arXiv:2601.14231v1 [math.DG] 20 Jan 2026

非负里奇曲率空间的新拓扑限制

ALESSANDRO CUCINOTTA、MATTIA MAGNABOSCO 和 DANIELE SEMOLA

摘要。我们为具有非负里奇曲率的完备黎曼流形和 RCD(0，n) 空间建立了新的拓扑限制。我们的主要结果包括一个贝蒂数刚性定理，它回答了自 M.-T. Anderson 于 1990 年 的工作以来一直悬而未决的问题；以及一个单纯体积消失定理，将 M. Gromov 于 1982年 的定理加以推广。结合这些结果，我们为具有非负里奇曲率的非紧致 3维流形的分类给出了一种新证明。该分类最初由 G. Liu 于 2011年 得出，并且这一结果可推广至合成框架。

1. 引言

自几何分析发展的早期以来，具有非负里奇曲率的完备非紧致黎曼流形的拓扑便得到广泛研究。在维数 2 的情形下，Ric ≥ 0 等价于非负截面曲率；S. Cohn-Vossen 于 1935年 得到了微分同胚意义下的完整分类，参见 [29]。在维数 3 的情形下，分类则直到 2011年 才由 G. Liu 完成，参见 [63]。 [63] 中采用的策略基于极小曲面方法，并以极具挑战性的方式发展了 R. Schoen 和 S.-T. Yau 在 [81] 中证明以下结果时提出的一些思路：具有 Ric > 0 的完备 (M^3, g) 必须与 $\mathbb{R}^3$ 微分同胚。对于 $n \geq 4$，微分同胚意义下的分类似乎过于雄心勃勃。值得注意的是，即使是完备里奇平坦四维流形在同胚意义下的分类，也仍是一个长期悬而未决的开放问题。与此同时，过去几十年中，人们构造了若干具有 Ric ≥ 0 且拓扑型无限的完备 (M^n, g) 族，例见 [7,82, 68]。

1.1. 主要结果。 本文提出了一个关于具有 Ric ≥ 0 且在微分同胚意义下的 3维流形分类的新证明，该证明：

i）基于两个其有效性可扩展至所有维度的关键工具；ii）推广到奇异框架，从而给出了无边界 RCD(0,3) 空间在同胚意义下的分类。

对具有 Ric ≥ 0 in [63] 的 3维流形进行分类的第一步，是证明任何这样的 (M^3, g) 要么是单连通的，要么其万有覆盖等距地分裂出一条直线。得益于 [81,引理 2]，该引理表明，除非 (M, g) 的万有覆盖等距地分裂出一条直线，否则 $\pi_2(M)$ 是平凡的，

只需处理 $\pi_1(M)$ 无挠的情形。因此，关键要素如下：

定理 1.1 ([63])。 设 (M,g) 是一个完备的黎曼 3维流形，且满足$\mathrm{Ric} \geq 0$。若 $\pi_1(M)$ 包含一个与 $\mathbb{Z}$ 同构的子群，则万有覆盖 (M,g) 的 (M,g) 等距地分裂出一条直线。

定理 1.1 强化了 Schoen 和 Yau 早先的一个结果：他们证明，若 (M^3,g) 满足 $\mathrm{Ric} > 0$，则它是单连通的，参见 [81, 引理 3]。

我们的第一个主要结果是将定理 1.1 推广到任意维数：

定理 1.2。 设(M,g) 是一个完备的黎曼 n 维流形，满足$\mathrm{Ric} \geq 0$，其中 $n \geq 3$。若 $\pi_1(M)$ 包含一个与 $\mathbb{Z}^{n-2}$ 同构的子群，则万有覆盖(M,g) 的(M,g) 等距地分裂出一个因子 $\mathbb{R}^{n-2}$。

注 1.3. 在 [74], P. Nabonnand 构造了一个完备的（M^4,g），其 Ric >0 且 π_1（M^4）$\simeq \mathbb{Z}$。L. Bérard Bergery 后来在 [10] 推广了这一构造，构造出（M^n,g）的例子，其 Ric >0 且 π_1（M^n）$\simeq \mathbb{Z}^{n-3}$。这些例子表明，定理 1.2 是尖锐的，换言之，如果我们仅假设 π_1（M^n）有一个同构于 $\mathbb{Z}^{n-3}$ 的子群，其结论可能不成立。

注 1.4. Schoen 和 Yau 在 [81, 第 211] 页猜想，对于每个 $n \geq 4$，以及每个 Ric >0 的完备黎曼（M^n,g），π_1（M^n）中自由阿贝尔子群的秩应小于或等于 $n-3$。M.-T. Anderson 在 [5]解决了他们的猜想。在同一篇论文中，Anderson 在额外假设（M^n,g）具有有界截面曲率的情况下，证明了定理 1.2；此前，他与 L. Rodriguez 在 [8, 的定理 2]中共同解决了三维情形。此后，定理 1.1 在不附加条件的情况下对所有维数均成立这一问题一直是一个开放问题。最近，Z. Ye 在 [92, 猜想 1]中明确将其表述为一个猜想（另见较新的 [77,问题 1.6]）。

注记 1.5。 在我们撰写本文期间，有趣的预印本 [53]由 H. Huang 和 X.-T. Huang 撰写，并发表于 arXiv。该文的主要结果之一在附加假设万有覆盖 1.2 满足最大体积增长的条件下，证明了定理 $(M,\ g)$ 成立。尽管这两项结果（以及证明方法）有所重叠，但它们是独立得到的。

注记 1.6。 定理 1.2 可推广至 $\mathrm{RCD}(0,\ n)$ 度量测度空间$(X,\ \mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$，精确表述见下文定理 3.1。这一推广对于无边界 $\mathrm{RCD}(0,\ 3)$ 空间的拓扑分类至关重要。

在证明的第二部分，作者论证了一个具有 Ric ≥ 0 的可缩（$M^3,\ g$）在无穷远处是单连通的。结合先前的考量、 [54, 定理 2], [69], 以及 G. Perelman 对庞加莱猜想的解决，这足以完成微分同胚意义下的分类。Schoen 和

Yau 在 [81], 不过，他们通过直接证明 M 不可约，避免了依赖庞加莱猜想；这一证明同样基于极小曲面方法。我们不知道当 $(M^n,\ g)$ 具有 $\mathrm{Ric} \geq 0$ 且 $n \geq 4$时，一个可缩的 $n = 4$ 是否必定在无穷远处单连通。就我们所知，即使对于 $n = 4$ 和 $\mathrm{Ric} \equiv 0$，这个问题仍未解决。

本文的第二个主要结果是：对于支持某种（完备）度量且满足 $\mathrm{Ric} \geq 0$ 的流形，基于单纯体积这一概念，给出一项新的拓扑限制。连通（可能非紧致）流形 M的单纯体积是一个适当同伦不变量，记作 $||M|| \in [0, \infty]$。M. Gromov 在 [46] 中引入了这一概念。这里我们得到如下结果：

定理 1.7. 设 $n \geq 2$。若(M^n, g) 是一个光滑、完备、定向的黎曼流形，且满足里奇 ≥ 0，则 $||M|| = 0$。

尽管单纯体积是一个拓扑不变量，但它与（里奇）曲率之间的相互作用自该理论发展的早期阶段起便已显现。特别是，Gromov 在 [46, 第 14] 页得到了关于里奇曲率下界条件下单纯体积的如下隔离定理：

定理 1.8 ([46])**.** 对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\varepsilon(n) > 0$，使得以下结论成立。设(M^n, g) 是一个完备黎曼流形，满足里奇 $\geq -(n-1)$。若对每个 $p \in M$ 都有体积 $(B_1(p))$ $\leq \varepsilon(n)$，则 $||M|| = 0$。

定理1.8的一个直接推论是，任意满足 $\mathrm{Ric} \geq 0$ 的闭流形，其单纯体积均为零。得益于定理 1.7，可以去掉闭性假设。

注 1.9. 在附加一个很可能只是技术性的条件后，定理1.7 可推广至 $\mathrm{RCD}(0, n)$ 底层为拓扑 n 维流形的空间，见下文定理 4.1，其中给出了精确表述。

虽然定理 1.7 在所有维数下都给出了关于存在满足 $\mathrm{Ric} \geq 0$ 的完备度量的新拓扑限制（见下文命题 6.1），但我们最直接的应用针对的是 3 维情形。G. Bargagnati 和 R. Frigerio 在 [9] 中证明，单纯体积为零的可缩 3 维流形必与 $\mathbb{R}^3$ 同胚。结合他们的结果与定理 1.7 及定理 1.2，我们得到了对具有 3 维 $\mathrm{Ric} \geq 0$ 的开流形进行拓扑分类的新证明。该证明不依赖极小曲面方法。更一般地，我们可以在同胚意义下分类底层空间为拓扑 3 维流形的 $\mathrm{RCD}(0,3)$ 空间。

定理 1.10。 设$(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^3)$ 是一个非紧$\mathrm{RCD}(0, 3)$ 空间，并假设 X 是一个拓扑流形。那么， X 要么与$\mathbb{R}^3$ 同胚，要么其万有覆盖等距地分裂出一条直线。在第二种情形下， X具有一个非负截面曲率的完备光滑度量。

定理 1.10 回答了 G. Besson 大约七年前提出、此后在多个场合提及的一个问题。例如，参见 [12,问题 4。1], [13, 问题 2。10]以及 [88, 第 6.5 节。2]。这一结果具有原创性

对于非塌缩里奇极限空间也成立（M_i^3，g_i，p_i）$\to$（X，d），其 $\mathrm{Ric}_i \geq -1/i$，且 $\mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v > 0$ 对每个 $i \geq 1$ 和某个 $v > 0$ 均成立。

我们期望，为证明定理 1.10而提出的思路，将应用于研究具有里奇曲率下界的塌缩3维流形。作为研究动机，我们指出，开3维非负曲率亚历山德罗夫空间的分类，在 T. Shioya 和 T. Yamaguchi 对具有截面曲率下界的塌缩3维流形的研究中发挥着关键作用 [83]。另请参见 [20, 11, 60, 73]。

结合定理 1.10 以及近期关于RCD空间可定向性的研究 [14, 36], ，可以得到无边界非塌缩RCD(0,3)空间的完整分类：

定理 1.11。设 $(X,\mathsf{d},\mathscr{H}^3)$ 是一个无边界的 $\mathrm{RCD}(0,3)$ 空间。那么，或者 (X,d) 是一个非负截面曲率的亚历山德罗夫空间，或者 X 同胚于以下空间之一：$\mathbb{R}^3$, $C(\mathbb{RP}^2)$、球面*3*维流形、以 $\mathbb{RP}^2$ 为底的球面悬挂。

注记 1.12。关于更一般的 CD(0,3) 流形情形，在不作无穷小希尔伯特假设时，分类问题仍未解决，不过我们的方法可以取得一些进展，尤其是在可缩情形下。对于边界非空的 RCD(0,3) 空间，分类问题同样仍是一个开放问题。

1.2. 对关键新思想的讨论。定理 1.2 的证明取决于两个主要步骤。第一步是一个吹落论证。不难验证，$(M,g,p,\mathbb{Z}^{n-2})$ 的每个等变格罗莫夫–豪斯多夫吹落都是一个 RCD(0, n) 空间，其同构群包含一个闭的 $\mathbb{R}^{n-2}$ 子群。这里，$(M,g,p,\mathbb{Z}^{n-2})$ 是 (M,g) 的万有覆盖，并配备了 $\mathbb{Z}^{n-2} < \pi_1(M)$ 的甲板变换作用，而$p \in M$ 是任意选取的参考点。精确表述见下文引理 2.7，其本质上就是 [77, 引理 3.1]。我们的第一个关键工具是以下分裂结果：

命题 1.13。设$(X,$ 度量 $\tilde{\mathfrak{m}},\tilde{q},G)$ 表示$(M,g,p,\mathbb{Z}^{n-2})$的任意一个等变吹胀极限。那么$(\tilde{X},$ 度量 $\tilde{\mathfrak{m}},\tilde{q},G)$ 分裂出一个因子 $\mathbb{R}^{n-2}$，并且$\mathbb{R}^{n-2} < G$ 在该欧几里得因子上通过平移作用。

命题 1.13 将通过一个更一般的分裂定理推出，该定理适用于 $\mathbb{R}^k$作用，对任意 $\mathrm{RCD}(0,N)$ 空间均成立：

定理 1.14。设$(X,$ 度量 $\mathfrak{m})$ 为一个$\mathrm{RCD}(0,N)$ 空间，对某个整数 $1 \leq k \leq N$ 满足以下条件：

(1) 维数$_{\mathrm{e}}(X) \leq k+1$，其中维数$_{\mathrm{e}}(X)$ 表示 X的本质维数（亦称可整维数）。*(2)* $\int_1^{+\infty} \mathfrak{m}_{B_t\ p}^{t^{k+1}}(()))\,dt = +\infty$，其中某个 $p \in X$ 满足条件。*(3)* 存在一个闭子群 $H <$等距变换群(X)，它与 $\mathbb{R}^k$ 同构。

那么，$X \cong Y \times \mathbb{R}^k$ 作为某个 $\mathrm{RCD}(0,N-k)$ 度量测度空间$(Y,\mathsf{d}_Y,\mathfrak{m}_Y)$。

注 1.15。在较弱的假设下，即存在一个由保测等距变换给出的 $\mathbb{R}^{n-3}$ 有效作用时，命题 1.13 并无类似结论；即便考虑 Ric ≥ 0 的完备黎曼 n-流形也是如此。事实上，在 [56, 第 913] 页，A. Kasue 和 T. Washio 构造了一个 Ric ≥ 0 的完备 (M^4, g)，它不能等距地分裂出任何直线，尽管其等距群包含一个闭 $\mathbb{R}$ 子群。最近，J. Pan 和 G. Wei 构造了可整维数为 2 的 RCD$(0, n)$ 空间的例子，它们不能等距地分裂出任何直线，尽管保测等距变换群包含一个闭 $\mathbb{R}$ 子群；参见 [76]，以及他们后来与 X. Dai 和 S. Honda 的合作工作，其中对构造作了更明确的说明。他们的例子展示了命题 1.13 中 RCD 维数相对于可整维数所起的作用。

命题 1.13 的证明依赖于近期发展的一些 RCD 理论工具。最微妙的情形是吹胀极限与$\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_+$ 同胚且具有可整维数 $n-1$。我们将论证，$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }(X, \mathrm{d}\ \tilde{\mathfrak{m}})$ 是一个测度扭曲积，也就是说，忽略可能存在的非光滑性，度量具有形式 $\mathrm{d}r^2 + f^2(r) g_{\mathbb{R}^{n-2}}$，且 $\mathfrak{m} = h(r)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\mathscr{L}^{n-2}$，其中 f、$h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是函数。在这种情形下，RCD$(0, n)$ 条件等价于对按分布意义解释的加权 Ricci 张量施加下界，这归功于 [71]。这种分布意义下的 Ricci 曲率下界对 f 和 h施加了一些限制，最终推出 f 必为常数。因此，$\widetilde{X}$ 分裂出一个因子 $\mathbb{R}^{n-2}$。

注记 1.16。一般而言，Ric ≥ 0 的完备流形的所有缩放极限都发生分裂，并不意味着原流形也发生分裂。Kasue 和 Washio 于 [56, 第 913-914]页给出的构造是第一个反例。后来 Anderson 指出，n维 Schwarzschild 度量在 $\mathbb{R}^2 \times S^{n-2}$ 上（$n \geq 4$ 时）是 Ricci 平坦反例，参见 [4, 第 71]页。利用 T.-H. Colding 和 A. Naber 在 [31]中发展的方法，也可以构造维数 3 的反例。

注1.17。为便于比较，我们指出，在万有覆盖具有欧几里得体积增长这一假设下，吹胀极限的分裂是锥分裂原理的直接推论；而在一般情形的证明中，这一步是关键。近期预印本 [53]考察的正是这种情形。

从缩放极限的分裂出发，得到万有覆盖的分裂，这一点在我们的情形中具有很强的特殊性。得益于 Cheeger-Colding 理论，特别是 [24, 26], 以下结论成立：若一个完备的 (M^n, g) 的某个缩放极限在 Ric ≥ 0 下等距地分裂出一个因子 $\mathbb{R}^k$，其中 $0 \leq k \leq n-1$，则存在两个序列 $\varepsilon_i \to 0$、$R_i \to \infty$ 以及点 $p_i \in M$，使得

$$\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}\left(B_r(p_i), B_r^{\mathbb{R}^k \times Y_{r,i}}((0, q_{r,i}))\right) < \varepsilon_i r\,, \text{ for every } i \in \mathbb{N} \text{ and } 0 < r < R_i\,,$$

其中 Y_{r_i} 表示某个完备度量空间，$q_{r_i} \in Y_{r_i}$，而 $\mathrm{d_{GH}}$ 表示戈罗莫夫-豪斯多夫距离。我们将论证，可以选取点 p_i，使其始终与某个固定点 $p \in M$ 保持一致有界的距离；当 $i \to \infty$ 时，这显然足以完成定理 1.2 的证明。排除点 p_i 逃向无穷远的可能性需要两个新思路。第一个是运用 J. Cheeger 和 Naber 的切片定理，见 [28, 定理 1.23]。在假设 $k = n-2$ 的情况下，这一工具对我们上文概述的一般图景作了关键性的细化。非常不严谨地说，它保证：如果点 p_i 逃向无穷远，这种情况也只能发生在（近似）$(n-2)$-分裂的方向上。为处理这一情形，第二个关键工具是仔细研究在与 $\mathbb{Z}^{n-2}$ 的等距作用复合后，$(n-2)$ 个线性无关的近线性增长调和函数的行为。这类函数的存在性由命题 1.13 以及 [52,定理 1.10], 保证；该定理由 H. Huang 和 X.-T. Huang 通过发展 Cheeger、W. Jiang 和 Naber 在 [27] 中首次引入的方法得到。

注记 1.18. 定理 1.2的证明与相反方向相反于维数3中类似结果的证明 [63]。事实上，在[63] 中，最初沿稳定极小超曲面获得的无穷小分裂会传播至整个流形。而在我们的情形中，我们首先得到无穷远处分裂，即在吹胀极限的层面上得到分裂，然后再将这一信息提升到有限尺度上。

定理 1.7 的证明依赖于一条关于非紧流形单纯体积的一般消失定理。Gromov 最初在 [46,p. 58] 中陈述了该定理，并附有证明概要；Frigerio 和 M. Moraschini 最近在 [39, Theorem 9, Corollary 11] 中给出了完整证明。他们的结果在下文表述为定理 4.6，它保证：如果能够为一个开三角剖分 n流形 M 构造一个由相对紧区域组成、无穷远处可和（相关术语见下文定义 4.5）且重数小于或等于 n 的可数开覆盖 M，那么该流形的单纯体积就会消失。在我们的情形下，为了构造这样的覆盖，我们区分两种情况。如果 (M^n, g) 的体积增长是欧几里得型的，那么该覆盖基本上由度量环带构成。为了得到无穷远处可和性，我们证明，在这种情形下，较大的度量环带内部、略大的环带之中的相对基本群总是有限的；精确陈述见下文定理 4.8。证明依赖于一个基于 Cheeger-Colding 理论的反证论证。当体积增长不是极大时，构造所需覆盖就更为微妙。我们将结合共形变形论证与 P. Papasoglu 在 [79] 中给出的一般结果（该结果受到 L. Guth [48, 49] 和 Gromov [46] 早期工作的启发），证明 (M^n, g) 具有较小的 $(n-1)$-乌雷松宽度。这有助于我们构造一个几何性质良好的覆盖 M，其重数为$\leq n$。这种覆盖的无穷远处可和性将由 V. Kapovitch

和 B. Wilking 关于非负里奇曲率流形的马古利斯引理 [55]。

定理 1.7 推广到可三角剖分的 $\mathrm{RCD}(0,n)$ 流形，可以沿用相同的策略。唯一需要谨慎处理的是马古利斯引理的应用。尽管最近已有文献给出了 RCD 空间的马古利斯引理，但对应于 [37],的局部版本 [55,定理 1] 目前尚未见诸文献。在附录 A中，我们为 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间（更一般地，为本质非分支且半局部单连通的 $\mathrm{CD}(K,N)$ 空间）证明了一个局部马古利斯引理，其中幂零子群指数的上界并非有效。尽管这一结果弱于 [55],光滑情形下得到的结果，其证明依赖于 [16], 但对于本文的目的而言已足够。

致谢：
最后一位作者感谢 Andrea Mondino 几年前向他提出了 Besson 关于 RCD(0，3) 流形分类的问题，感谢 Elia Bruè 就本文主题进行了有益的交流，也感谢 Qin Deng 和 Sergio Zamora 就 [37] 进行了有益的通信。

本项目的部分工作是在作者参加波恩 Hausdorff 数学研究所举办的“度量分析”季度项目期间完成的。该项目由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过德国卓越战略资助，项目编号为 EXC-2047/1 - 390685813。作者感谢季度项目的组织者及 HIM 的工作人员发出邀请，并提供了优良的工作条件。

第二作者感谢英国皇家学会通过牛顿国际奖学金（奖项编号：NIF\R1\231659）提供的支持。

2. 预备知识

在度量空间 (X,d) 中，我们用 $\mathrm{Lip}(X)$ 表示所有利普希茨函数构成的空间。此外，对于给定的利普希茨函数 φ，我们用 $\mathrm{L}(\varphi)$ 表示其全局 Lipschitz 常数，用 $\mathrm{lip}(\varphi)(\cdot)$ 表示其局部利普希茨常数

$$\mathrm{lip}(\varphi)(x) := \limsup_{y\to x} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{\mathsf{d}(x,y)}.$$

下文中，$\mathrm{Iso}(X)$ 表示度量空间 X 的等距变换所构成的拓扑群。在度量测度空间 $(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 中，记号 $\mathrm{Iso}(X)$ 表示 X 上保持测度的等距变换全体。

2.1. 等变 Gromov–Hausdorff 收敛。 我们回顾一些关于等变带基点 Gromov–Hausdorff 收敛的基本事实，主要参考文献为 [40, 41]。在下一个定义中，四元组 $(Y,\ \mathsf{d}\ G,\ p)$ 由一个带基点度量空间 $(Y,\ \mathsf{d}\ p)$（假设它是完备长度空间）和一个闭子群 $G\subset \mathrm{Iso}(Y)$ 构成。我们将$G(R) := \{g\in G : \mathsf{d}(p,\ gp)\ \le R\}$记作。

定义 2.1。 [等变 Gromov–Hausdorff 收敛]两个空间 $(Y_1,\ \mathsf{d}_1,\ y_1,\ G_1)$ 和 $(Y_2,\ \mathsf{d}_2,\ y_2,\ G_2)$ 若存在由映射构成的三元组 $(f,\ \psi,\ \varphi)$，则称它们在等变带基点 *Gromov–Hausdorff* 意义下是 ε-接近的

$$f : B_{1/\varepsilon}(y_1) \to B_{1/\varepsilon}(y_2)\,,\ \varphi : G_1(1/\varepsilon) \to G_2(1/\varepsilon)\,,\ \psi : G_2(1/\varepsilon) \to G_1(1/\varepsilon)\,,$$

具有以下性质:

(1) $f(y_1) = y_2$; (2) $f(B_{1/\varepsilon}(y_1))$ 是 $B_{1/\varepsilon}(y_2)$ 中的一个 ε-网; (3) 对每个 $a, b \in B_{1/\varepsilon}(y_1)$, $|\mathsf{d}_2(f(a)\ f(b)) - \mathsf{d}_1(a,b)| < \varepsilon$; (4) 若 $g \in G_1(1/\varepsilon)$, 且 $x, gx \in B_{1/\varepsilon}(y_1)$, 则 $\mathsf{d}_2(f(gx)\ \varphi(g)f(x)) < \varepsilon$; (5) 若 $h \in G_2(1/\varepsilon)$, 且 $x, \psi(h)x \in B_{1/\varepsilon}(y_1)$, 则 $\mathsf{d}_2(f(\psi(h)x)\ hf(x)) < \varepsilon$。

引理 2.2。 设$(X_i, \mathsf{d}_i, G_i, x_i)$ 是一个在等变 *pointed Gromov–Hausdorff* 意义下收敛到$(X, \mathsf{d}\ x, G)$的序列。设 $\gamma_i \in G_i$ 满足: $\gamma_i \cdot x_i$ 在实现该尖点 *Gromov–Hausdorff* 收敛的空间中收敛到 $y \in X$。那么存在 $\gamma \in G$ ，使得对每个 $y \in X$ 及每个序列 $y_i \to y$，都有 $\gamma_i \cdot y_i \to \gamma \cdot y$。此时我们称 $\gamma_i \to \gamma$。

定理 2.3. 设 (Y_i, d_i, y_i) 是一个度量空间序列，在 *pGH* 意义下收敛到$(X, \mathsf{d}\ x)$。设 G_i 是$\mathrm{Iso}(Y_i)$的闭子群。那么，除去不重新标记的子序列外，存在$\mathrm{Iso}(X)$ 的一个闭子群，使得

$$(Y_i, \mathsf{d}_i, G_i, y_i) \to (X, \mathsf{d}, G, x)$$

在等变 *pointed Gromov–Hausdorff* 意义下。此外，

$$(Y_i/G_i, \mathsf{d}_{i/\sim}, [y_i]) \to (X/G, \mathsf{d}_{/\sim}, [x])$$

在 *pGH* 意义下。

在下一个定义中，五元组 $(X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m},\ G,\ p)$ 由一个带基点度量测度空间 $(X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m},\ p)$ 和 $G \subset \mathrm{Iso}(X)$ 的一个闭子群组成。

定义 2.4 （等变测度 Gromov–Hausdorff 收敛）。 如果存在一个由映射组成的三元组 $(f,\ \psi,\ \varphi)$，那么两个度量测度空间 $(Y_1,\ \mathsf{d}_1,\ \mathfrak{m}_1,\ G_1,\ y_1)$ 和 $(Y_2,\ \mathsf{d}_2,\ \mathfrak{m}_2,\ G_2,\ y_2)$ 在等变 pointed measured Gromov-Hausdorff 意义下是 ε-近的

$$f : B_{1/\varepsilon}(y_1) \to B_{1/\varepsilon}(y_2),\ \varphi : G_1(1/\varepsilon) \to G_2(1/\varepsilon),\ \psi : G_2(1/\varepsilon) \to G_1(1/\varepsilon)\,,$$

满足定义2.1 的性质，且使得 $f_\#(\mathfrak{m}_1 \llcorner B_{1/\varepsilon}(y_1))$ 在ε-意义下 $\mathfrak{m}_2 \llcorner B_{1/\varepsilon}(y_2)$ 关于在 Y_2中的弱收敛而言是相近的。我们强调，在这种情况下，群 G_1 和 G_2 必须通过保测等距变换作用。

结合格罗莫夫预紧性定理、$\mathrm{RCD}(K,\ N)$ 条件在尖点 Gromov–Hausdorff 收敛下的稳定性 [44], 以及一个依赖于定理2.3的简单论证，可得如下结论。

命题 2.5。 设$(Y_i、\mathsf{d}_i、\ \mathfrak{m}_i、\ y_i)$是由归一化的$\mathrm{RCD}(K、\ N)$空间组成的序列，且 G_i 是$\mathrm{Iso}(Y_i)$的闭子群。那么，经过取子序列，存在一个$\mathrm{RCD}(K、\ N)$空间$(X、\mathsf{d}\ \mathfrak{m}、\ x)$以及$\mathrm{Iso}(X)$的闭子群 $G<$，使得

$$(Y_i, \mathsf{d}_i, \mathfrak{m}_i, G_i, y_i) \to (X, \mathsf{d}, \mathfrak{m}, G, x)$$

在等变 *pmGH* 意义下。

在接下来的引理中，当我们说子群 $G <$Iso(X) 同构于 $\mathbb{Z}$ （或 $\mathbb{R}$）时，我们默认为 G 配备由 Iso(X) 诱导的拓扑， $\mathbb{Z}$ （或 $\mathbb{R}$）配备其自然拓扑，并且存在拓扑群同构 $\varphi:\ G \to \mathbb{Z}$ （或 $\varphi:\ G \to \mathbb{R}$）。我们将此记作 $G \cong \mathbb{Z}$ （或 $G \cong \mathbb{R}$）。

引理 2.6。 设 （X，$\mathsf{d}\ \mathfrak{m}$） 是一个 $\mathrm{RCD}(K, N)$。设 $\mathbb{R}^k \cong G < \mathrm{Iso}(X)$ 是一个闭子群。则轨道 $Gp \subset X$ 与 $\mathbb{R}^k$同胚。

证明。 设 $\varphi : \mathbb{R}^k \to G$ 是由该陈述给出的拓扑群同构。由于 G 自由作用，映射 $\psi:\ G \to Gp \subset X$ 是一个同胚，因此 $\psi \circ \varphi:\ \mathbb{R}^k \to Gp$ 也是一个同胚。□

引理 2.7. 设 $(X_i, \mathsf{d}_i, \mathfrak{m}_i, x_i)$ 为一列归一化的 $\mathrm{RCD}(K, N)$空间。设 $\mathbb{Z}^k \cong G_i < \mathrm{Iso}(X_i)$ 为带有生成元 $\{\gamma_{i,j}\}_{j=1}^k$ 的闭子群，满足 $\mathsf{d}_i(x_i, \gamma_{i,j} \cdot\ x_i) \to 0$，当 $i \uparrow \infty$ 时，对每个 $j \in \{1, \cdots\ k\}$ 均成立。那么，经过取子序列后，可得等变 *pmGH* 收敛

$$(X, \mathsf{d}_i, \mathfrak{m}_i, G_i, x_i) \to (X, \mathsf{d}, \mathfrak{m}, G, x)$$

到一个闭子群 $G <$Iso(X) ，使得 G 包含一个与 $\mathbb{R}^k$同构的闭子群。

证明。 证明与 [77, 引理 31] 相同，$\mathrm{Iso}(X)$ 由 [47]或 [86]. □可知是一个李群。

2.2. **RCD 空间的一些性质**。我们回顾本文后续将用到的 RCD(K, N) 空间的一些特定性质。

定义 2.8（RCD(K, N) 空间的切空间）。设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 为一个 RCD(K, N) 空间，并考虑一个序列 $r_i \downarrow 0$。对每个 $x \in X$，由 RCD(K, N) 空间关于 pmGH 收敛的紧性，取子序列后，空间 $(X, \mathsf{d}/r_i, \mathfrak{m}(B_{r_i}(x))^{-1}\mathfrak{m}, x)$ 在 pmGH 意义下收敛到一个极限 RCD$(0, N)$ 空间 $(X_\infty, \mathsf{d}_\infty, \mathfrak{m}_\infty, x_\infty)$。这样的 X_∞ 称为 X 在 x 处的一个切空间。 X 在 x 处的切空间集记为 Tan$_x(X)$

定义 2.9 （RCD$(0, N)$ 空间的无穷远处切锥）。 设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m}, x)$ 是一个带基点的 RCD$(0, N)$ 空间，并考虑一个序列 $r_i \uparrow +\infty$。取一个子序列后，空间 $(X, \mathsf{d}/r_i, \mathfrak{m}(B_{r_i}(x))^{-1}\mathfrak{m}, x)$ 在 pmGH意义下收敛到一个极限 RCD$(0, N)$ 空间 $(X_\infty, \mathsf{d}_\infty, \mathfrak{m}_\infty, x_\infty)$。这样的 X_∞ 称为 X的无穷远处切锥 （或吹胀极限）。

下一个引理的证明与 [67, 引理 2.1]相同。

引理 2.10. 设 $(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间。那么，其无穷远处的切锥集合在带基点的 *Gromov–Hausdorff* 拓扑下是连通的。

类似地，给定一个带基点的 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间 $(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m},x)$，集合 $\mathrm{Tan}_x(X)$在带基点的 *Gromov–Hausdorff* 拓扑下是连通的。

接下来给出针对 PI 空间的定义 [23] 。

定义 2.11. 设 $(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 $\mathsf{RCD}(K,N)$ 空间，且 $x\in X$ 是满足 $\mathsf{Tan}_x(X)=\{\mathbb{R}^d\}$ 的点。若函数 $f\in\mathsf{Lip}(X)$ 满足以下条件，则称其在 x 处可微。设 $r_i\downarrow 0,\ \delta_i\downarrow 0$, 并令

$$\psi_i:(\overline{B}^X_{r_i}(x),\mathsf{d}/r_i)\to(\overline{B}^{\mathbb{R}^d}_1(0),\mathsf{d}_{eu}),\qquad \varphi_i:(\overline{B}^{\mathbb{R}^d}_1(0),\mathsf{d}_{eu})\to(\overline{B}^X_{r_i}(x),\mathsf{d}/r_i)$$

是 δ_i-GH 近似。于是，经过取子序列，可得一个线性函数 $f_\infty:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$，满足 $\mathsf{lip}(f_\infty)=\mathsf{lip}(f)(x)$，使得

$$\Big\|\frac{f-f(x)}{r_i}-f_\infty\circ\psi_i\Big\|_{\infty,\overline{B}^X_{r_i}(x)}+\Big\|\frac{f\circ\varphi_i-f(x)}{r_i}-f_\infty\Big\|_{\infty,\overline{B}^{\mathbb{R}^d}_1(0)}\to 0\,.$$

下一个定理由 [23, 定理 10.2] 推出。

定理 2.12. 设$(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个$\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间，且 $f\in\mathrm{Lip}(X)$。那么， f 在 $\mathfrak{m}$-几乎处处的 $x\in X$可微。

以下定理可由 [72,定理 1.3] 的证明推出。

定理 2.13. 设$(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个$\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，满足等距变换群(X) 包含一个与 $\mathbb{Z}^k$ 同构的闭子群，该子群余紧地作用。则 X 可分裂出一个因子 $\mathbb{R}^k$。

下一个引理可通过重复 [93, 命题 3.3] 的证明得到。

引理 2.14. 设$(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个$\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，其所有无穷远处的切锥都是1维的，且一个无穷远处的切锥为 $\mathbb{R}$。那么， $X\cong\mathbb{R}\times Y$与某个紧致度量空间 Y等距。

以下引理是众所周知的，因此略去其证明。

引理 2.15. 设$(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 为一个度量测度空间。若 $X\cong\mathbb{R}^k\times Y$和$Y$不包含直线，则等距变换群$(X)$ $<$ 等距变换群$(\mathbb{R}^k)$ $\times$等距变换群(Y)。

下一个定理由 [52, 定理 1.10]得出。

定理 2.16。 设$(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n,p)$ 是一个$\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，其所有无穷远处的切锥都等距于 $\mathbb{R}^k\times Y$，其中 Y 是一个不包含直线的度量空间。则存在一个调和映射$u=(u_1、\cdots\ u_k)$: $X\to\mathbb{R}^k$，在 $p\in X$ 中消失，并且

