节的主要结果是以下命题，它将理解 $\mathsf{N}_G(X,e)$ 的涨落（对于 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$）简化为只需理解 $\mathsf{N}_\triangle(X,e)$ 和 $\mathsf{N}_\wedge(X,e)$ 的涨落，其中 $\triangle$ 和 $\wedge$ 分别表示三角形图和楔形图。稍后我们将结合 (28) 使用这一结果，推导推论 4.4 中 $n^2\partial_e\mathsf{H}(X)$ 的涨落下界。

命题 4.1。对于任意具有 v 个顶点和 e 条边的图 G，存在常数 $\mathsf{C}_G^{\triangle}$、$\mathsf{C}_G^{\wedge} \geq 0$；若 G 不是边的不交并，则其中至少一个严格为正，使得以下结论成立。定义

$$\widehat{\mathsf{N}}_G(x,e) \coloneqq \mathsf{N}_G(x,e) - \mathsf{C}_G^{\triangle}\cdot p^{\mathsf{e}-3}n^{\mathsf{v}-3}\cdot\mathsf{N}_\triangle(x,e) - \mathsf{C}_G^{\wedge}\cdot p^{\mathsf{e}-2}n^{\mathsf{v}-3}\cdot\mathsf{N}_\wedge(x,e).$$

因此，对于任意 $\zeta \in$（0、3 4）以及任意 $\gamma > 0$，存在某个 $c > 0$，使得如果 $X \sim \mathcal{M}$（n、p），那么

$$\mathbb{P}\Big[\Big|\widehat{\mathsf{N}}_G(X,e) - \mathbb{E}[\widehat{\mathsf{N}}_G(X,e)]\Big| > \gamma n^{\mathsf{v}-2.75+\zeta}\Big] \leq \exp\Big(-cn^{\frac{4}{3}\zeta}\Big).$$

现在我们先介绍证明命题 4.1所需的预备记号和事实。对于任意一条边 $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}(G)$（即 G的边集），定义 $\mathsf{N}_G(x,\mathfrak{e}\mapsto e)$ 为将 G同态映射到 x^{+e} 且将 $\mathfrak{e}$ 映射到 e的同态数量。注意，若 $\mathfrak{e}=\{\mathfrak{u},\mathfrak{v}\}$ 且 $e=\{u,v\}$，那么这就是将 $\mathfrak{u}\mapsto u$ 和 $\mathfrak{v}\mapsto v$ 映射到 $\mathfrak{u}\mapsto v$ 和 $\mathfrak{v}\mapsto u$的同态数量。根据此定义，我们有

$$\mathsf{N}_G(x,e) = \sum_{\mathfrak{e}\in\mathcal{E}(G)} \mathsf{N}_G(x,\mathfrak{e}\mapsto e) + O(n^{\mathsf{v}-3}), \tag{29}$$

因为必定存在某个 $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}(G)$ 映射到 e；若有多个 $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}(G)$ 映射到 e，那么 $\mathcal{G}$ 中至多还剩下 v 个顶点可映射到 $[n]$。换言之，从 $\mathcal{V}(G)$ 到 $[n]$、覆盖 e 的非单射映射至多有 $O(n^{\mathsf{v}-3})$ 个。

因此，要证明命题 4.1，只需证明存在常数 $\mathsf{C}_G^{\triangle}(\mathfrak{e})$，$\mathsf{C}_G^{\wedge}(\mathfrak{e}) \geq 0$ 对每个$\mathfrak{e} \in \mathcal{E}(G$都成立；若 $\mathfrak{e}$ 在 G中有相邻边，则这些常数中至少有一个严格为正。定义如下：

$$\widehat{\mathsf{N}}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e) = \mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e) - \mathsf{C}_G^{\triangle}(\mathfrak{e}) \cdot p^{\mathsf{e}-3} n^{\mathsf{v}-3} \cdot \mathsf{N}_{\triangle}(x, e) - \mathsf{C}_G^{\wedge}(\mathfrak{e}) \cdot p^{\mathsf{e}-2} n^{\mathsf{v}-3} \cdot \mathsf{N}_{\wedge}(x, e) \tag{30}$$

于是，对于 $X \sim \mathcal{M}(n, p)$，对于任意 $\zeta \in (0, \frac{3}{4})$，且对于任意 $\gamma > 0$，存在一个常数 $c > 0$，使得

$$\mathbb{P}\Big[\Big|\widehat{\mathsf{N}}_G(X, \mathfrak{e} \mapsto e) - \mathbb{E}[\widehat{\mathsf{N}}_G(X, \mathfrak{e} \mapsto e)]\Big| > \gamma n^{\mathsf{v}-2.75+\zeta}\Big] < \exp\Big(-cn^{\frac{4}{3}\zeta}\Big). \tag{31}$$

事实上，命题 4.1的结论可由式（31）通过对有限条边$\curlywedge \mathfrak{e} \in \mathcal{E}(G)$应用并合界得到；利用式（$\mathsf{N}_G(X,\ e)$可根据式（29）展开为和，并调整常数 c。如需了解类似论证的详细展开，读者可参阅下文推论 4.6 的证明。

为证明式（31），我们将采用一种与 [Win25b、命题 4.1 和$\widehat{}$4.4]有些相似的策略。具体而言，我们将使用定理 2.5，这意味着需要控制条件化 ERGM Glauber 动力学（X_t）下 $\mathsf{N}_G(X_t, \mathfrak{e} \mapsto e)$ 的行为。我们将分阶段进行：首先利用定理 2.4，根据仅涉及三角形$\triangle$ 和楔形 $\wedge$的某些较简单量来控制动力学下的变化。然后，我们将以此为输入应用定理 2.5，推导出式（31）。 [Win25b、命题 4.1 和 4.4] 与本文的一个关键区别在于，线性近似（即只使用 $\mathsf{N}_{\wedge}(x, \mathfrak{e} \mapsto e)$，而不使用 $\mathsf{N}_{\triangle}(x, \mathfrak{e} \mapsto e)$）并不足够，正如第 1.2 节所讨论的那样。

$\widehat{}$无论如何，我们首先需要了解 $\mathsf{N}_G(X_t, \mathfrak{e} \mapsto e)$ 在 Glauber 动力学下的变化，这$\widehat{}$将归结为考虑典型样本 $X \sim \mathcal{M}(n, p)$ 以及 $e' \neq e\widehat{}$ 对应的量 $\partial_{e'}\mathsf{N}_G(X, \mathfrak{e} \mapsto e)$（注意，$\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e)$ 不依赖于 $x(e)$，因为在计算中总是将 e 加到 x 上）。我们先考虑一般确定性图 x 的 $\partial_{e'}\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e)$。它表示 G 到 $x^{+e+e'}$ 的同态数量，其中 $\mathfrak{e}$ 映射到 e，且 G 中还有另一条边映射到 e'；我们将这个数量记为 $\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, e')$。那么，按照与式 (29) 类似的推理，我们有

$$\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, e') = \sum_{\mathfrak{e}' \in \mathcal{E}(G) \setminus \{\mathfrak{e}\}} \mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e') + O(n^{\mathsf{v}-4}). \tag{32}$$

这里，$\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e')$表示将 $\mathfrak{e}$ 映射到 e 并将 $\mathfrak{e}'$ 映射到 e'的同态数量；同样，与$\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e)$一样，这里对每条边的两种方向都计入在内，但当 $\mathfrak{e}$ 和 $\mathfrak{e}'$ 共享一个顶点时，可能性数量会减少，因为 $\mathfrak{e}$ 映射的方向将决定 $\mathfrak{e}'$ 映射的方向（这点很快就会用到）。等式（32）成立，是因为$\mathsf{N}_G(X, \mathfrak{e} \mapsto e, e')$所计数的非单射映射至多有$O(n^{\mathsf{v}-4})$个；如果 e和 e'不共享顶点，则该上界可以改进为 $O(n^{\mathsf{v}-5})$。因此，我们注意到，如果 e和 e' 不共享顶点，误差项可以改进为 $O(n^{\mathsf{v}-5})$，尽管这在后文中并不重要。原因在于，我们将认为 $e \cap e' = \varnothing$ 的情形可以忽略，因为在这种情况下映射数至多为 $O(n^{\mathsf{v}-4})$。事实上，我们有以下界：

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, e') &= \sum_{\substack{\mathfrak{e}' \in \mathcal{E}(G) \setminus \{\mathfrak{e}\} \\ \mathfrak{e} \cap \mathfrak{e}' \neq \varnothing}} \mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e') + O(n^{\mathsf{v}-4}) && \text{if } e \cap e' \neq \varnothing, \\
\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, e') &= O(n^{\mathsf{v}-4}) && \text{if } e \cap e' = \varnothing.
\end{aligned} \tag{33}$$

因此，我们只需分析 $\mathsf{N}_G(x,\ \mathfrak{e} \mapsto e,\ \mathfrak{e}' \mapsto e')$，且仅限于 $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{e}' \neq \varnothing$ 和 $e \cap e' \neq \varnothing$ 均成立的情况。

现在我们需要考虑两种情况：$\mathfrak{e}$和 $\mathfrak{e}'$ 在 G中构成一个三角形，或者不构成。如果它们确实构成了一个三角形，那么为了使将 $\mathfrak{e} \mapsto e$ 和 $\mathfrak{e}' \mapsto e'$ 映射到 x的映射成为同态，完全图 K_n 中由 e，e' 构成的三角形的第三条边 e'' 也必须存在于 x中，这意味着

$$\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e') = x(e'') \cdot \mathsf{N}_G(x^{+e''}, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e').$$

请注意，根据 $\mathsf{N}_G(x,\ \mathfrak{e}\mapsto e,\ \mathfrak{e}'\mapsto e')$ 的定义，在计算同态时，右侧的边 e 和 e' 也会被隐式地加入 x 。这就得到了 $e\cap e'\neq\varnothing$情形下的如下表示，其中我们用 e'' 表示与 e 和 e'共同补全三角形的那条边：

$$\mathsf{N}_G(x,\mathfrak{e}\mapsto e,e')=\sum_{\mathfrak{e}'\in\mathcal{E}_\triangle(G,\mathfrak{e})}x(e'')\cdot\mathsf{N}_G(x^{+e''},\mathfrak{e}\mapsto e,\mathfrak{e}'\mapsto e')+\sum_{\mathfrak{e}'\in\mathcal{E}_\wedge(G,\mathfrak{e})}\mathsf{N}_G(x,\mathfrak{e}\mapsto e,\mathfrak{e}'\mapsto e')+O(n^{\mathsf{v}-4}).\quad(34)$$

在上述表达式中，$\mathcal{E}_\triangle(G,\ \mathfrak{e})$ 表示边集 $\mathfrak{e}'\in\mathcal{E}(G)\setminus\{\mathfrak{e}\}$，它们与 $\mathfrak{e}$ 在 G 中构成一个三角形；而 $\mathcal{E}_\wedge(G,\ \mathfrak{e})$ 表示边集 $\mathfrak{e}'\in\mathcal{E}(G)\setminus\{\mathfrak{e}\}$，它们与 $\mathfrak{e}$ 在 G 中邻接，但不构成三角形。

我们分析的第一步是证明，求和式（34）中的表达式集中在确定性值附近。下面两个引理分别证明这两类表达式具有这一性质；它们的证明本质上相同，我们将在下文给出。与往常一样，在以下陈述中，我们令 $X\sim\mathcal{M}(n,\ p)$，并且 G 是一个有 v 个顶点和 e条边的图。

引理 4.2. 假设 $\mathfrak{e}\in\mathcal{E}(G)$ 和 $\mathfrak{e}'\in\mathcal{E}_\triangle(G,\mathfrak{e})$，即 $\mathfrak{e}$和 $\mathfrak{e}'$在 G中构成一个三角形。对于任意 $\alpha\in(0、\ 1/2)$ 以及$\gamma>0$，存在一个常数 c，使得对于所有共享一个顶点的 e、$e'\in\binom{[n]}{2}$（因此它们在 K_n 中构成一个三角形，该三角形由一条边补全，我们将这条边记为 e''），都有

$$\mathbb{P}\Big[\Big|\mathsf{N}_G(X^{+e''},\mathfrak{e}\mapsto e,\mathfrak{e}'\mapsto e')-2p^{\mathsf{e}-3}n^{\mathsf{v}-3}\Big|>\gamma n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}\Big]\le\exp\big(-cn^{2\alpha}\big).$$

引理 4.3. 假设 $\mathfrak{e}\in\mathcal{E}(G)$ 和 $\mathfrak{e}'\in\mathcal{E}_\wedge(G,\mathfrak{e})$，即 $\mathfrak{e}$ 和 $\mathfrak{e}'$ 共享一个顶点，但在G中不构成三角形。对于任意 $\alpha\in(0,\ 1/2)$ 和 $\gamma>0$，存在一个常数 c，使得对于所有共享一个顶点的 e、$e'\in\binom{[n]}{2}$，都有

$$\mathbb{P}\big[\big|\mathsf{N}_G(X,\mathfrak{e}\mapsto e,\mathfrak{e}'\mapsto e')-2p^{\mathsf{e}-2}n^{\mathsf{v}-3}\big|>\gamma n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}\big]\le\exp\big(-cn^{2\alpha}\big).$$

在证明这些引理之前，我们先从启发式的角度看看命题 4.1 的证明将如何进行。根据这些引理和（34），当我们改变 X 中与 e相邻（但不相等）的边 e' 的状态时，$\mathsf{N}_G(X,\ \mathfrak{e}\mapsto e)$ 的变化将为

$$\mathsf{N}_G(X,\mathfrak{e}\mapsto e,e')\approx X(e'')\cdot|\mathcal{E}_\triangle(G,\mathfrak{e})|\cdot2p^{\mathsf{e}-3}n^{\mathsf{v}-3}+|\mathcal{E}_\wedge(G,\mathfrak{e})|\cdot2p^{\mathsf{e}-2}n^{\mathsf{v}-3}.\quad(35)$$

另一方面，翻转 e' 时，$\mathsf{N}_\triangle(X,\ e)$ 的变化为 $6X(e'')$，而 $\mathsf{N}_\wedge(X,\ e)$ 的变化为 2，这分别对应三角形的 6 个自同构和楔形的 2 个自同构。因此，我们可以将 Glauber 动力学中 $\mathsf{N}_G(X_t,\ \mathfrak{e}\mapsto e)$ 的变化与以下对象的变化相匹配

$$\mathsf{C}_G^\triangle(\mathfrak{e})\cdot p^{\mathsf{e}-3}n^{\mathsf{v}-3}\cdot\mathsf{N}_\triangle(X_t,e)+\mathsf{C}_G^\wedge(\mathfrak{e})\cdot p^{\mathsf{e}-2}n^{\mathsf{v}-3}\cdot\mathsf{N}_\wedge(X_t,e),\quad(36)$$

其中 $\mathsf{C}_G^\triangle(\mathfrak{e})=\frac{1}{3}|\mathcal{E}_\triangle(G,\mathfrak{e})|$，且 $\mathsf{C}_G^\wedge(\mathfrak{e})=|\mathcal{E}_\wedge(G,\mathfrak{e})|$。我们指出，该定义表明我们有$C_G^\triangle(\mathfrak{e})\ C_G^\wedge(\mathfrak{e})\ge0$；并且如果 $\mathfrak{e}$ 在 G中有任何相邻的边，则其中至少有一个严格为正，符合要求。无论如何，将 $\mathsf{N}_G(X_t,\mathfrak{e}\mapsto e)$ 在 Glauber 动力学下的变化与(36) 的变化相匹配，就能使我们将定理 2.5 应用于按 (30) 定义的 $\mathsf{N}_G(X,\mathfrak{e}\mapsto e)$，并得到 (31)。

现在我们来证明上述两个引理，之后将使上述启发式论证严谨化，并证明命题 4.1。

引理的证明 *4.2* 和 *4.3*。定义如下

$$f_\triangle(x)=\mathsf{N}_G(x^{+e''},\mathfrak{e}\mapsto e,\mathfrak{e}'\mapsto e')\qquad\text{or}\qquad f_\wedge(x)=\mathsf{N}_G(x,\mathfrak{e}\mapsto e,\mathfrak{e}'\mapsto e').$$

我们将在引理 4.2 的假设下分析 $f_\triangle(x)$（即，如果 $\mathfrak{e}'\in\mathcal{E}_\triangle(G,\mathfrak{e})$），并将在引理 4.3 的假设下分析 $f_\wedge(x)$（即，如果 $\mathfrak{e}'\in\mathcal{E}_\wedge(G,\mathfrak{e})$）。我们很快将证明，对于任意 $\alpha\in(0,1/2)$，都存在某个 $c>0$，使得

$$\mathbb{P}[|f_*(X)-\mathbb{E}[f_*(X)]|>\gamma n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}]\le\exp\big(-cn^{2\alpha}\big)\quad(37)$$

对于 $*=\triangle$ 和 $*=\wedge$，在相关假设下，只要我们将$\mathbb{E}[f_\triangle(X)]$ 和 $\mathbb{E}[f_\wedge(X)]$ 充分精确地近似即可完成证明。我们现在先进行这一近似，再证明（37）。这些期望的近似所遵循的逻辑与引理 3.1 的证明类似，而（37）的证明与引理 3.2 证明的第一部分类似。

首先，如果 $\mathfrak{e}' \in \mathcal{E}_\triangle(G,\mathfrak{e})$，那么 $f_\triangle(x)$ 可以写成各种映射为同态的指示函数之和；对于每个映射 $\mathcal{V}(G) \to [n]$，该映射将 $\mathfrak{e}$ 映射到 e，并将 $\mathfrak{e}'$ 映射到 e'。这类映射的数量为 $2n^{\mathsf{v}-3}$：因子 2 来自映射 $\mathfrak{e} \mapsto e$ 的方向选择（该方向决定了映射 $\mathfrak{e}' \mapsto e'$ 的方向），而因子 $n^{\mathsf{v}-3}$ 则仅用于计算将其余所有 $\mathsf{v}-3$ 个顶点映射到 G 的位置选择。除 $O(n^{\mathsf{v}-4})$ 个之外，所有这些映射都是单射的；这意味着，回顾 e'' 已自动包含在 $f_\triangle(x)$ 的定义中，映射在 x 中为同态的指示函数可以写成 $\mathsf{e}-3$ 个互不相同的边变量的乘积。因此，我们可以应用命题 2.10，并得到对于 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$，

$$\mathbb{E}[f_\triangle(X)] = 2n^{\mathsf{v}-3}p^{\mathsf{e}-3} + O(n^{\mathsf{v}-4}). \tag{38}$$

类似的推理表明，如果 $\mathfrak{e}' \in \mathcal{E}_\wedge(G,\ \mathfrak{e})$，那么

$$\mathbb{E}[f_\wedge(X)] = 2n^{\mathsf{v}-3}p^{\mathsf{e}-2} + O(n^{\mathsf{v}-4}), \tag{39}$$

不同之处在于，这里免费纳入的只有 2 条边，而不是 3 条。

现在来证明（37）。为此，我们将应用定理 2.4，也就是说，我们必须计算 Lipschitz 向量 $\mathcal{L}$ 在 $f_\triangle$ 和 $f_\wedge$两种情况下的界。换言之，我们必须界定如下变化

$$\partial_{e'''} f_*(x) = f_*(x^{+e'''}) - f_*(x^{-e'''})$$

对于任意 $e''' \in \binom{[n]}{2}$ 和任意 $x \in \{0,1\}^{\binom{[n]}{2}}$，以及 $*=\triangle$ 和 $*=\wedge$两种情况。

首先，如果 e''' 是 e 或 e' 之一，那么 $\partial_{e'''} f_*(x) = 0$，因为在计算 x 时，这两个边始终都会被纳入，所以两个函数都不依赖于它们的状态。类似地，如果 e''' 是由 e 和 e'构成的三角形的第三条边 e''，那么 $\partial_{e'''} f_\triangle(x) = 0$。另一方面，$\partial_{e''} f_\wedge(x)$ 可能不为零，但如果$\mathfrak{e}' \in \mathcal{E}_\wedge(G,\ \mathfrak{e})$，那么这总是 $\lesssim n^{\mathsf{v}-4}$，因为任何覆盖 e'' 的映射都必须是非单射的，这是因为 $\mathfrak{e}$ 和 $\mathfrak{e}'$在 G中不构成三角形。