(1) $\{u_1,\cdots,u_k\}$ *is a basis for*

$$\Big\{v\in\mathsf{W}^{1,2}_{loc}(X):\Delta v=0,\ \textit{and for every}\ \varepsilon>0\ \textit{there exist}\ R_\varepsilon,C_\varepsilon>0:\\ v(x)\le C_\varepsilon\mathsf{d}(x,p)^{1+\varepsilon}+C_\varepsilon\ \textit{for every}\ x\in X\Big\}.$$

(2) 对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $R_\varepsilon > 0$，使得对于每个 $R > R_\varepsilon$，存在一个正定下三角矩阵 $T_R \in \mathbb{R}^{k\times k}$，满足$T_R u$： $B_R(p) \to \mathbb{R}^k$ 是一个 ε-分裂映射。

3. 第一贝蒂数刚性

本节的目标是证明以下关于 RCD$(0, n)$ 空间的分裂型定理：

定理 3.1. 设 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 是某个 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ 的 $\mathrm{RCD}(0, n)$ 空间。若 $\pi_1(X)$ 具有一个与 $\mathbb{Z}^{n-2}$ 同构的子群，则 X 的万有覆盖作为度量测度空间分裂出一个因子 $\mathbb{R}^{n-2}$ 。

显然，定理3.1 蕴含了我们在引言中以定理1.2陈述的相应完备黎曼流形结果。

证明定理 3.1的首个关键要素是以下关于 X 的缩放极限的分裂定理：

命题 3.2. 设 $(X, \mathsf{d}\ \tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{q}, G)$ 表示万有覆盖 $(X, \mathsf{d}\ \mathscr{H}^n, p, \mathbb{Z}^{n-2})$ 的任意一个等变吹胀极限，其中 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$带有 $\mathbb{Z}^{n-2} < \pi_1(X)$ 通过甲板变换给出的作用。则 $(\widetilde{X}, \mathsf{d}\ \tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{q}, G)$ 作为度量测度空间分裂出一个因子$\mathbb{R}^{n-2}$，并且存在一个闭子群 $\mathbb{R}^{n-2} < G$，它通过平移作用于该欧几里得因子上。

命题 3.2 的一个推论是$X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 的吹胀极限作为度量空间是唯一的。这一结果对于以下证明至关重要：

命题 3.3。 在定理 *3.1*的假设下，存在彼此线性无关的非恒定调和函数 $u_1, \ldots, u_{n-2}\colon X \to \mathbb{R}$，使得以下结论成立：

i) 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $C_\varepsilon > 0$，使得 $|u_i(x)| \leq C_\varepsilon d(x, p)^{1+\varepsilon} + C_\varepsilon$ 对每个 $x \in X$ 和 $i = 1, \ldots, n-2$ 都成立，即这些调和函数具有近线性增长；*ii)* 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $R_\varepsilon > 0$，使得对每个 $r > R_\varepsilon$，都有一个下三角 $(n-2) \times (n-2)$ 矩阵 $T_{r,\varepsilon}$，满足 $T_{r,\varepsilon} \circ U\colon B_r(p) \to \mathbb{R}^{n-2}$ 是一个ε-分裂映射。这里设 $U := (u_1, \ldots, u_{n-2})\colon X \to \mathbb{R}^{n-2}$; *iii)* 映射 $\mathbb{Z}^{n-2} \ni \gamma \mapsto U(\gamma(p)) \in \mathbb{R}^{n-2}$ 是一个单射群同态；*iv)* 若 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，则

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\mathscr{L}^{n-2}\left(T_{r,\varepsilon} \circ U(B_1(\overline{p}))\right)}{r^{n-2}} > 0\,. \tag{3.1}$$

命题 3.3 的 i) 和 ii) 项由 [52, 定理 110], 推出，同时考虑到由命题 3.2 可知吹胀极限的度量唯一性（见推论3.6）。另一方面，iii) 和 iv) 项的证明需要一些新思路。非退化 条件（3.1），连同近似分裂性质（精度任意）以及 ii) 中的线性变换

和 iii) 中的等变性，在定理 3.1的证明中起着关键作用。

注记 3.4。为清晰起见，我们指出，事后看来，函数u_i 可以直接取为 X中 $\mathbb{R}^{n-2}$ 因子的坐标。容易验证，作此选择后，i)–iv) 均成立，并且可以将所有矩阵$T_{r,\ \varepsilon}$ =均取为 Id。不过，在证明的这一阶段，我们还不知道 X 是否已经分裂出一个因子 $\mathbb{R}^{n-2}$ 。

我们将在下文第 3.2 节证明命题 3.1。命题 3.3 是命题 3.43 与命题3.45 的不甚精确的综合，而这两条命题构成了第 3.2 节的主要内容。第 3.3 节将结合这些工具，完成定理 3.1的证明。

3.1. **缩放极限的分裂**。 本节的目标是证明命题 3.2。若将讨论限制在所考虑空间的万有覆盖具有欧几里得体积增长的情形，证明会简单得多。在这种情形下——这也是近期 [53], 所处理的情形——所需的分裂可由所谓的锥分裂原理推出。为处理其余情形，关键步骤是通过 $\mathbb{R}^k$-作用证明以下分裂定理。

定理 3.5。 设$(X,$ 度量 $\mathfrak{m})$ 是一个$\mathrm{RCD}(0,N)$ 空间，满足以下条件，其中某个整数为 $1\le k\le N$:

(1) 维数$_{\mathrm{e}}(X)\ \le k+1$。*(2)* $\int_1^{+\infty}{}_{\mathfrak{m}}\,{}^{t^{k+1}}_{B_t\ p}(())$ $dt=+\infty$，其中某个 $p\in X$。*( )*

^{3} 存在一个闭子群 $H<$等距变换群 $($ $X)$，它与 $\mathbb{R}^k$ 同构。于是，作为度量测度空间， $X\cong Y\times\mathbb{R}^k$，其中某个$\mathrm{RCD}(0,N-k)$ 空间$(Y,$度量$_Y,\mathfrak{m}_Y)$。

正如我们将要看到的，定理3.5 很容易推出以下唯一性与结构定理，该定理适用于命题 3.2 的情形下万有覆盖的缩放极限。

推论 3.6。 设$(X,$度量 $\mathscr{H}^n)$ 是一个$\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，其中某个 $n\in\mathbb{N},n\ge 2$。若 $\pi_1(X)$ 有一个与 $\mathbb{Z}^{n-2}$ 同构的子群，则$(X,$ 度量 $\mathscr{H}^n)$ 作为$(X,$度量 $\mathscr{H}^n)$ 的万有覆盖的缩放极限，作为（带基点）度量空间是唯一的，并且（带基点）等距于一个（以锥尖为基点的）度量锥。

假设定理 3.5 和推论 3.6成立，其证明将在本节后文讨论，我们完成命题 3.2的证明。

命题 3.2 的证明。首先假设 X 具有欧几里得体积增长。那么，根据 [33, 定理 1.1] 和 [24, 定理 7.6]之后的 [34, 定理 1.3]，每个吹胀极限 $(X,\mathrm{d}\ \tilde{q})$ 都是一个以 $\tilde{q}$ 为锥尖的 n 维度量锥。由引理 2.7，存在一个与 $\mathbb{R}^{n-2}$ 同构的 G 闭子群，它在 $\tilde{X}$ 上自由作用，因为 $\mathbb{R}^{n-2}$ 的唯一紧子群是平凡群。因此， $\tilde{X}$ 的锥尖集合包含一个与 $\mathbb{R}^{n-2}$同胚的子集，从而

$\widetilde{X} \cong \mathbb{R}^{n-2} \times C(Z)$ 等距地，由锥分裂可得，其中 Z 或者等距于一个圆 S^1_r（当 $0 < r < 1$ 时），或者等距于一个区间 $[0, a]$（当 $0 < a \leq \pi$时）。

现在假设 X 不具有欧几里得体积增长。在这种情况下，根据 定理 $1_{\mathrm{e}}(X) \leq$ 定理 $3_{\mathscr{H}}(X)$，我们有 $\leq n-1$。由 [34, 定理 14] 以及 [25,定理 31]。根据引理 2.7 ，存在一个 G 与 $\mathbb{R}^{n-2}$同构的闭子群。此外，根据 Bishop-Gromov不等式，存在 $c > 0$ 使得

$$\widetilde{\mathfrak{m}}(B_r(\widetilde{q})) \leq cr^n \quad \text{for every } r > 1\,.$$

因此，定理 3.5 适用于 $k = n-2$，从而得到 $\widetilde{X} \cong \mathbb{R}^{n-2} \times Z$作为度量测度空间。

根据推论 3.6， X 的吹胀极限作为度量空间是唯一的，并且等距于一个度量锥。该陈述的第二部分直接由 [75, 定理 32]得出。我们注意到，该结果在其中是针对光滑完备黎曼流形陈述的，但证明对于 RCD情形逐字适用。 □

我们将对群 $\mathbb{R}^k \cong H < \mathrm{Iso}(X)$ 的维数 k 使用归纳法来证明定理 3.5。证明中最具挑战性的部分是归纳法的基础步骤，对应于 $k = 1$。如命题 3.14 所示，我们可以很容易地将问题化归到 $X/H \cong \mathbb{R}_+$ 等距地的情形。在这种情况下，分裂定理的证明包含两个主要步骤。证明的第一步是说明 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 同构于某个测度扭曲积 $(\mathbb{R}_+ \times_\varphi \mathbb{R}, \mathsf{d}\varphi, h(s)\mathscr{L}^1(\mathrm{d}s)\mathscr{L}^1(\mathrm{d}t))$，其中 $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, (0, +\infty])$ 且$h \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}((0, +\infty)) \cap L^1_{\mathrm{loc}}([0, +\infty)$。第 3.1.1 节的目标就是确立这一结构性结果（尤其参见命题 3.7）。在第 3.1.2 节中，利用 X 在合成意义下具有非负里奇曲率这一假设，我们推导出翘曲因子 φ 在适当的加权半直线上是超调和的。得益于假设 (2)，这个加权半直线具有慢体积增长，因此迫使翘曲因子 φ 为常数，从而得到所需的分裂（尤其参见命题 3.33）。在第 3.1.3 节中，我们处理归纳步骤。在第 3.1.4 节中，我们利用定理 3.5 证明推论 3.6。

3.1.1. 定理*3.5*的证明，基例：测度扭曲乘积结构。本节的设定是，我们考虑一个 $\mathrm{RCD}(0, N)$ 空间 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$，使得 维数$_{\mathrm{e}}(X) \leq 2$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{\mathfrak{m}(B_t(p))}\,\mathrm{d}t = +\infty\,, \tag{3.2}$$

对于某个 $p \in X$，并且存在一个闭子群 $H < \mathrm{Iso}(X)$ 同构于 $\mathbb{R}$。为了完成定理 3.5 基础步骤的证明， X 将等距地分裂出一条直线。为此，如上所述，我们的首要目标是证明 X 是一个测度扭曲积。此结论独立于体积增长假设（3.2）。更确切地说，我们将证明以下命题。

命题 *3.7.* 设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 $RCD(0,N)$ 空间，满足 $\dim_{\mathrm{e}}(X) \leq 2$，且存在一个闭子群 $H < Iso(X)$ 同构于 $\mathbb{R}$。那么，要么 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 分裂出一条直线，要么存在一个递增函数 $h \in Lip_{\mathrm{loc}}((0,+\infty)) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$，以及一个连续且严格为正的函数 $\varphi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$，使得 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m}, H)$ 等变同构于 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上的一个测度扭曲积，其度量和测度分别为

$$\mathrm{d}r^2 + \varphi(r)^2\,\mathrm{d}x^2\,, \qquad h(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x\,, \tag{3.3}$$

并且 $\mathbb{R}$-作用通过在 x 分量上的平移给出。

注意，如果假设 3.7 中命题的结论$(X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$是一个光滑带权黎曼流形，那么该结论相当标准。然而，在我们的框架下，这一假设并不公平，也是造成诸多棘手问题的根源之一。事实上，我们将不得不同时证明测度扭曲乘积结构以及扭曲函数 φ 和权函数 h的某种正则性。

注 3.8。 在任何具有（足够正则的）结构 3.3的测度扭曲积上，投影到欧氏分量 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个调和函数。本节后续所有论证的根源都在于这一观察。

注 3.9。 命题 3.7 特别推广了近期 [32]中得到的结构性结果。在他们的情形中，$(X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个完备黎曼流形 $(M,\ g)$ 的吹胀极限，满足 $\mathrm{Ric} \geq 0$，并且利用度量 g 的显式形式，得到了吹胀极限的测度扭曲乘积结构。

我们首先注意到，商空间 X/H 上存在一个自然的 RCD结构。

注 3.10（由同构于 $\mathbb{R}$ 的群对 RCD空间取商）。 设 $(X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 $\mathrm{RCD}(K,\ N)$ 空间，且 $\mathbb{R} \cong H < \mathrm{Iso}(X)$ 是一个闭子群。考虑由 $1 \in \mathbb{R}$ 生成的离散子群 $\mathbb{Z} < H \cong \mathbb{R}$。我们考虑商空间 $X/\mathbb{Z}$，其赋备商距离 d' 以及唯一的测度 $\mathfrak{m}'$，使得投影 $\pi : X \to X/\mathbb{Z}$ 局部保测。由于 π 是度量测度空间的局部等距同构，商空间 $(X/\mathbb{Z},\ \mathsf{d}',\ \mathfrak{m}')$ 局部具有 $\mathrm{RCD}(K,\ N)$ 性质。因此，根据局部到整体性质，[21, 62],$(X/\mathbb{Z},\ \mathsf{d}',\ \mathfrak{m}')$ 同样是 $\mathrm{RCD}(K,\ N)$ 空间。

考虑 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 在 $X/\mathbb{Z}$ 上的作用。由于 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是 $\mathrm{Iso}(X/\mathbb{Z})$ 的紧子群，根据 [42],，商空间 $(X/\mathbb{Z})/(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 赋予商距离 d'' 和商测度$\mathfrak{m}''$ 后是一个 $\mathrm{RCD}(K,\ N)$ 空间。此外，度量空间 $((X/\mathbb{Z})/(\mathbb{R}/\mathbb{Z}),\ \mathsf{d}'')$ 与带有其自然商距离的 $X/\mathbb{R}$ 同构。

我们继续讨论这样一个观察：关于 RCD空间 在 $\mathbb{R}$保测等距变换作用下的商空间维数。

引理 3.11。 设 $(X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 $\mathrm{RCD}(K,\ N)$ 空间，满足 $H <$等距变换群(X) 是一个同构于 $\mathbb{R}$的闭子群。考虑商空间 $\mathrm{RCD}(K,\ N)$ 结构$\widetilde{\ }(X/H,\ \mathsf{d}\ \tilde{\mathfrak{m}})$，该结构由注记 *3.10*给出。那么，我们有

$$\dim_{\mathrm{e}}(X/H) \le \dim_{\mathrm{e}}(X) - 1\,.$$

$\widetilde{\ }$证明。设 X/H 的本质维数为 $d \in \mathbb{N}$，设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 的本质维数为 d'。称 $\pi\colon\ X \to X/H$ 为投影映射。由[70],，存在 $x \in X$，使得 $\mathrm{Tan}_x(X) = \{\mathbb{R}^{d'}\}$ 且 $\mathrm{Tan}^{\pi(x)}(X/H) = \{\mathbb{R}^{d}\}$。由引理 2.7，对于某个序列 $r_i \uparrow +\infty$，我们有带基点的等变 Gromov–Hausdorff 收敛

$$(X, r_i\mathsf{d}, H, x) \to (\mathbb{R}^{d'}, \mathsf{d}_{\mathrm{eu}}, G, 0)\,,$$

其中 $G <$等距变换群$(\mathbb{R}^{d'})$，且 G 包含一个与 $\mathbb{R}$ 同构的子群。由定理2.3，$\mathbb{R}^{d} \cong \mathbb{R}^{d'}/G$，因此 $d \le d' - 1$，正如所要证明的。□

我们记录 $\mathrm{RCD}(0,\ N)$ 空间分裂定理的两个众所周知的推论，参见 [43]。由于证明是标准的，我们略去不述。

引理 3.12。 设 $(X,$ 度量 $\mathfrak{m})$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0,\ N)$ 空间，带有一个闭子群 $H <$等距变换群(X)，使得 X/H 与 $\mathbb{R}$ 同胚（因而等距）。那么，存在一个分裂 $X \cong Y \times \mathbb{R}$，使得 H 作用在 $\mathbb{R}$ 因子上是平凡的。

引理 3.13。 设$(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个非紧$\mathrm{RCD}(0, N)$ 空间，且$\mathrm{Iso}(X)$ 包含一个闭子群 H，其中 X/H 紧致。那么， $X \cong Y \times \mathbb{R}$作为度量测度空间。

结合引理3.11、引理 3.12、引理 3.13 以及RCD 本质维数小于或等于一的空间分类（见[59],），我们立即得到以下结论。

引理 3.14。 在与命题 *3.7*中相同的假设和记号下，以下两种情况之一成立：$X \cong Y \times \mathbb{R}$ 作为度量测度空间，并且 H作用于第二个因子的方式是平移；或者 $X/H \cong \mathbb{R}_+$ 作为度量空间。

由引理 3.14，为完成命题 3.7 的证明，不失一般性，可假设 X/H 与 $\mathbb{R}_+$等距。这是证明中最微妙的情形，也是本节余下部分的重点。接下来的两个引理表明，在这种情况下， X 存在一种明确且自然的参数化（作为集合），并带有映射 $\Phi\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to X$。

引理 3.15. 设$(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个$\mathrm{RCD}(0, N)$ 度量空间，其闭子群为$H < \mathrm{Iso}(X)$，并且 $X/H \cong \mathbb{R}_+$ 作为度量空间成立。那么存在一条射线$r\colon\ [0, +\infty) \subset X$，使得

$$X = \bigcup_{t \ge 0} (H \cdot r(t))\,, \tag{3.4}$$

and

$$\mathsf{d}(H \cdot r(t), H \cdot r(s)) = |t - s| \quad \textit{for every } t, s \ge 0\,. \tag{3.5}$$

特别地，到商空间 $\pi\colon X \to X/H \cong \mathbb{R}_+$的典范投影与距离$\mathsf{d}(\cdot\, H\cdot\, r(0))\colon X \to \mathbb{R}_+$ 到 $r(0)$的轨道的距离相一致。

证明。 考虑典范投影映射 $\pi\colon X \to X/H \cong \mathbb{R}_+$。固定$s > 0$，令 $H\cdot x_0$ 和 $H\cdot x_s$ 分别为 0 和 s 在 π下的原像。根据商距离的定义，我们有

$$s = \mathsf{d}(H\cdot x_0, H\cdot x_s)\,.$$

容易验证，存在一条测地线 $\gamma_s\colon [0,s] \to X$，实现 $H\cdot x_0$与 $H\cdot x_s$之间的距离。将 γ_s平移一个 H中的元素后，不失一般性地假设 $\gamma_s(0) = x_0$。

我们断言，对于每个 $t\in[0,s]$，如此选取时有 $\pi(\gamma_s(t)) = t$。为此，注意到 $\pi\colon X \to X/H$ 是一个 1- 利普希茨映射，因此 $\pi\circ\gamma_s$ 是一条 1- 利普希茨曲线。同时，$\pi(\gamma_s(0)) = 0$ 且 $\pi(\gamma_s(s)) = s$，因此对于每个 $t\in[0,s]$，有$\pi(\gamma_s(t)) = t$。由此可得

$$\mathsf{d}(H\cdot\gamma_s(t_1), H\cdot\gamma_s(t_2)) = |t_1 - t_2| \quad \text{for every } t_1, t_2 \in [0,s]\,.$$

取一个序列 $s_i \uparrow +\infty$，并考虑相应的测地线 $\gamma_{s_i} \subset X$。经过选取子序列后，它们收敛到一条极限射线 $r\colon [0,+\infty) \to X$，其性质是，对于每个 $t\geq 0$，都有 $\pi(r(t)) = t$，并且

$$\mathsf{d}(H\cdot r(t_1), H\cdot r(t_2)) = |t_1 - t_2| \quad \text{for every } t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+\,.$$

由于 $\pi\circ r$ 的像是整个 $\mathbb{R}_+$，因此（3.4）也成立。 □

引理 3.16. 设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0,N)$ 空间，其闭子群 $H < \mathrm{Iso}(X)$ 同构于 $\mathbb{R}$，且满足 $X/H \cong \mathbb{R}_+$。设 $r \subset X$ 为引理*3.15*给出的射线。那么映射

$$\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to X\,, \quad \Phi(t,s) := t\cdot r(s)$$

是双射。此外，记 $\mathsf{d}(\cdot\, H\cdot\, r(0))$ 为 $r(0)$ 在 X中的轨道到点的距离，则逆映射 $\Psi := \Phi^{-1}\colon X \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 可写为$\Psi(x) = (f(x), \mathsf{d}(x, H\cdot\, r(0))$，其中某个函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$。此外，$f\colon X \to \mathbb{R}$ 关于 X 上的 $H \cong \mathbb{R}$作用以及 $\mathbb{R}$ 上由平移给出的标准 $\mathbb{R}$作用是等变的。

证明。 映射 Φ 由（3.4）可知是满射。因此我们只需检验其单射性。设 (t_1, s_1), $(t_2, s_2) \in H\times\mathbb{R}_+$ 满足

$$t_1\cdot r(s_1) = t_2\cdot r(s_2)\,.$$

那么 $r(s_1)$ 和 $r(s_2)$ 属于 X 中 H 的同一轨道。因此，由（3.5）可得 $s_1 = s_2$。由于 H 的作用是自由的（因为 H 的唯一紧子群是平凡群），可知 $t_1 = t_2$，从而证明了 Φ 是双射。为了证明逆映射 $\Psi{:=}\,\Phi^{-1}$ 的表示公式，我们注意到，对于任意 $x = \Phi(t,s) = t\cdot r(s)$,

$$\mathsf{d}(x, H\cdot r(0)) = \mathsf{d}(t\cdot r(s), H\cdot r(0)) = \mathsf{d}(H\cdot r(s), H\cdot r(0)) = s\,,$$

其中最后一个等式应用了（3.5）。 □

我们的下一个关键目标是证明引理 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$ 中引入的函数3.16 是调和函数。这一结论及其证明自然是受到我们在注记3.8中所作观察的启发。然而，完整的论证相当技术性，并且需要若干中间步骤。我们先从关于 f 的一个温和的正则性结果开始。这将成为我们接下来计算的起点。

引理 3.17。 在与引理 *3.15*相同的假设和记号下，设 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$ 为引理 *3.16*给出的映射。则$f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X)$。

证明。 令 $K \subset\subset X$，并反设存在不同的点 $x_i,\ y_i \in K$ 使得

$$\frac{|f(x_i) - f(y_i)|}{\mathsf{d}(x_i, y_i)} \to +\infty \quad \text{as } i \uparrow +\infty\,. \tag{3.6}$$

使用与引理 3.16相同的记号，我们可以写成 $x_i = t_i^x \cdot\ r(s_i^x)$ 以及$y_i = t_i^y \cdot\ r(s_i^y)$ 其中 t_i^x、$t_i^y \in \mathbb{R}$ 和 s_i^x、$s_i^y \in \mathbb{R}_+$，因此（3.6）可写为

$$\frac{\mathsf{d}(x_i, y_i)}{|t_i^x - t_i^y|} \to 0 \quad \text{as } i \uparrow +\infty\,. \tag{3.7}$$

由 f 的等变性，我们不妨设对每个 $i \in \mathbb{N}$都有 $t_i^y = 0$。此外，我们还可以假设对每个 $i \in \mathbb{N}$都有 $t_i^x > 0$。由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\mathsf{d}(r(s_i^y), 1 \cdot r(s_i^y)) \leq &\left\lfloor \frac{1}{t_i^x} \right\rfloor \mathsf{d}\Big(r(s_i^y), (t_i^x) \cdot r(s_i^y)\Big) \\ &+ \mathsf{d}\left(\left\lfloor \frac{1}{t_i^x} \right\rfloor t_i^x \cdot r(s_i^y), 1 \cdot r(s_i^y)\right).\end{aligned}$$

我们断言，当 $i \uparrow +\infty$时，右端趋于零。如果该断言成立，则利用 $H \cong \mathbb{R}$ 在 X上的自由作用，我们立即得到矛盾。为证明该断言，利用（3.5）可将第一项控制为

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{1}{t_i^x} \right\rfloor \mathsf{d}\Big(r(s_i^y), t_i^x \cdot r(s_i^y)\Big) \leq &\frac{1}{t_i^x}\Big(\mathsf{d}(x_i, y_i) + \mathsf{d}(r(s_i^x), r(s_i^y))\Big) \\ \leq &2\frac{\mathsf{d}(x_i, y_i)}{t_i^x}\,,\end{aligned}$$

并注意到，最后一项根据（3.7）收敛于零。因此，要得出结论，我们需要证明

$$\mathsf{d}\left(\left\lfloor \frac{1}{t_i^x} \right\rfloor t_i^x \cdot r(s_i^y), 1 \cdot r(s_i^y)\right) \to 0\,.$$

这可由以下两点结合得出：

$$\left\lfloor \frac{1}{t_i^x} \right\rfloor t_i^x \to 1\,,$$

且序列 $r(s_i^y)$ 在 X 中相对紧。 □

推论 3.18. 映射 $\Phi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to X$ 在引理 *3.16* 中引入，是一个同胚。此外，维数$_{\mathrm{e}}(X)=2$。

证明。 第一个结论由引理 3.16和引理 3.17得出。特别地， X与 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$同胚，因此其拓扑维数等于2。结合 [70, 定理 1。1], 可知， X 的本质维数至多为 2。同时，引理 3.11 意味着维数$_{\mathrm{e}}(X)\geq 2$。 □

我们接着研究测度 $\mathfrak{m}$的结构。

引理 3.19. 在与引理 *3.16*相同的假设和记号下，有如下结论：存在一个非递减函数$h\in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}((0,+\infty))\cap \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ 使得，对每个 $A\subset\subset X$，

$$\mathfrak{m}(A)=\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,\mathscr{L}^1(f(A\cap\{\mathsf{d}_{H\cdot r(0)}=s\}))\,ds\,. \tag{3.8}$$

此外， h 在$(0,+\infty)$上严格为正。

证明。 令 $A\subset\subset X$。由余面积公式应用于函数 $\mathsf{d}^{H\cdot r(0)}$,

$$\mathfrak{m}(A)=\int_{\mathbb{R}_+} P(\{\mathsf{d}_{H\cdot r(0)}>s\},A)\,ds\,,$$

其中， $P(\{\mathsf{d}^{H\cdot r(0)}>s\}\ A)$表示集合$\{\mathsf{d}^{H\cdot r(0)}>s\}$在 A上的周长。我们断言，存在一个非负函数 $h\in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$，它与 A 无关，使得对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $s\in\mathbb{R}_+$，有

$$P(\{\mathsf{d}_{H\cdot r(0)}>s\},A)=h(s)\,\mathscr{L}^1(f(A\cap\{\mathsf{d}_{H\cdot r(0)}=s\}))\,. \tag{3.9}$$

由于测度 $P(\{\mathsf{d}^{H\cdot r(0)}>s\},\cdot)$集中于集合 $\{\mathsf{d}^{H\cdot r(0)}=s\}$，且限制映射 $f_{|\{\mathsf{d}_{H\cdot r(0)}=s\}}\colon \{\mathsf{d}_{H\cdot r(0)}=s\}\to\mathbb{R}$ 由引理3.16, (3.9为双射，因此若能证明测度恒等式，就可推出

$$f_{\#}P(\{\mathsf{d}_{H\cdot r(0)}>s\},\cdot)=h(s)\mathscr{L}^1 \quad \text{for } \mathscr{L}^1\text{-a.e. } s\in\mathbb{R}_+\,.$$

固定 $s\geq 0$。对每个 $a<b$ 和 $t\in\mathbb{R}$，由 f 的等变性及周长的不变性可得

$$f_{\#}P(\{\mathsf{d}_{H\cdot r(0)}>s\},\cdot)(a,b)=f_{\#}P(\{\mathsf{d}_{H\cdot r(0)}>s\},\cdot)(a+t,b+t)\,.$$

由于 $\mathbb{R}$ 上唯一的平移不变测度是 $\mathscr{L}^1$ 的倍数，$f_{\#}P(\{\mathsf{d}^{H\cdot r(0)}>s\},\cdot)=h(s)\mathscr{L}^1$ 对某个 $g(s)\geq 0$成立。由于这对每个 $s\geq 0$，(3.8) 对某个函数 $h\in\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ 都成立。

接下来只需证明 $h\in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}((0,+\infty))$，并证明 h 在 $(0,+\infty)$ 上递增且严格为正。设 $\mathbb{Z}<H\cong\mathbb{R}$ 是由 $\mathbb{Z}$ 在 H 中生成的副本

。由 $1 \in H \cong \mathbb{R}$ 生成。考虑商空间 $X/\mathbb{Z}$，其具有典范诱导的 RCD$(0,N)$ 结构（$X/\mathbb{Z}$, d', $\mathfrak{m}'$）（参见注 3.10）。定义 $f_{\mathbb{Z}}\colon X/\mathbb{Z} \to H/\mathbb{Z}$，使得 $f_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\cdot x) := \mathbb{Z}\cdot f(x)$，并令 $\tilde{r} \subset X/\mathbb{Z}$ 为 r 在典范商映射下的投影。注意，

$$\bigcup_{t\in(0,1)\,,\ s\in\mathbb{R}_+} t\cdot r(s)$$

是覆盖的基本区域 $\pi\colon X \to X/\mathbb{Z}$。因此，应用（3.8），我们得到，对于每个 $A \subset\subset X/\mathbb{Z}$

$$\mathfrak{m}'(A) = \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,\mathscr{L}^1(f_{\mathbb{Z}}(A \cap \{\widetilde{\mathsf{d}}_{(H/\mathbb{Z})\cdot\tilde{r}(0)} = s\}))\,ds\,. \tag{3.10}$$

现在考虑商空间 $X/H \cong (X/\mathbb{Z})/(H/\mathbb{Z})$，其带有 RCD$(0,N)$ 结构（X/H, $\mathsf{d}'', \mathfrak{m}''$）（参见注 3.10）。由于 $X/H \cong \mathbb{R}_+$, [21, 定理 A.2] 意味着，对于一个非递减、局部利普希茨且严格为正的函数 $h\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$。另一方面，对于每个$s \geq 0$，我们有

$$f_{\mathbb{Z}}(\{\widetilde{\mathsf{d}}_{(H/\mathbb{Z})\cdot\tilde{r}(0)} = s\}) = H/\mathbb{Z}$$

因此

$$\mathscr{L}^1(f_{\mathbb{Z}}(\{\widetilde{\mathsf{d}}_{(H/\mathbb{Z})\cdot\tilde{r}(0)} = s\})) = 1\,.$$

由（3.10），我们推得$h = h$，从而完成证明。 □

下面的推论是引理3.19的直接结果。

推论 3.20。 在与引理*3.16*相同的假设和记号下，如果 $A \subset\subset X$ 是一个博雷尔集，那么 $\mathfrak{m}(A) = 0$ 当且仅当$\mathscr{L}^2(\Psi(A)) = 0$。

接下来，为了研究 $(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 的切空间行为，这样做会很有帮助。

引理 3.21。 设 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0,N)$ 空间，其闭子群$H < \mathrm{Iso}(X)$ 同构于 $\mathbb{R}$，且 $X/H \cong \mathbb{R}_+$ 作为度量空间。设$\pi\colon X \to [0,+\infty)$ 为到商空间的典范投影。那么有以下结论：

i) 每个 $x \in \pi^{-1}((0,+\infty))$ 都是$(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 的正则点，而$(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m}, x, H)$ 的（唯一）等变放大是$(\mathbb{R}^2, \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}, \mathscr{L}^2)$，并带有一个由平移构成的 $\mathbb{R}$-作用；*ii)* 对每个 $x \in \pi^{-1}(\{0\})$，在 x 处对$(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 进行吹入极限所得空间与 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 同胚；特别地， x 不是正则点。

证明。 若 $x \in \pi^{-1}((0,+\infty))$，则 $X/H \cong \mathbb{R}_+$ 在 $\pi(x)$ 处的吹入极限同构于 $\mathbb{R}$。由定理 2.3 和引理 3.12，每个 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m}, x, H)$ 的等变放大都存在一个分裂 $X = Y \times \mathbb{R}$，且放大作用在 $\mathbb{R}$-因子上是平凡的。根据 pmGH 收敛下本质维数的下半连续性，参见 [58, 定理 1。5], 和推论

3.18，维数$_{\mathrm{e}}(Y) \leq 1$。由引理 2.7 可知，极限群包含一个与 $\mathbb{R}$同构的闭子群。因此，(i) 项由 1维RCD 空间的分类得出，参见 [59]。

若 $\pi(x) = 0$，则 $X/H \cong \mathbb{R}_+$ 在 $\pi(x)$处的每个吹入极限都与 $\mathbb{R}_+$等距。由引理 2.7，$(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m}, x, H)$ 的每个等变放大 (X_∞, H_∞) 的极限群 H_∞ 都包含一个与 $\mathbb{R}$同构的闭子群 $H'_\infty < H_\infty$。由推论 3.18、本质维数的下半连续性以及引理 3.11，商空间 X_∞/H'_∞ 的维数至多为 1。同时，由定理 2.3，$X_\infty/H_\infty \cong \mathbb{R}_+$，因此 X_∞/H'_∞ 是非紧的。特别地，X_∞/H'_∞ 要么是射线，要么是直线。若 $X_\infty/H'_\infty \cong \mathbb{R}_+$，则由推论 3.18，$X_\infty$ 与 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 同胚。若 $X_\infty/H'_\infty \cong \mathbb{R}$，则由引理 3.12，$X_\infty$ 与 $\mathbb{R}^2$ 等距。我们证明这不可能。设 $r \subset X$ 为引理 3.15 给出的射线，不失一般性地假设 $x = r(0)$。由于 $(X, \mathsf{d}/r_i) \to X_\infty \cong \mathbb{R}^2$，其中某个序列为 $r_i \downarrow 0$，取子序列后，射线 $r \subset X$ 收敛到一条射线 $r_\infty \subset \mathbb{R}^2$；并且在实现尖点 Gromov–Hausdorff 收敛的空间中，集合 $\{y \in X : \mathsf{d}(y, r) \geq r_i\}$ 在豪斯多夫意义下收敛到 $\{y \in \mathbb{R}^2 : \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}(y, r_\infty) \geq 1\}$。同时，可以将 $\{y \in X : \mathsf{d}(y, r) \geq r_i\}$ 写成两个集合的并，这两个集合彼此间的距离大于 1，且它们到 $(X, \mathsf{d}/r_i)$ 中 $r(0)$ 的距离小于 2。因此，$\{y \in \mathbb{R}^2 : \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}(y, r_\infty) \geq 1\}$ 也必定存在这样的划分，只需将 $r(0)$ 替换为 $r_\infty(0)$，这就导出了矛盾。□

引理 3.22。 在与引理 *3.15*相同的假设和记号下，设 $\gamma\colon [0, T] \to X$ 是一条线段。若 γ的像在 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)} = 0\}$中包含三个不同的点，则它完全包含于 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)} = 0\}$。

证明。 结论由引理 3.21 推出，这得益于测地线内部切锥的赫尔德连续性，参见 [35]后面的 [31]。 □

注 3.23。 在引理 3.15 的假设下，线段 $\gamma\colon [0, T] \to X$可能满足 $\gamma(0)$和 $\gamma(T)$均位于奇异轨道 $\mathbb{R} \cdot r(0)$，而所有内部点都位于正则部分。实际出现这种情况的例子见 [76, 32]。

受注 3.8的启发，我们接下来的目标是证明此前引入的函数 f 是调和函数。下面的引理3.27对应这一结论。接下来的两个引理是证明它的关键。粗略地说，我们将借助吹入极限论证，利用 $\nabla \mathsf{d}^{H\cdot r(0)}$ 和 ∇f 作为 X的切丛正交基，来计算任意充分正则的测试函数的偏导数。

引理 3.24。 在与引理 *3.15*相同的假设和记号下，对于每个 $s > 0$ 以及每个序列 $r_i \downarrow 0$，经过选取一个子序列后，存在 $\delta_i \downarrow 0$ 和 δ_i-*GH* 近似

$$\psi_i : (\overline{B}^X_{r_i}(r(s)), \mathsf{d}/r_i) \to (\overline{B}^{\mathbb{R}^2}_1(0), \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}})$$

满足以下条件：

(1) $\psi_i(r(s+r_i)) = (0,\ 1)$ 且 $\psi_i(r(s-r_i)) = (0,\ -1)$。

(2) $\psi_i(H\cdot r(s)) \to \{y=0\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中按豪斯多夫意义成立。

另外，假设引理 *3.16* 给出的函数 f 根据定理 *2.11* 在 $r(s)$ 上可微，且 $lip(f)(r(s)) > 0$。在取一个子序列后，$r(s)$ 处通过放大 $d^{H\cdot r(0)}$ 和 f 得到的线性函数 $f_\infty, d_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足 $lip(d_\infty) = 1$ 且 $lip(f_\infty) = lip(f)(r(s))$，它们的梯度相互正交，并张成 $\mathbb{R}^2$ 上线性函数的空间。

证明。 由于 $\mathrm{Tan}^{r(s)}(X) = \{\mathbb{R}^2\}$ 根据引理 3.21，取一个（不重新标记的）子序列后，存在 $\delta_i \downarrow 0$，以及 δ_i-GH 近似

$$\psi_i : (\overline{B}^X_{ir_i}(r(s)), \mathsf{d}/r_i) \to (\overline{B}^{\mathbb{R}^2}_i(0), \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}),$$

使得 $\psi_i(r(s)) = 0$。一个标准观察是，可以将 GH 映射 ψ_i 的第二分量直接取为 $(\mathsf{d}^{H\cdot r(0)} - s)/r_i$，因为 $r(s)$ 是射线上的一个中间点，该射线对应于 $\mathsf{d}^{H\cdot r(0)}(\cdot)$，根据（3.5）。采用这样的选择后，只需稍微扰动 GH 映射的第一分量，条件 1 就显然成立。条件 2则由引理 3.21(i)。

现在考虑通过定理 2.11 将 $\mathsf{d}^{H\cdot r(0)}$ 和 f 在 $r(s)$ 处吹起后得到的线性映射 $\mathsf{d}_\infty, f_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$。由于对每个 i，$\mathsf{d}^{H\cdot r(0)}(r(s+r_i)) = s + r_i$，且 $\psi_i(r(s+r_i)) = (0,1)$，因此 $\mathsf{d}_\infty((0,1)) = 1$。由于 $|\nabla \mathsf{d}_\infty| \le 1$, $\nabla \mathsf{d}_\infty$ 是竖直的。由于 $f(r(s+r_i)) = 0$，$f_\infty((0,1)) = 0$，所以 ∇f_∞ 是水平的。根据假设，$\nabla f_\infty \neq 0$，集合 $\{\mathsf{d}_\infty, f_\infty\}$ 张成了 $\mathbb{R}^2$上线性函数的空间。□

引理 3.25。 在与引理 *3.19* 相同的假设和记号下，设 $\varphi \in \mathrm{Lip}_c(X)$，并设 $\widetilde{\varphi}$：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 定义为 $\varphi \circ \Psi^{-1}$，于是 $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(f(x),\ \mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))$。那么有如下结论：

(1) 对于几乎处处的 $h\mathscr{L}^1$，$s \in \mathbb{R}_+$ 满足 $\mathrm{lip}(f) \neq 0$，在 $(\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)})^{-1}(s)$ 上，

$$\widetilde{\varphi}(\cdot, s) \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}). \tag{3.11}$$

(2) 对于几乎处处的 $\mathfrak{m}$，$x \in X$ 满足 $\mathrm{lip}(f)(x) \neq 0$, $\widetilde{\varphi}(\cdot, \mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))$ 在 $f(x)$ 中可微，其中

$$\nabla\varphi \cdot \nabla f(x) = \widetilde{\varphi}_{x_1}(f(x), \mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))|\nabla f|^2(x). \tag{3.12}$$

(3) 对于几乎处处的 $\mathfrak{m}$，$x \in X$, $\widetilde{\varphi}(f(x), \cdot)$ 在 $\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x)$ 中可微，其中

$$\nabla\varphi \cdot \nabla \mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x) = \widetilde{\varphi}_{x_2}(f(x), \mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x)). \tag{3.13}$$

特别地，对于几乎处处的 $\mathfrak{m}$，$x \in X$ 满足 $\mathrm{lip}(f)(x) \neq 0$, $\widetilde{\varphi}(\cdot,\cdot)$ 在 $(f(x), \mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))$ 中有偏导数，并且

$$|\nabla\varphi|^2(x) = \widetilde{\varphi}^2_{x_2}(f(x), \mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x)) + \widetilde{\varphi}^2_{x_1}(f(x), \mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))|\nabla f|^2(x).$$

证明。1 的证明：固定 $\varepsilon > 0$。我们证明，对于满足 $\mathrm{lip}(f) \ge \varepsilon$ on $(\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)})^{-1}(s)$ 的 $h\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $s \in \mathbb{R}_+$，(3.11) 成立。固定这样一个 $s \in (0,+\infty)$，并假设对于每个 $x \in (\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)})^{-1}(s)$，函数 f 在 x 中可微。根据定理 2.12，$h\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $s \in \mathbb{R}_+$ 满足 $\mathrm{lip}(f) \ge \varepsilon$ on $(\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)})^{-1}(s)$，且具有

这一性质。令 $t\in\mathbb{R}$，并考虑序列 $t_i\to t_\circ$ 我们证明存在一个与 t_i 和 t 无关的 $C>0$，使得

$$\limsup_{i\to+\infty}\frac{|\widetilde{\varphi}(t_i,s)-\widetilde{\varphi}(t,s)|}{|t_i-t|}<C\,, \tag{3.14}$$

这将进而推出第 1 项。设 $x_s:=r(s)\ \in(\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)})^{-1}(s)$。我们有

$$\frac{|\varphi(t_i\cdot x_s)-\varphi(t\cdot x_s)|}{\mathsf{d}(t\cdot x_s,t_i\cdot x_s)}<\mathsf{L}(\varphi)\,,$$

其中，$\mathsf{L}(\varphi)$ 表示 φ 的 Lipschitz 常数，因此

$$\frac{|\widetilde{\varphi}(t_i,s)-\widetilde{\varphi}(t,s)|}{|t_i-t|}\frac{|t_i-t|}{\mathsf{d}(t\cdot x_s,t_i\cdot x_s)}<\mathsf{L}(\varphi)\,.$$

因此，要完成（3.14）的证明，只需证明当 i 充分大时

$$\frac{|t_i-t|}{\mathsf{d}(t\cdot x_s,t_i\cdot x_s)}\geq\frac{\varepsilon}{2}>0\,. \tag{3.15}$$

注意到 $r_i:=\mathsf{d}(t\cdot\ x_s,\ \ t_i\cdot\ x_s)\ \to 0$ 当 $\ i\uparrow+\infty$ 时，并考虑 GH 映射

$$\psi_i:(\overline{B}^X_{r_i}(x_s),\mathsf{d}/r_i)\to(\overline{B}^{\mathbb{R}^2}_1(0),\mathsf{d}_{\mathrm{eucl}})\,,$$

引理 3.24中所引入的。取子序列后，由于 f 在 x_s 上可微，且 $\mathrm{lip}(f)(x)\geq\varepsilon$，存在一个线性函数 $f_\infty:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，满足$\mathrm{lip}(f_\infty)\geq\varepsilon$，使得

$$\Big\|\frac{f-f(x_s)}{r_i}-f_\infty\circ\psi_i\Big\|_{\infty,,\overline{B}^X_{r_i}(x_s)}\to 0 \tag{3.16}$$

当 $i\to\infty$ 时。由引理 3.24,

$$|f_\infty(\pm1,0)|\geq\varepsilon\,. \tag{3.17}$$

同一引理表明 $\psi_i((t_i-t)\cdot\ x_s)$ 收敛到 {(±1,0)}中的一点。将（3.16）代入 $(t_i-t)\cdot\ x_s$，可推出

$$\Big|\frac{t_i-t}{\mathsf{d}(t\cdot x_s,t_i\cdot x_s)}-f_\infty(\pm1,0)\Big|\to 0\,,$$

结合（3.17），可得（3.15）。至此，项 1 的证明完成。

证明 2：。由引理 3.19 和项 1，对于 $\mathfrak{m}$-几乎处处的 $x\in X$，满足$\mathrm{lip}(f)(x)\neq 0$，$\widetilde{\varphi}(\cdot,\ \mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))$在 $f(x)$ 上可微。因此，我们只需验证（ 3.12 ）。

设 $x\in X\setminus(\mathbb{R}\cdot\ r(0))$ 为任意一点，使得 $\widetilde{\varphi}(\cdot,\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))$ 在 $f(x)$ 上可微，$\mathrm{lip}(f)(x)\neq 0$，且函数 f、φ、$\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}$、$\varphi-f$ 和 $\varphi+f$ 在 x 处可微。令 $r_i\downarrow 0$，并在必要时取子序列，考虑通过如定义 2.11 所示的放大得到的相应线性函数 $(\varphi+f)_\infty$、$(\varphi-f)_\infty$、φ_∞、d_∞、f_∞：$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$。由引理 3.24，存在

a，$b\in\mathbb{R}$ 使得 $\varphi_\infty = a\mathsf{d}_\infty + bf_\infty$。此外，$(\varphi\pm f)_\infty = \varphi_\infty \pm f_\infty$ 因此，利用 $\nabla d_\infty\cdot\nabla f_\infty = 0$ 由引理3.24，

$$\begin{aligned}\nabla\varphi\cdot\nabla f(x) =& \frac{\operatorname{lip}(\varphi+f)^2(x)-\operatorname{lip}(\varphi-f)^2(x)}{4}\\ =& \frac{|\nabla(\varphi+f)_\infty|^2-|\nabla(\varphi-f)_\infty|^2}{4}\\ =& \nabla\varphi_\infty\cdot\nabla f_\infty = b|\nabla f_\infty|^2 = b|\nabla f|^2(x)\,.\end{aligned}$$

最后，我们只需证明 $b=\widetilde{\varphi}_{x_1}(f(x),\ \mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))$。为此，取满足 $\mathsf{d}(x,\ t_i\cdot x)=r_i$ 的 $t_i\downarrow 0$。于是，由于 $i\to\infty$，我们有

$$\left|\frac{\varphi(t_i\cdot x)-\varphi(x)}{\mathsf{d}(x,t_i\cdot x)} - a\mathsf{d}_\infty(\psi_i(t_i\cdot x)) - bf_\infty(\psi_i(t_i\cdot x))\right|\to 0\,. \tag{3.18}$$

由引理 3.24 的第 2 条，并结合 $\nabla\mathsf{d}_\infty\subset\mathbb{R}^2$ 是垂直的这一点，可推出$\mathsf{d}_\infty(\psi_i(t_i\cdot x))\to 0$。将（3.18）改写为关于 $\widetilde{\varphi}$ 的形式，得到（3.19）

$$\left|\frac{\widetilde{\varphi}(f(x)+t_i,\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))-\widetilde{\varphi}(f(x),\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))}{t_i}\frac{t_i}{\mathsf{d}(x,t_i\cdot x)} - bf_\infty(\psi_i(t_i\cdot x))\right|\to 0\,.$$

仿照第 1 条的证明进行推理，可得

$$\left|\frac{t_i}{\mathsf{d}(x,t_i\cdot x)} - f_\infty(\psi_i(t_i\cdot x))\right|\to 0,\quad\text{and}\quad f_\infty(\psi_i(t_i\cdot x))\to f_\infty(\pm 1,0)\neq 0\,.$$

由于 $\widetilde{\varphi}(\cdot,\ \mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))$ 根据假设在 $f(x)$ 上可微，（3.19）蕴含 $b=\widetilde{\varphi}_{x_1}(f(x),\ \mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))$，如所求。

证明第 3 条：对每个 $t\in\mathbb{R}$，映射 $\widetilde{\varphi}(t,\cdot)$ 都是 Lipschitz 的，因此在 $\mathbb{R}_+$ 中几乎处处（相对于 $\mathscr{L}^1$）可微。根据引理 3.20，对几乎处处（相对于 $\mathfrak{m}$）的 $x\in X$，映射 $\widetilde{\varphi}(f(x),\cdot)$ 在 $\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x)$ 中可微。重复用于（3.12）的论证，并注意到 $|\nabla\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}|\equiv 1$，即可得到恒等式（3.13）。

最后，对于 $\mathfrak{m}$-几乎处处的点 $x\in X$，在（3.12）和（3.13）成立的地方，我们有

$$\begin{aligned}|\nabla\varphi|^2 = |\nabla\varphi_\infty|^2 &= |\nabla\varphi_\infty\cdot\nabla\mathsf{d}_\infty|^2 + \left|\nabla\varphi_\infty\cdot\frac{\nabla f_\infty}{|\nabla f_\infty|}\right|^2\\ &= |\nabla\varphi\cdot\nabla\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}|^2(x) + |\nabla f|^{-2}|\nabla\varphi\cdot\nabla f|^2(x)\\ &= \widetilde{\varphi}^2_{x_2}(f(x),\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x)) + \widetilde{\varphi}^2_{x_1}(f(x),\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))|\nabla f|^2(x)\,.\end{aligned}$$

□

备注 3.26。引理 3.25 中的第 3 项是众所周知的，例如可由 [22, 定理 4。5] 得出。相反，另一个方向上的方向导数的计算则更为微妙。

下一个引理及其后续推论包含了关于映射 $f\colon\ X\to\mathbb{R}$（该映射在引理 3.16中引入）的主要正则性结果。

引理 3.27. 在与引理 *3.16* 相同的假设和记号下，函数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ 是调和的。

证明. 令 $\Psi\colon X \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 为引理 3.16 给出的映射（采用通常的识别方式 $H\cong\mathbb{R}$），并令 $h\in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ 为引理 3.19 中的密度。令 $\varphi\in \mathrm{Lip}_c(X)$，并定义 $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，使得 $\widetilde{\varphi}:=\varphi\circ\Psi^{-1}$，从而 $\varphi(x)=\widetilde{\varphi}(f(x),\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))$。要证明 f 是调和的，我们需要验证 $\int_X \nabla\varphi\cdot\nabla f\,d\mathfrak{m}=0$.。根据引理 3.25 的第 2 项，我们有

$$\int_X \nabla\varphi\cdot\nabla f\,d\mathfrak{m}=\int_X \widetilde{\varphi}_{x_1}(f(x),\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))|\nabla f|^2(x)\,d\mathfrak{m}(x)\,.$$

由引理 3.19 以及 $|\nabla f|$ 在 $H\cong\mathbb{R}$下平移不变这一事实，这由 f的等变性可得，我们推得

$$\begin{aligned}&\int_X \widetilde{\varphi}_{x_1}(f(x),\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))|\nabla f|^2(x)\,d\mathfrak{m}(x)\\ &\qquad=\int_{\mathbb{R}_+}|\nabla f|^2(\Psi^{-1}(0,s))h(s)\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\varphi}_{x_1}(t,s)\,dt\,ds\,.\end{aligned}\tag{3.20}$$

由引理 3.25的第 1 项，对于 $h\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $s\in\mathbb{R}_+$，有 $\widetilde{\varphi}(\cdot\ s)\in\mathrm{Lip}_c(\mathbb{R})$。因此 $\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\varphi}_{x_1}(t,s)\,dt=0$。结合（3.20），即得结论。□

推论 3.28。 在与引理 *3.16*相同的假设和记号下，有以下结论：

> ***(1)*** $|\nabla f|^2\in W^{1,2}\,loc(X)\cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(X)$，且 $|\nabla f|^2$具有非负的测度值拉普拉斯算子。***(2)*** $|\nabla f|^2$ 存在一个连续代表，该代表在 H 的作用下不变，并沿射线 $r:(0,\infty)\to X$递增。等价地，由 $|\nabla f|^2$ 在商空间 X/H上典范诱导的函数是递增的。***(3)*** 由 $|\nabla f|^2$ 在商空间 $X/H\cong\mathbb{R}_+$ 上诱导的函数属于 $W^{1,2}\,loc((0,+\infty))\cap W^{1,2}\,loc(\mathbb{R}_+,h d\mathscr{L}^1)$，其中 $(\mathbb{R}_+,d_{\mathrm{eucl}},h d\mathscr{L}^1)$ 是 X/H上的商空间 $RCD(0,N)$ 结构（见注 *3.10*）。***(4)*** $|\nabla f|^2$ 的连续代表在 $X\setminus(\mathbb{R}\cdot r(0))$ 上严格为正。

证明。 **证明 1：** 由引理 3.17，$|\nabla f|^2\in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(X)$。由引理 3.27和 [80, 引理 3.2]，$|\nabla f|^2\in \mathrm{W}^{1,2}{}_{\mathrm{loc}}(X)\cap \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(X)$，且其测度值拉普拉斯算子非负。

证明 2 和 3： 我们首先同时证明命题 3 成立，并且 $|\nabla f|^2$ 在 $X\setminus(\mathbb{R}\cdot r(0))$中有一个连续代表。正如我们已经注意到的，由于 f 关于 $\mathbb{R}$作用的 $a\in\mathbb{R}$ 等变性，对于每个

$$|\nabla f|^2(x)=|\nabla f|^2(a\cdot x)\quad\text{for }\mathfrak{m}\text{-a.e. }x\in X\,.\tag{3.21}$$

固定 $R>0$，令 $\varphi\in\mathrm{Lip}(X)$ 为一个截断函数，使得对于 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}<R\}$ 上的每个 $x\in X$ 以及每个 $a\in\mathbb{R}$, $\varphi\equiv 1$，有 $\varphi(a\cdot x)=\varphi(x)$，并且在$\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}>R+1\}$ 上有 $\varphi\equiv 0$。这样的函数可以构造为形如 $k\circ\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)}$ 的复合函数，其中 $k\in\mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}_+)$。由于 $R>0$ 是任意的，只需证明

具有一个连续代表。对于每个 $t>0$，令$f_t:=P_t(\varphi|\nabla f|^2)\in \mathsf{Lip}(X)$。给定任意 $a\in\mathbb{R}$，由（3.21），截断函数 φ 和热流 f_t 在 $H\cong\mathbb{R}$-作用下同样保持不变。此外，对于每个开集 $A\subset\subset X$，有

$$\lim_{t\to 0}\mathsf{Ch}(f_t,A)=\mathsf{Ch}(\varphi|\nabla f|^2,A)<+\infty\,. \tag{3.22}$$

现在考虑商空间 $X/\mathbb{Z}$ 及其自然的 $\mathrm{RCD}(0,N)$ 结构，并注意到，由于不变性，函数 f_t 自然诱导出函数$f_t^{\mathbb{Z}}$: $X/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$。由（3.22），对每个 $A\subset\subset X/\mathbb{Z}$，都有

$$\limsup_{t\to 0}\mathsf{Ch}(f_t^{\mathbb{Z}},A)<+\infty\,. \tag{3.23}$$

现在考虑空间 $X/\mathbb{R}\cong\mathbb{R}_+$，它是将 $X/\mathbb{Z}$ 按 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$取商得到的，并赋予其 $\mathrm{RCD}(0,N)$ 结构 （$\mathbb{R}_+$，$\mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}$，$\widetilde{\mathfrak{m}}$）。考虑函数 $f_t^{\mathbb{R}}$: $X/\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它们由 $f_t^{\mathbb{Z}}$ 在 $X/\mathbb{R}$ 上自然诱导得到。根据 [42,推论 5.5]和（3.23），对每个 $A\subset\subset X/\mathbb{R}$，都有

$$\limsup_{t\to 0}\mathsf{Ch}(f_t^{\mathbb{R}},A)<+\infty\,.$$

因此，函数 $f_t^{\mathbb{R}}$在 $\mathsf{L}^2_{\mathrm{loc}}$ 中收敛于空间（$\mathbb{R}_+$，$\mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}$，$\widetilde{\mathfrak{m}}$）上的极限函数 $f_0^{\mathbb{R}}\in \mathsf{W}^{1,2}\mathsf{loc}$（$\mathbb{R}_+$，$\widetilde{\mathfrak{m}}$）。根据 [21, 定理 A.2]，$\widetilde{\mathfrak{m}}=h\,d\mathscr{L}^1$，其中$h^{1/(N-1)}$: （0，$+\infty$）$\to$（0，$+\infty$）是一个正凹函数。因此，对于每个 $\varepsilon>0$，函数 $f_t^{\mathbb{R}}$在（（ε，ε^{-1}），$\mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}$，$\mathscr{L}^1$）中具有一致有界的 Cheeger能量，其中现在使用的是标准欧几里得结构。于是，函数 $f_t^{\mathbb{R}}$也在 $\mathsf{L}^2_{\mathrm{loc}}$ 中收敛于（（0，$+\infty$），$\mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}$，$\mathscr{L}^1$）上的 $f_0^{\mathbb{R}}$。因此，相对于标准欧几里得结构，$f_0^{\mathbb{R}}\in\mathsf{W}^{1,2}\mathsf{loc}$（0，$+\infty$）。特别地，$f_0^{\mathbb{R}}$在（0，$+\infty$）中是连续的。同时，$f_0^{\mathbb{R}}$在 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}>0\}\subset X\to\mathbb{R}$ 上诱导出一个连续逐点定义函数 F，它是 f_t 在 X中的 $\mathsf{L}^2_{\mathrm{loc}}$ 极限。由此可知，F 是 $\varphi|\nabla f|^2$ 在 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}>0\}$中的连续代表。这证明了第 3 项，并表明$|\nabla f|^2$ 在 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}>0\}\subset X$ 中具有连续代表，正如我们所声称的。

我们现在断言，当 $\eta>0$ 足够小时，$f_0^{\mathbb{R}}$在区间 (0，η) 上单调。由于 $\Delta(\varphi|\nabla f|^2)\geq 0$ 属于 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}<R\}$，根据强最大值原理 [45, 定理 2，8]，函数 $f_0^{\mathbb{R}}$在每个局部极大值 (0，R) 的邻域内都是常数。因此，如果 $f_0^{\mathbb{R}}$在 (0，η) 上不单调，则存在一个三元组

$$0<a<b<c<\eta\,,$$

使得

$$f_0^{\mathbb{R}}(b)<\min\{f_0^{\mathbb{R}}(a),f_0^{\mathbb{R}}(c)\}.$$

因此，如果 $f_0^{\mathbb{R}}$在任何 (0，η) 上都不单调，则存在两个三元组

$$0<a<b<c<a'<b'<c'<R\,,$$

使得

$$f_0^{\mathbb{R}}(b)<\min\{f_0^{\mathbb{R}}(a),f_0^{\mathbb{R}}(c)\},\quad f_0^{\mathbb{R}}(b')<\min\{f_0^{\mathbb{R}}(a'),f_0^{\mathbb{R}}(c')\}\,.$$

由此可知， $f_0^{\mathbb{R}}{}_{|[b,b']}$ 在全局最大值点 $m \in (b,\ b')$ 处取值。因此，再由强最大值原理可知， $f_0^{\mathbb{R}}$ 在 $[b,b']$ 上必为常数，这就产生了矛盾。这说明存在 $\eta > 0$，使得 $f_0^{\mathbb{R}}$ 在 $(0,\ \eta)$ 上单调。由于 $\varphi|\nabla f|^2$ 本质有界， $f_0^{\mathbb{R}}$ 有界。因此， $f_0^{\mathbb{R}}$ 可延拓为 $[0,R)$ 上的连续单调函数。于是， $\varphi|\nabla f|^2$ 在 X 上有一个连续代表。再次利用 $\Delta(\varphi|\nabla f|^2) \geq 0$ 在 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)} < R\} \subset X$ 上这一事实，可知 $f_0^{\mathbb{R}}$ 在 $[0,R)$ 上递增。由于按照构造， $f_0^{\mathbb{R}}$ 是由 $\varphi|\nabla f|^2$ 的连续代表在 $X/\mathbb{R}$ 上诱导的函数， $|\nabla f|^2$ 在商空间 $X/\mathbb{R}$ 上递增，或者等价地说，在 r 上递增。

证明 4： 如果 $|\nabla f|^2$ 在 $r\ (s)$ 对某个 $s > 0$ 上为零，那么根据不变性和单调性，它将在整个 $\{\mathsf{d}^{\mathbb{R}\cdot r(0)} < s\}$ 上为零。如果确实如此，那么 f 必须在 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)} < s\}$ 上为常数，这就产生了矛盾。 □

粗略地说，我们在引理 3.25 中证明了，(X,d) 中的梯度可以像在具有形如 $dr^2 + |\nabla f(r)|^{-2}dx^2$ 的扭曲乘积度量的流形上一样进行计算。根据引理 3.19，(X,d) 上的测度 $\mathfrak{m}$ 具有类似的扭曲乘积结构。由推论 3.28 可知，扭曲函数具有相当程度的正则性。在现阶段，对 $(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 与一个测度扭曲积之间的等距变换群识别进行严格论证仍然颇为技术性，但下面的证明遵循了一种如今已广为确立的策略，该策略本质上是在 [43] 中针对 RCD$(0,N)$ 空间的分裂定理的证明中首次引入的。

引理 3.29。 在与引理 *3.16* 相同的假设和记号下，限制

$$\Psi^{-1}_{|\mathbb{R}\times(0,+\infty)} : (\mathbb{R}\times(0,+\infty), \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}) \to (\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)} > 0\}, \mathsf{d}) \subset (X,\mathsf{d})$$

是局部利普希茨的。

证明。 记 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$ 为引理 3.16 在通常识别下引入的映射 $H \cong \mathbb{R}$。回忆一下 $\Psi^{-1}(a,\ b) = a \cdot r(b)$。令 $K \subset\subset \mathbb{R}\times(0,\ +\infty)$ 为开集。我们声称存在 $C > 1$ 使得

$$|f(a\cdot y) - f(y)| = |a| \geq C\mathsf{d}(y, a\cdot y) \quad \text{for every } y, a\cdot y \in \Psi^{-1}(K)\,. \tag{3.24}$$

若该结论成立，给定配对 $(a,\ b)$、$(\widetilde{a},\ b) \in K$，我们可推出

$$\begin{aligned}\mathsf{d}(\Psi^{-1}(a,b), \Psi^{-1}(\widetilde{a},\widetilde{b})) &\leq |b-\widetilde{b}| + \mathsf{d}(a\cdot r(b), [(\widetilde{a}-a)+a]\cdot r(b)) \\ &\leq |b-\widetilde{b}| + C^{-1}|a-\widetilde{a}| \leq \sqrt{2}C^{-1}\mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}((a,b),(\widetilde{a},\widetilde{b}))\,,\end{aligned}$$

这就得到了该结论。要完成证明，还需证明 (3.24)。 根据推论 3.28 的第 4 项，存在 $0 < C < 1$ 使得 $|\nabla f| \geq C$ 在 $\Psi^{-1}(K)$ 上成立。令 $y \in \Psi^{-1}(K)$，并令 $a > 0$ 满足 $a\cdot y \in \Psi^{-1}(K)$。令 $y_i \to y$ 为 f 在 $\Psi^{-1}(K)$ 中的可微点。由于 $|\nabla f| \geq \widetilde{C} > 0$ 在 $\Psi^{-1}(K)$ 上成立，根据引理 3.24，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们都有

$$\frac{a/j}{\mathsf{d}(a/j\cdot y_i, y_i)} = \frac{f(a/j\cdot y_i) - f(y_i)}{\mathsf{d}(a/j\cdot y_i, y_i)} \geq \widetilde{C}/2 \quad \text{for every } j \in \mathbb{N} \text{ large enough.}$$

因此

$$\begin{aligned} a =& j(a/j) \geq \frac{\widetilde{C}}{2}\Big(\mathsf{d}(y_i, a/j \cdot y_i) + \cdots + \mathsf{d}\big([(j-1)a/j] \cdot y_i, a \cdot y_i\big)\Big) \\ \geq& \frac{\widetilde{C}}{2}\mathsf{d}(y_i, a \cdot y_i)\,. \end{aligned}$$

令 $y_i \to y$趋于极限，我们得到（3.24），其中 $a > 0$。情形 $a < 0$类似。□

注 3.30。 [76, 32]中讨论的例子表明，一般而言，映射 $\Psi : (X,\mathsf{d}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 未必是全局双 Lipschitz 的。

由 $|\nabla f|$ 关于 $H \cong \mathbb{R}$-作用的不变性，我们可以将其视为 $X/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_+$ 上的一个函数。从现在起，我们将默认作此识别。在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 上，我们考虑由 $g(x_1, x_2) := |\nabla f|^{-2}(x_2)\ dx_1^2 + dx_2^2$ 给出的 C^0 黎曼度量（取扩展值）。由于 $|\nabla f|$ 的连续代表根据推论 3.28 在 $(0, +\infty)$ 上严格为正，因此 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 中任意两点都可以由一条相对于 g 长度有限的曲线连接。回忆一下，绝对连续曲线 $\gamma \in AC([0,1], \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ 相对于 g 的长度定义为

$$\mathrm{length}_g(\gamma) := \int_0^1 g(\gamma', \gamma')^{1/2}\, dt\,.$$

因此，通过设定，度量 g 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 上诱导出实值距离 d_g

$$\mathsf{d}_g(a,b) := \inf\left\{\mathrm{length}_g(\gamma) : \gamma \in AC([0,1], \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \text{ and } \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\right\}.$$

接下来的两个引理建立了关于 (X,d) 和 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathsf{d}_g)$ 的 Sobolev 到 Lipschitz 性质的一些技术性变体，这些变体将在之后用于完成命题 3.7的证明。

引理 3.31。 考虑 C^0 黎曼度量（取扩展值）$g(x_1, x_2) := |\nabla f|^{-2}(x_2)\ dx_1^2 + dx_2^2$ 以及其在$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$上诱导出的实值距离 d_g。若 $\varphi \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times (0, +\infty), \mathsf{d}_g)$ 在 $\mathscr{L}^2$-几乎处处满足 $\mathrm{lip}(\varphi) \leq 1$，则$\varphi$ 存在一个到 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathsf{d}_g)$上的 1-*Lipschitz* 延拓。

证明。设 $a, b \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$。我们需要证明 $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \mathsf{d}_g(a,b)$。不失一般性，假设 $a, b \in \mathbb{R} \times (1, +\infty)$。由推论 3.28 中得到的 $|\nabla f|^2$ 的单调性，集合 $\mathbb{R} \times (1, +\infty)$ 在 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathsf{d}_g)$ 中是测地凸的。因此，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一条光滑曲线 $\gamma_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R} \times (1, +\infty)$，使得 $\mathsf{d}_g(a,b) \geq \mathrm{length}(\gamma_\varepsilon) - \varepsilon$。通过扰动 γ_ε，可以构造一条曲线 $\widetilde{\gamma}_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R} \times (0, +\infty)$，使得 $\mathsf{d}_g(a,b) \geq \mathrm{length}(\widetilde{\gamma}_\varepsilon) - 2\varepsilon$，并且对 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,1]$，$\mathrm{lip}(\varphi)(\widetilde{\gamma}_\varepsilon(t)) \leq 1$。因此

$$\begin{aligned} |\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \int_0^1 (\varphi \circ \widetilde{\gamma}_\varepsilon)'\, dt \leq \int_0^1 g(\widetilde{\gamma}_\varepsilon', \widetilde{\gamma}_\varepsilon')^{1/2}\, dt \\ = \mathrm{length}(\widetilde{\gamma}_\varepsilon) \leq \mathsf{d}_g(a,b) + 2\varepsilon\,, \end{aligned}$$

其中对于第二个不等式，我们用到了 [71, 命题 4。22] 这保证了

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathsf{d}_g(\widetilde{\gamma}_\varepsilon(t+s),\widetilde{\gamma}_\varepsilon(s))}{s}=g(\widetilde{\gamma}_\varepsilon'(s),\widetilde{\gamma}_\varepsilon'(s))^{1/2}\quad \text{for } \mathscr{L}^1\text{-a.e. } s\in(0,1)\,.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，结论成立。 □

引理 3.32。 在与引理 *3.15* 相同的假设和记号下，令 $\varphi\in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X\setminus\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}=0\})\cap C(X)$ 满足 $|\nabla\varphi|\le 1$ 在 $\mathfrak{m}$- 几乎处处成立。则， φ 是 1- 利普希茨的。

证明。 我们的第一个断言是，$\mathrm{lip}(\varphi)\le 1$ 在 $X\setminus\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}=0\}$ 上处处成立。为此，固定 $x\in X\setminus\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}=0\}$，并令 $\eta\in \mathrm{Lip}_c(X\setminus\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}=0\})$ 是一个在 x 的某个邻域上恒等于 1 的函数。根据 [2,定理 6.2], 中的 Bakry-Émery 收缩估计

$$\mathrm{lip}(P_t(\eta\varphi))\le P_t(\mathrm{lip}(\eta\varphi))\quad \text{pointwise}\,.$$

在 x 的一个充分小的邻域上，由 RCD(K,N) 空间上热流的众所周知的性质，当 $t\to 0$ 时， $P_t(\mathrm{lip}(\eta\varphi))\le 1+o(1)$ 和 $P_t(\eta\varphi)$ 一致地收敛到 φ 。因此，可能需要考虑 x 的一个更小邻域， φ 是一列 $(1+o(1))$-利普希茨函数的一致极限。断言得证。

设 a， $b\in X$ 并设 $\gamma\subset X$ 是连接它们的任意一条测地线。由引理3.22，要么 γ 在 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}=0\}$中至多有两个点，要么完全包含于 $\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}=0\}$中。在前一种情况下， $\varphi\circ\gamma$ 绝对连续，并且

$$|\varphi(a)-\varphi(b)|\le\int_0^{\mathrm{length}(\gamma)}(\varphi\circ\gamma)'(t)\,dt\le\mathrm{length}(\gamma)\le\mathsf{d}(a,b)\,.$$