接下来，如果 e''' 与由 e 和 e' 张成的三角形相邻，但不属于该三角形，那么在两种情况下，$\partial_{e'''} f_*(x) \lesssim n^{\mathsf{v}-4}$，因为在任意一种配置中，$e$、$e'$和 e''' 已经包含了 4 个顶点（三条边要么构成一个三叉星，要么构成一条长度为 3 的路径）。最后，如果 e''' 不与由 e 和e'张成的三角形相邻，那么 $\partial_{e'''} f_*(x) \lesssim n^{\mathsf{v}-5}$，因为该三角形包含了三个顶点，而 e'''中还有两个顶点。

现在，由于有 $O(n)$ 条边与由 e 和 e'张成的三角形相邻，在两种情况下，Lipschitz 向量都满足

$$\|\mathcal{L}\|_\infty \lesssim n^{\mathsf{v}-4} \qquad \text{and} \qquad \|\mathcal{L}\|_1 \lesssim n\cdot n^{\mathsf{v}-4} + n^2 \cdot n^{\mathsf{v}-5} \lesssim n^{\mathsf{v}-3}.$$

因此，根据定理 2.4，存在一些常数 C、$c>0$，使得对于所有 $\lambda \le cn^{\mathsf{v}-3}$，都有

$$\mathbb{P}[|f_*(X) - \mathbb{E}[f_*(X)]| > \lambda] \le 2\exp\left(-\frac{c\lambda^2}{n^{2\mathsf{v}-7}} + e^{C\lambda n^{4-\mathsf{v}} - cn}\right) + e^{-cn}$$

因此，代入 $\lambda = \gamma n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}$ 后，我们得到

$$\mathbb{P}\big[|f_*(X) - \mathbb{E}[f_*(X)]| > \gamma n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}\big] \le \exp\left(-c\gamma^2 n^{2\alpha} + e^{C\gamma n^{\alpha+0.5} - cn}\right) + e^{-cn}.$$

由于 $\alpha < \frac{1}{2}$，这就完成了对（37）的证明；通过调整常数并应用（38）和（39），我们完成了引理 4.2 和 4.3的证明，因为 $n^{\mathsf{v}-4} \ll n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}$。 □

有了引理 4.2和 4.3，我们来证明命题 4.1。如上所述，只需证明（31），即对于任意 $\zeta \in (0,\ 3\ 4)$ 和任意 $\gamma>0$，存在某个 $c>0$，使得对于任意 $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}$（$G$），我们有

$$\mathbb{P}\left[\left|\widehat{\mathsf{N}}_G(X, \mathfrak{e} \mapsto e) - \mathbb{E}[\widehat{\mathsf{N}}_G(X, \mathfrak{e} \mapsto e)]\right| > \gamma n^{\mathsf{v}-2.75+\zeta}\right] < \exp\left(-cn^{\frac{4}{3}\zeta}\right), \tag{40}$$

这里我们回顾一下由（30）可知

$$\widehat{\mathsf{N}}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e) = \mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e) - \mathsf{C}_G^\triangle(\mathfrak{e}) \cdot p^{\mathsf{e}-3} n^{\mathsf{v}-3} \cdot \mathsf{N}_\triangle(x,e) - \mathsf{C}_G^\wedge(\mathfrak{e}) \cdot p^{\mathsf{e}-2} n^{\mathsf{v}-3} \cdot \mathsf{N}_\wedge(x,e)$$

其中，根据（35），$\mathsf{C}_G^\triangle(\mathfrak{e}) = \frac{1}{3}|\mathcal{E}_\triangle(G,\mathfrak{e})|$ 和 $\mathsf{C}_G^\triangle(\mathfrak{e}) = |\mathcal{E}_\wedge(G,\mathfrak{e})|$；回忆一下，$\mathcal{E}_\triangle(G,\mathfrak{e})$ 和 $\mathcal{E}_\wedge(G,\mathfrak{e})$ 分别是边集合 $\mathfrak{e}' \in \mathcal{E}(G)$，其中的边与 $\mathfrak{e}$ 共享一个顶点，并且在 G 中与 $\mathfrak{e}$ 分别构成或不构成三角形。

命题*4.1*的证明。如上所述，我们将固定 $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}(G)$，并证明（40）。对于稍后指定的某个 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$，我们定义两个状态集合，使得引理4.2和4.3 结论中的集中性在取此 α 且取 $\gamma = 1$时成立：

$$\Pi_{\triangle}^{\alpha} := \left\{ x \in \mathcal{B}_p^{\eta} : \begin{array}{l} \left| \mathsf{N}_G(x^{+e''}, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e') - 2p^{\mathsf{e}-3} n^{\mathsf{v}-3} \right| \le n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha} \quad \text{for all } \mathfrak{e}' \in \mathcal{E}_{\triangle}(G, \mathfrak{e}) \text{ and} \\ \text{all } e' \in \binom{[n]}{2} \setminus \{e\} \text{ with } e \cap e' \neq \varnothing \text{ and } e'' \text{ completing a triangle with } e, e' \text{ in } K_n \end{array} \right\},$$

$$\Pi_{\wedge}^{\alpha} := \left\{ x \in \mathcal{B}_p^{\eta} : \begin{array}{l} \left| \mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e') - 2p^{\mathsf{e}-2} n^{\mathsf{v}-3} \right| \le n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha} \quad \text{for} \\ \text{all } \mathfrak{e}' \in \mathcal{E}_{\wedge}(G, \mathfrak{e}) \text{ and all } e' \in \binom{[n]}{2} \setminus \{e\} \text{ with } e \cap e' \neq \varnothing \end{array} \right\},$$

并令 $\Pi^{\alpha} = \Pi_{\triangle}^{\alpha} \cap \Pi_{\wedge}^{\alpha}$。根据引理 4.2 和 4.3，并对多项式数量的边应用并合界 $\mathfrak{e}'$ 和e'，我们得到 $\mathbb{P}[X \in \Pi^{\alpha}] \ge 1 - \exp\big(-\Omega(n^{2\alpha})\big)$。因此，我们应用引理 2.6，得到一个集合 $\Lambda^{\alpha} \subseteq \Lambda^*$，使得

$$\mathbb{P}[X_t^x \in \Pi^{\alpha} \text{ for all } 0 \le t \le n^3] \ge 1 - \exp\big(-\Omega(n^{2\alpha})\big) \tag{41}$$

对所有满足 $\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x, \Lambda^{\alpha}) \le 1$的 x，并且还存在某个 $z \in \Lambda^{\alpha}$ 使得

$$\mathbb{P}[X_t^z \in \Lambda^{\alpha} \text{ for all } 0 \le t \le n^3] \ge 1 - \exp\big(-\Omega(n^{2\alpha})\big).$$

我们将对 $\Lambda = \Lambda^{\alpha}$ 和 $f(x) = \widehat{\mathsf{N}}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e)$ 应用定理 2.5，并选择 $T = n^3$。这意味着我们需要用适当的常数 V、J、ε、δ 和 M 验证条件 (i)–(v)，其中 V界定了 f方差的一个代理量，J 界定了马尔可夫链沿 f 的跳跃的一个代理量，ε 界定了马尔可夫链逃离 Λ^{α}的概率，δ 界定了马尔可夫链在时刻 n^3与平稳状态的全变差距离，而 M 则是 f 与其均值之差的整体上界。

根据上述构造，我们可以取 $\epsilon = \exp\big(-\Omega(n^{2\alpha})\big)$，因为这是马尔可夫链从 z出发时离开 Λ^{α}的概率。此外，由于 $z \in \Lambda^*$，根据引理 $\delta = \exp(-\Omega(n))$ 的全变差距离界，我们可以取 2.3。并且，由于 $|\widehat{\mathsf{N}}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e)| \lesssim n^{\mathsf{v}-2}$ 对所有 x均成立，我们可以取 $M = O(n^{\mathsf{v}-2})$。

剩下的只是对条件 V 和 J 中的量进行界定 (i) 以及(ii)。为此，我们先考虑一个图$x \in \Pi^{\alpha}$ 和一条单边 $e' \in \binom{[n]}{2} \setminus \{e\}$。如果 e'与 e不共享顶点，那么根据（33）以及以下事实：$\mathsf{N}_{\triangle}(x, e)$ 和 $\mathsf{N}_{\wedge}(x, e)$ 在翻转 e'的状态时保持不变，我们得到

$$\widehat{\mathsf{N}}_G(x^{+e'}, \mathfrak{e} \mapsto e) - \widehat{\mathsf{N}}_G(x^{-e'}, \mathfrak{e} \mapsto e) = \mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, e') \lesssim n^{\mathsf{v}-4}.$$

另一方面，如果 e' 确实与 e共享一个顶点，并且 e'' 在 K_n中补全了三角形，那么根据（34）及随后的讨论，回顾我们对 $\mathsf{C}_G^{\triangle}(\mathfrak{e}) = \frac{1}{3}|\mathcal{E}_{\triangle}(G, \mathfrak{e})|$ 和 $\mathsf{C}_G^{\wedge}(\mathfrak{e}) = |\mathcal{E}_{\wedge}(G, \mathfrak{e})|$的定义，可得

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathsf{N}}_G(x^{+e'}, \mathfrak{e} \mapsto e) - \widehat{\mathsf{N}}_G(x^{-e'}, \mathfrak{e} \mapsto e) \\ &\quad = \sum_{\mathfrak{e}' \in \mathcal{E}_{\triangle}(G, \mathfrak{e})} \left(x(e'') \cdot \mathsf{N}_G(x^{+e''}, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e') - \frac{1}{3} \cdot p^{\mathsf{e}-3} n^{\mathsf{v}-3} \cdot \partial_{e'} \mathsf{N}_{\triangle}(x, e) \right) \\ &\qquad + \sum_{\mathfrak{e}' \in \mathcal{E}_{\wedge}(G, \mathfrak{e})} \left(\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e') - p^{\mathsf{e}-2} n^{\mathsf{v}-3} \cdot \partial_{e'} \mathsf{N}_{\wedge}(x, e) \right) \\ &\qquad + O(n^{\mathsf{v}-4}). \end{aligned}$$

现在回想一下，三角形有 6 个自同构，楔形有 2 个自同构，因此我们有 $\partial_{e'} \mathsf{N}_{\triangle}(x, e) = 6x(e'')$ and$\partial_{e'} \mathsf{N}_{\wedge}(x, e) = 2$。因此，上述表达式等于

$$\begin{aligned} &x(e'') \cdot \sum_{\mathfrak{e}' \in \mathcal{E}_{\triangle}(G, \mathfrak{e})} \left(\mathsf{N}_G(x^{+e''}, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e') - 2p^{\mathsf{e}-3} n^{\mathsf{v}-3} \right) \\ &\qquad + \sum_{\mathfrak{e}' \in \mathcal{E}_{\wedge}(G, \mathfrak{e})} \left(\mathsf{N}_G(x, \mathfrak{e} \mapsto e, \mathfrak{e}' \mapsto e') - 2p^{\mathsf{e}-2} n^{\mathsf{v}-3} \right) \\ &\qquad + O(n^{\mathsf{v}-4}). \end{aligned}$$

因此，由于 $x \in \Pi^\alpha$，上述表达式为 $\lesssim n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}$，因为 Π^α 恰好是上述求和中所有（有限多个）项都为 $\lesssim n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}$ 的地方。综上，如果 $x \in \Pi^\alpha$，那么我们有以下界：

$$\widehat{\mathsf{N}}_G(x^{+e'}, \mathfrak{e} \mapsto e) - \widehat{\mathsf{N}}_G(x^{-e'}, \mathfrak{e} \mapsto e) \lesssim \begin{cases} n^{\mathsf{v}-4} & \text{if } e \cap e' = \varnothing, \\ n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha} & \text{if } e \cap e' \neq \varnothing. \end{cases} \tag{42}$$

还要注意，上述左侧的表达式是非负的。

现在注意到，Π^α 是一个区间，具体来说，若 a、$b \in \Pi^\alpha$ 和 c 满足 $a \preceq c \preceq b$，那么$c \in \Pi^\alpha$ 也成立。这里，$\preceq$ 表示汉明立方体上的偏序，即当 a 中的边构成 b中的边的子集时，有 $a \preceq b$。这个区间性质成立，是因为 Π^α 可以表示为递增函数 $\{0,1\}^{\binom{[n]}{2}} \to \mathbb{R}$下许多区间的逆像的交集。因此，若 a、$b \in \Pi^\alpha$ 满足$a \preceq b$，那么我们可以一次添加一条边，从 a 开始，最终到达 b，并且全程都处于 Π^α中。在此过程中每一步应用（42），即可得到

$$\left|\widehat{\mathsf{N}}_G(a, \mathfrak{e} \mapsto e) - \widehat{\mathsf{N}}_G(b, \mathfrak{e} \mapsto e)\right| \lesssim n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha} \cdot \mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}^{\mathrm{loc}(e)}(a,b) + n^{\mathsf{v}-4} \cdot \mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(a,b), \tag{43}$$

其中我们回顾一下（11）中的结论：

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}^{\mathrm{loc}(e)}(x,x') \coloneqq \sum_{e' \cap e \neq \varnothing} |x(e') - x'(e')|.$$

我们将使用（43）来给出条件 V 和 J 中的 (i) 和 (ii)两种情况下的界。

我们先来看条件 (ii)，为此需要给出以下量的上界

$$\left|\mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^x, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] - \mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^{x'}, \mathfrak{e} \mapsto e)\right]\right|$$

对所有 $t \geq 0$，只要 $x \in \Lambda^\alpha$ 且 $\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x,\ x') \leq 1$。由于 $\mathbf{d}^{\mathrm{loc}(e)}{}_{\mathrm{Ham}}(a,\ b) \leq \mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(a,\ b)$ 且 $n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha} \gg n^{\mathsf{v}-4}$，我们可以简化上界（43），得到

$$\left|\widehat{\mathsf{N}}_G(a, \mathfrak{e} \mapsto e) - \widehat{\mathsf{N}}_G(b, \mathfrak{e} \mapsto e)\right| \lesssim n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha} \mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(a,b) \tag{44}$$

只要 a、b 都属于 Π^α 和 $a \preceq b$，反之亦然。现在，对于 $t \leq n^3$，X_t^x或 $X_t^{x'}$ 逃出 Π^α 的概率为 $\exp(-\Omega(n^{2\alpha}))$，由（41）可知。此外，由于 $\Lambda^\alpha \subseteq \Lambda^*$，根据命题 2.2，两条链留在 $\mathcal{B}_p^{\eta/2}$内直到时间 n^3的概率至少为 $1 - e^{-\Omega(n)}$；若确实如此，则从 $x \preceq x'$ 或 $x' \preceq x$ 继承的序关系（因为 $\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(x,x') \leq 1$而成立）将得以保持，也就是说，我们会有 $X_t^x \preceq X_t^{x'}$，反之亦然。这是因为我们采用了保持单调性的单调耦合，唯一的例外是两条链试图离开亚稳井 $\mathcal{B}_p^\eta$的情况；如果它们一直留在 $\mathcal{B}_p^{\eta/2}$内，这种情况就不会发生。

无论如何，对于 $t \leq n^3$，根据上段中的推理，引理 2.3 中的第二个界给出了某个常数 $\kappa > 0$，使得我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^x, \mathfrak{e} \mapsto e) - \widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^{x'}, \mathfrak{e} \mapsto e)\right|\right] &\lesssim n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}\left(1 - \frac{\kappa}{n^2}\right)^t + \exp(-\Omega(n^{2\alpha})) \\ &\lesssim n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}. \end{aligned} \tag{45}$$

另一方面，同样根据引理 2.3 中的第二个界以及马尔可夫不等式，链 X_t^x和 $X_t^{x'}$ 在时间 n^3之前相遇的概率至少为 $1 - e^{-\Omega(n)}$。因此，由于

$$\left|\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^x, \mathfrak{e} \mapsto e) - \widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^{x'}, \mathfrak{e} \mapsto e)\right|$$

是确定性多项式有界的，并且以至少 $1 - \exp(-\Omega(n))$ 的概率为零，因此当 $t > n^3$时，我们可以得到该量的期望的指数小上界。所有这些意味着，在条件 $J \lesssim n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}$ 中，我们可以取 (ii)。

最后，我们转向条件 (i)。我们需要为 V 找到一个合适的值，使其能够为所有 $x \in \Lambda^\alpha$的以下方差代理提供界：

$$\sum_{x' \in \mathcal{B}_p^\eta} P(x,x') \sum_{t=0}^{n^3-1} \left(\mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^x, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] - \mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^{x'}, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] \right)^2$$
$$\leq \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{e' \in \binom{[n]}{2}} \sum_{t=0}^{n^3-1} \left(\mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^x, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] - \mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^{x^{\oplus e'}}, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] \right)^2, \tag{46}$$

其中我们使用 $x^{\oplus e'}$ 这一记号，如第2.2.1 节所引入，用以表示与 x相同、但 e' 状态翻转后的图。

我们先考虑（46）中对应于 e' 且 $e \cap e' \neq \varnothing$的项。对于这些项，我们可以应用简化界（44），再使用引理2.3中的第二个界，如上文推导（45）时那样，从而得到以下内层求和的界：

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{n^3-1} \left(\mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^x, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] - \mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^{x^{\oplus e'}}, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] \right)^2 \\
&\quad \lesssim n^{2\mathsf{v}-7+2\alpha} \sum_{t=0}^{n^3-1} \left(\mathbb{E}\left[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X_t^x, X_t^{x^{\oplus e'}})\right] \right)^2 + \exp\left(-\Omega(n^{2\alpha})\right) \\
&\quad \lesssim n^{2\mathsf{v}-7+2\alpha} \sum_{t=0}^{n^3-1} \left(1 - \frac{\kappa}{n^2}\right)^{2t} + \exp\left(-\Omega(n^{2\alpha})\right) \\
&\quad \lesssim n^{2\mathsf{v}-5+2\alpha},
\end{aligned}$$

在 $e \cap e' \neq \varnothing$ 的情况下。

现在我们来考虑（46）中对应于 e' 且 $e \cap e' = \varnothing$的项。回到未简化界（43），并再次利用以下事实：以至少 X_t^x的概率，$X_t^{x^{\oplus e'}} \in \Pi^\alpha$ 和按单调顺序排列，且概率至少为 $1 - \exp\left(-\Omega(n^{2\alpha})\right)$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^x, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] - \mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^{x^{\oplus e'}}, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] \right| \\
&\quad \lesssim n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}^{\mathrm{loc}(e)}(X_t^x, X_t^{x^{\oplus e'}})\right] + n^{\mathsf{v}-4} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X_t^x, X_t^{x^{\oplus e'}})\right] + \exp\left(-\Omega(n^{2\alpha})\right).
\end{aligned}$$

现在，由于 e' 与 e不相邻，根据推论 2.8，我们有

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}^{\mathrm{loc}(e)}(X_t^x, X_t^{x^{\oplus e'}})\right] \lesssim \frac{1}{n}.$$

现在，由于 $\mathbb{E}\left[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X_t^x, X_t^{x^{\oplus e'}})\right] \lesssim 1$ 根据引理 2.3中的第二个界，并且由于 $\alpha < \frac{1}{2}$，我们有

$$\left| \mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^x, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] - \mathbb{E}\left[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^{x^{\oplus e'}}, \mathfrak{e} \mapsto e)\right] \right| \lesssim n^{\mathsf{v}-4}. \tag{47}$$

因此，从（46）的内层求和中的正方形提出一个因子并应用（47），然后应用（45）

于另一个因子　　在求和中，最后再次应用引理2.3 的第二个界，得到　　in

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{n^3-1}\Big(\mathbb{E}\Big[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^x,\mathfrak{e}\mapsto e)\Big]-\mathbb{E}\Big[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^{x^{\oplus e'}},\mathfrak{e}\mapsto e)\Big]\Big)^2\\
&\quad\lesssim n^{\mathsf{v}-4}\sum_{t=0}^{n^3-1}\Big|\mathbb{E}\Big[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^x,\mathfrak{e}\mapsto e)\Big]-\mathbb{E}\Big[\widehat{\mathsf{N}}_G(X_t^{x^{\oplus e'}},\mathfrak{e}\mapsto e)\Big]\Big|\\
&\quad\lesssim n^{\mathsf{v}-4}\sum_{t=0}^{n^3-1}n^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}\cdot\mathbb{E}\Big[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X_t^x,X_t^{x^{\oplus e'}})\Big]+\exp\big(-\Omega(n^{2\alpha})\big)\\
&\quad\lesssim n^{2\mathsf{v}-7.5+\alpha}\sum_{t=0}^{n^3-1}\Big(1+\frac{\kappa}{n^2}\Big)^t+\exp\big(-\Omega(n^{2\alpha})\big)\\
&\quad\lesssim n^{2\mathsf{v}-5.5+\alpha}.
\end{aligned}$$