因此，假设 $\gamma\subset\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}=0\}$。固定 $\varepsilon>0$。令 x' 为 γ的中点。令 x'' 为从 x' 出发的射线上距离 x' 为 ε 的点，其中该射线实现了到$\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}=0\}$的距离。令 γ_a 和 γ_b 分别为从 a到 x''以及从 x'' 到 b的测地线。这两条测地线各自在$\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}=0\}$中至多有两个点，且它们的长度至多为 $\mathsf{d}(a,b)/2+\varepsilon$。令 η为连接这两条测地线所得的曲线（以弧长为参数），并注意到

$$|\varphi(a)-\varphi(b)|\le\int_0^{\mathrm{length}(\eta)}(\varphi\circ\eta)'(t)\,dt\le\mathrm{length}(\eta)\le\mathsf{d}(a,b)+2\varepsilon\,.$$

结论由 ε的任意性得出。 □

现在我们可以完成测度扭曲乘积结构的证明。

命题的证明 *3.7*。 由引理 3.14 可知，只需证明以下陈述：

设 $(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 RCD$(0,N)$ 空间，使得 Iso(X) 包含一个与 $\mathbb{R}$and $X/H\cong\mathbb{R}_+$ 同构的闭子群 $H<\mathrm{Iso}(X)$。设 $\Psi\colon X\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$,$f\colon X\to\mathbb{R}$ and $r\colon[0,+\infty)\to X$ 如引理 3.16 所述，在通常的

识别 $H \cong \mathbb{R}$。在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 上，考虑由 C^0 给出的黎曼度量（取扩展值） $g(x_1,x_2)$:$=|\nabla f|^{-2}(x_2)\,dx_1^2+dx_2^2$ 以及由此诱导的实值距离 d_g，并令 h为引理3.19中的密度。那么

$$\Psi:(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathsf{d}_g,h(x_2)dx_1dx_2)$$

是一个保测等距。

Ψ 是保测的这一事实可直接由引理 3.19 得出。在证明的剩余部分，我们证明它是一个等距映射。记 ∇_g 为关于 g的梯度，记 $|\cdot|_g$ 为向量关于g的范数。令 $\varphi\in\mathrm{Lip}(X)$满足 $\mathrm{L}(\varphi)\le 1$，并定义 $\widetilde{\varphi}:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to X$ 为$\widetilde{\varphi}:=\varphi\circ\Psi^{-1}$。我们断言，$\widetilde{\varphi}$ 关于 d_g是 1-利普希茨的。由引理 3.29 和推论 3.28，$\widetilde{\varphi}\in\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times(0,+\infty),\mathsf{d}_g)$。由引理 3.25，再结合由推论 3.28 可知 $|\nabla f|^2\neq 0$ 在 $\mathfrak{m}$-几乎处处的 $x\in X$ 这一事实，

$$\begin{aligned}|\nabla_g\widetilde{\varphi}|_g^2(\Psi(x))=&\widetilde{\varphi}_{x_2}^2(f(x),\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))+\widetilde{\varphi}_{x_1}^2(f(x),\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}(x))|\nabla f|^2(x)\\ =&|\nabla\varphi|^2(x)\quad\text{for }\mathfrak{m}\text{-a.e. }x\in X\,.\end{aligned}\tag{3.25}$$

根据命题 4.25], $\mathrm{lip}_g(\widetilde{\varphi})$，[71, 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 的几乎处处的 $\mathscr{L}^2$ 点上满足 $=|\nabla_g\widetilde{\varphi}|_g$，其中 $\mathrm{lip}_g(\widetilde{\varphi})$ 表示 $\widetilde{\varphi}$ 关于 d_g 的局部利普希茨常数。由推论 3.20 和 (3.25)，可推得 $\mathrm{lip}_g(\widetilde{\varphi})$ 在 $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ 的几乎处处的 $\mathscr{L}^2$ 点上满足 ≤ 1。因此，根据引理 3.31，$\widetilde{\varphi}$ 在 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathsf{d}_g)$ 中是 1-利普希茨的。

任取 $x\in X$，并定义 $\mathsf{d}_x:\ X\to\mathbb{R}$ 为 $\mathsf{d}_x(y):=\mathsf{d}(x,\ y)$。根据证明的前一部分，函数 $\mathsf{d}_x\circ\Psi^{-1}$ 在 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\ \mathsf{d}_g)$ 中是 1-利普希茨的。因此

$$\mathsf{d}(x,y)=|\mathsf{d}_x\circ\Psi^{-1}(\Psi(x))-\mathsf{d}_x\circ\Psi^{-1}(\Psi(y))|\le\mathsf{d}_g(\Psi(x),\Psi(y))\,.\tag{3.26}$$

设 $\widetilde{\varphi}\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathsf{d}_g)$ 是一个 1-利普希茨函数，并定义 $\varphi:\ X\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 为 $\varphi:=\widetilde{\varphi}\circ\Psi$。我们断言 φ 是 1-利普希茨的。由引理 3.17，$\varphi\in\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X\setminus\{\mathsf{d}_{\mathbb{R}\cdot r(0)}=0\})$。如前所述，我们可推得 $|\nabla\varphi|\le 1$ 在 X 的几乎处处的 $\mathfrak{m}$ 点上成立。因此，根据引理 3.32，φ 在 X 上是 1-利普希茨的。任取一点 $a\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，并定义 $\mathsf{d}_{g,a}:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 为 $\mathsf{d}_{g,a}(b):=\mathsf{d}_g(a,b)$。根据前述讨论，$\mathsf{d}_{g,a}\circ\Psi$ 在 X 上是 1- 利普希茨的。因此，

$$\mathsf{d}_g(a,b)=|\mathsf{d}_{g,a}\circ\Psi(\Psi^{-1}(a))-\mathsf{d}_{g,a}\circ\Psi(\Psi^{-1}(b))|\le\mathsf{d}(\Psi^{-1}(a),\Psi^{-1}(b))\,.\tag{3.27}$$

(3.26) 与 (3.27) 的结合表明 Ψ 是一个等距映射，从而完成了证明。□

3.1.2. 定理 *3.5*的证明，基步：分裂。定理 3.33对应于定理 $k=1$ 3.5中的基例。证明它是本节的目标。

定理 3.33。设$(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$是一个$\mathrm{RCD}(0,N)$空间，使得$\mathrm{Iso}(X)$包含一个闭子群 $H<\mathrm{Iso}(X)$，该闭子群与 $\mathbb{R}$ 同构，且$\dim(X)\le 2$，并且

$$\int_1^{+\infty}\frac{t^2}{\mathfrak{m}(B_t(p))}\,dt=+\infty\,.\tag{3.28}$$

那么，对于某个$\mathrm{RCD}(0,N-1)$空间$(Y,\mathsf{d}_Y,\mathfrak{m}_Y)$，有 $X\cong Y\times\mathbb{R}$ （作为度量测度空间）。

定理 3.33 的证明依赖于命题3.7中得到的测度扭曲乘积刚性，以及在正则性足够好的加权黎曼度量下，加权里奇曲率的合成下界与分布下界之间的等价性（下文的定理 3.34 ）。

给定 $\mathbb{R}^n$ 上的黎曼度量 g，使得 $g_{ij}\in \mathsf{W}^{1,2}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\cap C(\mathbb{R}^n)$，可以计算分布意义下的克里斯托费尔符号，其定义为

$$\Gamma_{ij}^k:=\frac{1}{2}\,g^{k\ell}\left(\partial_i g_{j\ell}+\partial_j g_{i\ell}-\partial_\ell g_{ij}\right). \tag{3.29}$$

由于 g 的正则性，克里斯托费尔符号属于 $\mathsf{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。因此，可以将分布意义下的里奇曲率定义为

$$(\mathrm{Ric}_g)_{ij}:=\partial_k\Gamma_{ij}^k-\partial_j\Gamma_{ik}^k+\Gamma_{ij}^k\Gamma_{k\ell}^\ell-\Gamma_{i\ell}^k\Gamma_{jk}^\ell. \tag{3.30}$$

给定函数 $V\in \mathsf{W}^{1,2}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\cap C(\mathbb{R}^n)$，其分布意义下的黑塞矩阵定义为

$$(\mathrm{Hess}_g(V))_{ij}:=\partial^2_{i,j}V-\Gamma_{ij}^k\,\partial_k V. \tag{3.31}$$

下一个结果证明见 [71]。

定理 3.34。 设 (M^n,g) 是一个带边界的黎曼流形，其上有 g 这一连续黎曼度量，且克里斯托费尔符号属于 $\mathsf{L}^2_{loc}(M)$。设$V\in C^0(M)\cap \mathsf{W}^{1,2}_{loc}(M)$，并假设$(M,\mathsf{d}_g,e^{-V}d\mathsf{Vol}_g)$是一个$\mathrm{RCD}(0,\infty)$空间。那么，

$$\mathrm{Ric}_M+\mathrm{Hess}_V\geq 0\quad \textit{on } M\setminus\partial M \textit{ in distributional sense.}$$

现在考虑函数 $\varphi\in\mathsf{W}^{1,2}\mathsf{loc}((0,+\infty))\cap C((0,+\infty))$，以及配备扭曲乘积度量 $g(s,t):=ds^2+\varphi^2(s)dt^2$ 的流形 $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$。我们将所得的黎曼流形记为 $(0,+\infty)\times_\varphi\mathbb{R}$。将 (3.29) 特化到这一简化情形，可得

$$\begin{aligned}\Gamma_{t,t}^s&=-\varphi\varphi',\\ \Gamma_{t,s}^t&=\Gamma_{s,t}^t=\frac{\varphi'}{\varphi},\\ \Gamma_{s,s}^s&=\Gamma_{t,t}^t=\Gamma_{s,s}^t=0.\end{aligned}$$

因此，利用（3.30），我们得到

$$(\mathrm{Ric}_{(0,+\infty)\times_\varphi\mathbb{R}})_{t,t}:=-(\varphi\varphi')'+(\varphi')^2. \tag{3.32}$$

同样，利用（3.31），我们推出

$$(\mathrm{Hess}_{(0,+\infty)\times_\varphi\mathbb{R}}(V))_{t,t}:=\varphi\varphi' V'. \tag{3.33}$$

定理 *3.33* 的证明。由命题 3.7，我们可以假设$(X,$度量 $\mathfrak{m})$与一个测度扭曲积等变同构 $\mathbb{R}_+ \times_\varphi \mathbb{R}$，其度量和测度分别为

$$g(r,x) := \mathrm{d}r^2 + \varphi(r)^2\,\mathrm{d}x^2\,, \qquad \mathfrak{m} := h(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x\,, \tag{3.34}$$

对某个递增函数 $h \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}((0,+\infty)) \cap \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$，以及某个连续且严格为正的函数 $\varphi\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$，其中$\mathbb{R}$作用在 x 分量上是平移，且 d 是由 g诱导的长度距离。在此识别下，引理 3.16 中引入的等变函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$有如下明确表达式： $f(r,x) = x$，并且通过直接计算可得 $\varphi = |\nabla f|^{-1}$。

关于2维豪斯多夫测度（相对于 g 在 X 上的测度）可用坐标表示为 $\varphi(r)drdx$。根据（3.34），存在一个函数 $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，使得 $F\varphi \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathscr{L}^1)$ 并且

$$\mathfrak{m} = F(r)\varphi(r)drdx\,.$$

令 $\mathsf{d}_{g,\,0}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 由 $\mathsf{d}_{g,\,0}(a) := \mathsf{d}_g(a,\ \mathbb{R}\times\{0\})$ 定义。根据 [21, 第 7] 节，考虑由 1-利普希茨函数 $\mathsf{d}_{g,\,0}$诱导的 $\mathfrak{m}$ 测度分解。根据 [21, 主定理 1.1] 和 [21, 定理 A.2]，

$$(F\varphi)^{\frac{1}{N-1}} : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$$

是一个凹函数。由于 $\varphi \in C^0(0,+\infty) \cap \mathrm{W}^{1,2}\,\mathrm{loc}(0,+\infty)$，且根据推论 3.28，它非增且严格为正，因此 $F \in C^0[0,+\infty) \cap \mathrm{W}^{1,2}\,\mathrm{loc}(0,+\infty)$。再次利用 $\varphi \in C^0(0,+\infty) \cap \mathrm{W}^{1,2}\,\mathrm{loc}(0,+\infty)$，我们推得 g 的分布意义下的克里斯托费尔符号属于 $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}((0,+\infty) \times \mathbb{R})$。注意，这一条件与我们选取 $\mathfrak{m}$ 还是 $\mathscr{L}^2$ 作为参考测度无关。证明的其余部分分为三个步骤。在步骤 1 中，我们利用里奇曲率合成下界与分布意义下下界之间的等价性，推得对于每个 $\delta > 0$， φ 在加权半直线 $([\delta,+\infty)$、$\mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}, F\mathscr{L}^1)$ 上是超调和的。在步骤 2 中，我们将增长条件 (3.28) 改写为关于 F 的增长条件。在步骤 3 中，我们结合前两个步骤的结果，证明 φ 是常数。这显然足以完成 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 的分裂证明。

步骤 1： 我们断言，对于每个 $\delta > 0$，以及每个非负函数$\psi \in \mathrm{Lip}_c([\delta,+\infty)]$，都有

$$\int_{[\delta,+\infty)} \varphi'\psi'\,F d\mathscr{L}^1 \geq 0\,. \tag{3.35}$$

注意，由推论3.28可知，(3.35) 中的积分定义良好且有限。设 $V := -\log(F)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$。根据定理 3.34，由于 $(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个$\mathrm{RCD}(0,N)$ 空间，因此特别地，它也是一个 $\mathrm{RCD}(0,\infty)$ 空间，我们有

$$\mathrm{Ric}_{\mathbb{R}_+\times_\varphi\mathbb{R}} + \mathrm{Hess}_{\mathbb{R}_+\times_\varphi\mathbb{R}}(V) \geq 0 \quad \text{distributionally on } (0,+\infty)\times\mathbb{R}\,.$$

利用 (3.32) 和 (3.33)，我们得到

$$-(\varphi\varphi')' + (\varphi')^2 + \varphi\varphi' V' \geq 0 \quad \text{in distributional sense in } (\delta, +\infty)\,. \tag{3.36}$$

经过直接计算，(3.36) 等价于

$$\varphi'' - \varphi' V' \leq 0 \quad \text{in distributional sense on } (\delta, +\infty)\,,$$

而这又等价于

$$\int_\delta^{+\infty} \varphi'\psi'\, F d\mathscr{L}^1 \geq 0 \quad \text{for every non-negative } \psi \in \mathrm{Lip}_c((\delta, +\infty))\,. \tag{3.37}$$

我们继续证明，对于任意非负函数 $\psi \in \mathrm{Lip}c([\delta, +\infty))$， $\varepsilon > 0$的每一个取值，考虑函数 η_ε，使得 $(1 - \eta_\varepsilon) \in \mathrm{Lip}c([\delta, +\infty))$定义如下：

$$\eta_\varepsilon(t) := 1 \wedge (1 - \varepsilon^{-1}(t - \delta - \varepsilon)) \vee 0\,.$$

利用莱布尼茨法则计算第二个等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{[\delta,+\infty)} \varphi'\psi'\, F d\mathscr{L}^1 \\
&= \int_{[\delta,+\infty)} \varphi'(\psi\eta_\varepsilon)'\, F d\mathscr{L}^1 + \int_{[\delta,+\infty)} \varphi'(\psi(1-\eta_\varepsilon))'\, F d\mathscr{L}^1 \\
&= \int_{[\delta,+\infty)} \varphi'(\psi\eta_\varepsilon' + \eta_\varepsilon\psi')\, F d\mathscr{L}^1 + \int_{[\delta,+\infty)} \varphi'(\psi(1-\eta_\varepsilon))'\, F d\mathscr{L}^1.
\end{aligned}$$

由推论 $\varphi'\eta_\varepsilon' \geq 0$ 属于 $(0, +\infty)$ 可知3.28，在前一个方程中令 $\varepsilon \to 0$ 并取极限，同时结合 (3.37)，可推出 (3.35)。

步骤 2： 令 $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 定义为 $A(r) := \int_0^r F(t)\, dt$. 注意，$A(r)$ 是加权半直线 $([0, +\infty), \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}, F\mathscr{L}^1)$ 中以 0 为中心的 r-球的测度。我们断言

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{A(t)}\, dt = +\infty\,. \tag{3.38}$$

由三角不等式可得

$$B_r^g((0,0)) \supset \Big\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : b \in (0, r/2),\, a \in \Big(-r\frac{\varphi(b)^{-1}}{2}, r\frac{\varphi(b)^{-1}}{2}\Big)\Big\}\,.$$

因此，

$$\mathfrak{m}(B_r^g(0,0)) \geq \int_0^r \int_{-r\frac{\varphi(s)^{-1}}{2}}^{r\frac{\varphi(s)^{-1}}{2}} \varphi(s) F(s)\, dxds = r\int_0^r F(t)\, dt = rA(r)\,.$$

因此，利用（3.28），我们得出

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{A(t)}\, dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{\mathfrak{m}(B_t^g((0,0)))}\, dt = +\infty\,,$$

从而证明了（3.38）。

步骤 3： 我们声称 φ 是常数。正如前面所指出的，这显然足以证明（X，d $\mathfrak{m}$）分裂出一条直线。

由下面的引理 3.35 和步骤 1 可知，对每个 $\delta>0$，我们有

$$\int_\delta^{+\infty}\psi^2\frac{\varphi'^2}{(1+\varphi)^2}\,F dt\le 16\int_\delta^{+\infty}\psi'^2\,F dt\,, \tag{3.39}$$

对于每个非负函数 $\psi\in \mathrm{Lip}_c([\delta,+\infty))$。任取 $R>\delta$。我们断言，φ 在 $[\delta,R]$上为常数。采用步骤 2 中的记号，考虑由下式定义的函数 $\psi_i\in \mathrm{Lip}_c([\delta,+\infty))$

$$\psi_i(t):=\Big(\int_{R\vee t\wedge i}^{i}\frac{s}{A(s)}\,ds\Big)\Big/\Big(\int_R^i\frac{s}{A(s)}\,ds\Big)\,.$$

我们断言

$$\int_\delta^{+\infty}\psi_i'^2\,F dt\to 0\quad\text{as } i\to+\infty\,, \tag{3.40}$$

结合式（3.39），便可推出 φ 在 $[\delta,R]$上为常数。为证明这一断言，我们可以计算

$$\begin{aligned}\int_\delta^{+\infty}\psi_i'^2\,F dt&=\Big(\int_R^i t^2F(t)/A^2(t)\,dt\Big)\Big/\Big(\int_R^i\frac{s}{A(s)}\,ds\Big)^2\\&=\Big(-\frac{i^2}{A(i)}+\frac{R^2}{A(R)}+2\int_R^i\frac{s}{A(s)}\,ds\Big)\Big/\Big(\int_R^i\frac{s}{A(s)}\,ds\Big)^2\,.\end{aligned}$$

根据步骤 2，当 $i\to+\infty$时，前一个等式的右端趋于零，从而证明了式（3.40）。由式（3.39）可知，φ 在 $[\delta,R]$上为常数。由于 δ和 R的任意性，φ在 $(0,+\infty)$上为常数，正如我们所断言的。□

下一个引理可通过调整 Yau 关于 [91] 的结果得到（另见 [61,引理 7.1]）。

引理 3.35. 设 $f,u\in \mathsf{W}^{1,2}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\cap C(\mathbb{R}^n)$ 为正函数，满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,f d\mathscr{L}^n\ge 0\quad \textit{for every non-negative } \varphi\in \mathsf{W}^{1,2}(\mathbb{R}^n)\cap C_c(\mathbb{R}^n)\,.$$

那么，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^2\frac{|\nabla u|^2}{(1+u)^2}\,f d\mathscr{L}^n\le 16\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi|^2\,f d\mathscr{L}^n\,,$$

对于每个非负的 $\varphi\in \mathsf{W}^{1,2}(\mathbb{R}^n)\cap C_c(\mathbb{R}^n)$。

证明。我们将 $v\in \mathsf{W}^{1,2}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\cap C(\mathbb{R}^n)$ 定义为 $v:=(1+u)^{-1}$。利用链式法则和莱布尼茨法则，对每个 $\varphi\in \mathsf{W}^{1,2}(\mathbb{R}^n)\cap C_c(\mathbb{R}^n)$，可得

$$0\ge\int_{\mathbb{R}^n}\nabla(\varphi^2v)\cdot\nabla v\,f d\mathscr{L}^n=2\int_{\mathbb{R}^n}\varphi v\nabla\varphi\cdot\nabla v\,f d\mathscr{L}^n+\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^2|\nabla v|^2\,f d\mathscr{L}^n\,,$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 |\nabla v|^2 \, f d\mathscr{L}^n \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi v \nabla \varphi \cdot \nabla v| \, f d\mathscr{L}^n \,. \tag{3.41}$$

应用杨氏不等式，我们得到

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi v \nabla \varphi \cdot \nabla v \, f d\mathscr{L}^n \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 |\nabla v|^2 \, f d\mathscr{L}^n + 8 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 v^2 \, f d\mathscr{L}^n \,,$$

将其与（3.41）结合，得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 |\nabla v|^2 \, f d\mathscr{L}^n \leq 16 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 v^2 \, f d\mathscr{L}^n \,.$$

回顾 v的定义，结论即得。 □

3.1.3. 定理 *3.5*的证明，归纳步骤。 本节的目标是通过证明定理 3.5的归纳步骤，完成归纳证明。接下来的三个引理是完成该归纳步骤所必需的。

引理 3.36. 设$(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个满足以下条件的$\mathrm{RCD}(0, N)$ 空间：

> *(1)* 维数$_{\mathrm{e}}(X) \ \leq k+1$; *(2)* $\int_1^{+\infty}{}_{\mathfrak{m}}\, {}^{t^{k+1}}_{B_t\ p}(()) \, dt = +\infty$ 对于某个 $p \in X$成立；*(3)* 存在一个闭子群 $\mathbb{R}^k \cong H <$ 等距变换群(X)。

设 $H'' \leq H$ 是一个与 $\mathbb{R}$同构的闭子群。考虑商空间 $(X/H'', \mathsf{d}'')$ ，并赋予由注记 $\mathfrak{m}''$ 给出的测度 *3.10*。那么，记 $B''_t(p'')$ 为 $(X/H'', \mathsf{d}'')$ 中以 p'' 为中心的$= H'' \cdot p$球，我们有：

> *(1)* 维数$_{\mathrm{e}}(X/H'') \leq k$. *(2)* $\int_1^{+\infty}{}_{\mathfrak{m}''}\ {}^{t^k}\, (B''_t(p'')) \, dt = +\infty$. *(3)* 等距变换群~~$(X/H'')$~~ 包含一个与 $\mathbb{R}^{k-1}$ 同构的闭子群。

证明。 结论 1 由引理 3.11立即得到。要证明结论 3，只需注意到商空间 $\mathbb{R}^{k-1} \cong H/H''$ 与 等距变换群(X/H'')的一个闭子群同构。因此，我们只需证明结论2，即

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^k}{\mathfrak{m}''(B''_t(p''))} \, dt = +\infty \,. \tag{3.42}$$

令 $H' \leq H''$ 为由 $1 \in H'' \cong \mathbb{R}$ 生成的、与 $\mathbb{Z}$ 同构的子群，并考虑自然的 $\mathsf{RCD}(0,\ N)$ 结构 $(X/H',\ \mathsf{d}',\ \mathfrak{m}')$。我们用 $B'_t(p')$ 表示 $(X/H',\ \mathsf{d}')$ 中以 p' 为中心的球：$= p + H'$。作为中间步骤，我们证明存在 $c > 0$ 使得

$$\mathfrak{m}''(B''_t(p'')) \leq \mathfrak{m}'(B'_{t+c}(p')) \quad \text{for every } t > 0 \,. \tag{3.43}$$

为此，我们注意到，根据 $\mathfrak{m}''$的定义，

$$\mathfrak{m}''(B''_t(p'')) = \mathfrak{m}'\{x \in X/H' : \mathsf{d}'(x + H''/H', p') \leq t\} \,. \tag{3.44}$$

由于 H''/H' 是一个紧群，因此存在 $c>0$，使得 $p'+H''/H' \subset B'_c(p')$。结合式（3.44）、（3.43）可得。接下来的断言是，存在 $c'>0$ 使得

$$t\mathfrak{m}'(B'_{t/2}(p')) \le c'\mathfrak{m}(B_t(p)) \quad \text{for every } t\ge 0 \text{ large enough}. \tag{3.45}$$

注意到，结合（3.45）和（3.43）即可得到（3.42）。为证明这一结论，考虑投影 $\pi\colon X\to X/H'$，并注意到它是一个覆盖映射。令 $F\subset X$ 为引理 A.6给出的、包含 p 的基本区域。根据构造，

$$\mathfrak{m}'(B'_t(p')) \le \mathfrak{m}(B_t(p)\cap F), \quad \forall t>0.$$

不失一般性，假设 $H'\cong\mathbb{Z}$ 的生成元 h 满足 $\mathsf{d}(p,p+h)=1$。由三角不等式，

$$B_t(p) \supset \bigcup_{i=1}^{\lfloor t/2\rfloor} h^i + (B_{t/2}(p)\cap F).$$

由于 $\mathfrak{m}((h^i+F)\cap F)=0$，再次由引理 A.6 可推得

$$\mathfrak{m}(B_t(p)) \ge \lfloor t/2\rfloor \mathfrak{m}'(B'_{t/2}(p')),$$

从而得到（3.45）。 □

下面的引理广为人知，因此略去其初等证明。

引理 3.37。 设 (X,d) 为一个度量空间，且 $H<$ 等距变换群$(X\times\mathbb{R})$ 为一个闭子群。考虑由此得到的商空间 $(X\times\mathbb{R})/H$，并假设它与某个度量空间 (Y,d_Y)等距。令$\pi\colon X\times\mathbb{R}\to Y\times\mathbb{R}$ 为到商空间上的投影，并假设对于某些 $x\in X$、 $y\in Y$ 以及任意 $t\in\mathbb{R}$，有$\pi((t,x))=(t,y)$。那么

$$H < \mathrm{Iso}(X)\times\{\mathrm{Id}\} < \mathrm{Iso}(X\times\mathbb{R}).$$

反复应用引理 3.37 以及 $\mathrm{RCD}(0,N)$空间的分裂定理（见 [43], ），并利用直线可在度量次浸没下提升这一事实，我们得到以下结果：

引理 3.38. 设 $(X,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0,N)$ 空间，且令 $H<\mathrm{Iso}(X)$为一个闭子群。假设 $X/H\cong\mathbb{R}^k\times Y$ 等距地。那么，$X\cong\mathbb{R}^k\times Y'$ 等距地，并且

$$H < \mathrm{Iso}(X')\times\{\mathrm{Id}\} < \mathrm{Iso}(Y'\times\mathbb{R}^k).$$

定理 *3.5* 的证明。 我们采用归纳法。基础步骤对应定理 3.33。对于归纳步骤，我们假设该命题对每个 j 满足 $1\le j\le k-1$的情形都成立，并证明它对 k也成立。设 $H'\cong\mathbb{R}$是 H的一个闭子群，并考虑商空间 $(X/H',\ \mathsf{d}'',\ \mathfrak{m}'')$，它带有诱导的 $\mathrm{RCD}(0,\ N)$ 结构，如备注 3.10所述。由引理 3.36，空间 X/H' 满足定理对 $k-1$的假设。因此，根据归纳假设，$X/H'\cong\mathbb{R}^{k-1}\times Y$作为度量测度空间，对于

某个 $\mathrm{RCD}(0,\ N-k+1)$ 空间 $(Y,\ \mathsf{d}_Y,\ \mathfrak{m}_Y)$。由引理 3.38，我们还可得 $X \cong \mathbb{R}^{k-1} \times Y$，在等距意义下成立，并且

$$H' < \{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{Iso}(Y') < \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{k-1}) \times \mathrm{Iso}(Y')\,.$$

因此，借助基例 $k=1$，Y' 等距地分裂出一条直线。 □

3.1.4. 推论 *3.6*的证明。 根据无穷远处的体积增长率，我们区分两种情形。欧几里得体积增长的情形要容易得多，并且不需要定理 3.5。

引理 3.39。 设 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，具有一个闭子群 $\mathbb{Z}^{n-2} \cong H <$ 等距变换群(X)，并且满足

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\mathscr{H}^n(B_s(p))}{s^n} = v > 0 \quad \textit{for some } p \in X\,. \tag{3.46}$$

那么，要么 $X \cong \mathbb{R}^{n-1} \times Y$ 等距地，要么 X 的吹胀极限 X_∞ 是唯一的，并且等距于 $\mathbb{R}^{n-2} \times Z$，其中对于某个 $Z \in \{C(S^1_r)\ C([0,a])\}$，$r \in (0,1)$，$a \in (0,\pi)$。在后一种情形下，如果 (X_∞, H_∞) 是 (X, H) 的一个等变吹胀极限，那么 $H_\infty <$ 等距变换群$(\mathbb{R}^{n-2}) \times$ 等距变换群(Z)，并且 $\pi_{\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{n-2})}(H_\infty) \cong \mathbb{R}^{n-2}$ 通过平移作用在 $\mathbb{R}^{n-2}$上。

证明。由 (3.46) 以及 [33, 34] 在 [24, 定理 7.6], 之后，每个 X 的吹胀极限 $(X_\infty, \mathsf{d}_\infty, p_\infty)$ 都是以其锥尖 p_∞为中心的 n维度量锥。固定其中一个 X_∞。由引理 2.7，存在一个与 $\mathbb{R}^{n-2}$同构的 $\mathrm{Iso}(X_\infty)$ 的闭子群。通过锥分裂，$X_\infty \cong \mathbb{R}^{n-2} \times C$等距地分裂为 Z，其中 $Z \in \{S^1_r, [0,a]\}$。若 $Z = S^1_1$，则由 [34, 定理 1.6]可得 $X \cong \mathbb{R}^n$。若$Z = [0,\pi]$，则由 [17, 定理 8.1]可得 $X \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$。因此，我们只需考虑以下情形： $Z \in \{C(S^1_r)\ C([0,a])\}$ 且 $r \in (0,1)$ $a \in (0,\pi)$。关于体积收敛，参见 [34, 定理 1.3] 之后的论述， $\mathscr{H}^n(B_1(p_\infty)) = v$。因此，半径 $r \in (0,1)$ 或参数 $a \in (0,\pi)$ 满足 $X_\infty \cong \mathbb{R}^{n-2} \times C(S^1_r)$ 或 $X_\infty \cong \mathbb{R}^{n-2} \times C([0,a])$，并由 X的渐近体积比确定。特别地， X的吹胀极限至多有两种非等距的选择。由引理 2.10， X 的吹胀极限必定唯一。

现在，结论的第二部分可由 [75, 定理 3.2]直接推出。

□

在体积增长为非欧几里得型的情形下，我们首先研究关于 $\mathbb{Z}^{n-2}$-作用的商空间的吹胀极限。

引理 3.40。 设$(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 是一个$\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，具有闭子群$\mathbb{Z}^{n-2} \cong H <$ 等距变换群(X)，并且满足

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\mathscr{H}^n(B_s(p))}{s^n} = 0 \quad \textit{for some } p \in X\,.$$

那么，要么 $X \cong \mathbb{R}^{n-2} \times Z$ 作为度量测度空间成立，要么 X/H 的吹胀极限在带基点等距意义下唯一，且带基点等距于$(\mathbb{R}_+, \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}, 0)$。

证明。令 $Y:=X/H$，并考虑其诱导的 RCD$(0,n)$ 结构（Y, d $\mathfrak{m}$）。根据定理 2.13，不妨设 Y 是非紧的。考虑 Y的任意一个吹胀极限（Y_∞, d_∞, $\mathfrak{m}_\infty$, y_∞）。取一个子序列后，X 的相应重缩放收敛到（X, d $\mathfrak{m}$, H）的一个等变吹胀极限（X_∞, d_∞, $\mathfrak{m}_\infty$, H_∞, x_∞）。根据引理 2.7，H_∞ 包含一个与 $\mathbb{R}^{n-2}$同构的闭子群。根据定理 2.3，$X_\infty/H_\infty \cong Y_\infty$ 等距地。因此，由引理 3.11，$\dim_{\mathrm{e}}(Y_\infty) \le 1$。由于 Y 是非紧的，$\dim_{\mathrm{e}}(Y_\infty) = 1$，且 Y_∞ 是非紧的。因此，根据 [59]中的一维 RCD 空间分类，Y_∞ 等距于 $\mathbb{R}$ 或$\mathbb{R}_+$。

如果 Y的吹胀极限与 $\mathbb{R}$等距，则根据引理 2.14，对于某个紧致 RCD$(0,n-1)$ 空间 Y'，有 $Y \cong \mathbb{R}\times Y'$。根据引理 3.38，$X \cong \mathbb{R}\times X'$$H<\{\mathrm{Id}\}\times \mathrm{Iso}(X')<\mathrm{Iso}(\mathbb{R})\times\mathrm{Iso}(X')$。因此，略微滥用记号，有 $X'/H \cong Y'$。再次根据定理 2.13，X' 分裂出 $n-2$ 个欧几里得因子。

假设 Y 的每个吹胀极限 $(Y_\infty,\ y_\infty)$ 都与 $\mathbb{R}_+$等距。在这种情况下，我们断言 $y_\infty = 0$。否则，通过在 y_∞ 处对 Y_∞ 取吹入极限，并利用吹胀极限的吹入极限仍然是吹胀极限这一事实，我们得到一个与 $\mathbb{R}$等距的 Y 的吹胀极限，从而得到矛盾。□

下面的引理 3.41与引理 3.39结合起来，显然足以证明推论 3.6。

引理 3.41。设$(X$,d $\mathscr{H}^n)$ 是一个$\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，其等距变换群$\mathbb{Z}^{n-2} \cong H <$ Iso$\{X\}$是一个闭子群，并且满足

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\mathscr{H}^n(B_s(p))}{s^n} = 0 \quad \textit{for some } p\in X\,. \tag{3.47}$$

那么，要么 $X \cong \mathbb{R}^{n-2}\times Y$ 等距地成立，要么 X 的吹胀极限 X_∞ 在带基点等距意义下唯一，且与 $\mathbb{R}^{n-2}\times Z$等距，其中 $Z\in\{\mathbb{R},\mathbb{R}_+\}$。此外，若$(X_\infty, H_\infty)$是$(X,H)$的一个等变吹胀极限，则 $H_\infty^2 := \{h^2 :\ h\in H_\infty\}$在 X_∞上自由作用。