最后，综合分析 $e'\cap e\neq\varnothing$ 和 $e'\cap e=\varnothing$两种情况，并利用 $\alpha<\frac{1}{2}$ 这一事实，我们得到需要估计的原始和式（46）为

$$\lesssim\frac{1}{n^2}\big(n\cdot n^{2\mathsf{v}-5+2\alpha}+n^2\cdot n^{2\mathsf{v}-5.5+\alpha}\big)=n^{2\mathsf{v}-6+2\alpha}+n^{2\mathsf{v}-5.5+\alpha}\lesssim n^{2\mathsf{v}-5.5+\alpha},$$

在最后一个不等式中利用$\alpha<\frac{1}{2}$这一事实。因此，条件(i) 在 $V\lesssim n^{2\mathsf{v}-5.5+\alpha}$时成立。总之，定理2.5 的所有条件在以下取值下均成立：

$$V=Cn^{2\mathsf{v}-5.5+\alpha},\quad J=Cn^{\mathsf{v}-3.5+\alpha},\quad \epsilon=\exp\big(-cn^{2\alpha}\big),\quad \delta=\exp(-cn),\quad M=Cn^{\mathsf{v}-2}$$

对于某些常数 C 和 c。因此，由定理2.5 的结论可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big[\Big|\widehat{\mathsf{N}}_G(X,\mathfrak{e}\mapsto e)-\mathbb{E}\Big[\widehat{\mathsf{N}}_G(X,\mathfrak{e}\mapsto e)\Big]\Big|>\lambda\Big]\\
&\quad\le 2\exp\bigg(-\frac{(\lambda-2Cn^{\mathsf{v}-2}e^{-cn})^2}{2Cn^{2\mathsf{v}-5.5+\alpha}+\frac{4}{3}Cn^{\mathsf{v}-3.5+\alpha}(\lambda-2Cn^{\mathsf{v}-2}e^{-cn})}\bigg)+e^{-cn^{2\alpha}}+e^{-cn}.
\end{aligned}$$

代入 $\lambda=\gamma n^{\mathsf{v}-2.75+\zeta}$ 后，分母中的第二项恰好在以下条件成立时被第一项支配：

$$2\mathsf{v}-5.5+\alpha\ge 2\mathsf{v}-6.25+\alpha+\zeta,$$

这意味着要使其成立，我们应取 $\zeta\le 0.75$ 。在此假设下，通过化简表达式、改变常数并利用 $\alpha<\frac{1}{2}$ 这一事实，我们得到

$$\mathbb{P}\Big[\Big|\widehat{\mathsf{N}}_G(X,\mathfrak{e}\mapsto e)-\mathbb{E}\Big[\widehat{\mathsf{N}}_G(X,\mathfrak{e}\mapsto e)\Big]\Big|>\gamma n^{\mathsf{v}-2.75+\zeta}\Big]\le\exp\big(-cn^{2\zeta-\alpha}\big)+\exp\big(-cn^{2\alpha}\big).$$

因此， α的最优选择为 $\alpha=\frac{2}{3}\zeta$，它属于 $(0,\frac{1}{2})$，因为 $\zeta\in(0,\frac{3}{4})$。由此得到一个上界 $\exp\Big(-cn^{\frac{4}{3}\zeta}\Big)$，并完成了对（40）的证明，从而完成了命题 4.1的证明。 □

现在我们使用命题 4.1 以及哈密顿量微分的分解（28），为哈密顿量微分本身提供一个类似的近似。

推论 4.4。 存在常数 $\mathsf{C}^{\triangle},\mathsf{C}^{\wedge}\ge 0$，在非退化假设 (8)下，至少有一个严格为正。若定义

$$\widehat{n^2\partial_e\mathsf{H}}(x):=n^2\partial_e\mathsf{H}(x)-\frac{1}{n}\big(\mathsf{C}^{\triangle}\cdot\mathsf{N}_{\triangle}(x,e)+\mathsf{C}^{\wedge}\cdot\mathsf{N}_{\wedge}(x,e)\big),$$

那么对于任意的 $\zeta\in(0,\frac{3}{4})$ 以及任意的 $\gamma>0$，都存在某个 $c>0$ 使得

$$\mathbb{P}\Big[\Big|\widehat{n^2\partial_e\mathsf{H}}(X)-\mathbb{E}\Big[\widehat{n^2\partial_e\mathsf{H}}(X)\Big]\Big|>\gamma n^{-0.75+\zeta}\Big]\le\exp\Big(-cn^{\frac{4}{3}\zeta}\Big).$$

推论的证明 4.4。 我们定义

$$\mathsf{C}^{\triangle}=\sum_{j=0}^{K}\beta_j p^{\mathsf{e}_j-3}\mathsf{C}^{\triangle}_{G_j} \qquad \text{and} \qquad \mathsf{C}^{\wedge}=\sum_{j=0}^{K}\beta_j p^{\mathsf{e}_j-2}\mathsf{C}^{\wedge}_{G_j},$$

其中 $\mathsf{C}^{\triangle}_{G}$ 和 $\mathsf{C}^{\wedge}_{G}$ 是命题 4.1 针对任意图 G所保证的常数，且 G_j 是 ERGM规范中的图。注意，在非退化假设（8）下，这些图中至少有一个不是边的不交并；还要注意，$\mathsf{C}^{\triangle}_{G_0}=\mathsf{C}^{\wedge}_{G_0}=0$，因为 G_0 是一条单边。因此，由于 $\beta_j>0$对 $j\geq 1$成立，上述常数 $\mathsf{C}^{\triangle}$和$\mathsf{C}^{\wedge}$ 中至少有一个严格为正。现在，回顾（28），取上述 $\mathsf{C}^{\triangle}$ 和 $\mathsf{C}^{\wedge}$，若

$$\left|\widehat{n^2\partial_e\mathsf{H}}(X)-\mathbb{E}[\widehat{n^2\partial_e\mathsf{H}}(X)]\right|>\gamma n^{-0.75+\zeta},$$

那么对于某个 $j>0$，我们还必须有

$$\frac{\beta_j}{n^{\mathsf{v}_j-2}}\left|\widehat{\mathsf{N}}_{G_j}(X)-\mathbb{E}[\widehat{\mathsf{N}}_{G_j}(X)]\right|>\frac{\gamma}{K}n^{-0.75+\zeta}, \tag{48}$$

注意到，我们上面正在分解的和中的 $j=0$ 项为零，因为 $\mathsf{N}_{G_0}(x,e)\equiv 1$ 对于 G_0 一条单边而言。无论如何，根据命题 4.1，事件（48）发生的概率至多为 $\exp\left(-c_j n^{\frac{4}{3}\zeta}\right)$，其中某个常数 c_j 可能因 j取值不同而不同。不过，由于 j只有有限种可能，我们立即得到所需结果。

□

4.2 通过近似 FKG 不等式得到涨落下界

本节利用推论4.4以及定理2.9中的近似 FKG 不等式，推导 $n^2\partial_e\mathsf{H}(X)$ 关于 $X\sim\mathcal{M}(n,p)$ 的涨落下界。这将有助于证明主要结果定理 1.1中的下界。我们先给出推论 4.4用于比较 $n^2\partial_e\mathsf{H}(X)$ 的量的涨落下界。

命题 4.5。 令 $X\sim\mathcal{M}(n,p)$，并定义 对于某些 $\mathsf{C}^{\triangle},\mathsf{C}^{\wedge}\geq 0$，定义

$$\mathsf{S}(x)=\mathsf{C}^{\triangle}\cdot\mathsf{N}_{\triangle}(x,e)+\mathsf{C}^{\wedge}\cdot\mathsf{N}_{\wedge}(x,e).$$

若 $\mathsf{C}^{\triangle}>0$ 或 $\mathsf{C}^{\wedge}>0$，则存在某些 $\varepsilon,\delta>0$，使得对于 $X\sim\mathcal{M}(n,p)$，有

$$\mathbb{P}\left[|\mathsf{S}(X)-\mathbb{E}[\mathsf{S}(X)]|>\delta\sqrt{n}\right]>\varepsilon.$$

命题 4.5的证明。 由于 $\mathsf{C}^{\triangle}$,$\mathsf{C}^{\wedge}\geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[\mathsf{S}(X)]&=(\mathsf{C}^{\triangle})^2\operatorname{Var}[\mathsf{N}_{\triangle}(X,e)]+(\mathsf{C}^{\wedge})^2\operatorname{Var}[\mathsf{N}_{\wedge}(X,e)]+\mathsf{C}^{\triangle}\mathsf{C}^{\wedge}\operatorname{Cov}[\mathsf{N}_{\triangle}(X,e),\mathsf{N}_{\wedge}(X,e)]\\&\geq(\mathsf{C}^{\triangle})^2\operatorname{Var}[\mathsf{N}_{\triangle}(X,e)]+(\mathsf{C}^{\wedge})^2\operatorname{Var}[\mathsf{N}_{\wedge}(X,e)]-e^{-\Omega(n)},\end{aligned}$$

使用定理 2.9 得到协方差的下界。现在，记作 $e=\{u,v\}$，我们也有

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[\mathsf{N}_{\triangle}(X,e)]=&\sum_{w\notin\{u,v\}}\operatorname{Var}[X(\{u,w\})X(\{v,w\})]\\&+\sum_{w_1,w_2\notin\{u,v\}}\operatorname{Cov}[X(\{u,w_1\})X(\{v,w_1\}),X(\{u,w_2\})X(\{v,w_2\})]\\\gtrsim\ &n-n^2e^{-\Omega(n)}\gtrsim n,\end{aligned}$$