证明。令 $Y:=X/H$。根据引理 3.40，不妨设 Y 的吹落序列是唯一的（在带基点等距意义下），且与 $(\mathbb{R}_+, \mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}, 0)$ 带基点等距。令 $(X_\infty, \mathsf{d}_\infty, \mathfrak{m}_\infty, H_\infty, x_\infty)$ 是 $(X,$ d $\mathfrak{m}, H)$ 的一个等变吹胀极限。根据定理 2.3，$X_\infty/H_\infty = \mathbb{R}_+$，其中轨道 $x_\infty\cdot H_\infty$ 对应于 $0\in\mathbb{R}_+$。根据引理 2.7，H_∞ 包含一个与 $\mathbb{R}^{n-2}$ 同构的闭子群。由 (3.47)，$(X_\infty, \mathsf{d}_\infty, \mathfrak{m}_\infty)$ 是一个 RCD$(0,n)$ 空间，且 $\dim_{\mathrm{e}}(X_\infty) \le n-1$。因此，根据定理 3.5，$X_\infty := \mathbb{R}^{n-2}\times Z'$，其中 $\dim_{\mathrm{e}}(Z') \le 1$。由于 $X_\infty/H_\infty \cong \mathbb{R}_+$，由引理 3.11 可推得 $\dim_{\mathrm{e}}(Z') = 1$。如果一个 X 的吹胀极限与 $\mathbb{R}^{n-2}\times K$ 等距，其中 K 是紧致的，那么取另一个吹胀极限即可得到矛盾。因此，X 的所有吹胀极限都与 $\mathbb{R}^{n-2}\times Z$ 等距，且 $Z\in\{\mathbb{R},\mathbb{R}_+\}$。此外，如果 $X_\infty \cong \mathbb{R}^{n-2}\times\mathbb{R}_+$，则 $x_\infty\in\partial X_\infty$。因此，$X$ 的带基点吹胀极限空间至多包含两个元素。根据引理 2.10，该空间是连通的，所以 X 的吹胀极限在带基点等距意义下是唯一的。

为证明该陈述的第二部分，令 G_∞ 表示由引理 2.7 得到的 H_∞ 的一个闭子群，该子群与 $\mathbb{R}^{n-2}$ 同构。注意， H_∞ 是阿贝尔的，因为吹落序列中的所有逼近群都是阿贝尔的。商群 H_∞/G_∞ 在 X_∞/G_∞ 上通过保测等距变换有效作用。根据引理 3.11， X_∞/G_∞ 的本质维数至多为 1，且 $(X_\infty/G_\infty)/(H_\infty/G_\infty) \cong \mathbb{R}_+$。由此可知， X_∞/G_∞ 与 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}_+$ 等距，并且 H_∞/G_∞ 要么由 $\mathbb{R}$ 的一个反射生成，要么是 $\mathbb{R}_+$ 上的恒等映射。在这两种情况下，如果 $h \in H_\infty$，则 $h^2 \in G_\infty$。由于 $G_\infty \cong \mathbb{R}^{n-2}$， h^2 在 X_∞ 上自由作用。□

推论 3.42. 设 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 是一个具有闭子群$\mathbb{Z}^{n-2} \cong H <$ 等距变换群$\{X\}$的$\mathrm{RCD}(0,n)$空间，并假设 X 不分裂出因子 $\mathbb{R}^{n-2}$。那么存在 $k \in \{n-2, n-1\}$，使得 X 的吹胀极限唯一（在带基点等距意义下），且带基点等距于 $(\mathbb{R}^k \times Y, (0,y))$，其中 (Y, d_Y, y)是某个带基点度量空间，并且 $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k \times Y) \cdot (0,y) \subset \mathbb{R}^k \times \{y\}$。

证明. 结合引理3.41和3.39 以及引理2.15即可得到结论。□

3.2. **具有近线性增长的等变调和函数。** 我们继续假设 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，且 $\mathrm{Iso}(X)$ 包含一个闭子群 $H \cong \mathbb{Z}^{n-2}$。本节的首要目标是构造一个 $\mathbb{R}^k$值调和映射 $u\colon X \to \mathbb{R}^k$，其$k \in \{n-2, n-1\}$ 由 X 的吹胀极限分裂出的最大欧几里得因子的维数决定，具体如下：

> i) 关于 $H^2 < H$-作用等变；ii) 在每个足够大的尺度上，经过线性变换后几乎分裂；iii) 在基点的 H^2-轨道上，经过 ii) 中出现的线性修正后满足非退化。

关于 iii) 中非退化条件的确切含义，请读者参阅命题3.45。

下文的命题 3.43 阐述了计划中的前两项。

命题 3.43。 设$(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 是一个$\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，其闭子群 $\mathbb{Z}^{n-2} \cong H <$ 等距变换群$\{X\}$。设 $H^2 := \{h^2 :\ h \in H\}$。那么存在$k \in \{n-2, n-1, n\}$，以及一个调和映射 $u\colon X \to \mathbb{R}^k$，满足以下条件：

> *(1)* 对每个 $\gamma \in H$，都有 $u \circ \gamma^2(\cdot) = u(\cdot) + u(\gamma^2 \cdot p)$，且由 $\varphi(\gamma^2) := u(\gamma^2 \cdot p)$ 给出的映射$\varphi\colon H^2 \to \mathbb{R}^k$ 是单射群同态。*(2)* 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $R_\varepsilon > 0$，使得对每个 $R > R_\varepsilon$，都存在一个正定下三角矩阵 $T_R \in \mathbb{R}^{k\times k}$，使得$T_R u : B_R(p) \to \mathbb{R}^k$ 是一个 ε-分裂映射。

证明。 当 $X \cong \mathbb{R}^{n-2} \times Z$时，该陈述显然成立。因此，不失一般性地假设情况并非如此。根据引理3.39 和 3.41，

的吹胀极限 X_∞ （关于） X 是唯一的（在等距映射意义下），并且与 $\mathbb{R}^k \times Y$等距，其中 $k \geq n-2$ 为某个不含直线分裂的度量空间 (Y,d_Y)。根据定理 2.16，存在一个调和映射 $u=(u_1,\cdots\ u_k)$: $X \to \mathbb{R}^k$，其在 $p \in X$ 中消失，使得:

(1) $\{u_1,\cdots,u_k\}$ is a basis for
$\Big\{v \in \mathbf{W}^{1,2}{}_{\mathrm{loc}}(X)$: $\Delta v=0$，且对每个 $\varepsilon>0$，都存在 R_ε， $C_\varepsilon>0$:

$$v(x) \leq C_\varepsilon \mathsf{d}(x,p)^{1+\varepsilon}+C_\varepsilon \text{ for every } x \in X\Big\}.$$

(2) 对每个 $\varepsilon>0$，都存在 $R_\varepsilon>0$，使得对每个 $R>R_\varepsilon$，都存在正定下三角矩阵 $T_R \in \mathbb{R}^{k\times k}$，使得$T_R u$： $B_R(p) \to \mathbb{R}^k$ 是一个 ε-分裂映射。

设 $\gamma \in H$。我们断言 $u\circ\ \gamma^2(\cdot)=u(\cdot)+u(\gamma^2\cdot p)$。为此，注意沿着任意一个收敛到$(X,H)$的等变吹胀极限$(X_\infty,H_\infty,p_\infty)$的重标度序列， γ依引理 2.2 收敛到一个极限元素 $\gamma_\infty \in H_\infty$，且 γ^2 收敛到 γ_∞^2。由于 γ_∞ 固定 p_∞，由引理3.39和3.41，可得$\pi_{\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)}(\gamma_\infty^2)=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$。

考虑一个序列 $\varepsilon_i \downarrow 0$以及相应的 $R_i \uparrow +\infty$ 和 $T_i \in \mathbb{R}^{k\times k}$，使得 $T_i u$： $B_{R_i}(p) \to \mathbb{R}^k$ 是对每个 ε_i而言的一个 $i \in \mathbb{N}$-分裂映射。由1，存在矩阵 $A_i \in \mathbb{R}^{k\times k}$，使得

$$\frac{T_i u\circ\gamma^2(\cdot)}{R_i}=\frac{A_i T_i u(\cdot)+T_i u(\gamma^2\cdot p)}{R_i}. \tag{3.48}$$

要完成该断言的证明，只需证明对每个$i \in \mathbb{N}$， $A_i=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$。

由于映射序列 $T_i u/R_i$ 在吹胀极限下收敛到 $\pi_{\mathbb{R}^k}$，且γ^2 收敛到一个元素 γ_∞^2，使得$\pi_{\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)}(\gamma_\infty^2)=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$，在（3.48）中取极限可得 $A_i \to \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$。注意，由（3.48）可知，矩阵 A_i 彼此相似。因此，它们的所有（复）特征值均为1。要完成证明，只需证明所有矩阵 A_i 均可对角化。为此，取 $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$ 使得

$$u\circ\gamma^2(\cdot)=Bu(\cdot)+u(\gamma^2\cdot p). \tag{3.49}$$

矩阵 B 很容易看出与矩阵 A_i相似，因此只需证明 B 可对角化。对（3.49）反复迭代，可得

$$u\circ i\gamma^2(\cdot)=B^i u(\cdot)+u(i\gamma^2\cdot p) \quad \text{for every } i \in \mathbb{N}, \tag{3.50}$$

其中 $i\gamma^2$ 表示 H^2 中 i 个 γ^2的和。设 $M \in \mathbb{C}^{k\times k}$ 是满足以下条件的可逆矩阵： $MBM^{-1}=J$是 B的若尔当标准形。由（3.50）可得

$$Mu\circ i\gamma^2(\cdot)=J^i Mu(\cdot)+Mu(i\gamma^2\cdot p) \quad \text{for every } i \in \mathbb{N}. \tag{3.51}$$

由三角不等式，存在 $c>0$，使得对于每个 $i \in \mathbb{N}$，都有 $\mathsf{d}(i\gamma^2\cdot p,p) \leq ci$。现在固定 $R>0$。由程-丘梯度估计 [51,

定理 1。2] 以及条目 1中的近似线性增长假设，存在常数 $c(R,n) > 0$ 使得

$$\sup_{B_R(i\gamma^2\cdot p)} |\nabla u| \le c(R,n) i^{1/2} \quad \text{for every } i \in \mathbb{N}\,. \tag{3.52}$$

因此，由（3.51）和（3.52）可得

$$\begin{aligned}\sup_{x\in B_R(p)} |J^i M u| &= \sup_{x\in B_R(p)} |Mu(i\gamma^2\cdot x) - Mu(i\gamma^2\cdot p)| \\ &\le |M| R \sup_{B_R(i\gamma^2\cdot p)} |\nabla u| \le C i^{1/2}\,, \end{aligned} \tag{3.53}$$

对于某个常数 $C > 0$。我们接下来的断言是，若 $R > 0$ 足够大，则

$$\mathscr{L}^{n-2}(u(B_R(p))) > 0\,. \tag{3.54}$$

注意，在光滑黎曼情形下，该断言几乎是显然的。事实上，若 $R > 0$ 足够大，则 $T_R u$ 是一个近似分裂映射。因此，根据最初由 [25], 提出的标准正则性传播论证，存在一点 $x \in B_R(p)$，使得 $\{\nabla u_1(x) \dots, \nabla u_k(x)\}$ 线性无关。在 RCD 情形下，可以用类似的方法找到一个正则点 $x \in B_R(p)$ 和 $0 < r < R$，使得 $T_R u : B_r(x) \to \mathbb{R}^{n-2}$ 仍是一个近似分裂映射。接着可以注意到，$T_R u: B_r(x) \to \mathbb{R}^{n-2}$ 可以延拓为一个近似分裂映射 $T_R u : B_{r/2}(x) \to \mathbb{R}^n$（其前 $n-2$ 个分量与 $T_R u$ 的分量相同）。由 [18] 可知，$\mathscr{L}^n(T_R u(B_r(x))) > 0$。因此，由富比尼定理可得 $\mathscr{L}^{n-2}(B_r(x)) > 0$，从而得到（3.54）。由（3.54）可知，存在一组线性无关向量 $\{e_i\}_{i=1}^{n-2} \subset Mu(B_R(p)) \subset \mathbb{C}^{n-2}$。因此，或许增大 $C > 0$ 后，（3.53）意味着

$$|J^i| \le C i^{1/2}\,.$$

若 J 不是对角矩阵，由于其所有特征值均为 1，则 J^i 至少有一个元素的模大于 i，这就产生了矛盾。这表明$u\circ\gamma^2(\cdot) = u(\cdot) + u(\gamma^2\cdot p)$，正如我们所声称的。

现在考虑映射 $\varphi: H^2 \to \mathbb{R}^k$，其定义为 $\varphi(\gamma^2) := u(\gamma^2\cdot p)$。根据恒等式 $u\circ\gamma^2(\cdot) = u(\cdot) + u(\gamma^2\cdot p)$，该映射是一个群同态。事实上，任取 $\gamma_1, \gamma_2 \in H^2$，我们有

$$\begin{aligned} u\circ\gamma_1\circ\gamma_2(\cdot) =& [u(\cdot) + u(\gamma_1\cdot p)]\circ\gamma_2 = u\circ\gamma_2(\cdot) + u(\gamma_1\cdot p) \\ =& u(\cdot) + u(\gamma_1\cdot p) + u(\gamma_2\cdot p)\,. \end{aligned}$$

因此 $\varphi(\gamma_1+\gamma_2) = \varphi(\gamma_1) + \varphi(\gamma_2)$。

为完成证明，反设 φ 不是单射。在此假设下，存在一个子群 $H' < H$ 同构于 $\mathbb{Z}$，使得 $u(H'\cdot p) = \{0\}$。由于我们在证明开头假设 X不能等距地分裂出 $\mathbb{R}^{n-2}$，由推论 3.42 可知，X的吹降极限与基点等距于 $(\mathbb{R}^k \times Y, (0,y))$，其中 Y不含直线，并且它

满足 $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k \times Y)\cdot(0,y) \subset \mathbb{R}^k \times \{y\}$。此外，轨道 $H'\cdot p$ 在吹降序列下以基点 Hausdorff 意义收敛到轨道 $H'_\infty\cdot(0,y)$，其中某个 $H'_\infty < \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k \times Y)$。由引理 2.7， H_∞ 有一个同构于 $\mathbb{R}$的闭子群。因此， $\pi_{\mathbb{R}^k}(H'_\infty\cdot(0,y))$ 包含一个与 $\mathbb{R}$ 同胚的集合。与此同时，由第 2 项，映射 $\pi_{\mathbb{R}^k}$ 沿所选吹降序列可由某些 $R_i\uparrow+\infty$ 及某些矩阵 $T_i\in\mathbb{R}^{k\times k}$构成的映射 T_iu/R_i 逼近。由于这些映射在 $H'\cdot p$ 上均为零，我们推得 $\pi_{\mathbb{R}^k}(H'_\infty\cdot(0,y)) = \{0\}$，这就产生了矛盾。□

下一个引理将用于命题3.45的证明。该结果对 $\mathbb{Z}^k$ 的作用成立，但我们只对 $k=n-2$ 作出陈述，因为稍后我们将使用这一情形。

引理 3.44。 设 $(X、\mathsf{d})$ 为一个完备可分度量空间，其等距变换群的闭子群 $H<\mathrm{Iso}\{X\}$ 同构于 $\mathbb{Z}^{n-2}$，并由 $\{\gamma_1、\cdots\ \gamma_{n-2}\}$ 生成。设 $R>0$。则存在自然数 $\{k_j\}_{j=1}^{n-2}$ 和 $C>0$，使得

$$R/2n \le \mathsf{d}\Big(\mathrm{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_{j-1})\cdot p, k_j\gamma_j\cdot p\Big) \le R/2n + C \quad for\ j=1,\dots,n-2\,,$$

并且对于每个自然数 $t<k_j$，都有

$$\mathsf{d}\Big(\mathrm{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_{j-1})\cdot p, t\gamma_j\cdot p\Big) \le R/2n\,.$$

证明。 设 k_1 为满足下式的最小自然数

$$\mathsf{d}\Big(p, k_1\gamma_1\cdot p\Big) \ge R/2n\,.$$

注意到这样的 k_1 确实存在，因为 $\mathrm{span}(\gamma_1)\cdot p$ 是非紧的。我们断言，对于每个 $j\in\{1,\ \cdots\ n-3\}$，都有

$$\limsup_{s\to+\infty} \mathsf{d}(\mathrm{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_j)\cdot p, s\gamma_{j+1}\cdot p) = +\infty\,. \tag{3.55}$$

反设该结论不成立，即

$$\limsup_{s\to+\infty} \mathsf{d}(\mathrm{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_j)\cdot p, s\gamma_{j+1}\cdot p) < c < +\infty\,.$$

那么，对于每个 $s\in\mathbb{N}$，存在 $h_s\in\mathrm{span}(\gamma_1、\cdots\gamma_j)$ 使得 $\mathsf{d}(p、(h_s+^s\gamma_{j+1})\cdot p)\le c$。取一个不重新标记的子序列后， $h_s+s\gamma_{j+1}\to h_\infty\in H$，从而与 $H\cong\mathbb{Z}^{n-2}$ 作为拓扑群的假设矛盾。因此，(3.55) 成立。

对于每个 $j\in\{1、\cdots\ n-3\}$，我们令 k_j 为满足以下条件的最小自然数

$$\mathsf{d}\Big(\mathrm{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_j)\cdot p, k_j\gamma_{j+1}\cdot p\Big) \ge R/2n\,. \tag{3.56}$$

这些数由（3.55）给出。同时，存在一个常数$C>0$ 使得

$$\mathsf{d}(p,\gamma_j\cdot p)\le C \quad \text{for every } j\in\{1,\cdots n-2\}\,.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathsf{d}\Big(\mathrm{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_{j-1})\cdot p, k_j\gamma_j\cdot p\Big) &\le \mathsf{d}\Big(\mathrm{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_{j-1})\cdot p, (k_j-1)\gamma_j\cdot p\Big)\\ &\quad + \mathsf{d}\Big((k_j-1)\gamma_j\cdot p, k_j\gamma_j\cdot p\Big)\\ &\le R/2n + C\,.\end{aligned}$$

结合3.56)，我们得到

$$R/2n \le \mathsf{d}\Big(\mathrm{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_{j-1})\cdot p, k_j\gamma_j\cdot p\Big) \le R/2n + C\,,$$

由此完成证明。 □

命题 3.45 对本节开头所讨论的计划中第 iii) 项提及的非退化条件给出了精确表述并加以证明。

命题 *3.45.* 设 *(X, d* $\mathscr{H}^n$*)* 是一个 *RCD(0, n)* 空间，且 $\mathbb{Z}^{n-2} \cong H$ *<Iso{X}* 是一个闭子群。假设 X 不分裂出因子 $\mathbb{R}^{n-2}$。设 $k \in$ *{*$n-2, n-1$*}* 是推论 *3.42* 给出的对象，并且 X 的吹胀极限唯一且与 $\mathbb{R}^k \times Y$ 等距，其中 Y 不分裂出任何直线。设 $u: X \to \mathbb{R}^k$ 是命题 *3.43* 给出的调和映射，并设 $\varepsilon_i \downarrow 0$、$R_i \uparrow +\infty$ 和 $T_i \in \mathbb{R}^{k\times k}$ 满足：对每个 $i \in \mathbb{N}$， T_iu*:* B_{R_i}*(p)* $\to \mathbb{R}^k$ 都是一个 ε_i- 分裂映射。

若 $k = n-1$，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 为包含 $T_iu(H^2\cdot p)$ 的超平面，并令 $\pi_i: \mathbb{R}^{n-1} \to \Sigma_i \cong \mathbb{R}^{n-2}$ 为到 Σ_i 上的正交投影。定义 $v_i: B_{R_i}(p) \to \mathbb{R}^{n-2}$：若 $k = n-2$，则 $v_i := T_iu$；若 $k = n-1$，则 $v_i := \pi_i \circ T_iu$。那么，对每个 $i \in \mathbb{N}$，v_i 都是一个 ε_i-分裂映射，并且存在常数 C_1、$C_2 > 0$，使得对每个充分大的 i

$$\mathscr{L}^{n-2}\Big(v_i(\{x \in B_{R_i}(p) : \mathsf{d}(x, H^2\cdot p) \le C_1\})\Big) \ge C_2R_i^{n-2}. \tag{3.57}$$

证明。 根据引理 3.39 和 3.41，要么 $X \cong \mathbb{R}^{n-2} \times Y$等距地，要么 X的吹胀极限唯一，且同构于 $\mathbb{R}^k \times Y'$，其中 $k \in \{n-2, n-1\}$。令 $\{\gamma_j\}_{j=1}^{n-2}$为 H^2 的生成元，并对每个 i，令 $\{k_{i,j}\}_{j=1}^{n-2}$ 为引理 3.44 相对于尺度给出的自然数 R_i。我们将证明的其余部分分为三个步骤。

步骤 1：令 $\Sigma \subset \mathbb{R}^k$ 为包含 u（$H\cdot p$）的 $(n-2)$ 维向量空间，并考虑映射 $T_{i|\Sigma}: \Sigma \to \Sigma_i$。我们声称

$$\liminf_{i\to+\infty} \frac{\det(T_{i|\Sigma})\Pi_{j=1}^{n-2}k_{i,j}}{R_i^{n-2}} > 0\,. \tag{3.58}$$

根据 $\{k_{i,j}\}_{j=1}^{n-2}$ 的构造（见引理 3.44），对于每个 $j\in\{2,\cdots\ n-2\}$，都存在 $h_{i,j}\in \mathrm{span}(\gamma_1,\cdots\gamma_{j-1})$，使得

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{d}\Big(p,(h_{i,j}+k_{i,j}\gamma_j)\cdot p\Big)}{R_i}&=\frac{\mathsf{d}\Big(\mathrm{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_{j-1})\cdot p,k_{i,j}\gamma_j\cdot p\Big)}{R_i}\\&\to 1/2n\quad\text{as } i\uparrow+\infty\,.\end{aligned}\tag{3.59}$$

设 $(X_\infty,\mathsf{d}_\infty,H^2_\infty,p_\infty)$ 是由序列 $(X,\mathsf{d}/R_i,H^2)$ 的极限得到的一个等变吹胀极限。回忆 $X_\infty\cong\mathbb{R}^k\times Y$，并令 $p_\infty=(0,y_\infty)$。群 $H^2_j:=\mathrm{span}(\gamma_1,\cdots\gamma_j)$ 收敛到群 $H^2_{\infty,j}<H^2_\infty$，其中不对收敛子序列重新编号，而轨道 $H^2_j\cdot p$ 收敛到 $H^2_{\infty,j}\cdot p_\infty$。由 (3.59) 和引理 3.42 可知，点 $q_{i,j}:=(h_{i,j}+k_{i,j}\gamma_j)\cdot p$ 收敛到极限点

$$q_{\infty,j}\in H^2_{\infty,j}\cdot p_\infty\subset\mathbb{R}^k\times\{y_\infty\}\subset X_\infty\tag{3.60}$$

使得

$$\mathsf{d}_\infty(H^2_{\infty,j-1}\cdot p_\infty,q_{\infty,j})=\mathsf{d}_\infty(p_\infty,q_{\infty,j})=1/2n\,.\tag{3.61}$$

由（3.60）和（3.61）可得

$$\mathsf{d}_{\mathrm{eucl}}(\pi_{\mathbb{R}^k}(H^2_{\infty,j-1}\cdot p_\infty),\pi_{\mathbb{R}^k}(q_{\infty,j}))=1/2n\,.\tag{3.62}$$

映射 T_iu/R_i 沿着吹落序列收敛到投影 $\pi_{\mathbb{R}^k}\colon X_\infty\to\mathbb{R}^k$，因此

$$T_iu/R_i(q_{i,j})\to\pi_{\mathbb{R}^k}(q_{\infty,j})\in\mathbb{R}^k\quad\text{as } i\uparrow+\infty\,.$$

集合 $\pi_{\mathbb{R}^k}(H^2_{\infty,j-1}\cdot p_\infty)$ 包含于一个 $(j-1)$ 维向量空间中，因为它是网 $T_iu/R_i(H^2_{j-1}\cdot p)$ 的极限。此外，它包含集合 $\{\pi_{\mathbb{R}^k}(q_{\infty,s})\}_{s=1}^{j-1}$。同时，由引理 2.7 可知，$H^2_{\infty,j-1}$ 包含一个与 $\mathbb{R}^{j-1}$ 同构的闭群。因此，根据区域不变性，$\pi_{\mathbb{R}^k}(H^2_{\infty,j-1}\cdot p_\infty)$ 与上述 $(j-1)$ 维向量空间重合。由（3.62）可知，$\{\pi_{\mathbb{R}^k}(q_{\infty,j})\}_{j=1}^{n-2}$ 线性无关。因此我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\det(T_{i|\Sigma})\Pi_{j=1}^{n-2}k_{i,j}}{R_i^{n-2}}\Big(u(\gamma_1\cdot p)\wedge\cdots\wedge u(\gamma_{n-2}\cdot p)\Big)\\&=\frac{1}{R_i^{n-2}}\Big([T_iu(q_{i,1})]\wedge\cdots\wedge[T_iu(q_{i,n-2})]\Big)\\&\to\pi_{\mathbb{R}^k}(q_{\infty,1})\wedge\cdots\wedge\pi_{\mathbb{R}^k}(q_{\infty,n-2})\neq 0\,,\end{aligned}$$

从而完成了（3.58）的证明。

步骤 2：仿照证明（3.54）中的论证，我们可以证明存在 $i_0\in\mathbb{N}$，使得 ε_{i_0}-分裂映射 $T_{i_0}u\colon\ B_{R_{i_0}}(p)\to\mathbb{R}^k$ 满足

$$\mathscr{L}^k(T_{i_0}(u(B_{R_{i_0}}(p))))>0\,.$$

因此，令 $C_1 := R_{i_0}$，我们有

$$\mathscr{L}^k(u(B_{C_1}(p))) > 0\,. \tag{3.63}$$

此外，模去取 H^2 的一个子格后，我们可以假设当 h 在 H^2 中变化时，集合 $u(h\cdot B_{C_1}(p))$ 两两不交。我们断言

$$\#((H^2\cdot p)\cap B_{R_i-C_1}(p)) \geq \Pi_{j=1}^{n-2}k_{i,j}\,. \tag{3.64}$$

为证明 (3.64)，固定 $j\in\{2,\cdots\ n-2\}$。对于每个自然数 $m_{i,j}\leq k_{i,j}$，存在 $h^{m_i}{}_{,i}{}^{j}{}_{,j}\in H^2_{j-1}$，使得

$$\mathsf{d}(p,(h_{i,j}^{m_{i,j}}+m_{i,j}\gamma_j)\cdot p)\leq R_i/2n+C<\frac{R_i-C_1}{n}\,,$$

其中 $C>0$ 是引理 3.44 中的常数，并且最后一个不等式在 i充分大时成立。因此，由三角不等式可得

$$\mathsf{d}\Big(p,\Big[\sum_{j=1}^{n-2}(h_{i,j}^{m_{i,j}}+m_{i,j}\gamma_j)\Big]\cdot p\Big)<R_i-C_1\,, \tag{3.65}$$

对于每个

$$(m_{i,1},\cdots,m_{i,n-2})\in\mathbb{N}^{n-2}\cap\Pi_{j=1}^{n-2}[1,k_{i,j}]\,. \tag{3.66}$$

给定 (3.65) 和 (3.66)，为证明 (3.64)，只需证明以下断言：若

$$(m_{i,1},\cdots,m_{i,n-2})\neq(m'_{i,1},\cdots,m'_{i,n-2})\,, \tag{3.67}$$

then

$$\sum_{j=1}^{n-2}(h_{i,j}^{m_{i,j}}+m_{i,j}\gamma_j)\neq\sum_{j=1}^{n-2}(h_{i,j}^{m'_{i,j}}+m'_{i,j}\gamma_j)\,.$$

为证明该断言，反设 (3.67) 成立，但

$$\sum_{j=1}^{n-2}(h_{i,j}^{m_{i,j}}+m_{i,j}\gamma_j)=\sum_{j=1}^{n-2}(h_{i,j}^{m'_{i,j}}+m'_{i,j}\gamma_j)\,.$$

于是 $m_{i,\ n-2}=m'_{i,\ n-2}$ 因为 $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-2}\}$ 是 H^2 的基，且

$$\sum_{j=1}^{n-2}h_{i,j}^{m_{i,j}}\,,\ \sum_{j=1}^{n-2}h_{i,j}^{m'_{i,j}}\in\operatorname{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-3})\,.$$

因此 $h^{m_i}{}_{,\ i\,n-2}{}^{n-2}=h^{m'_{i,\ .\,i\,n-2}{}^{n-2}}$，于是

$$\sum_{j=1}^{n-3}(h_{i,j}^{m_{i,j}}+m_{i,j}\gamma_j)=\sum_{j=1}^{n-3}(h_{i,j}^{m'_{i,j}}+m'_{i,j}\gamma_j)\,.$$

反复应用这一过程，我们可推得 $(m_{i,\ 1},\ \cdots m_{i,\ n-2})=(m'_{i,\ 1},\ \cdots m'_{i,\ n-2})$，这就产生了矛盾。

步骤 3：为完成证明，我们分别处理 $k=n-2$ 和 $k=n-1$的情形。

首先假设 $k=n-2$。利用（3.64）以及 u的等变性，我们得到，对每个 $i\in\mathbb{N}$，都有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}^{n-2}\Big(\frac{T_i}{R_i}\Big(u(\{x\in B_{R_i}(p):\mathsf{d}(x,H^2\cdot p)\le C_1\})\Big)\Big)\\&=\frac{\det(T_i)}{R_i^{n-2}}\mathscr{L}^{n-2}\Big(u(\{x\in B_{R_i}(p):\mathsf{d}(x,H^2\cdot p)\le C_1\})\Big)\\&\ge\frac{\det(T_i)\Pi_{j=1}^{n-2}k_{i,j}}{R_i^{n-2}}\mathscr{L}^{n-2}\Big(u(B_{C_1}(p))\Big).\end{aligned}$$

结合（3.58）和（3.63），我们得到 $k=n-2$ 的结果。

现在假设 $k=n-1$。令$\mathcal{H}_i$ 为与 Σ_i 平行的$\mathbb{R}^{n-1}$ 的仿射超平面集合。注意，对于每个 $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{n-2}(\pi_i\circ T_i(A))&\ge\sup_{H\in\mathcal{H}_i}\mathscr{L}^{n-2}(T_i(A)\cap H)\\&=\sup_{H\in\mathcal{H}_i}\mathscr{L}^{n-2}\Big(T_i(A\cap T_i^{-1}(H))\Big).\end{aligned}\tag{3.68}$$

令 $v\in\mathbb{R}^{n-1}$ 为垂直于 Σ 的单位向量正规方向：$=T_i^{-1}(\Sigma_i)\subset\mathbb{R}^{n-1}$。我们有

$$\begin{aligned}\sup_{H\in\mathcal{H}_i}\mathscr{L}^{n-2}\Big(T_i(A\cap T_i^{-1}(H))\Big)&=\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathscr{L}^{n-2}\Big(T_i\big((A+tv)\cap T_i^{-1}(\Sigma_i)\big)\Big)\\&=\det(T_{i|\Sigma})\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathscr{L}^{n-2}\big((A+tv)\cap\Sigma\big).\end{aligned}\tag{3.69}$$

应用（3.68）和（3.69），取

$$A:=u(\{x\in B_{R_i}(p):\mathsf{d}(x,H^2\cdot p)\le C_1\}),$$

我们推得

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}^{n-2}\Big(\pi_i\circ\frac{T_i}{R_i}\Big(u(\{x\in B_{R_i}(p):\mathsf{d}(x,p+H^2)\le C_1\}\Big)\Big)\\&\ge\frac{\det(T_{i|\Sigma})}{R_i^{n-2}}\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathscr{L}^{n-2}([u(\{x\in B_{R_i}(p):\mathsf{d}(x,H^2\cdot p)\le C_1\})+tv]\cap\Sigma).\end{aligned}$$

由（3.64），$[u(\{x\in B_{R_i}(p):\mathsf{d}(x,H^2\cdot p)\le C_1\})$ 包含 $\Pi_{j=1}^{n-2}k_i$ 个j 彼此不相交的 $[u(B_{C_1}(p))$ 副本。因此

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}^{n-2}\Big(\pi_i\circ\frac{T_i}{R_i}u(\{x\in B_{R_i}(p):\mathsf{d}(x,p+H^2)\le C_1\})\Big)\\&\ge\frac{\det(T_{i|\Sigma})\Pi_{j=1}^{n-2}k_{i,j}}{R_i^{n-2}}\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathscr{L}^{n-2}([u(B_{C_1}(p))+tv]\cap\Sigma).\end{aligned}\tag{3.70}$$

结合 (3.70) 与 (3.58) 及 (3.63) 即得该结论。 □

3.3. **定理 3.1 的证明**。 令 $(X, \mathsf{d}\ \mathscr{H}^n, \overline{p})$ 表示 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 的万有覆盖。由于 $\pi_1(X)$ 含有一个与 $\mathbb{Z}^{n-2}$ 同构的子群，因此存在闭子群 $\mathbb{Z}^{n-2} \cong H \leq \mathrm{Iso}(X)$。由推论 3.42，要么 $X \cong \mathbb{R}^{n-2} \times Y$ 等距地，要么 X 的吹胀极限在等距意义下唯一，且等距于某个 $\mathbb{R}^k \times Y'$，其中 $k \in \{n-2, n-1\}$。</output>

令 $\varepsilon_i \downarrow 0$、 $R_i \uparrow +\infty$ 和 $v_i :\ B_{R_i}(p) \to \mathbb{R}^{n-2}$ 为命题 3.45 给出的数以及 ε_i-分裂映射。固定充分小的 $\widetilde{\varepsilon} > 0$。根据切片定理，见 [15] 在 [28, 定理 1.23]，之后，对于每个足够大的 i，存在 $A_{i,\widetilde{\varepsilon}} \subset B^{\mathbb{R}^{n-2}}_{R_i/2}(0)$，满足 $\mathscr{L}^{n-2}(B^{\mathbb{R}^{n-2}}_{R_i/2}(0) \setminus A_{i,\widetilde{\varepsilon}}) < \widetilde{\varepsilon} R_i^{n-2}$，使得以下结论成立：对于每个 $x \in v_i^{-1}(A_{i,\widetilde{\varepsilon}}) \cap B_{R_i}(p)$，以及每个 $r \in (0, R_i/2]$，存在一个矩阵 $A_r \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$，使得 $A_r v_{i|B_r(x)} \to \mathbb{R}^{n-2}$ 是一个 $\widetilde{\varepsilon}$-分裂映射。

由命题 3.57 中的（3.45），存在 $C_1 > 0$，使得当 i 足够大时，我们有

$$A_{i,\widetilde{\varepsilon}} \cap v_i\left(\{x \in B_{R_i}(p) : \mathsf{d}(x, H^2 \cdot p) \leq C_1\}\right) \neq \emptyset .$$

现在固定一个序列 $\widetilde{\varepsilon}_j \downarrow 0$。对于每个 $j \in \mathbb{N}$，令 $i(j)$ 满足

$$A_{i(j),\widetilde{\varepsilon}_j} \cap v_{i(j)}\left(\{x \in B_{R_{i(j)}}(p) : \mathsf{d}(x, H^2 \cdot p) \leq C_1\}\right) \neq \emptyset .$$

因此，对于每个 j，我们取 $x_j \in B_{R_{i(j)}}(p)$，使得

i) $v_{i(j)}(x_j) \in A_{i(j),\widetilde{\varepsilon}_j}$;
ii) $\mathsf{d}(x_j, H^2 \cdot p) \leq C_1$.

固定任意一个 $R \gg 1$。应用 [17, 定理 3.8]（在 [28, 引理 1.21] 之后），我们得到一个序列 $\delta_j \downarrow 0$，使得球 $B_R(x_j)$ 在 GH意义下与球 $\delta_j R$-近

$$B_R^{\mathbb{R}^{n-2}\times Y_j}((0, y_i)),$$

对于某些带基点度量空间 $(Y_j,\ y_j)$。由于 $\mathsf{d}(x_j,\ H^2 \cdot p) \leq C_1$，在对 H^2 应用一个等距映射群中的等距映射后，不妨设对于每个 j，$x_j \in B_{C_1}(p)$。取另一个子序列后，$x_j \to x_\infty \in B_{C_1}(p)$，从而 $B_R(x_\infty)$ 与某个带基点度量空间 $(Y,\ y)$ 的 $B_R^{\mathbb{R}^{n-2}\times Y}((0, y))$ 等距。因此，对于 $B_{R-C_1}(p)$，同样的结论成立。由于 $R \gg 1$ 是任意的，结论得证。

4. 单纯体积的消失定理

本节旨在证明关于 RCD(0，n) 流形的单纯体积的以下消失结果：

定理 4.1。 对于每个 $n \geq 2$，以下结论成立。若 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 是一个$\mathrm{RCD}(0, n)$空间，且 X 是一个定向的可三角剖分拓扑 n 维流形，则 $||X|| = 0$。

定理1.7 显然可由定理4.1推出，因为根据 [90]，光滑流形都可三角剖分。

注 4.2。 假设 X 可三角剖分，与 [39, 推论 11] 中也出现了相同的假设有关，而我们的证明依赖于该推论。正如 [39]中所述，这一假设似乎可能并非必要。

文献中最接近的结果是 J. Lott 和 Z. Shen[65, 的推论 1.1]。他们证明，具有二次曲率衰减且满足以下条件的完备黎曼流形（M^n， g）

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(B_r(p))}{r^n} = 0$$

对于某个 $p \in M$，满足 $||M|| = 0$。

为证明定理 4.1 ，我们将区分两种情形：欧几里得体积增长情形，即

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\mathscr{H}^n(B_r(p))}{r^n} > 0\,,$$

以及非欧几里得体积增长情形，即</style>

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\mathscr{H}^n(B_r(p))}{r^n} = 0\,,$$

分别在第 4.1 节和第 4.2 节讨论。在这两种情形中，关键的技术工具均由 [39, 推论 11], 提供，我们将在下文将其表述为定理 4.6。我们需要一些背景知识和术语，下面将予以回顾。

定义 4.3 （拓扑空间的可容子集）。设 X 是道路连通拓扑空间， Y 是 X 的一个子集，且 $i : Y \to X$ 是包含映射。若对于 Y的每个路径连通分支 Y'，映射 i_*: $\pi_1(Y') \to \pi_1(X)$ 的像是 $\pi_1(X)$ 的一个可和子群，则称 Y 是可和的（在 X中）。

定义 4.4 （覆盖与重数）。 设 X 是一个道路连通拓扑空间，且 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X的覆盖，即 $U_i \subset X$ 对每个 $i \in I$和 $X = \bigcup_{i\in I} U_i$都成立。若对每个 $i \in I$， U_i 在 X 中是开集，则称该覆盖为开覆盖；若对每个 $i \in I$， U_i 在 X 中是可和的，则称该覆盖为可和覆盖。$\{U_i\}_{i\in I}$ 的重数定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{mult}(\{U_i\}_{i\in I}) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists\, i_1, \dots, i_n \in I\,,\, i_h \neq i_k \\ \text{for } h \neq k,\, U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n} \neq \emptyset\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,.\end{aligned}$$

定义 4.5. 道路连通非紧致拓扑空间 X 的子集序列 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 称为无穷远处可和的，如果存在 X 的开子集序列 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ，使得以下条件成立：

(i) 每个 W_i 都是大的，即其在 X 中的补集是相对紧的；(ii) 族 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是局部有限的；(iii) 对每个 $i \in \mathbb{N}$， $U_i \subset W_i$ ；

(iv) 存在 $i \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $i \geq i$，U_i 都是 W_i 的一个可容子集。

以下陈述对应于 [39,推论 11]。

定理 4.6。设 M^n 是一个维数为 n 的定向、开且可三角剖分流形。假设 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 M 的一个可容开覆盖，且每个 U_i 在 M 中相对紧，序列 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在无穷远处可和，并且 重数$(\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \leq n$。那么 $\|M\| = 0$。

4.1. **定理 4.1 的证明：欧几里得体积增长情形**。本节的目标是在空间具有最大体积增长的假设下证明定理 4.1。根据定理4.6，只需证明下文的定理 4.7 。

定理 4.7。设 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n, p)$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间。若 X 具有最大体积增长，则它存在一个覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，该覆盖可和、开、在无穷远处可和，且其重数$(\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \leq 2$。

定理 4.7反过来，是定理 4.8 的直接推论，该定理将在下文给出，也是本节的重点。

定理 4.8. 设 $n \geq 3$，且 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n, p)$ 是一个具有最大体积增长的 $\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\mathscr{H}^n(B_r(p))}{r^n} \geq v > 0.$$

那么，对于每个充分大的 r，$B_{4r}(p) \setminus B_{3r}(p)$ 都包含于 $B_{5r}(p) \setminus B_{2r}(p)$的某个路径连通分支 C_r 中。此外，存在一个常数$C(n,v) > 0$，使得包含映射的推前像

$$i_* : \pi_1(C_r, c) \to \pi_1(B_{6r}(p) \setminus B_r(p), c) \tag{4.1}$$

对每个充分大的 $r > 0$ 和每个 $c \in C_r$，其基数至多为 $C(n,v)$ 。

定理 4.8 陈述第一部分的证明很直接。为证明 (4.1)，我们采用反证法。因此，我们找到一列环带$A_i := B_{6r_i}(p) \setminus B_{r_i}(p)$，使得如 (4.1) 所示的映射的像具有很大的~基数。接着考虑它们的万有覆盖 $\tilde{A}_i$，以及适当的~子集 $A_i' \subset \tilde{A}_i$，这些子集覆盖相应的道路连通~分支 $\tilde{C}_{r_i}$。根据反证假设，这些覆盖 A_i'是非紧的。同时，对距离进行缩放后，这些集合 $\tilde{C}_{r_i}$收敛到一个度量空间 Y，它等距于一个度量锥中环带；该度量锥以某个 $\mathrm{RCD}(n-2,n-1)$ 空间为底，且其体积有一个依赖于 v的正常数下界。这样的环带与截面同伦等价。因此，特别地，若 $n \geq 3$，则 $\#\pi_1(Y) < C(n,v)$，这是应用~[72, 定理 1.2]所得。类似地，赋有甲板变换的覆盖 A_i' 在等变 Gromov-Hausdorff 意义下收敛到一对~ $(\tilde{Y}, H)$，其中 $H < \mathrm{Iso}(\tilde{Y})$，且 $\tilde{Y}/H \cong Y$等距地。

为了完成证明，我们将结合以下陈述：$\#\pi_1(Y) < C(n,v)$ 以及最初在 [5, 6, 95] 中提出的一些思路，从而推得 H的基数也有上界 $C(n,v)$。由此便导出矛盾。

要使上述计划的第一部分完全严谨，需要经过若干步骤。接下来两个引理的证明沿用 [95, 引理 3.3] 的思路。

引理 4.9。 设 $(X,\mathsf{d},\mathscr{H}^n,p)$ 是一个满足以下条件的 $\mathrm{RCD}(K,n)$ 空间

$$\mathscr{H}^n(B_1(p)) \geq v > 0. \tag{4.2}$$

那么存在 $k(v,n,K) \in \mathbb{N}$，使得通过包含映射的推前得到的像

$$i_* : \pi_1(B_1(p),p) \to \pi_1(B_4(p),p)$$

至多包含 k 个元素，这些元素可表示为以 p 为中心、长度小于或等于 2 的环路。

证明。我们将 i_*：$\pi_1(B_1(p),p) \to \pi_1(B_4(p),p)$ 的像记为 G。令$\pi : Y \to B_4(p)$ 为 $B_4(p)$ 的万有覆盖。在 Y 上考虑距离 $\widetilde{\mathsf{d}}$，它由提升 $B_4(p)$ 的长度结构得到。令 $\mathscr{H}^n$ 表示相应的豪斯多夫测度。令 $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$，并令 $F \subset Y$ 为引理 A.6 中构造的包含 $\tilde{p}$ 的集合。将可表示为以 p为中心、长度至多为 2 的环路的元素集合记为 $G_2 \subset G$。令

$$B := \bigcup_{g \in G_2} g(F \cap B_1^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p})) \subset Y\,.$$

我们断言 $B \subset B_3^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p})$。事实上，若 $g \in G_2$，则可用一条长度至多为 2 的曲线将 $\tilde{p}$ 与 $g(\tilde{p})$连接起来，并且可用一条长度至多为 1 的曲线将 $g(\tilde{p})$与 $g(F \cap B_1^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p}))$中的任意元素连接起来。因此，根据三角不等式， $B \subset B_3^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p})$。

结合这一包含关系与引理A.6 可得

$$\begin{aligned}(\#G_2)\cdot\mathscr{H}^n(B_1(p)) &= \sum_{g\in G_2} \widetilde{\mathscr{H}^n}(g(F\cap B_1^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p})))\\ &\leq \widetilde{\mathscr{H}^n}(B) \leq \widetilde{\mathscr{H}^n}(B_3^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p}))\,.\end{aligned}$$

因此，由引理 A.5可知，成立

$$(\#G_2)\cdot\mathscr{H}^n(B_1(p)) \leq v_{K,n}(3),$$

其中 $v_{K,\,N}(r)$ 表示半径为 r 的球在满足 $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件的模型空间中的体积。因此，结合式（4.2），可得

$$\#G_2 \leq v_{K,n}(3)/v\,,$$

从而完成证明。 □

引理 4.10。 设 $(X、\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n、\ p)$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0、\ n)$ 空间，满足

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\mathscr{H}^n(B_r(p))}{r^n}\geq v>0\,. \tag{4.3}$$

那么存在 $\varepsilon(n,v)>0$, $C(n,v)\in\mathbb{N}$，使得包含映射经推前后的像

$$i_*:\pi_1(B_\varepsilon(p),p)\to\pi_1(B_1(p),p)$$

的基数至多为 C。

证明。设 $m_0:=\lceil 1+\omega_n 3^n/v\rceil$，并选取 $\varepsilon(n,v):=(10m_0)^{-1}$。我们用 G 表示 $i_*:\pi_1(B_\varepsilon(p)\ p)\ \to\pi_1(B_1(p)\ p)$ 的像。一个标准观察是，G 可由长度至多为 2ε 的圈生成。因此，根据引理 4.9，G 可由至多 $k(n,v)$ 个元素 $\{\gamma_1,\cdots\ \gamma_k\}$ 生成，这些元素的长度至多为 2ε，且中心位于 p。对于每个 $m\in\mathbb{N}$，令 $U(m)$ 表示 G 中以单位元为中心、半径为 m 的球，其中采用字度量及上述生成元集合。令 $\pi:Y\to B_1(p)$ 为 $B_1(p)$ 的万有覆盖，并且~令 $\tilde{p}$ 为 p 的一个原像。赋予 Y 由 $B_1(p)$ 的长度结构提升所诱导的距离 d（参见注 A.4）以及相应的~豪斯多夫测度 $\mathscr{H}^n$。令 $F\subset Y$ 为包含引理 A.6 中的 $\tilde{p}$ 的集合。

我们定义

$$B:=\bigcup_{g\in U(m_0)}g(F\cap B^{\widetilde{\mathsf{d}}}_{m_0\varepsilon}(\tilde{p}))\subset Y\,.$$

我们断言，若 $x\in B$，则 x 与 $\tilde{p}$ 之间存在一条长度至多为 $3m_0\varepsilon$ 的曲线。事实上，若

$$x\in g(F\cap B^{\widetilde{\mathsf{d}}}_{m_0\varepsilon}(\tilde{p}))\quad\text{for some}\quad g\in U(m_0)\,,$$

则存在一条从 $\tilde{p}$ 到 $g\ (\tilde{p})$ 的曲线，其长度至多为 $2m_0\varepsilon$；另有一条长度至多为 $m_0\varepsilon$ 的曲线连接 $g\ (\tilde{p})$ 与 x。

~由于 $B\subset B^{\mathsf{d}}_{3m_0\varepsilon}(\tilde{p})$，引理 A.5 推出

$$\widetilde{\mathscr{H}^n}(B)\leq\omega_n(3m_0\varepsilon)^n\,. \tag{4.4}$$

我们断言 $\#G\leq\#U\ (m_0)$。注意，若该断言成立，则结论立即得出。

反设

$$\#G>\#U(m_0)\,.$$

由于对于每个 $m\in\mathbb{N}$，$\#U(m+1)\ >\#U(m)$，除非 $U(m)\ =G$，因此$m_0\leq\#U\ (m_0)$。于是，我们得到

$$m_0\cdot\mathscr{H}^n(B_{m_0\varepsilon}(p))\leq\#U(m_0)\cdot\widetilde{\mathscr{H}^n}(F\cap B^{\widetilde{\mathsf{d}}}_{m_0\varepsilon}(\tilde{p}))=\widetilde{\mathscr{H}^n}(B)\,.$$

结合式（4.4），我们推得

$$m_0\mathscr{H}^n(B_{m_0\varepsilon}(p))\leq\omega_n(3m_0\varepsilon)^n\,.$$

利用式（4.3），我们得到

$$m_0 \le \omega_n (3m_0\varepsilon)^n / \mathscr{H}^n(B_{m_0\varepsilon}(p)) \le \omega_n 3^n / v\,,$$

因此与我们对 m_0 的选择矛盾。 □

以下引理是众所周知的（参见 [94]），可参照光滑情形下类似结果的证明方法得到，见 [6]。为完整起见，我们在此讨论其证明。

引理 4.11。设 $K>0$，且 $(X, \mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 是一个 $\mathrm{RCD}(K,n)$ 空间，其中

$$\mathscr{H}^n(X) \ge v > 0\,.$$

那么， $\pi_1(X)$ 的基数至多为 $C(n,v,K)$。

证明。设 $(X, \mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 是 X 的万有覆盖，它是单连通的，并且根据 [89] 和 [72]，它是一个 $\mathrm{RCD}(K,n)$ 空间。由 Bonnet-Myers 定理[87, 推论 2.6]，有 $\mathrm{diam}(X) \le C(n,K)$，因此 Bishop-Gromov 的不等式 [87, 定理 2.3] 推出 $\mathscr{H}^n(X) \le C(n,K)$。现在考虑引理 A.6 给出的一个基本区域 $F \subset X$。对每个 $g \in \pi_1(X)$，有 $g\cdot F \cap F = \emptyset$，并且 $\mathscr{H}^n(g\cdot F) = \mathscr{H}^n(X)$。因此，

$$\#\pi_1(X)\, v \le \#\pi_1(X)\, \mathscr{H}^n(X) \le \widetilde{\mathscr{H}}^n(\widetilde{X}) \le C(n,K)\,,$$

从而完成证明。 □

接下来的两个引理给出了关于收敛到度量锥的度量空间序列在 pGH 意义下的技术性结果。

引理 4.12. 设 $Z = C(Y)$ 为定义在某个度量空间 (Y, d_Y) 上的度量锥，其中 $\mathrm{diam}(Y) \le \pi$，并设 d 为相应的锥距离。称 p 为其锥尖，对于每个 $\varepsilon \in (0, 1/2)$，定义环带

$$A := B_6(\overline{p}) \setminus \overline{B}_1(\overline{p})\,, \quad A_\varepsilon := \overline{B}_{6-\varepsilon}(\overline{p}) \setminus B_{1+\varepsilon}(\overline{p})\,, \quad A^\varepsilon := \overline{B}_{6+\varepsilon}(\overline{p}) \setminus B_{1-\varepsilon}(\overline{p})\,.$$

分别用 $\widehat{\mathsf{d}}$、$\widehat{\mathsf{d}}_\varepsilon$ 和 $\widehat{\mathsf{d}}^\varepsilon$ 表示由 d 在环带 A、A_ε 和 A^ε 上诱导的长度距离。那么，对于每个 $\varepsilon \in (0, 1/2)$，有

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\widehat{\mathsf{d}}_\varepsilon(p,q) \le \widehat{\mathsf{d}}(p,q) \le \frac{1}{1-\varepsilon}\widehat{\mathsf{d}}^\varepsilon(p,q)\,, \tag{4.5}$$

对于每个 p、$q \in A := B_5(\overline{p}) \setminus B_2(\overline{p})$。

证明。 回顾一下， $Z = C(Y)$ 定义为

$$Z = (Y \times [0,\infty))/\sim\,,$$

其中，等价关系 $\sim$ 将形如 $(y,0)$ 的所有点两两视为等价，并且锥距离 d 定义为

$$\mathsf{d}\big((x,r),(y,s)\big) = \sqrt{r^2+s^2-2rs\,\cos(d_Y(x,y))}, \quad \text{where } x,y \in Y,\ r,s \ge 0\,.$$

我们只证明（4.5）中的第一个不等式，因为第二个不等式的证明类似。任取两点 p， $q \in A$对于每个充分

小的 $\delta>0$，存在一条曲线 $\gamma:[0,1]\to A$，使得 $\gamma(0)=p$，$\gamma(1)=q$，且长度$^{\mathsf{d}}(\gamma)<\widehat{\mathsf{d}}(p,q)+\delta$。如果 $\gamma(t)=(y(t)\ r(t))$，其中 $y:[0,1]\to Y$且$r:[0,1]\to(1,6)$，我们定义 $\widetilde{\gamma}:[0,1]\to A_\varepsilon$ 为

$$\widetilde{\gamma}(t):=(y(t),\widetilde{r}(t)):=\big(y(t),(1+\varepsilon)\vee r(t)\wedge(6-\varepsilon)\big)\,.$$

由于 $\varepsilon\in(0,1/2)$，$\widetilde{\gamma}(0)=p$ 且 $\widetilde{\gamma}(1)=q$。于是我们注意到，对每个$s,t\in[0,1]$，都有

$$\begin{aligned}\mathsf{d}(\widetilde{\gamma}(s),\widetilde{\gamma}(t))^2=&(\widetilde{r}(s)-\widetilde{r}(t))^2+2\widetilde{r}(s)\widetilde{r}(t)\left(1-\cos(d_Y(y(s),y(t)))\right)\\ \le&(r(s)-r(t))^2+2(1+\varepsilon)^2r(s)r(t)\left(1-\cos(d_Y(y(s),y(t)))\right)\\ \le&(1+\varepsilon)^2\mathsf{d}(\gamma(s),\gamma(t))^2\,.\end{aligned}$$

因此，我们得出

$$\widehat{\mathsf{d}}_\varepsilon(p,q)\le\mathrm{length}^{\mathsf{d}}(\widetilde{\gamma})\le(1+\varepsilon)\mathrm{length}^{\mathsf{d}}(\gamma)<(1+\varepsilon)(\widehat{\mathsf{d}}(p,q)+\delta)\,. \tag{4.6}$$

由于 (4.6) 对每个 $\delta>0$ 都成立，(4.5) 中的第一个不等式得证。 □

引理 4.13。设 $(X,\mathsf{d},\mathscr{H}^n,p)$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，满足

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\mathscr{H}^n(B_r(\overline{p}))}{r^n}\ge v>0\,.$$

设 $r_i\uparrow+\infty$ 为一序列，使得 $(X,\mathsf{d}_i:=\mathsf{d}/r_i,p)$ 在 pGH 意义下收敛到度量锥 $(C(Y),\mathsf{d}_\infty,p_\infty)$。对每个 $i\in\mathbb{N}$，令 $A_i:=\overline{B}_{6r_i}(p)\setminus B_{r_i}(p)$，并令 $A_i:=B_{5r_i}(p)\setminus\underline{B}_{2r_i}(p)$。此外，我们定义 $A:=\overline{B}_6^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty)\setminus B_1^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty)$，并定义 $\widetilde{A}:=B_5^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty)\setminus\overline{B}_2^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty)$。对每个 $i\in\mathbb{N}$，我们将 d_i 称为由 d_i 在 A_i 上诱导的长度距离；类似地，将 d_∞ 称为由 d_∞ 在 A上诱导的$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$长度距离。于是，(A_i,d_i) 在 GH 意义下$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$收敛到 (A,d_∞)。

证明。由于 (X,d_i,p)在 pGH 意义下收敛于 $(C(Y),\mathsf{d}_\infty,p_\infty)$，因此存在一个序列 $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\to0$，使得对于每个 $i\in\mathbb{N}$，存在 ε_i-GH 映射$f_i:\ B_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty)\to B_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_i}(p)$ 以及 $g_i:\ \overline{B}_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_i}(p)\to\overline{B}_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty)$，满足 $f_i(p)=p_\infty$ 和 $g_i(p_\infty)=p$。特别地，$f_i(B_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty))$ 是 $B_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_i}(p)$ 中的一个 ε_i-网，$g_i(\overline{B}_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_i}(p))$ 是 $\overline{B}_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty)$ 中的一个 ε_i-网，并且

$$\begin{aligned}|\mathsf{d}_i(f_i(x_\infty),f_i(y_\infty))-\mathsf{d}_\infty(x_\infty,y_\infty)|<\varepsilon_i\,,\quad\forall\,x_\infty,y_\infty\in B_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty)\,,\\ |\mathsf{d}_\infty(g_i(x_i),g_i(y_i))-\mathsf{d}_i(x_i,y_i)|<\varepsilon_i\,,\quad\forall\,x_i,y_i\in B_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_i}(\overline{p})\,.\end{aligned}$$

此外，我们可以构造这样的 f_i 和 g_i，使得

$$\mathsf{d}_\infty(g_i(f_i(x_\infty),x_\infty))<2\varepsilon_i,\quad\forall x_\infty\in B_{1/\varepsilon_i}^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty)\,. \tag{4.7}$$

在下文中，我们默认只考虑足够大的指数 i，使得 $\varepsilon_i<1/7$，从而 f_i 和 g_i 分别在 $B_7^{\mathsf{d}_\infty}(p_\infty)$ 和 $B_7^{\mathsf{d}_i}(p)$ 上有定义。

~任取两点 $p,\ q\in A$，并令 $\varepsilon>0$ 足够小。考虑环带

$$A_\varepsilon := \overline{B}^{\mathsf{d}_\infty}_{6-\varepsilon}(p_\infty)\setminus B^{\mathsf{d}_\infty}_{1+\varepsilon}(p_\infty)\subset C(Y)\,.$$

根据引理 4.12，取一条等速曲线 $\gamma_\varepsilon\colon[0,1]\to A_\varepsilon$，使得 $\gamma_\varepsilon(0)=p,\ \gamma_\varepsilon(1)=q$，且长度$^{\mathsf{d}_\infty}(\gamma_\varepsilon)\le(1+\varepsilon)\widehat{\ }\mathsf{d}_\infty(p,q)$。用时刻 $t_0=0<t_1<\cdots<t_N=1$ 将区间 $[0,1]$ 分割，使得对每个 $j=0,\dots,N-1$，都有 $|t_{j+1}-t_j|<\varepsilon(8\widehat{\ }\mathsf{d}_\infty(p,q))^{-1}$。令 $x_j=\gamma_\varepsilon(t_j)$，其中 $j=0,\dots,N$，则有

$$\mathsf{d}_\infty(x_j,x_{j+1})<\varepsilon/4\,,\quad \text{for } j=0,\dots,N-1\,.$$

此外，

$$\sum_{j=0}^{N-1}\mathsf{d}_\infty(x_j,x_{j+1})\le \operatorname{length}^{\mathsf{d}_\infty}(\gamma_\varepsilon)\le(1+\varepsilon)\widehat{\mathsf{d}}_\infty(p,q)\,.$$

取任意充分大的 $i\in\mathbb{N}$，使得 $\varepsilon_i<\varepsilon/8$。令 $x^i_j=f_i(x_j)$，并回想 f_i 是一个 ε_i-GH 映射，一方面有

$$\mathsf{d}_i(x^i_j,x^i_{j+1})<\varepsilon_i+\mathsf{d}_\infty(x_j,x_{j+1})<\varepsilon/2\,,\quad \text{for } j=0,\dots,N-1\,. \tag{4.8}$$

另一方面，回想 $f_i(p)=p_\infty$，可得 ⁻

$$x^i_j\in\overline{B}^{\mathsf{d}_i}_{6-3\varepsilon/4}(\overline{p})\setminus B^{\mathsf{d}_i}_{1+3\varepsilon/4}(\overline{p})\subset X_i\,,\quad \text{for } j=0,\dots,N\,. \tag{4.9}$$

结合 (4.8) 和 (4.9)，我们推得，对于$j=0,\dots,N-1$，有 $\widehat{\ }\mathsf{d}_i(x^i_j,x^i_{j+1})=\mathsf{d}_i(x^i_j,x^i_{j+1})$。因此，引入简化记号 $p_i=f_i(p)=f_i(x_0)=x^i_0$和 $q_i=f_i(q)=f_i(x_N)=x^i_N$，我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mathsf{d}}_i(p_i,q_i)=&\widehat{\mathsf{d}}_i(x^i_0,x^i_N)\le\sum_{j=0}^{N-1}\widehat{\mathsf{d}}_i(x^i_j,x^i_{j+1})\\ &=\sum_{j=0}^{N-1}\mathsf{d}_i(x^i_j,x^i_{j+1})\le\sum_{j=0}^{N-1}\mathsf{d}_\infty(x_j,x_{j+1})+\varepsilon_iN\\ &\le(1+\varepsilon)\widehat{\mathsf{d}}_\infty(p,q)+\varepsilon_iN\,.\end{aligned} \tag{4.10}$$

考虑一条等速曲线 $\eta_i\colon[0,1]\to A_i$，满足 $\eta_i(0)=p_i,\eta_i(1)=q_i$，且长度$^{\mathsf{d}_i}(\eta_i)=\widehat{\ }\mathsf{d}_i(p_i,q_i)$。将区间 $[0,1]$ 按时刻$s_0=0<s_1<\cdots<s_M=1$ 划分，使得 $|s_{j+1}-s_j|<\varepsilon(16\widehat{\ }\mathsf{d}_\infty(p,q)+\varepsilon N)^{-1}$。接着，记 $y^i_j=\eta_i(s_j)$ 为 $j=0,\dots,M$，不等式 (4.10) 保证

$$\mathsf{d}_i(y^i_j,y^i_{j+1})<\varepsilon/8\,.$$

定义 $z^i_j:=g_i(y^i_j)\in C(Y)$ 对于 $j=0,\dots,M$，并注意到根据构造（见（4.7）），我们有

$$\mathsf{d}_\infty(z^i_0,p)<2\varepsilon_i\quad\text{and}\quad\mathsf{d}_\infty(z^i_M,q)<2\varepsilon_i\,.$$

另一方面，由于 g_i 是一个 ε_i-GH映射，

$$\mathsf{d}_\infty(z_j^i, z_{j+1}^i) < \varepsilon_i + \mathsf{d}_\infty(y_j^i, y_{j+1}^i) < \varepsilon/2\,, \quad \text{for } j = 0, \dots, M-1\,. \tag{4.11}$$

此外，回想起 $g_i(p_\infty) = p$，我们得到

$$z_j^i \in \overline{B}^{\mathsf{d}_\infty}_{6+\varepsilon/4}(p_\infty) \setminus B^{\mathsf{d}_\infty}_{1-\varepsilon/4}(p_\infty) \subset C(Y)\,, \quad \text{for } j = 0, \dots, M\,. \tag{4.12}$$

因此

$$\begin{aligned}\widehat{\mathsf{d}}_i(p_i, q_i) &\geq \sum_{j=0}^{M-1} \mathsf{d}_i(y_j^i, y_{j+1}^i) \geq \sum_{j=0}^{M-1} \mathsf{d}_\infty(z_j^i, z_{j+1}^i) - \varepsilon_i M \\ &\geq \mathsf{d}_\infty(z_0^i, p) + \sum_{j=0}^{M-1} \mathsf{d}_\infty(z_j^i, z_{j+1}^i) + \mathsf{d}_\infty(z_M^i, q) - \varepsilon_i(M+4)\,.\end{aligned} \tag{4.13}$$

令 $\widehat{\mathsf{d}}^\varepsilon$ 表示 $B^{\mathsf{d}_\infty}_{6+\varepsilon}(p_\infty) \setminus B^{\mathsf{d}_\infty}_{1-\varepsilon}(p_\infty)$ 上的长度距离。结合 (4.11) 和 (4.12)，我们知道对于 $j = 0, \dots, M-1$，有 $\widehat{\mathsf{d}}^\varepsilon(z_j^i, z_{j+1}^i) = \mathsf{d}_\infty(z_j^i, z_{j+1}^i)$，类似地，$\widehat{\mathsf{d}}^\varepsilon(z_0^i, p) = \mathsf{d}_\infty(z_0^i, p)$，且 $\widehat{\mathsf{d}}^\varepsilon(z_M^i, q) = \mathsf{d}_\infty(z_M^i, q)$。于是，(4.13) 的右端等于

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathsf{d}}^\varepsilon(z_0^i, p) + \sum_{j=0}^{M-1} \widehat{\mathsf{d}}^\varepsilon(z_j^i, z_{j+1}^i) + \widehat{\mathsf{d}}^\varepsilon(z_M^i, q) - \varepsilon_i(M+4) \\ &\geq \widehat{\mathsf{d}}^\varepsilon(p, q) - \varepsilon_i(M+4) \geq (1-\varepsilon)\widehat{\mathsf{d}}_\infty(p, q) - \varepsilon_i(M+4)\,,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式应用了引理4.12 。特别地，

$$\widehat{\mathsf{d}}_i(p_i, q_i) \geq (1-\varepsilon)\widehat{\mathsf{d}}_\infty(p, q) - \varepsilon_i(M+4)\,. \tag{4.14}$$

由于 p，q 和 ε 是任意选取的，且 d_∞ 在 $A \times A$上显然有界，结合 (4.10) 和 (4.14) 可知，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在$N(\varepsilon)$ 使得对每个 $i \geq N(\varepsilon)$ 都有

$$\left|\widehat{\mathsf{d}}_i(f_i(p), f_i(q)) - \widehat{\mathsf{d}}_\infty(p, q)\right| \leq \varepsilon/3\,, \quad \forall p, q \in \widetilde{A}\,.$$

考虑最近点投影 $\pi\colon C(Y) \to B^{\mathsf{d}_\infty}_{5-\varepsilon/3}(p_\infty) \setminus B^{\mathsf{d}_\infty}_{2+\varepsilon/3}(p_\infty)$，并注意到

$$\widehat{\mathsf{d}}_\infty(\pi(p), p) \leq \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \forall p \in \widetilde{A}\,.$$

因此，对于每个 $p, q \in A$ 以及每个 $i \geq N(\varepsilon)$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\widehat{\mathsf{d}}_i(f_i(\pi(p)), f_i(\pi(q))) - \widehat{\mathsf{d}}_\infty(p, q)\right| \\ &\leq \left|\widehat{\mathsf{d}}_i(f_i(\pi(p)), f_i(\pi(q))) - \widehat{\mathsf{d}}_\infty(\pi(p), \pi(q))\right| + \left|\widehat{\mathsf{d}}_\infty(\pi(p), \pi(q)) - \widehat{\mathsf{d}}_\infty(p, q)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \left|\widehat{\mathsf{d}}_\infty(\pi(p), \pi(q)) - \widehat{\mathsf{d}}_\infty(\pi(p), q)\right| + \left|\widehat{\mathsf{d}}_\infty(\pi(p), q) - \widehat{\mathsf{d}}_\infty(p, q)\right| < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

另一方面，由于 f_i 是一个 ε_i-GH 映射，

$$\mathsf{d}_i(x_i, f_i(\overline{B}^{\mathsf{d}_\infty}_{5+2\varepsilon_i}(p_\infty) \setminus B^{\mathsf{d}_\infty}_{2-2\varepsilon_i}(p_\infty))) \leq \varepsilon_i\,, \quad \text{for every } x_i \in \widetilde{A}_i\,.$$

因此，注意到

$$f_i(\overline{B}^{\mathsf{d}_\infty}_{5-\varepsilon/3}(p_\infty)\setminus B^{\mathsf{d}_\infty}_{2+\varepsilon/3}(p_\infty))\subset \widetilde{A}_i$$

对于每个 i足够大的情形，我们有

$$f_i(\pi(\widetilde{A}))=f_i(\overline{B}^{\mathsf{d}_\infty}_{5-\varepsilon/3}(p_\infty)\setminus B^{\mathsf{d}_\infty}_{2+\varepsilon/3}(p_\infty))$$

~是 A_i中的一个（$4\varepsilon_i+\varepsilon/3$）-网，度量为$\mathsf{d}_i$。因此，取一个更大的 ~ ~$N(\varepsilon)$后，对于每个 $i\geq N(\varepsilon)$，我们有 $f_i(\pi(A))$是 A_i中的一个 ε-网，度量为d_i^。由于限制在以 $\widetilde{A}_i$为中心、半径为 1 2 的球上时，距离 $\bar{\mathsf{d}}_i$ 和d_i 重合，因此当 ε 足够小时，我们可得 $f_i(\pi(\widetilde{A}))$是 A_i 中的一个 ε-网 ~ ^，度量为d_i。这一论证证明，对于每个 $i\geq N(\varepsilon)$，映射 $f_i\circ\ \pi\colon(A,\mathsf{d})\ \to(A_i,\mathsf{d}_i)$是一个 ε-GH 映射。结论由 ε的任意性得出。□

定理*4.8*的证明。 我们首先证明，对于每个 r 足够大的情形，$B_{4r}(p)\setminus B_{3r}(p)$ 包含于一个道路连通分支 C_r 中，该分支属于 $B_{5r}(p)\setminus B_{2r}(p)$。