再次使用定理 2.9，并利用上述第一个求和中的方差因对称性而都相同这一事实。同样，我们也有 $\operatorname{Var}[\mathsf{N}_{\wedge}(X,e)]\gtrsim n$。因此，由于 $\mathsf{C}^{\triangle}$ 和 $\mathsf{C}^{\wedge}$ 中至少有一个严格为正，我们也得到 $\operatorname{Var}[\mathsf{S}(X)]\gtrsim n$。

接下来，我们将应用定理2.4 来给的涨落建立上界$\mathsf{S}(X)$，其上界为 $O(\sqrt{n})$。这样，我们便可以利用n的方差下界 $\Omega(\mathsf{S}(X)$，从而得到$\sqrt{n}$涨落本身的匹配下界 $\Omega($。

要应用定理 2.4，我们需要计算 $\mathsf{S}(x)$ 的利普希茨向量 $\mathcal{L}$ 的一个上界。首先，由于 $\mathsf{S}(x)$ 不依赖于 $x(e)$，因此有 $\mathcal{L}_e = 0$。其次，若 e' 与 e 相邻，则改变 $x(e')$ 至多会使 $\mathsf{N}_\triangle(x,e)$ 和 $\mathsf{N}_\wedge(x,e)$ 各自变化 $O(1)$。最后，若 e' 与 e 不相邻，则改变 $x(e')$ 不会改变 $\mathsf{S}(x)$。因此我们有

$$\|\mathcal{L}\|_\infty \lesssim 1 \qquad \text{and} \qquad \|\mathcal{L}\|_1 \lesssim n.$$

因此，定理 2.4 给出 C，$c > 0$ 使得对所有 $\lambda \le cn$ 都有

$$\mathbb{P}[|\mathsf{S}(X) - \mathbb{E}[\mathsf{S}(X)]| > \lambda] \le 2\exp\left(-c\frac{\lambda^2}{n} + ce^{C\lambda - cn}\right) + e^{-cn}. \tag{49}$$

我们很快就会用到这个结果。

首先，令 $T = (\mathsf{S}(X) - \mathbb{E}[\mathsf{S}(X)])^2$，并注意对任意 M，都有

$$n \lesssim \mathrm{Var}[\mathsf{S}(X)] = \mathbb{E}[T\mathbf{1}_{\{T \le Mn\}}] + \mathbb{E}[T\mathbf{1}_{\{T > Mn\}}]. \tag{50}$$

现在，我们用（49）来估计 M 时右端最末项的上界。我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T\mathbf{1}_{\{T>Mn\}}] &= \int_0^\infty \mathbb{P}[T\mathbf{1}_{\{T>Mn\}} \ge t]\,dt \\ &\le \int_0^{Mn} \mathbb{P}[T \ge Mn]\,dt + \int_{Mn}^{\frac{c^2}{C^2}n^2} \mathbb{P}[T \ge t]\,dt + \int_{\frac{c^2}{C^2}n^2}^{O(n^2)} \mathbb{P}[T \ge t]\,dt,\end{aligned} \tag{51}$$

其中，最右侧积分中的 $O(n^2)$ 项是 T的某个确定性上界，而第二和第三个积分中的 C，c 与定理 2.4及上文的（49）结论中的相同。由于$\sqrt{Mn} \le cn$当 n足够大时，我们可以利用（49）并取 $\lambda = \sqrt{Mn}$，从而对（51）中的第一个积分进行如下估计

$$\int_0^{Mn} \mathbb{P}[T \ge Mn]\,dt \le Mn \cdot \left(2\exp\left(-cM + ce^{C\sqrt{Mn}-cn}\right) + e^{-cn}\right) \le 3Mne^{-cM}$$

当 n 足够大时。同理，我们可以利用（49）并取 $\lambda = t$，从而对（51）中的第二个积分进行如下估计

$$\begin{aligned}\int_{Mn}^{\frac{c^2}{C^2}n^2} \mathbb{P}[T \ge t]\,dt &\le \int_{Mn}^{\frac{c^2}{C^2}n^2} \left(2\exp\left(-c\frac{t}{n} + ce^{C\sqrt{t}-cn}\right) + e^{-cn}\right) dt \\ &\le 2e^c \int_{Mn}^{\frac{c^2}{C^2}n^2} e^{-ct/n}\,dt + \frac{c^2}{C^2}n^2e^{-cn} \\ &\le 2e^c\frac{n}{c}e^{-cM} + e^{-\Omega(n)}.\end{aligned}$$

最后，式（51）中的第三个积分可估计为

$$\begin{aligned}\int_{\frac{c^2}{C^2}n^2}^{O(n^2)} \mathbb{P}[T \ge t]\,dt &\le \int_{\frac{c^2}{C^2}n^2}^{O(n^2)} \mathbb{P}\left[T \ge \frac{c^2}{C^2}n^2\right] dt \\ &\le O(n^2) \cdot \left(2\exp\left(-\frac{c^3}{C^2}n + c\right) + e^{-cn}\right) \\ &\le e^{-\Omega(n)}.\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\mathbb{E}[T\mathbf{1}_{\{T>Mn\}}] \le \left(3M + \frac{2e^c}{c}\right)e^{-cM}n + e^{-\Omega(n)}.$$

通过取 M足够大，可以确保 $\mathbb{E}[T\mathbf{1}_{\{T>Mn\}}]$至多是 n的任意小倍数。于是，回顾式（50），可得

$$\mathbb{E}[T\mathbf{1}_{\{T\le Mn\}}] \gtrsim n.$$

由于 $T\mathbf{1}_{\{T\le Mn\}} \le Mn$，必定存在某个 δ，$\varepsilon > 0$使得我们以至少 ε 的概率有 $T \ge \delta^2 n$。至此，证明完成。□

利用命题 4.5 ，我们可以证明定理 1.1中 Wasserstein 距离下界的关键部分，它是哈密顿量微分涨落下界的一种实用形式。这是与 $k=1$ 情形相匹配的下界，即推论 3.4。

推论 4.6. 对于 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$，在非退化假设 (8) 下，我们有 e

$$\mathbb{E}\big[\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big|\big] \gtrsim n^{-1/2}.$$

推论 *4.6* 的证明。 首先注意到，根据定理 1.2 和引理 3.1，我们有

$$2\mathsf{H}'(p) = 2\mathsf{H}'(\mathbb{E}[X(e)]) + O(n^{-1}) = \mathbb{E}[n^2\partial_e \mathsf{H}(X)] + O(n^{-1}).$$

在上述推导中，我们还用到了 H' 是 Lipschitz 函数这一事实。因此，只需证明

$$\mathbb{E}\big[\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - \mathbb{E}[n^2\partial_e \mathsf{H}(X)]\big|\big] \gtrsim n^{-1/2}.$$

现在回忆一下记号

$$\mathsf{S}(x) = \mathsf{C}^{\triangle}\cdot \mathsf{N}_{\triangle}(x,e) + \mathsf{C}^{\wedge}\cdot \mathsf{N}_{\wedge}(x,e)$$

根据命题4.5的陈述，我们现在代入推论4.4给出的 $\mathsf{C}^{\triangle}$ 和 $\mathsf{C}^{\wedge}$ 的值。推论 4.4 指出，对于所有 $\zeta \in (0, \frac{3}{4})$ 以及 $\gamma > 0$，存在某个 $c>0$，使得

$$\mathbb{P}\left[\left|\big(n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - \mathbb{E}[n^2\partial_e \mathsf{H}(X)]\big) - \frac{1}{n}\big(\mathsf{S}(X) - \mathbb{E}[\mathsf{S}(X)]\big)\right| > \gamma n^{-\frac{3}{4}+\zeta}\right] \le \exp\Big(-cn^{\frac{4}{3}\zeta}\Big).$$

以 $\zeta = \frac{1}{8}$ 和 $\gamma = 1$ 为例，我们看到

$$n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - \mathbb{E}[n^2\partial_e \mathsf{H}(X)] \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{n}\big(\mathsf{S}(X) - \mathbb{E}[\mathsf{S}(X)]\big)$$

彼此之间的距离不超过 $n^{-\frac{5}{8}}$，其概率至少为 $1 - e^{-cn^{\frac{1}{6}}}$。现在根据命题 4.5(因为非退化假设(8)保证了 $\mathsf{C}^{\triangle} > 0$ 或 $\mathsf{C}^{\wedge} > 0$)，我们有

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{n}|\mathsf{S}(X) - \mathbb{E}[\mathsf{S}(X)]| > \delta n^{-1/2}\right] > \varepsilon,$$

因此我们也有

$$\mathbb{P}\Big[\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - \mathbb{E}[n^2\partial_e \mathsf{H}(X)]\big| > \delta n^{-\frac{1}{2}} - n^{-\frac{5}{8}}\Big] > \varepsilon - e^{-cn^{\frac{1}{6}}}.$$

证明至此完成。 □

在继续之前，我们指出，命题 4.1 所给出的将 $_{\triangle}NX(e,_{\wedge})$ 和 $XNe(,)$ 化简为 4.6推论所给出的界是必要的。事实上，若直接将命题 4.5 中提出的类似策略应用于 $n^2\partial_e \mathsf{H}(X)$ 本身，一般情况下会失败。例如，如果 $K = 1$且$G_1 = \square$是一个正方形，那么令 $e = \{u,v\}$，我们发现 $\mathsf{N}_{\square}(X,e)$ 的方差为

$$\sum_{w_1,w_2} \mathrm{Var}[X(\{u,w_1\})X(\{v,w_2\})X(\{w_1,w_2\})]$$
$$+ \sum_{w_1,w_2,w_3,w_4} \mathrm{Cov}[X(\{u,w_1\})X(\{v,w_2\})X(\{w_1,w_2\}), X(\{u,w_3\})X(\{v,w_4\})X(\{w_3,w_4\})].$$

现在，第一个求和项只有 $\gtrsim n^2$，而我们从命题4.1 和4.5 可知，真实方差的量级为n^3，因为$\mathsf{N}_{\square}(X,e)$可由常数乘以 $n\cdot \mathsf{N}_{\wedge}(X,e)$很好地近似（在这一特例中，我们有$\mathsf{C}^{\triangle} = 0$）。因此，上面的第二个求和项必然是方差的主要贡献项，但先验地，我们无法为该求和项中的协方差给出下界，除非根据定理2.9将其下界估为一个负数。