假设情况并非如此，即存在一个违反该陈述的序列 $r_i\uparrow+\infty$。因此，对于每个 $i\in\mathbb{N}$，都存在两点x_i、 $y_i\in B_{4r_i}(p)\setminus B_{3r_i}(p)$，使得 $B_{5r_i}(p)\setminus B_{2r_i}(p)$中不存在连接它们的道路。根据定理 7.6], ，经过 [33, 34] 后 [24, ，不妨取一个子序列，使空间$(X,\mathsf{d}/r_i)$ 在 pGH 意义下收敛到以锥尖为中心的度量锥 $C(Z)$，其中(Z,d_Z)是一个道路连通度量空间。因此， $B_4^{C(Z)}(p)\setminus B_3^{C(Z)}(p)$ 中存在极限点 $x_i\to x_\infty$、 $y_i\to y_\infty$。对某个 $k\in\mathbb{N}$，考虑集合 $\{z_j\}_{j=1}^{k}\subset B_4^{C(Z)}(p)\setminus B_3^{C(Z)}(p)$，使得 $z_1=x_\infty$、 $z_k=y_\infty$，且对每个 $j\in\in\{1,\cdots\ k-1\}$，$\mathsf{d}^{C(Z)}(z_j,z_{j+1})\ \leq 1/2$。对每个 $i\in\mathbb{N}$以及每个 $j\in\in\{2,\cdots\ k-1\}$，考虑点 $x_j^i\in B_{5r_i}(p)\setminus B_{2r_i}(p)$，使得 $x_j^i\to z_j$，并令 $x_1^i:=x_i$ 和 $x_k^i:=y_i$。考虑一条由连接 z_j^i 与 z_{j+1}^i 的测地线依次拼接而成的曲线，其中 j 从 1 变化到$k-1$。当 i 足够大时，这条曲线包含于 $B_{5r_i}(p)\setminus B_{2r_i}(p)$中，矛盾。

令 $L>0$ 足够大（稍后选定），并反设映射 (4.1) 的像的基数大于 L，其中某个序列为 $r_i\uparrow+\infty$。令 $A_i:=B_{6r_i}(p)\setminus B_{r_i}(p)$，并令 $\underline{\mathsf{d}}_i$ 为 A_i 上诱导的长度距离。由于 A_i 是一个 RCD(0, n) 空间的开集，根据 [89]，它是半局部单连通的。因此，存在一个 A_i 的单连通 ~ ~ ~万有覆盖 A_i。在 A_i 上，我们按照注 A.4，通过提升 A_i 的长度结构，考虑得到的距离 d_i。该覆盖的甲板变换 ~ ~构成一个与 $\pi_1(A_i)$ 同构的 (A_i,d_i) 的等距变换群，其对应的商空间与 (A_i,d_i) 等距。

~设 $p_i\colon A_i\to A_i$ 为覆盖映射，令 A_i' 为 $p_i^{-1}(C_{r_i})$ 的一个道路连通分支。令 $G_i<\pi_1(A_i)$ 表示将 A_i' 映到自身的甲板变换子群

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $p_i : A_i \to A_i$ 中将 A_i' 映入自身的部分。于是，由于 G_i 在 A_i 上自由作用，它可以自然地识别为 (A_i', d_i) 的一个等距变换群。此外，由于 $\pi_1(A_i)$ 在 $p_i : A_i \to A_i$ 的纤维上迁移传递，可知 G_i 在该限制的纤维上迁移传递

$$p_i|_{\widetilde{A}_i'} : \widetilde{A}_i' \to C_{r_i} .$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$因此，$(A_i', \mathsf{d}_i)/G_i \cong (C_{r_i}, \mathsf{d}_i)$等距。此外，由于包含在 C_{r_i} 中的圈可以提升为包含在 A_i'中的路径，因此每个群 G_i 都包含 i_* 像的一个同构副本：$\pi_1(C_{r_i}, c_i) \to \pi_1(A_i, c_i)$，其中 $c_i \in C_{r_i}$。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$空间$(A_i', \mathsf{d}_i/r_i)$ 由引理A.5知局部一致加倍。因此，取一个子序列后，可得等变 GH 收敛

$$(\widetilde{A}_i', \widetilde{\mathsf{d}}_i/r_i, G_i) \to (Z, \mathsf{d}_z, G) .$$

现在注意到，利用与证明开头类似的论证，对每个 $\varepsilon > 0$，当 i 足够大时，$(C_{r_i}, \mathsf{d}_i/r_i)$在 GH 意义下与$(B_{5r_i}(p) \backslash \overline{B}_{2r_i}(p), \mathsf{d}_i/r_i)$相距 ε。结合引理 4.13，我们推得空间$(C_{r_i}, \mathsf{d}_i/r_i)$收敛到 X的无穷远处切锥 $C(Y)$中的一个环带$(C_\infty, \mathsf{d}_\infty)$，其中 Y是一个非塌缩 RCD$(n-2, n-1)$空间，且d_∞ 是由 $C(Y)$在 C_∞ 上诱导的长度距离。根据 [34, 定理 1.2]（在 [30]之后），$\mathscr{H}^{n-1}(Y)$有一个仅依赖于 n和 v的常数下界，因此由引理 4.11 可知 $\#\pi_1(C_\infty) < C(n, v)$。注意，这里我们使用了假设 $n \geq 3$。在证明的其余部分，我们用$C(n, v)$表示一个仅依赖于 n 和 v 的通用常数，不再在$\widetilde{\quad}$每一步都重新命名。由于 $A_i'/G_i \cong C_{r_i}$，由定理 2.3 可得

$$(Z, \mathsf{d}_z)/G \cong (C_\infty, \overline{\mathsf{d}}_\infty) .$$

我们现在断言 $\#G \leq C(n, v)$。我们将这一事实的证明分为几个步骤。

步骤 1：我们断言 $\Gamma_\varepsilon := \{g \in G : g \cdot x \in B_\varepsilon(x) \text{ 对于某个 } x \in Z\}$ 的基数至多为 $C(n, v)$，其中 $\varepsilon := \varepsilon'/10$ 以及 $\varepsilon'(n, v)$ 由引理4.10给出。

假设存在 $N > 0$ 个互不相同的元素 $\{g_k\}_{k=1}^N \subset \Gamma_\varepsilon$ 以及（可能重复的）点 $x_k \in Z$，使得 $g_k \cdot x_k \in B_\varepsilon(x_k)$。对于每个 $k \in \{1, \ldots, N\}$，$\widetilde{\quad}$选取收敛到 x_k 的点 $x_{i,k} \in A_i'$，以及收敛到 g_k 的等距变换 $g_{i,k} \in G_i$。如果 $k \neq k'$，由于 $g_k \neq g_{k'}$，我们有 $g_{i,k} \neq g_{i,k'}$，当 i 足够大时成立。

$\widetilde{\quad}$考虑 A_i 与$\pi_1(A_i)$ 的甲板变换之间的对应关系。每个$g_{i,k}$ 都对应于 $\pi_1(A_i)$ 中的一个环路$\gamma_{i,k}$，其中心位于 $p_i(x_{i,k}) \in A_i$$\widetilde{\quad}$；该环路由将 A_i 中的一条曲线从 $x_{i,k}$ 投影到$g_{i,k} \cdot x_{i,k}$而得到。特别地，可以选择这样的曲线，使其满足

$$\operatorname{length}^{\overline{\mathsf{d}}_i}(\gamma_{i,k}) \leq 2\widetilde{\mathsf{d}}_i(x_{i,k}, g_{i,k} \cdot x_{i,k}) .$$

由于$x_{i,\,k}\to x_k$和$g_{i,\,k}\cdot x_{i,\,k}\to g_k\cdot x_k\in B_\varepsilon^{\mathsf{d}_Z}(x_k)$关于$(\widetilde{A}_i',\ \widetilde{\ }\mathsf{d}_i/r_i)$与$(Z,\ \mathsf{d}_Z)$保持不变，因此可得

$$\limsup_{i\to+\infty}\operatorname{length}^{\overline{\mathsf{d}}_i/r_i}(\gamma_{i,k})\le 2\limsup_{i\to+\infty}\frac{\widetilde{\mathsf{d}}_i(x_{i,k},g_{i,k}\cdot x_{i,k})}{r_i}\le 2\varepsilon\,. \tag{4.15}$$

现在注意到，$C_\infty\cong Z/G$是$C(n)$-倍增的，且其直径有一个可能不同的$C(n)$上界。因此，我们推得存在$T(N,n)>0$（具有如下性质：当$T(N,n)\uparrow+\infty$时，$N\uparrow+\infty$），使得若C_∞包含一组点$\{c_l\}_{l=1}^N$，则这组点中至少有T个点包含在一个球$B^{\mathsf{d}_\infty}_{\varepsilon/2}(c)$中。将这一原理应用于点集$\{G\cdot x_k\}_{k=1}^N\subset C_\infty$，我们找到$T$个不同的指标$k_1$、……、$k_T$，使得对所有$j=1$、……、$T$以及某个$G\cdot x_\infty\in Z/G$，都有$\mathsf{d}_\infty(G\cdot x_{k_j},G\cdot x_\infty)<\varepsilon/2$。根据定理 2.3，投影$G_i\cdot x_{i,k_j}\in(C_{r_i},\mathsf{d}_i/r_i)$在实现收敛$(C_{r_i},\mathsf{d}_i/r_i)\overset{-}{\to}(C_\infty,\mathsf{d}_\infty)$的空间中收敛到$G\cdot x_{k_j}$，对所有$j=1$、……、$T$均成立。此外，在同一空间中，存在点$a_i\in C_{r_i}$使得$a_i\to G\cdot x_\infty$。因此，当$i$足够大时

$$G_i\cdot x_{i,k_j}\in B_\varepsilon^{\overline{\mathsf{d}}_i/r_i}(a_i)\subset C_{r_i}$$

对所有$j=1$、……、T。

注意，当ε足够小时，我们有$B_\varepsilon^{\mathsf{d}_i/r_i}(a_i)^{-}=B_\varepsilon^{\mathsf{d}/r_i}(a_i)$。此外，对于每个$k$以及每个$i$，$G_i\cdot x_{i,k}\in C_{r_i}$可通过包含关系$C_{r_i}\to A_i$与$p_i(x_{i,k})\in A_i$等同。因此，结合 (4.15)，球$B^{\mathsf{d}}_{3r_i\varepsilon}(a_i)\subset X$包含$T$个圈$\gamma_{i,k}$，它们对应于$\pi_1(A_i)$中的不同元素。由引理 4.10 可知，$T\le C(n,v)$，从而$N\le C(n,v)$也成立。

我们记录步骤 1 的两个重要推论：

i) 集合$\mathrm{Fix}(G):=\{g\in G:\ g\cdot x=x\text{ 对某个 }x\in Z\}$成立，其基数至多为$C(n,v)$；ii) 对每个$z\in Z$，存在$\varepsilon>0$，使得近似稳定子$\Gamma_\varepsilon(z):=\{g\in G:\ g\cdot z\in B_\varepsilon(z)\}$的基数至多为$C(n,v)$。

步骤 2：我们断言$H:=\langle\mathrm{Fix}(G)\rangle$是正规子群，且其基数至多为$C(n,v)$。

设$h\in\mathrm{Fix}(G)$满足$h\cdot z=z$，其中$z\in Z$，并设$g\in G$。那么$g^{-1}hg$固定$g^{-1}(z)$，因此$g^{-1}hg\in\mathrm{Fix}(G)$。现在设$h\in H$，于是$h=g_1\cdots g_k$，其中某个$\{g_j\}_{j=1}^k\subset\mathrm{Fix}(G)$。对于每个$g\in G$，我们有

$$g^{-1}hg=g^{-1}g_1g\,g^{-1}g_2\cdots g_{k-1}g\,g^{-1}g_kg\,.$$

由于对每个j，$g^{-1}g_jg$都属于$\mathrm{Fix}(G)$，因此可得$g^{-1}hg\in H$，从而证明H是正规子群。

为证明H的基数至多为$C(n,\ v)$，我们首先断言$H/Z(H)$的基数至多为$C(n,\ v)$，其中$Z(H)<H$是H的中心。令$T\colon H\to\mathrm{Sym}(\mathrm{Fix}(G))$为如下定义的同态：$T(h)$是$\mathrm{Fix}(G)$上的置换，由$T(h)(g):=h^{-1}gh$给出。根据步骤 1，$H/\mathrm{Ker}(T)$的

基数至多为 $C(n,\ v)$。由于Ker(T)位于 H的中心，因此$H/Z(H)$的基数至多为 $C(n,\ v)$，证毕。

由 Schur 定理，导出群 $H' \leq H$ 的基数至多为$C(n,\ v)$。因此，只需证明 H/H' 的基数也至多为$C(n,\ v)$。群 H/H' 是阿贝尔群，并且由至多 $C(n,\ v)$个阶至多为 $C(n,\ v)$的元素生成（即 Fix(G) 中元素的等价类）。因此， H/H' 的基数至多为 $C(n,\ v)$，步骤 2 的证明得证。

步骤 3： 我们断言 G/H 在 Z/H上适当不连续地作用。

我们首先证明 G/H 自由作用。事实上，若对某个$H\cdot x \in Z/H$ 和某个 $g+H \in G/H$，有 $(g+H)\cdot x = H\cdot x$，则存在 $h \in H$ 使得 $(g+h)\cdot x = x$，因此 $g+h \in H$ 且 $g+H = H$。所以，该作用是自由的。

总之，只需证明：如果 $H\cdot x \in Z/H$ 和 $g_i + H \in G/H$满足 $(g_i+H)\cdot x \to H\cdot x$，那么当 i 足够大时， $g_i + H = H$。为此，注意存在一些元素 $h_i \in H$，使得 $(g_i+h_i)\cdot x \to x$。由步骤 1可知，当 i 足够大时， g_i+h_i 固定 x，因此 $g_i \in H$，因为 G/H 自由作用。

为完成 $\#G \leq C(n,v)$ 的证明，注意，由于根据步骤 3， G/H 在 Z/H 上适当不连续地作用， G/H 是 $\pi_1(C_\infty)$的子群。因此，其基数至多为 $C(n,v)$。结合步骤 2，我们可得， G 的基数也至多为 $C(n,v)$。

现在我们完成定理的证明。由于 Z/G 是紧致的，我们$\widetilde{}$可得 Z 是紧致的。设 $a_i \in A_i'$ 为一些元素，使得 $a_i \to z \in Z$ 作为$\widetilde{}$ $\widetilde{}(A_i', \mathrm{d}_i/r_i) \to (Z, \mathrm{d}_z)$。令 $\varepsilon(n,v) > 0$ 为引理 4.10所给出的对象，于是近稳定子群 $\widetilde{}$、$\Gamma_{\varepsilon,\ a_i} := \{g \in G_i : \mathrm{d}_i(a_i, g\cdot a_i) < \varepsilon r_i\}$ 的基数均至多为 $C(n,v)$。由于我们反设 $\#G_i \geq L$，Γ_ε在 G_i 中的指数至少为 $S := L/C(n,v)$。考虑属于 G_i中$\Gamma_{\varepsilon,\ a_i}$ 的不同左陪集的元素 $\{g_i^j\}_{j=1}^S \subset G_i$。由于 Z 是紧致的，对每个$j \in \{1, \cdots S\}$，都存在 $g^j \in G$ 使得 $g_i^j \to g^j$。

我们断言，元素$\{g^j\}_{j=1}^S \subset G$ 两两不同。若确实如此，我们便可得出

$$L/C(n,v) = S \leq \#G \leq C(n,v)\,,$$

这与 L取值足够大相矛盾。我们证明 $g^1 \neq g^2$，其他情形的证明类似。若 $g^1 = g^2$，则 $\mathrm{d}_z(g^1\cdot z, g^2\cdot z) = 0$，因此

$$\widetilde{\mathrm{d}}_i(g_i^1\cdot a_i, g_i^2\cdot a_i) < \varepsilon r_i$$

若 i 足够大。这意味着$g_i^1 \in g_i^2 + \Gamma_{\varepsilon,a_i}$，与元素$g_i^j$ 属于Γ_{ε,a_i} 在 G_i中的不同左陪集这一事实矛盾。□

4.2. **定理 4.1 的证明：非欧几里得体积增长情形。** 本节的目标是在以下假设下证明定理 4.1 ： 空间 X 没有最大体积增长。我们注意到，如果 X 是紧致的，那么 $\pi_1(X)$ 几乎阿贝尔，因此根据 [72, 定理

1.3], 从而 $\|X\| = 0$ 根据 [46, 推论 C，第 248] 页。下文中，我们假设 X 是非紧的。要证明这种情形下的消失定理，得益于定理 4.6，只需证明以下内容：

定理 4.14。设$(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n)$ 是一个非紧$\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间，使得

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\mathscr{H}^n(B_R(p))}{R^n} = 0\,, \tag{4.16}$$

对某个 $p \in X$ 成立。那么 X 存在一个覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，该覆盖是可和的、开且无穷远处可和，并且具有重$(\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \le n$。

如前所述，定理 4.14 推广了 Gromov 在[46],中的一些结果；在这些结果中，他假设单位球体积具有一致的小上界。定理 4.14的证明思路大致如下。由（4.16），[34, 定理 1。2]可知，X 的所有缩放极限的豪斯多夫维数均为 $\le n-1$。特别地，它们的拓扑维数至多为 $n-1$，因此它们存在重数至多为 n的任意小开覆盖。理想情况下，人们希望将这类低重数覆盖的存在性与 [55]中的马古利斯引理（以及随后在RCD 空间中的部分推广，见 [37]）结合起来，从而构造出所需的 X覆盖。实施这一策略时会遇到若干困难。其中最严重的是：

i）一般而言，由于坍缩情形下缩放极限可能具有较差的拓扑性质，目前尚不清楚能否选取从（重缩放后的）空间到其吹胀极限的带基点GH逼近，使其连续；ii） X 的吹胀极限不一定唯一，也不一定在重缩放下保持不变。因此，很难将通过吹落论证获得的局部信息转化为全局信息；iii）对于 RCD空间，目前还没有类似于光滑情形下[55] 中得到的马古利斯引理的局部版本，尽管最近在这一背景下得到了一个更全局的马古利斯引理，见 [55]。

克服 i）和 ii）中困难的关键工具，是 Papasoglu 最近的一项结果，陈述如下定理 4.16。利用定理 4.16，我们在命题 4.19 中证明，经过适当的度量共形缩放后，体积增长的多项式次数小于 n 的度量空间，在充分大的紧集之外具有较小的 $(n-1)$-乌雷松宽度（见定义 4.15）。为了完成定理 4.14 的证明，我们将结合对 $(n-1)$-宽度的这一控制与定理 A.1，在该定理中，我们从 [55] 得到了马古利斯引理的一个较弱版本，但没有给出幂零子群指数的定量界。

定义 4.15。设 $q \in \mathbb{N}$。我们称度量空间 $(X,\ \mathsf{d})$ 的 q-乌雷松宽度小于或等于 W，并记为 $UW_q(X,\ \mathsf{d}) \le W$，如果对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 q维单纯复形 Y 和一个连续映射$\pi\colon X \to Y$，使得每个纤维 $\pi^{-1}(y)$，$y \in Y$，的直径均为 $\le W + \varepsilon$。

下文中，我们将用 $\mathscr{H}^n_\infty$ 表示 n维的实数集 上的豪斯多夫容量。下一个陈述对应于 [79, 定理 3。3]

定理 4.16. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\varepsilon_n > 0$，使其满足以下性质。设 (X,d) 是一个正则度量空间，且 $R > 0$ 满足：对每个$x \in X$，都存在一个开集 U_x，具有以下性质：

(i) $B_R(x) \subset U_x \subset B_{10R}(x)$
(ii) $\mathscr{H}^{n-1}_\infty(\partial U_x) \leq \varepsilon_n R^{n-1}$.

那么，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个局部有限$(n-1)$维单纯复形 Y，以及一个正则连续映射 $\pi : X \to Y$，使得每个纤维$\pi^{-1}(y)$，$y \in Y$，的直径为 $\leq R + \varepsilon$。特别地，$UW_{n-1}(X) \leq R$。

[79, 定理 3.3] 的表述没有提及，在前一个定理中，单纯复形 Y和映射 π 可以分别取为局部有限和正则的。不过，这可以由[79]中的证明推出。

下面的余面积不等式可由 [38,定理 1.1]推出。

命题 4.17 （余面积不等式）。 设(X,d) 是一个正则度量空间，且 $n > 1$。那么对任意 $x \in X$ 和 $0 < \alpha < \beta < \infty$，有

$$\int_\alpha^\beta \mathscr{H}^{n-1}(\partial B_s(x))ds \leq C_n \left(\mathscr{H}^n(B_\beta(x)) - \mathscr{H}^n(B_\alpha(x))\right),$$

其中 C_n 是维数常数。

证明定理 4.14 的关键思路是将定理 4.16 应用于 (X,d) 的共形缩放。下面的引理 4.18 引入相关的共形缩放，并确立其基本性质。接下来的命题 4.19 给出了一个所需的估计：共形缩放在有界集之外的乌雷松宽度。

引理 4.18. 设$(X,\mathsf{d}\ p)$ 是一个完备、可分且测地的带基点度量空间。给定任意曲线 $\gamma \in AC([0,1],(X,\mathsf{d}))$，定义

$$\widetilde{L}(\gamma) := \int_0^1 \frac{|\dot\gamma|(t)}{\mathsf{d}(p,\gamma(t)) \vee 1} dt\,,$$

其中 $|\dot\gamma|$ 表示度量导数。因此，我们定义函数$\widetilde{\mathsf{d}}$：$X \times X \to \mathbb{R}_+$ 如下

$$\widetilde{\mathsf{d}}(x,y) := \inf\{\widetilde{L}(\gamma) : \gamma \in AC([0,1],(X,\mathsf{d})), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}.$$

则 $\widetilde{\mathsf{d}}$ 是 X上的距离。此外，存在 $0 < \delta_0 \leq \frac{1}{6}$，使得对于所有$\delta \in (0、\ \delta_0]$以及每个满足 $\mathsf{d}(p、\ q) > 10$的 $q \in X$，我们有

$$\widetilde{B}_\delta(q) \subset B_{2\delta\mathsf{d}(p,q)}(q) \subset B_{3\delta\mathsf{d}(p,q)}(q) \subset \widetilde{B}_{6\delta}(q)\,, \tag{4.17}$$

$\widetilde{\mathsf{d}}$其中，我们用 B 表示关于距离d的球。

~证明。容易验证，d 是对称的、有限的，并且满足~三角不等式。因此，要证明 d 是一个距离，只需~验证其正定性。为此，考虑 $a,b\in X$，其中 $\mathsf{d}(a,b)=0$，并反设 $\delta:=\mathsf{d}(a,b)>0$。令 $\gamma\in AC([0,1],(X,\mathsf{d}))$ 为连接 a 与 b 的任意曲线，并称 $t_0\in[0,1]$ 为 γ 与$\partial B_{\delta/2}(a)$ 的第一个相交时刻。于是我们可以估计

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{|\dot\gamma|(t)}{\mathsf{d}(p,\gamma(t))\vee 1}dt&\geq\int_0^{t_0}\frac{|\dot\gamma|(t)}{\mathsf{d}(p,\gamma(t))\vee 1}dt\\&\geq\int_0^{t_0}\frac{|\dot\gamma|(t)}{\mathsf{d}(p,a)+\delta/2+1}dt\\&\geq\frac{\delta/2}{\mathsf{d}(p,a)+\delta/2+1}>0\,.\end{aligned}$$

由于 γ 是任意的，我们得到所需的矛盾。

在证明结束之前，我们固定一个具有以下性质的 $\delta_0\leq 1/6$：对于每个 $\delta\in(0,\delta_0]$，若 $x>0$ 满足 $\log(1+x)\leq\frac{3}{2}\delta$，则 $x\precsim 2\delta$。

我们首先证明（4.17）中的第三个包含关系。取 $q\in X$，使得 $\mathsf{d}(p,q)>10$，任取 $\delta\in(0,\delta_0]$，并考虑任意的 $a\in B_{3\delta\mathsf{d}(p,q)}(q)$。令 $\gamma\in AC([0,1],(X,\mathsf{d}))$为一条常速测地线（相对于$\mathsf{d}$），连接 a 与 q。特别地，我们有

$$|\dot\gamma|\equiv\mathsf{d}(a,q)\leq 3\delta\mathsf{d}(p,q)\,,\quad \gamma([0,1])\subset B_{\mathsf{d}(p,q)/2}(q)\subset X\setminus B_{\mathsf{d}(p,q)/2}(p)\,.$$

因此，对于每个 $t\in[0,1]$，都有 $\mathsf{d}(p,\gamma(t))\vee 1\geq\frac{1}{2}\mathsf{d}(p,q)$，因此

$$\widetilde{\mathsf{d}}(a,q)\leq\widetilde{L}(\gamma)=\int_0^1\frac{|\dot\gamma|(t)}{\mathsf{d}(p,\gamma(t))\vee 1}dt\leq\int_0^1\frac{3\delta\mathsf{d}(p,q)}{\frac{1}{2}\mathsf{d}(p,q)}dt=6\delta\,.$$

~由于 a 是任意的，我们推得 $B_{3\delta\mathsf{d}(p,q)}(q)\subset B_{6\delta}(q)$。

~对于 (4.17) 中的第一个包含关系，任取 $b\in B_\delta(q)$ 并考虑一条曲线$\gamma\in AC([0,1],(X,\mathsf{d})$ 连接 q和 b，使得 $\widetilde{L}(\gamma)\leq\frac{3}{2}\delta$。由于 $\widetilde{L}$ 在重新参数化下保持不变，我们可以假设 γ 相对于距离 d具有恒定速度，即 $|\dot\gamma|\equiv L$ 其中 $L>0$。我们断言

$$\gamma([0,1])\subset X\setminus B_2(p)\,.\tag{4.18}$$

反证法，令 $t_1\in[0,1]$ 为 γ 与$\partial B_2(p)$ 的第一个相交时刻，并令 $t_0\in[0,1]$ 定义为

$$t_0:=\sup\{t<t_1:\gamma(t)\notin B_4(p)\}\,.$$

通过这样的选择，我们可以估计

$$\frac{3}{2}\delta\geq\int_{t_0}^{t_1}\frac{|\dot\gamma|(t)}{\mathsf{d}(p,\gamma(t))\vee 1}dt=\int_{t_0}^{t_1}\frac{|\dot\gamma|(t)}{\mathsf{d}(p,\gamma(t))}dt\geq\int_{t_0}^{t_1}\frac{|\dot\gamma|(t)}{4}dt\geq\frac{1}{2}\,,$$

从而得到所需的矛盾，因为 $\delta \le \delta_0 \le 1/6$。另一方面，我们有

$$\mathsf{d}(p,\gamma(t)) \le \mathsf{d}(p,q) + \mathsf{d}(q,\gamma(t)) \le \mathsf{d}(p,q) + Lt\,.$$

因此，考虑到（4.18），我们可得

$$\frac{3}{2}\delta \ge \int_0^1 \frac{|\dot\gamma|(t)}{\mathsf{d}(p,\gamma(t))}dt \ge \int_0^1 \frac{L}{\mathsf{d}(p,q)+Lt}dt = \log\left(1+\frac{L}{\mathsf{d}(p,q)}\right).$$

于是，根据我们对 δ_0 的选择，$L/\mathsf{d}(p,q) \le 2\delta$。通过观察 $\mathsf{d}(q,b) \le L \le 2\delta\,\mathsf{d}(p,q)$，我们便可得出结论。由于 $b \in B_\delta(q)$ 是任意的，我们证明了 $B_\delta(q) \subset B_{2\delta\mathsf{d}(p,q)}(q)$。□

命题 4.19。固定 $n \in \mathbb{N}$。设 $(X,\mathsf{d}\ p)$ 是一个完备、可分、正则的、非紧且测地的带基点度量空间。设d 和 δ_0 分别为引理*4.18*给出的距离和参数。假设

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\mathscr{H}^n(B_R(p))}{R^n} = 0\,. \tag{4.19}$$

那么，对每个 $\delta \in (0,\ \delta_0]$ 都存在 $T(\delta) > 20$ 使得下述结论成立：存在一个局部有限的 $(n-1)$维单纯复形 Y以及一个正则连续映射 $\pi\colon (X \setminus B_{T(\delta)}(p),\ \mathsf{d}) \to Y$，其纤维的直径小于 δ。特别地，

$$UW_{n-1}(X \setminus B_{T(\delta)}(p), \widetilde{\mathsf{d}}) \le \delta\,.$$

证明。我们的目标是证明 $(X \setminus B_{T(\delta)}(p),\ \mathsf{d})$ 满足定理 4.16的假设。

任取 $\delta \in (0,\ \delta_0]$ 并取任意 $q \in X$ 使得 $\mathsf{d}(p,\ q) > 20$。给定任意 $\eta \in [0,\delta]$，注意到对于每个 $q' \in \partial B_{(2\delta+\eta)\mathsf{d}(p,q)}(q)$，我们有

$$\mathsf{d}(p,q') \ge \mathsf{d}(p,q) - (2\delta+\eta)\mathsf{d}(p,q) \ge \frac{1}{2}\mathsf{d}(p,q)\,. \tag{4.20}$$

现在假设 $A \subset \partial B_{(2\delta+\eta)\mathsf{d}(p,q)}(q)$ 的直径$\mathsf{d}(A) = \rho \ll \delta_0$，其中diam$\mathsf{d}$ 表示相对于距离 d 计算的直径。特别是，存在 $a,b \in A$ 使得 $\mathsf{d}(a,b) > \frac{\rho}{2}$，因此 $b \notin B_{\rho/2}(a)$。考虑到 (4.20)（它也保证 $\mathsf{d}(p,a) > 10$），并应用引理 4.18，我们得到

$$B_{\rho\mathsf{d}(p,q)/8}(a) \subset B_{\rho\mathsf{d}(p,a)/4}(a) \subset \widetilde{B}_{\rho/2}(a)\,.$$

因此，$b \notin B_{\rho\mathsf{d}(p,q)/8}(a)$，并记 $\mathrm{diam}_{\mathsf{d}}$ 为相对于距离 d 计算的直径，我们得出

$$\mathrm{diam}_{\mathsf{d}}(A) \ge \frac{\mathsf{d}(p,q)}{8}\rho = \frac{\mathsf{d}(p,q)}{8}\,\mathrm{diam}_{\widetilde{\mathsf{d}}}(A)\,. \tag{4.21}$$

下文中，对于每个 $d,\zeta > 0$，我们分别用 $\mathscr{H}^d_\zeta$ 和 $\widetilde{\mathscr{H}}^d_\zeta$ 表示关于 d 和 $\widetilde{\mathsf{d}}$ 的 ζ-近似 d 维豪斯多夫测度。相应地，我们用 $\mathscr{H}^d$ 和 $\widetilde{\mathscr{H}}^d$ 表示相应的

d维豪斯多夫测度。由（4.21），对每个 $\rho \ll \delta_0$，我们可得

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathscr{H}}_{\rho}^{n-1}(\partial B_{(2\delta+\eta)\mathsf{d}(p,q)}(q)) \\
&= \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}_{\widetilde{\mathsf{d}}}(A_i)^{n-1} \,:\, \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \partial B_{(2\delta+\eta)\mathsf{d}(p,q)}(q),\ \mathrm{diam}_{\widetilde{\mathsf{d}}}(A_i) \le \rho\right\} \\
&\le \inf\Bigg\{\frac{8^{n-1}}{\mathsf{d}(p,q)^{n-1}}\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}_{\mathsf{d}}(A_i)^{n-1} \,:\, \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \partial B_{(2\delta+\eta)\mathsf{d}(p,q)}(q)\,, \\
&\qquad \mathrm{diam}_{\mathsf{d}}(A_i) \le \rho\,\frac{\mathsf{d}(p,q)}{8}\Bigg\} = \frac{8^{n-1}}{\mathsf{d}(p,q)^{n-1}}\ \mathscr{H}^{n-1}_{\rho\frac{\mathsf{d}(p,q)}{8}}\left(\partial B_{(2\delta+\eta)\mathsf{d}(p,q)}(q)\right).
\end{aligned}$$

令 $\rho \to 0$ 趋于极限，我们得出：对于每个满足 $\mathsf{d}(p,\ q) > 20$ 的 $q \in X$，以及每个 $\eta \in [0,\delta]$，都有

$$\widetilde{\mathscr{H}}^{n-1}(\partial B_{(2\delta+\eta)\mathsf{d}(p,q)}(q)) \le \frac{c}{\mathsf{d}(p,q)^{n-1}}\ \mathscr{H}^{n-1}(\partial B_{(2\delta+\eta)\mathsf{d}(p,q)}(q))\,, \tag{4.22}$$

为简化记号，我们令 $c = 8^{n-1}$。

应用命题 4.17 并结合 $x = q,\ \ \alpha = 2\delta\mathsf{d}(p,\ q)$ 以及 $\beta = 3\delta\mathsf{d}(p,\ q)$，我们得到

$$⨍_{2\delta\mathsf{d}(p,q)}^{3\delta\mathsf{d}(p,q)} \mathscr{H}^{n-1}(\partial B_s(q))ds \le C_n\,\frac{\mathscr{H}^n(B_{3\delta\mathsf{d}(p,q)}(q)) - \mathscr{H}^n(B_{2\delta\mathsf{d}(p,q)}(q))}{\delta\mathsf{d}(p,q)}\,.$$

因此，存在 $\eta(q) \in (0,\ \delta)$，使得

$$\mathscr{H}^{n-1}(\partial B_{(2\delta+\eta(q))\mathsf{d}(p,q)}(q)) \le C_n\,\frac{\mathscr{H}^n(B_{3\delta\mathsf{d}(p,q)}(q)) - \mathscr{H}^n(B_{2\delta\mathsf{d}(p,q)}(q))}{\delta\mathsf{d}(p,q)}\,. \tag{4.23}$$

(4.22) 与 (4.23) 结合可得

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{H}}^{n-1}(\partial B_{(2\delta+\eta(q))\mathsf{d}(p,q)}(q)) &\le c\,C_n\frac{\mathscr{H}^n(B_{3\delta\mathsf{d}(p,q)}(q))}{\delta\mathsf{d}(p,q)^n} \\
&\le c\,C_n\frac{\mathscr{H}^n(B_{2\mathsf{d}(p,q)}(p))}{\delta\mathsf{d}(p,q)^n}\,.
\end{aligned}$$

由 (4.19) 可知，存在 $T(\delta) > 20$，使得

$$\widetilde{\mathscr{H}}^{n-1}(\partial B_{(2\delta+\eta(q))\mathsf{d}(p,q)}(q)) \le \varepsilon_n\delta^{n-1}\,, \qquad \forall q \in X \setminus B_{T(\delta)}(p)\,,$$

其中 ε_N 是定理 4.16给出的常数。最后，我们推导出

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{H}}_{\infty}^{n-1}(\partial B_{(2\delta+\eta(q))\mathsf{d}(p,q)}(q) \cap (X \setminus B_{T(\delta)}(p))) &\le \widetilde{\mathscr{H}}_{\infty}^{n-1}(\partial B_{(2\delta+\eta(q))\mathsf{d}(p,q)}(q)) \\
&\le \widetilde{\mathscr{H}}^{n-1}(\partial B_{(2\delta+\eta(q))\mathsf{d}(p,q)}(q)) \\
&\le \varepsilon_n\delta^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

由引理 4.18 可应用定理 4.16 于度量空间$\widetilde{}(X \setminus B_{T(\delta)}(p),\ \mathsf{d})$，从而完成证明。□