5 Wasserstein 距离

本节将证明我们的主要结果——定理1.1，给出 $\mathcal{M}(n,p)$与 $\mathcal{G}(n,p)$之间 Wasserstein 距离的匹配上界和下界。首先，在第5.1 节中，我们描述 $\mathcal{M}(n,p)$与 $\mathcal{G}(n,p)$之间的最优耦合；随后，在第5.2 节中，我们将结合这一描述以及前几节的准备工作给出证明。

5.1 最优耦合

回顾（7）可知，Wasserstein 距离 $\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}$（$\mathcal{M}$（$n$， p） $\mathcal{G}$（n， p）定义为

$$\mathbb{E}[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X,Y)] = \mathbb{E}\left[\sum_{e\in\binom{[n]}{2}} \mathbf{1}_{\{X(e)\neq Y(e)\}}\right] \tag{52}$$

在具有边缘分布 $X \sim \mathcal{M}(n,\ p)$ 和 $Y \sim \mathcal{G}(n,\ p)$ 的耦合 $(X,\ Y)$ 下，该耦合使上述期望最小。尽管可能存在多个达到该值的最优耦合，但它们都必须满足重新采样边下的局部最优性条件，具体如下述引理所述。我们在稍微更一般的背景下陈述该引理，因为它与图的结构或两个测度 $\mathcal{M}(n,\ p)$ 或 $\mathcal{G}(n,\ p)$ 的具体细节无关。

引理 5.1。 固定任意一个 *Wasserstein*-最优耦合 （X、Y），它位于有限集 $\{0,1\}^{\mathcal{E}}$ 上的两个测度 μ 和 ν 之间。对于任意固定坐标 $e \in \mathcal{E}$，给定（X （e'） Y （e'）时，（X （e） Y （e）的条件分布对于所有 $e' \neq e$ 都必须是具有均值的两个最优耦合伯努利随机变量的分布

$$\mathbb{E}_{\mu}[X(e)|X(e')\ \textit{for}\ e'\neq e] \qquad \textit{and} \qquad \mathbb{E}_{\nu}[Y(e)|Y(e')\ \textit{for}\ e'\neq e] \tag{53}$$

分别。

引理的证明 *5.1*。 假设对于某个固定的 $e \in \mathcal{E}$ 情况并非如此，并令 (X,Y) 表示从所谓的最优耦合中抽取的一个样本。然后定义 (X',Y')：首先抽取 (X,Y)，然后根据具有 $(\ e$ 所描述概率的伯努利随机变量的最优耦合，对 X 和 Y 的第 个坐标进行重新采样（参见 53）。由于没有重新采样其他边，因此我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X,Y)] - \mathbb{E}[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X',Y')] &= \mathbb{P}[X(e)\neq Y(e)] - \mathbb{P}[X'(e)\neq Y'(e)] \\ &= \mathbb{E}\left[\begin{array}{l}\mathbb{P}[X(e)\neq Y(e)|X(e'),Y(e')\text{ for }e'\neq e] \\ \quad -\mathbb{P}[X'(e)\neq Y'(e)|X(e'),Y(e')\text{ for }e'\neq e]\end{array}\right].\end{aligned}$$

由于对于所有 $e' \neq e$，在给定 $X(e')\ Y(e')$ 的条件下，$(X(e)\ Y(e))$ 和 $(X'(e)\ Y'(e))$ 都是具有相同边缘分布的伯努利变量，并且 $(X'(e)\ Y'(e))$ 始终采用最优耦合，因此右侧期望中的表达式为 ≥ 0。此外，由于我们假设对于 $e' \neq e\}$ 的某个 $\{X(e')\ Y(e')$ 实现，$(X(e)\ Y(e))$ 并非 最优耦合，因此该期望严格为正。这意味着 (X',Y') 比 (X,Y) 更好的耦合，这与最优耦合 (X,Y) 不满足引理结论的假设相矛盾。

□

5.2 主要结果的证明

经过前几节的充分准备，我们终于可以快速证明定理1.1，说明

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}(\mathcal{M}(n,p),\mathcal{G}(n,p)) = \Theta(n^{3/2}). \tag{54}$$

定理 *1.1* 的证明。 首先，注意到再次根据（52）和塔式性质，在 $X \sim \mathcal{M}$（n， p）与 $Y \sim \mathcal{G}$（n， p）之间使下述期望最小的最优耦合下，我们有

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}(\mathcal{M}(n,p),\mathcal{G}(n,p)) = \sum_{e\in\binom{[n]}{2}} \mathbb{E}[\mathbb{P}[X(e)\neq Y(e)|X(e'),Y(e')\text{ for }e'\neq e]].$$

现在根据引理 5.1，对于任意 $e \in \binom{[n]}{2}$，在最优耦合下，给定所有X（e'）和 Y（e'）后，$e' \neq e$ （X（e）Y（e）的分布是均值为

$$\mathbb{E}[X(e)|X(e') \text{ for } e' \neq e] \qquad \text{and} \qquad p$$

分别。根据 $\mathcal{M}(n,\ p)$ 的定义，左侧的表达式等于

$$\varphi(n^2\partial_e \mathsf{H}(X)) + \mathsf{error}(X),$$

对于某个误差(x) $\lesssim 1$，除非 x 靠近 $\mathcal{B}_p^{\eta}$的边界，否则该值为零。特别地，误差(x) $= 0$ 如果$x \in \mathcal{B}_p^{\eta/2}$，则 $\mathbb{E}[$误差$(X)] = e^{-\Omega(n^2)}$。此外，由于 $p = \varphi(2\mathsf{H}'(p))$，如第2.1节所述，我们得到

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}(\mathcal{M}(n,p), \mathcal{G}(n,p)) = \sum_{e \in \binom{[n]}{2}} \mathbb{E}\big[\big|\varphi(n^2\partial_e \mathsf{H}(X)) - \varphi(2\mathsf{H}'(p))\big|\big] + e^{-\Omega(n^2)},$$

因此，由于上面的被加数不依赖于 e，根据 $\mathcal{M}(n,p)$ 的对称性，为了证明 (54)，只需证明对任意固定的 $e \in \binom{[n]}{2}$:

$$\mathbb{E}\big[\big|\varphi(n^2\partial_e \mathsf{H}(X)) - \varphi(2\mathsf{H}'(p))\big|\big] = \Theta(n^{-1/2}).$$

现在我们将 φ 按如下方式作二阶泰勒展开:

$$\varphi(n^2\partial_e \mathsf{H}(X)) - \varphi(2\mathsf{H}'(p)) = \varphi'(2\mathsf{H}'(p)) \cdot \big(n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big) + O\Big(\big(n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big)^2\Big). \tag{55}$$

对于二阶项，根据推论3.4 以及 $k = 2$，我们有

$$\mathbb{E}\Big[\big(n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big)^2\Big] \lesssim n^{-1},$$

因此，对 (55) 取期望可得

$$\mathbb{E}\big[\big|\varphi(n^2\partial_e \mathsf{H}(X)) - \varphi(2\mathsf{H}'(p))\big|\big] = \varphi'(2\mathsf{H}'(p)) \cdot \mathbb{E}\big[\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big|\big] + O\big(n^{-1}\big).$$

因此，由于 $\varphi'(2\mathsf{H}'(p)) > 0$，只需证明

$$\mathbb{E}\big[\big|n^2\partial_e \mathsf{H}(X) - 2\mathsf{H}'(p)\big|\big] = \Theta(n^{-1/2}). \tag{56}$$

根据推论 3.4，上述期望为 $\lesssim n^{-1/2}$；另一方面，根据推论 4.6，其值为 $\gtrsim n^{-1/2}$。这就证明了（56），并完成了定理 1.1的证明。 □

5.3 通过顶点度中心极限定理给出的下界的另一种证明

本节通过 1.1 中给出的顶点度的定量中心极限定理，给出定理下界的另一种证明： [Win25b，定理 1。3]。作者在加州大学戴维斯分校的一次演讲后讨论时，Chris Jones 将这一证明思路告知作者；经其许可，我们在此详述证明细节。

我们先回顾该中心极限定理的陈述；请注意，对于完整版本（即不作 [Win25b] 中的相唯一性或森林假设），请参阅 [MW26，第 5 节中的讨论。2]。下文中，$\mathcal{V}_j$ 表示 G_j 在 ERGM 规范中的图的顶点集。此外，对于顶点 $\mathfrak{u} \in \mathcal{V}_j$，$\mathsf{d}_{\mathfrak{u}}$ 表示 $\mathfrak{u}$ 在 G_j中的度。最后，$\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}$ 表示 $\mathbb{R}$取值于实数的随机变量之间的 1-沃瑟斯坦距离，即在最优耦合下绝对差的最小期望。

定理 5.2 （ [Win25b], 第5.2节 [MW26]）。 定义

$$\varsigma_n^2 = \left(1 - p(1-p)\sum_{j=1}^{K} \beta_j p^{\mathsf{e}_j - 2} \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{V}_j} \mathsf{d}_{\mathfrak{u}}(\mathsf{d}_{\mathfrak{u}} - 1)\right)^{-1} \times p(1-p)(n-1).$$

那么，对于任意确定性顶点 $v \in [n]$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，对于 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$，我们有

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}\left(\frac{\mathsf{deg}_v(X) - \mathbb{E}[\mathsf{deg}_v(X)]}{\varsigma_n}, Z\right) \lesssim n^{-\frac{1}{4}+\varepsilon},$$

其中 $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$。

注意，在非退化假设 (8) 下，$\mathsf{deg}_v(X)$ 的方差代理 ς_n^2 比 $\mathcal{G}(n,p)$ 中一个顶点的度的方差 $p(1-p)(n-1)$ 大（相差一个常数因子），因为只要 G_j 中存在一对相邻边，就有某个顶点 $\mathsf{u} \in \mathcal{V}_j$ 满足 $\mathsf{d}_\mathsf{u}(\mathsf{d}_\mathsf{u}-1)$ 非零。还要回顾的是，我们可以通过标准的 Stein 方法应用来量化 $\mathcal{G}(n,p)$ 中顶点度的中心极限定理（它是 $n-1$ 个独立同分布的伯努利分布(p) 随机变量之和），例如 [Ros11, Theorem 3.2],，因此对于 $Y \sim \mathcal{G}(n,p)$ 和任意 $v \in [n]$，有

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}\left(\frac{\mathsf{deg}_v(Y) - \mathbb{E}[\mathsf{deg}_v(Y)]}{\sqrt{p(1-p)(n-1)}}, Z'\right) \lesssim n^{-\frac{1}{2}}, \tag{57}$$

其中同样有 $Z' \sim \mathcal{N}(0,1)$。

现在，将握手引理应用于两个图的对称差，则在 $X \sim \mathcal{M}(n,p)$ 和 $Y \sim \mathcal{G}(n,p)$ 之间的任意耦合下，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X,Y)] &= \frac{1}{2}\sum_{v\in[n]}\mathbb{E}\left[\sum_{e\ni v}|X(e)-Y(e)|\right] \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{v\in[n]}\mathbb{E}[|\mathsf{deg}_v(X)-\mathsf{deg}_v(Y)|],\end{aligned} \tag{58}$$

应用三角不等式 在最后一步中使用三角不等式，因为度$_v(x) = \sum_{e\ni v} x(e)$。现在根据定理 1.2 我们有 ve

$$\mathbb{E}[\mathsf{deg}_v(X)] = p(n-1) + O(1) = \mathbb{E}[\mathsf{deg}_v(Y)] + O(1),$$

因此，同样利用（58）中各项的对称性，我们发现对于任意 $v \in [n]$,

$$\mathbb{E}[\mathbf{d}_{\mathrm{Ham}}(X,Y)] \geq \frac{n}{2}\cdot\mathbb{E}\left[\left|\overline{\mathsf{deg}}_v(X) - \overline{\mathsf{deg}}_v(Y)\right|\right] - O(n), \tag{59}$$

其中我们令 $\overline{\mathsf{deg}_v(X)} = \mathsf{deg}_v(X) - \mathbb{E}[\mathsf{deg}_v(X)]$，对 Y 也类似。因此，只需证明，对于 X 与 Y 之间的任意耦合，上述右侧的期望为 $\gtrsim \sqrt{n}$。对于任意耦合，根据 $\mathbb{R}$ 上 1-沃瑟斯坦距离的定义，该期望至少为 $\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}(\mathsf{deg}_v(X),\mathsf{deg}_v(Y))$。现在根据$\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}$ 的三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}\left(\overline{\mathsf{deg}}_v(X), \overline{\mathsf{deg}}_v(Y)\right) \geq\ & \mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}\left(\varsigma_n Z, \sqrt{p(1-p)(n-1)}Z'\right) \\ & - \mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}\left(\overline{\mathsf{deg}}_v(X), \varsigma_n Z\right) \\ & - \mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}\left(\overline{\mathsf{deg}}_v(Y), \sqrt{p(1-p)(n-1)}Z'\right),\end{aligned}$$

其中，与上文相同，Z 和 Z' 是标准正态随机变量。现在根据定理 5.2 和（57），上文的第二行和第三行分别为 $O(n^{\frac{1}{4}})$ 和 $O(1)$。另一方面，两个方差分别为 σ_1^2和 σ_2^2的零均值高斯分布之间的 Wasserstein 距离恰好为 $|\sigma_1-\sigma_2|\sqrt{\frac{2}{\pi}}$，这可以利用关于相关变量逆累积分布函数的 $\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}$ 经典公式证明（推导可参见 [CT23，推论 IV.3]）。因此，由于

$$\left|\varsigma_n - \sqrt{p(1-p)(n-1)}\right| \gtrsim \sqrt{n},$$

我们发现

$$\mathbf{d}_{\mathrm{Was}}^{\mathbb{R}}\left(\overline{\mathsf{deg}}_v(X), \overline{\mathsf{deg}}_v(X)\right) \geq c\sqrt{n} - Cn^{\frac{1}{4}} - C$$

对于某个常数 蚂蚁 C，$c > 0$。将其代入（59）即可完成下界的另一种证明 .

参考文献

[BBL22] AD Barbour、Graham Brightwell 和 Malwina Luczak。测度的长期集中与截断现象。《随机过程及其应用》，152：378–423，2022。[BBS08] Shankar Bhamidi、Guy Bresler 和 Allan Sly。指数随机图的混合时间。载于：2008年第49届IEEE计算机科学基础研讨会，第803–812页。IEEE，2008。[BCL+08] Christian Borgs、Jennifer T Chayes、L´aszl´o Lov´asz、Vera T S´os 和 Katalin Vesztergombi。稠密图的收敛序列 I：子图频率、度量性质与检验。《数学进展》，219(6)：1801–1851，2008。[BCM24] Alessandra Bianchi、Francesca Collet 和 Elena Magnanini。指数随机图的极限定理。《应用概率年刊》，34(5)：4863–4898，2024。[BJK04] Zdzislaw Burda、Jerzy Jurkiewicz 和 Andr´e Krzywicki。网络传递性与矩阵模型。《物理评论E》，69(2)：026106，2004。[BN18] Guy Bresler 和 Dheeraj Nagaraj。结构化与非结构化网络数据的最优单样本检验。载于：学习理论会议，第1657–1690页。PMLR，2018。[BNN24] Guy Bresler、Dheeraj Nagaraj 和 Eshaan Nichani。马尔可夫链的亚稳态混合：低温指数随机图的高效抽样。《应用概率年刊》，34(1A)：517–554，2024。[BS98] Alexander Vadimovich Bulinski 和 E Shabanovich。正负相关随机场若干泛函的渐近行为。《基础与应用数学》，4(2)：479–492，1998。[CD13] Sourav Chatterjee 和 Persi Diaconis。估计并理解指数随机图模型。《统计年刊》，41(5)：2428–2461，2013。[CD24] Nicholas A Cook 和 Amir Dembo。稀疏指数随机图模型的典型结构。《应用概率年刊》，34(3)：2885–2939，2024。[CT23] Saurab Chhachhi 和 Fei Teng。位置-尺度分布之间的1-沃瑟斯坦距离及差分隐私的影响。arXiv预印本 arXiv:2304.14869，2023。[DEY19] Ryan DeMuse、Terry Easlick 和 Mei Yin。顶点加权指数随机图的混合时间。《计算与应用数学杂志》，362：443–459，2019。[DF25] Wen-Yi Ding 和 Xiao Fang。指数随机图模型的二阶近似。《中国科学：数学》，第1–14页，2025。[EG18a] Ronen Eldan 和 Renan Gross。将平均场吉布斯分布分解为乘积测度。《电子概率杂志》，23，2018。[EG18b] Ronen Eldan 和 Renan Gross。指数随机图表现得如同随机块模型的混合。《应用概率年刊》，28(6)：3698–3735，2018。[FLS24] Xiao Fang、Song-Hao Liu 和 Qi-Man Shao。指数随机图的正态近似。arXiv预印本 arXiv:2404.01666，2024。[FLSW25] Xiao Fang、Song-Hao Liu、Zhonggen Su 和 Xiaolin Wang。指数随机图的条件中心极限定理。arXiv预印本 arXiv:2506.15159，2025。[FS86] Ove Frank 和 David Strauss。马尔可夫图。《美国统计学会杂志》，81(395)：832–842，1986。

[GN24] Shirshendu Ganguly 和 Kyeongsik Nam。《亚临界指数随机图：集中不等式与若干应用》。《美国数学会汇刊》，377(04):2261–2296，2024。[HL81] Paul W Holland 和 Samuel Leinhardt。《有向图概率分布的一个指数族》。《美国统计学会杂志》，76(373):33–50，1981。[Lov12] L´aszl´o Lov´asz。《大型网络与图极限》，第60卷。美国数学会，2012。[LS06] L´aszl´o Lov´asz 和 Bal´azs Szegedy。《稠密图序列的极限》。《组合理论杂志B辑》，96(6):933–957，2006。[LZ15] Eyal Lubetzky 和 Yufei Zhao。《随机图大偏差中的复制对称性》。《随机结构与算法》，47(1):109–146，2015。[MP24] Dan Mikulincer 和 Arianna Piana。《具有非高斯倾斜的随机局部化及其在张量伊辛模型中的应用》。《arXiv》预印本 arXiv:2412.12720，2024。[MW26] Satyaki Mukherjee 和 Vilas Winstein。《相界自旋系统的近似 FKG 不等式》。《arXiv》预印本 arXiv:2601.07169，2026。[MX23] Sumit Mukherjee 和 Yuanzhe Xu。《双星指数随机图模型的统计性质》。《伯努利分布》，29(1):24–51，2023。[New80] Charles M Newman。《正态涨落与 FKG 不等式》。《数理物理通讯》，74(2):119–128，1980。[PN04] Juyong Park 和 Mark EJ Newman。《网络双星模型的解》。《物理评论E——统计、非线性及软物质物理》，70(6):066146，2004。[PN05] Juyong Park 和 Mark EJ Newman。《聚类网络性质的解》。《物理评论E——统计、非线性及软物质物理》，72(2):026136，2005。[Ros11] Nathan Ross。《Stein 方法基础》。《概率调查》，8:210–293，2011。[RR19] G Reinert 和 N Ross。《快速混合 Glauber 动力学平稳分布的近似及其在指数随机图中的应用》。《应用概率年刊》，29(5)，2019。[RRS14] Charles Radin、Kui Ren 和 Lorenzo Sadun。《大型受约束图的渐近行为》。《物理学A辑：数学与理论》，47(17):175001，2014。[RS13] Charles Radin 和 Lorenzo Sadun。《复杂网络中的相变》。《物理学A辑：数学与理论》，46(30):305002，2013。[RY13] Charles Radin 和 Mei Yin。《指数随机图中的相变》。《应用概率年刊》，2458–2471，2013。[SS20] Holger Sambale 和 Arthur Sinulis。《有限自旋系统的对数 Sobolev 不等式及其应用》。《伯努利分布》，26(3):1863–1890，2020。[WF94] Stanley Wasserman 和 Katherine Faust。《社会网络分析：方法与应用》。《剑桥大学出版社》，1994。[Win25a] Vilas Winstein。《通过亚稳态混合实现集中，并应用于超临界指数随机图模型》。《arXiv》预印本 arXiv:2503.07571，2025。[Win25b] Vilas Winstein。《指数随机图的定量中心极限定理》。《arXiv》预印本 arXiv:2507.10531，2025。[YZ17] Mei Yin 和 Lingjiong Zhu。《稀疏指数随机图模型的渐近分析》。《巴西概率与统计杂志》，394–412，2017。