定理 *4.14* 的证明。我们固定 $\delta < \min\{\delta_0/2, \varepsilon/8\}$，其中 δ_0 是引理 4.18 中确定的参数，$\varepsilon = \varepsilon(n)$ 是推论A.2中出现的常数。

根据命题 4.19，存在一个局部有限的（$n-1$）维单纯复形 Y 以及一个正则连续映射 $\pi\colon X \setminus B_{T(\delta)}(p) \to Y$，使得每个纤维 $\pi^{-1}(y)$，$y \in Y$，的直径均为 $\le \delta$。因此，每个 $y \in Y$ 都有一个相对紧开邻域 V_y，使得 $\mathrm{diam}_{\widetilde{\mathsf{d}}}(\pi^{-1}(V_y)) \le 2\delta$。事实上，若非如此，则可以找到 $y \in Y$ 以及一列递减的开邻域 $\{V_y^i\}_{i\in\mathbb{N}}$，它们都包含 y，使得

$$\mathrm{diam}_{\widetilde{\mathsf{d}}}(\pi^{-1}(V_y^i)) > 2\delta\,, \quad \cap_{i\in\mathbb{N}} \overline{V}_y^i = \{y\}\,.$$

因此，对于每个 i，我们都可以找到 $x_i \in \pi^{-1}(V_y^i)$，使得 $\widetilde{\mathsf{d}}(x_i, \pi^{-1}(y)) > \frac{\delta}{2}$。由于$\pi$ 是正则的，序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 包含在一个紧集内，因此（取子序列后）它收敛到极限 $x \in X$。将前述条件取极限，一方面有 $\widetilde{\mathsf{d}}(x, \pi^{-1}(y)) \ge \frac{\delta}{2}$。另一方面，我们有

$$\overline{x} \in \cap_{i\in\mathbb{N}}\, \pi^{-1}(\overline{V}_y^i) = \pi^{-1}(y)\,,$$

从而导出矛盾。

考虑 Y 的覆盖 $\{V_y\}_{y\in Y}$。由于 Y 是一个局部有限单纯复形，且其拓扑维数为 $n-1$，因此存在 $\{V_y\}_{y\in Y}$ 的一个局部有限细化 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$，其重数至多为 n。丢弃所有满足 $V_\alpha \cap \pi(X \setminus B_{T(\delta)}(p)) = \emptyset$ 的集合 V_α 后，我们得到 $\pi(X \setminus B_{T(\delta)}(p))$ 的一个局部有限覆盖，仍记作 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$，其重数至多为 n。对每个 $\alpha \in \mathbb{N}$，定义 $\widehat{U}_\alpha := \pi^{-1}(\widehat{V}_\alpha)$。注意，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ 是 $X \setminus B_{T(\delta)}(p)$ 的一个局部有限开覆盖，重数为$(\{\widehat{U}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}) \le n$。令

$$A := \{\alpha \in \mathbb{N} : \widehat{U}_\alpha \cap B_{2T(\delta)}(p) = \emptyset\}\,.$$

考虑一个枚举 $m\colon \mathbb{N}\setminus\{0\} \to A$，并定义开覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，其覆盖 X 为

$$U_0 := B_{2T(\delta)}(p) \cup \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}\setminus A} \widehat{U}_\alpha\,, \qquad U_i = \widehat{U}_{m(i)}, \quad i \in \mathbb{N}\,.$$

根据构造，$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一个局部有限开覆盖，且满足 $\mathbf{mult}(\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \le n$。此外，推论 A.2 保证，对于每个有界（开）集 $U \subset X$ 和 $u \in U$，由包含映射诱导的自然映射 $i_*\colon \pi_1(U,u) \to \pi_1(X,u)$ 的像是一个几乎幂零子群，因此也是可和子群。因此，覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是可和的。为清楚起见，我们指出，[37] 的主要结果足以验证最后这一结论。

为应用定理 4.6，我们还需证明 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是无穷远处可和。对于每个 $\alpha \in \mathbb{N}$ 集合 V_α 都包含于 $V_{y(\alpha)}$ 对于

某个 $y(\alpha) \in Y$。因此 直径~$\mathsf{d}(U_i) \leq 2\delta$ 对每个 $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$。特别地，对于每个 $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，任取 $p_i \in U_i \subset X \setminus B_{T(\delta)}(p)$，引理 4.18 可得

$$U_i \subset \widetilde{B}_{2\delta}(p_i) \subset B_{4\delta\mathsf{d}(p,p_i)}(p_i)\,, \tag{4.24}$$

其中我们使用了 $\delta \leq \delta_0/2$。我们通过设定来引入序列 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$W_0 := X\,, \qquad W_i := X \setminus B_{\frac{1}{2}\mathsf{d}(p,p_i)}(p)\,, \quad i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\,.$$

我们声称，定义4.5 中的条件 (i)-(iv) 成立。条件 (i) 显然成立，因为 X 是适当的，而条件 (iii) 由（4.24）推出。此外，由于 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是局部有限的，我们可推出 $\mathsf{d}(p,p_i) \to \infty$ 当 $i \to \infty$ 时成立，因此 (ii) 成立。为验证 (iv)，我们应用推论 A.2 得到，对于每个 $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，包含映射的像

$$\pi_1(B_{4\delta\mathsf{d}(p,p_i)}(p_i), p_i) \to \pi_1(B_{4\delta\mathsf{d}(p,p_i)/\varepsilon}(p_i), p_i)$$

是几乎幂零的。我们对 δ 的选择保证了 $B_{4\delta\mathsf{d}(p,p_i)/\varepsilon}(p_i) \subset W_i$。因此，$U_i$ 在 W_i 中对每个 $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$都是可和的。由定理 4.6 我们得出 $||X|| = 0$。□

5. 边界为空的 RCD(0,3) 空间的分类

本节的目标是证明定理 1.10。定理 1.11 由定理 1.10与 [14, 36] 中的结果结合即可得出，如下所示。

假设定理 1.10 成立，证明定理 1.11。若 X 是非紧拓扑流形，则由定理 1.10 可得结论。若 X 是紧致拓扑流形，我们分两种情况讨论。若 $\pi_1(X)$ 是无限的，~则由定理 1.3~（结合 [89]），X 的万有覆盖 X 分裂出一条直线，因此 X 是非负截面曲率的亚历山德罗夫空间。根据 [67]，作为非负截面曲率的亚历山德罗夫空间对离散群取商的结果，X 也同样是非负截面曲率的亚历山德罗夫空间，例如由 [1,推论 8.7]可知。若 $\pi_1(X)$ 是有限的，则 X 根据 Perelman 对几何化猜想的证明，是一个球面流形。

因此，我们假设 X 不是拓扑流形。根据 [19, 定理 1.8]，，X 至少有一点，其所有切锥都与$C(\mathbb{RP}^2)$同胚。根据 [36, 定理 1.1，点 3]处的 X 按照 [14,定义 1.6]的意义是不可定向的。因此，根据 [14, 定理 3.1]，X 存在一个分歧双重~覆盖~（X，~d）~，并配备一个对合等距变换 $\Gamma:\ X \to X$，使得$\widetilde{X}/\langle\Gamma\rangle \cong X$等距。根据 [36, 定理 1.1 和引理 4.8]，，($\widetilde{X}$，~d $\mathscr{H}^3$)是一个无边界的 RCD(0，3)空间，且为拓扑流形；Γ 的不动点集局部有限且非空。

现在假设~X~紧致，根据~~~

~我们假设 X 具有有限基本群。在这种情况下， X 是以 $\mathbb{RP}^2$ 为底的球面悬挂，证明方法与 [36, 推论 416] 相同（他们只用到~这一假设， $K>0$ 从而得到 X 具有有限基本群）。

~现在假设 X 是非紧的。在这种情况下， X 也是非紧的。根据定理 1.10， X 要么是具有非负截面曲率的亚历山德罗夫空间，要么与 $\mathbb{R}^3$同胚。在前一种情况下， X也具有非负截面曲率，因此我们可以假设$\tilde{X}$ 与 $\mathbb{R}^3$同胚。考虑 $\tilde{X}$的无穷远紧化，并利用显然的识别将其记为 $\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}$。考虑由 $\Gamma:\ \tilde{X}\to\tilde{X}$诱导的同胚 $\Gamma_\infty:\ \mathbb{R}^3\cup\{\infty\}\to\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}$，并注意到 $\Gamma_\infty(\infty)=\infty$。根据 [84, 定理 4]， Γ_∞ 恰有两个不动点，因此$(\mathbb{R}^3\cup\{\infty\})/\Gamma_\infty$与以 $\mathbb{RP}^2$ 为底的球面悬挂同胚，这是由 [50, 定理 1.1]得出的。因此， $X\cong\tilde{X}/\Gamma$与$C(\mathbb{RP}^2)$同胚，证明完毕。□

下面我们转向定理1.10的证明。与 [81,63], 类似，出发点是以下结果：

引理 5.1。 设$(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^3)$ 是一个拓扑流形型$\mathrm{RCD}(0,3)$ 空间。则 $\pi_2(X)=\{0\}$，除非 X 的万有覆盖等距地分裂为 $\mathbb{R}\times Z$，其中(Z,d_Z) 是一个与 S^2同胚且具有非负曲率的亚历山德罗夫空间。

证明直接沿用 [81, 引理 2]中讨论的光滑情形下的论证。为求完整起见，我们将在下文讨论细节。

引理 5.1 的证明。假设 $\pi_2(X)\neq 0$。记 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^3)$ 为 X 的万有覆盖，并赋予其自然的 RCD(0, 3) 结构（见 [72,定理 1.1] 和 [89]）， $\pi_2(X)\neq 0$ 也成立，且 X 是单连通的。由赫urewicz定理， $H_2(X,\mathbb{Z})\equiv\pi_2(X)$。因此 $H_2(X,\mathbb{Z})\neq 0$，尤其是 X 必须是非紧致的；否则由庞加莱对偶和泛系数定理可得 $H_2(X,\mathbb{Z})\equiv H_1(X,\mathbb{Z})=0$，因为 X 是单连通的。由球面定理， [78] 存在一个嵌入的$S^2\subset X$，它在同伦意义下非平凡。我们断言， $X\setminus S^2$ 至少有两个连通分支。否则， X 中存在一个环路，与 S^2 恰好横截相交一次（注意，我们可以在 3维流形 X 上赋予与其拓扑相容的唯一光滑结构）。于是，该环路与这样的 S^2 的链环数为 ±1，这与链环数在同伦下不变且 X 是单连通的相矛盾。接下来我们断言， $X\setminus S^2$ 的任何连通分支都不可能是紧致的。事实上，若其中一个是紧致的，那么 S^2 将是 X 中某个紧致子流形的边界。因此它在同调意义下，进而在同伦意义下是平凡的，矛盾。由于 $X\setminus S^2$ 至少有两个连通分支， X 有两个端。因此，由 [43] 可知它分裂出一条直线。更准确地说，作为度量测度空间， $X=\mathbb{R}\times Z$，其中 $(Z,\mathsf{d}_Z,\mathscr{H}^2)$ 是一个紧致的 RCD(0, 2)空间。由 [67, 定理 1.1],，(Z,d_Z) 是一个具有非负

曲率的亚历山德罗夫空间。由于我们假设 X 是一个拓扑流形（边界为空），Z 也必定是一个拓扑曲面（边界为空）。由于 X 是单连通的，Z 也必定是单连通的。因此，正如我们所断言的，Z 与 S^2 同胚。□

现在我们区分两种情形：X 是单连通的情形，以及它不是单连通的情形。在第一种情形下，万有覆盖必定分裂出一条直线。我们指出，尽管结论与光滑情形完全类似，但我们的证明在最后一步有所不同：我们依赖定理 3.1 ，而非极小曲面方法。

引理 5.2. 设$(X,\mathsf{d},\mathscr{H}^3)$是一个非紧致的$\mathrm{RCD}(0,3)$空间，且 X是一个拓扑3维流形。如果 X 不是单连通的，那么万有覆盖$(\tilde{X},\tilde{\mathsf{d}})$分裂出一条直线，并且$(\tilde{X},\tilde{\mathsf{d}})$是一个非负曲率的亚历山德罗夫空间。

证明。由引理 5.1 可知，要么 $\pi_2(X)=0$，要么 $(\tilde{X},\tilde{\mathsf{d}})$ 是一个非负曲率的亚历山德罗夫空间，因为它是 $\mathbb{R}$ 与一个非负曲率的亚历山德罗夫空间的乘积。在第二种情形下，(X,d) 也是一个非负曲率的亚历山德罗夫空间。因此，我们可以假设 $\pi_2(X)=0$。在此假设下，X 是可缩的。事实上，由于 X 是一个非紧致的3维流形，$H_3(X,\mathbb{Z})=0$。由于 $\pi_1(X)=\pi_2(X)=0$，根据赫urewicz定理，$\pi_3(X)=0$ 也成立。因此，根据怀特海德定理，X 与一个点同伦等价，即它是可缩的。根据史密斯理论，$\pi_1(X)$必定无挠。因此，如果 X 不是单连通的，那么 $\pi_1(X)$有一个与 $\mathbb{Z}$同构的子群。根据定理 3.1，X 分裂出一条直线，即它同构于 $\mathbb{R}\times Z$，其中$(Z,\mathsf{d}_Z,\mathscr{H}^2)$是一个RCD(0, 2)空间。根据 [67,定理 1，1]，(Z,d_Z)是一个非负曲率的亚历山德罗夫空间。因此，$(\tilde{X},\tilde{\mathsf{d}})$和$(X,\mathsf{d})$也都是非负曲率的亚历山德罗夫空间。□

我们已经可以完成定理 1.10的证明。

定理 1.10 的证明。若 $\pi_2(X)\neq 0$ 或 $\pi_1(X)\neq 0$，则分别由引理 5.1 和引理 5.2 可知，(X,d) 是一个非负曲率的亚历山德罗夫空间，其万有覆盖等距地分裂出一条直线。 [83, Part 2] 中得到的三维非紧、非负曲率亚历山德罗夫空间的分类表明，任何这样的空间都存在一个诱导相同拓扑的非负截面曲率光滑完备度量。因此，我们可以假设 $\pi_1(X)=\pi_2(X)=0$。根据上文引理 5.2 证明中的相同论证，在这些假设下，X 是可缩的。由于任何3维流形都可三角剖分，由定理 4.1 可得 $\|X\|=0$。根据 [9,定理 1]，X 与 $\mathbb{R}^3$同胚。□

备注 5.3. 由定理 1.10 的证明可知，以下结论成立：若 $(X,\mathsf{d},\mathscr{H}^3)$ 是一个 $\mathrm{RCD}(0,3)$ 空间，与一个 3维流形同胚，且

具有欧几里得体积增长，即，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mathscr{H}^3(B_r(p))}{r^3}>0$$

对于某个（因而对于所有）$p\in X$，则 X 与 $\mathbb{R}^3$ 同胚。事实上，根据引理 5.1 以及欧几里得体积增长假设，$\pi_2(X)=0$。因此，万有覆盖 $(X,\mathrm{d},\mathscr{H}^3)$ 是可缩的，所以正如引理 5.2 的证明中所指出的，$\pi_1(X)$ 必须无挠。另一方面，正如 [72,定理 1.6] 中所证明的，任何具有欧几里得体积增长的 RCD$(0,n)$ 空间都有有限的 π_1（注意，根据 [89]，修正基本群与通常的基本群一致）。因此，$\pi_1(X)=0$，结论得证。

我们指出，近期有人用不同的方法在 [19,定理1.9] 中得到了相同的结论。

6. 进一步的应用

本节将给出关于具有非负里奇曲率的流形以及 $\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间的新拓扑限制。首先，我们利用关于单纯体积的消失定理1.7，得到对那些存在完备度量且满足 $\mathrm{Ric}\geq 0$ 的非紧流形在维数 4下的拓扑新限制。然后，借助定理 4.8，我们得到任意维数下对具有非负里奇曲率（以及 $\mathrm{RCD}(0,n)$空间）且具有最大体积增长的流形的限制。以下两个主要结果是命题 6.1和 6.2 。

命题 6.1。 存在一个无限族非紧致、单端、单连通的4维流形，它们不允许存在任何具有非负里奇曲率的完备度量。

命题 6.2。 对于每个 $n\geq 4$，流形 $S^{n-2}\times\mathbb{R}^2$ 都不存在具有非负里奇曲率和欧几里得体积增长的完备度量。

备注 6.3。 众所周知，对于每个 $n\geq 5$，$S^{n-3}\times\mathbb{R}^3$ 都存在具有非负里奇曲率和欧几里得体积增长的完备度量。将 $S^{n-3}\times\mathbb{R}^3$ 视为远离中心 S^{n-3} 处的 $\mathbb{R}_+\times S^2\times S^{n-3}$，即可通过双扭曲积设定构造此类度量。

为了证明命题 6.1 我们将依赖以下结果：

引理 6.4。 设 M^4 是一个光滑、紧致、紧致、定向的带边界流形，其维数为4。若 $\|M\setminus\partial M\|=0$，则 $\overline{\partial M}$ 的所有连通分支都是图流形。

证明。 根据 [46, 例，p. 17], $\|\partial M\|=0$，另见 [64, 定理 6.4] 及其后的讨论。因此，M 的边界的所有连通分支的单纯体积均为零。根据 Perelman 对几何化猜想的证明以及 [85]（另见 [3, 定理 2.7]），单纯体积为零的闭定向3维流形是图流形。□

命题 6.1 的证明。设 N 是任意一个定向闭双曲三维流形。根据 [57, 第七章定理 2], ，存在一个光滑、紧致、连通且定向的4维流形 M ，其边界 ∂M 与 N微分同胚。通过对一族生成 $\pi_1(M)$ 的互不相交的圈反复进行手术，我们可以假设 $M\setminus\partial M$是单连通的。此外，它显然是单端的。我们断言，任何这样的流形都不允许具有 Ric ≥ 0 的完备黎曼度量。事实上， N 不是图流形，因此根据引理 6.4， $\|M\setminus\partial M\|>0$。由定理 1.7 可得结论。□

注记 6.5。 依赖更一般的定理4.1，完全相同的论证也排除了在命题 6.1, 所考虑的流形类上存在 RCD(0,4) 结构的可能性。

命题 6.2 是以下更一般结果及其后续推论的结果。

命题 6.6。 设 $n\geq 3$，并设 $(X,\mathsf{d}\ \mathscr{H}^n,p)$ 是一个具有欧几里得体积增长的 $\mathrm{RCD}(0,n)$ 空间

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\mathscr{H}^n(B_r(p))}{r^n}\geq v>0.$$

假设存在一个紧集 $K\subset X$，使得 $X|K$ 与 $Y\times(0,+\infty)$ 同胚，其中 Y 是道路连通拓扑空间。那么，存在 $C=C(n,v)>0$，使得 $\pi_1(Y)$ 的基数至多为 $C(n,v)$。

证明。令 $C(n,v)$ 为定理 4.8 给出的常数。反设 $\pi_1(Y)$ 的基数严格大于 $2C(n,v)$。令 $x\in K$，并令 $r>0$ 足够大，使得 $K\subset B_r(x)$，且定理 4.8 的结论成立。令 $C'\subset X$ 为 $B_{5r}(x)\setminus B_{2r}(x)$ 中包含 $B_{4r}(x)\setminus B_{3r}(x)$ 的路径连通分支的内部，该分支由定理 4.8 保证存在。再令 $C\subset X$ 为 C' 中包含 $B_{4r}(x)\setminus B_{3r}(x)$ 的路径连通分支。可以用定理 4.8 中采用的相同方法验证其存在。特别地， C 是一个包含 $B_{4r}(x)\setminus B_{3r}(x)$ 的开道路连通集。令

$$A:=\left(C\cup B_{4r}(x)\right)\setminus K\,,\quad B:=C\cup\left(X\setminus\overline{B}_{3r}(x)\right).$$

注意，由于 Y 道路连通，这些集合都是道路连通的。此外，它们的交集 $A\cap B$ 等于道路连通集 C。而且， $A\cup B=X\setminus K$，并且 $\pi_1(X\setminus K)$ 中的每个元素都可由 A 和 B 中的代表元表示。考虑一点 $q\in A\cap B$ 以及由自然包含映射诱导的推前映射:

$$i_*:\pi_1(A\cap B,q)\to\pi_1(X\setminus K,q)\,,\quad j_*:\pi_1(A\cap B,q)\to\pi_1(A,q)\,,$$

and

$$h_*:\pi_1(A\cap B,q)\to\pi_1(B,q)\,.$$

根据定理 4.8， $i_*(\pi_1(A\cap B,\ q))$ 的基数至多为 $C(n,\ v)$。由于$\pi_1(A)$ 和 $\pi_1(B)$ 包含 $\pi_1(X\setminus K)$ 的副本，而其基数大于

$2C(n,\ v)$，存在 $g \in \pi_1(X \setminus K)$，其代表元为 $g_a \in \pi_1(A,\ q) \setminus j_*(\pi_1(A \cap B,\ q))$ 和 $g_b \in \pi_1(B,\ q) \setminus h_*(\pi_1(A \cap B,\ q))$。根据塞弗特 - 范坎彭定理，自然映射

$$k_* : \pi_1(A, q) *_{\pi_1(A \cap B, q)} \pi_1(B, q) \to \pi_1(U)$$

是一个同构。特别地，由于 $k_*(g_a g_b^{-1}) = 1$，我们推得$g_a g_b^{-1} = 1$ 在融合积中成立，从而与 [66, 定理 2.6，第 187]页相矛盾。□

推论 6.7。设 $n \geq 3$，且 (M^n, g) 是具有非空连通边界的光滑紧流形。若 $M \setminus \partial M$ 具有欧几里得体积增长的非塌缩$\mathrm{RCD}(0, n)$ 结构，则 $\pi_1(\partial M)$ 是有限的。

Appendix A. A Margulis lemma for $\mathrm{CD}(K, N)$ spaces

在证明单纯体积消失定理（定理4.1）时，我们用到了以下适用于RCD 空间的马古利斯引理:

定理 A.1。对于任意 $K \leq 0$ 和 $1 \leq N < \infty$，存在一个常数$\varepsilon := \varepsilon(K, N) > 0$，使得对于任意$\mathrm{RCD}(K, N)$空间$(X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$以及 $p \in X$，包含映射的推前像

$$i_* : \pi_1(B_\varepsilon(p), p) \to \pi_1(B_{10}(p), p) \tag{A.1}$$

是几乎幂零的。

通过缩放，定理 A.1 可得以下结论:

推论 A.2. 对于每个 $1 \leq N < \infty$，存在一个常数 $\varepsilon := \varepsilon(N) > 0$使得对于每个$\mathrm{RCD}(0, N)$ 空间$(X, \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$，$p \in X$和 $R > 0$ 包含映射的像

$$\pi_1(B_{\varepsilon R}(p), p) \to \pi_1(B_R(p), p)$$

是几乎幂零的。

注记 A.3. 采用与定理 A.1证明中完全相同的策略，可以证明适用于无分支且半局部单连通$\mathbf{CD}(K, N)$ 空间的马古利斯引理版本。

对于光滑黎曼流形，定理 A.1 可由 V. Kapovitch 和 B. Wilking 在 [55]中提出的一个更强结果推出。他们证明，存在常数 $0 < \varepsilon(K, N) < 1$和 $C(K, N) > 0$，使得如果 (M^N, g)是具有 $\mathrm{Ric} \geq K$ 的完备黎曼流形，那么其像

$$i_* : \pi_1(B_\varepsilon(p), p) \to \pi_1(B_{10}(p), p)$$

拥有一个指数不超过 $C(K,\ N)$ 的幂零子群。在最近的 [37] 中，对于 $\mathrm{RCD}(K,\ N)$ 空间的像，得到了相同的有效虚幂零性结论（$X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m},\ p$）

$$i_* : \pi_1(B_\varepsilon(p), p) \to \pi_1(X, p)\,.$$

人们预期，若以 [55] 中为处理合成框架而引入的思想来推进 [37] 的策略，就能将 [55] 中的马古利斯引理完整推广到 $\mathrm{RCD}(K,\ N)$ 空间。本文得到了一个较弱但局部的马古利斯引理版本，其中幂零子群的指数没有得到有效控制。尽管这一结论似乎并非最优，但已足以满足本文的需要。证明采用了不同于 [55, 37]，的策略，并基于 [16]。

定理A.1 的证明推迟到附录末尾。除此之外[16], 主要技术工具将是一个局部 Bishop-Gromov 不等式，它对赋有自然长度结构的$\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间的开子集的万有覆盖成立。

注记A.4。设 (X,d) 是一个长度度量空间（不一定完备）。设 $\widetilde{X}$ 是一个道路连通拓扑空间，且 $\pi\colon \widetilde{X}\to X$ 是一个覆盖映射。我们在 $\widetilde{X}$ 上定义距离 $\widetilde{\mathsf{d}}$ 如下：

$$\widetilde{\mathsf{d}}(a,b):=\inf\{\mathrm{length}^{\mathsf{d}}(\pi\circ\gamma):\gamma\in C([0,1],\widetilde{X})\ \ \gamma(0)=a,\gamma(1)=b\}\,.$$

根据此定义，显然 $\pi\colon(\widetilde{X},\widetilde{\mathsf{d}})\to(X,\mathsf{d})$ 是一个局部等距映射。具体而言，对每个 $p\in\widetilde{X}$，都存在一个邻域 $N_p\ni p$，使得 $\pi|_{N_p}$ 是一个等距映射。因此，对每个 $\gamma\in C([0,1],\widetilde{X})$，我们有

$$\mathrm{length}^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\gamma)=\mathrm{length}^{\mathsf{d}}(\pi\circ\gamma)\,,$$

因此 $\gamma\in AC([0,1],\widetilde{X})$ 当且仅当 $\pi\circ\gamma\in AC([0,1],X)$。此外，$(\widetilde{X},\widetilde{\mathsf{d}})$ 是一个长度度量空间。最后，如果 $\mathfrak{m}$ 是 X 上的一个测度，则存在唯一的测度 $\widetilde{\mathfrak{m}}$ 定义在 $\widetilde{X}$ 上，使得对于上述每个 N_p，都有 $\pi_\#(\widetilde{\mathfrak{m}}\llcorner N_p)=\mathfrak{m}\llcorner\pi(N_p)$。

我们用 $v_{K,N}(r)$ 表示 $\mathsf{CD}(K,N)$ 条件下模型空间中半径为 r 的球的体积。

引理 *A.5.* 设 $(X,\ d\ \mathfrak{m})$ 是一个满足 $K\ \le\ 0$ 和$1\le N<\infty$ 的 ***RCD(K, N)*** 空间。设 $O\subset X$ 是一个开、有界且道路连通的集合，并称 d 为由 d 在 O 上诱导的长度距离。给定一个道路连通的覆盖$\widetilde{O}$ $\pi\colon\widetilde{O}\to O$，在 $\widetilde{O}$ 上赋予长度距离 $\widetilde{d}$ 和测度 $\widetilde{\mathfrak{m}}$；该测度由提升 d 和 $\mathfrak{m}$ 得到，参见注 *A.4*。对于每个 $\widetilde{p}\in\widetilde{O}$，函数

$$(0,\mathsf{d}(\pi(\widetilde{p}),X\setminus O))\ni r\mapsto\frac{\widetilde{\mathfrak{m}}(B^{\widetilde{\mathsf{d}}}_r(\widetilde{p}))}{v_{K,N}(r)}\,,\tag{A.2}$$

单调不增。此外，若 $\mathfrak{m}=\mathscr{H}^N$，则 (A.2) 中的函数有上界 1。

证明。 注意，(O,d) 和 $(\widetilde{O},\widetilde{\mathsf{d}})$ 局部等距，也就是说，对每个 $p\in\widetilde{O}$，都存在一个邻域 $N_p\ni p$，使得 d 和 $\widetilde{\mathsf{d}}$ 在$N_p\times N_p$上相同。特别地，由于 (X,d) 根据 [35]，是无分支的长度空间，$(\widetilde{O},\widetilde{\mathsf{d}})$ 也无分支。此外，由于 $\pi\colon(\widetilde{O},\widetilde{\mathsf{d}})\to(O,\mathsf{d})$ 是一个局部等距映射，$(\widetilde{O},\widetilde{\mathsf{d}})$ 也无分支。

断言 1： 每对 $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in O$，只要 $\mathsf{d}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) < \mathsf{d}(\pi(\widetilde{p}), X \setminus O)$，就能在 (O,d) 中由一条测地线连接。

为证明断言 1，注意到由于 (O,d) 是长度空间，存在一个曲线序列 $(\widetilde{\gamma}_n) \subset AC([0,1], O)$，使得

$$\operatorname{length}^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{\gamma}_n) \leq \widetilde{\mathsf{d}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) + \frac{1}{n}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。考虑序列 $(\gamma_n) \subset AC([0,1], O)$，定义为 $\gamma_n := \pi(\widetilde{\gamma}_n)$，对每个 n 都成立。最终，这些曲线将包含在 O 的某个紧子集中。因此，不妨取未重新标记的子序列，$\gamma_n \to \gamma_\infty \in AC([0,1], O)$ 一致地收敛。此外，根据我们之前的观察，

$$\operatorname{length}^{\overline{\mathsf{d}}}(\gamma_n) = \operatorname{length}^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{\gamma}_n) \leq \widetilde{\mathsf{d}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) + \frac{1}{n}$$

对每个 n 都成立，因此长度 $^{\mathsf{d}}(\overline{\gamma}_\infty) \leq \mathsf{d}(\widetilde{p}, \widetilde{q})$，这由长度的下半连续性可得。令 $\widetilde{\gamma}_\infty$ 为从 $\widetilde{p}$ 出发的 γ_∞ 的提升。一方面，我们有

$$\operatorname{length}^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{\gamma}_\infty) = \operatorname{length}^{\overline{\mathsf{d}}}(\gamma_\infty) \leq \widetilde{\mathsf{d}}(\widetilde{p}, \widetilde{q})\,.$$

另一方面，由于 O 半局部单连通，曲线 γ_n 最终与 γ_∞ 同伦等价。因此 $\widetilde{\gamma}_\infty(1) = \widetilde{q}$。至此，断言的证明完成。

任取 $\widetilde{p} \in O$ 和任意的 $r_0 < \mathsf{d}(\pi(\widetilde{p}), X \setminus O)$。考虑 1-利普希茨函数 $\widetilde{u} \colon O \to \mathbb{R}$，定义为 $\widetilde{u}(q) := \mathsf{d}(\widetilde{p}, q) \wedge r_0$。我们将按照 [21, 第 7] 节的做法，考虑关于 $\widetilde{u}$ 的测度 $\widetilde{\mathfrak{m}}$ 的测度解体。特别地，我们定义传输关系

$$\widetilde{R}_{\widetilde{u}} := \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \widetilde{O} \times \widetilde{O} \,:\, \widetilde{x} \neq \widetilde{y} \text{ and } |\widetilde{u}(\widetilde{x}) - \widetilde{u}(\widetilde{y})| = \mathsf{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y})\}$$

以及相应的传输集 $\widetilde{T}_{\widetilde{u}} := \mathtt{p}_1(\widetilde{R}_{\widetilde{u}})$，其中 $\mathtt{p}_1$ 表示到第一因子的投影。根据我们之前的观察，

$$\widetilde{T}_{\widetilde{u}} = \overline{B}^{\widetilde{\mathsf{d}}}_{r_0}(\widetilde{p})\,.$$

我们还引入分支点集合

$$\widetilde{A} := \{x \in \widetilde{T}_{\widetilde{u}} \,:\, \exists z, w \in \widetilde{X} \text{ with } (x,z), (x,w) \in \widetilde{R}_{\widetilde{u}}, (z,w) \notin \widetilde{R}_{\widetilde{u}}\}\,.$$

相应地，我们考虑无分支传输集 $\widetilde{T}^b_{\widetilde{u}} := \widetilde{T}_{\widetilde{u}} \setminus \widetilde{A}$ 以及无分支传输关系

$$\widetilde{R}^b_{\widetilde{u}} := \widetilde{R}_{\widetilde{u}} \cap (\widetilde{T}^b_{\widetilde{u}} \times \widetilde{T}^b_{\widetilde{u}})\,.$$

由于 (O,d) 是无分支的，因此我们有

$$\widetilde{T}^b_{\widetilde{u}} = \overline{B}^{\widetilde{\mathsf{d}}}_{r_0}(\widetilde{p}) \setminus (\operatorname{Cut}(\widetilde{p}) \cup \{\widetilde{p}\})\,.$$

按照我们对 $\widetilde{u}$ 的选择，很容易看出所有定义的集合都是博雷尔集。

注意，$\widetilde{R}^b_u$ 是 $\widetilde{T}^b_u$ 上的一个等价关系。记 $\widetilde{Q}\subset X$ 为其等价类的集合，则每个 $\alpha\in Q$ 都对应一个集合 $X_\alpha\subset O$，该集合是一条测地线，因此与区间 $I_\alpha\subset\mathbb{R}$ 等距。我们在 Q 上赋予由等价类投影 $\mathfrak{Q}:\widetilde{T}^b_u\to\widetilde{Q}$ 诱导的 σ 代数，并赋予测度 $\widetilde{\mathfrak{q}}:=\mathfrak{Q}_\#(\widetilde{\mathfrak{m}}\llcorner\widetilde{T}^b_u)$。测度分解定理（例如参见 [21, 定理 6.19]）保证存在一个（本质上唯一的）相容的（参见 [21, 定义 6.18]）测度分解，即一个可测映射 $\widetilde{Q}\ni\alpha\mapsto\widetilde{\mathfrak{m}}_\alpha\in\mathrm{P}(O)$，使得

$$\widetilde{\mathfrak{m}}\llcorner\widetilde{T}^b_u=\int_{\widetilde{Q}}\widetilde{\mathfrak{m}}_\alpha\,\widetilde{\mathfrak{q}}(d\alpha)\,.$$

现在考虑任意点 $\widetilde{q}\in B^{\mathsf{d}}_{r_0}(\widetilde{p})$。根据构造，存在一个关于 $\widetilde{q}$ 的开邻域 $U_{\widetilde{q}}$，使得映射

$$\pi_{\widetilde{q}}:=\pi|_{U_{\widetilde{q}}}:(U_{\widetilde{q}},\widetilde{\mathsf{d}})\to(O,\bar{\mathsf{d}})$$

是一个等距映射。通过取一个更小的 $U_{\widetilde{q}}$，不妨设 $\pi_{\widetilde{q}}:(U_{\widetilde{q}},\mathsf{d})\to(\pi(U_{\widetilde{q}}),\mathsf{d})$ 是双射等距映射。接下来，考虑一个 1-利普希茨函数 $u:X\to\mathbb{R}$，使得对于每个 $x\in\pi(U_{\widetilde{q}})$，都有 $u(x):=\widetilde{\mathsf{d}}(\widetilde{p},\pi^{-1}_{\widetilde{q}}(x))$。与之前类似，我们可以得到测度 $\mathfrak{m}$ 在 (X,d) 上关于 u 的测度分解（参见 [22, 第 3]节，了解如何将上述讨论调整到 σ-有限测度的情形）。特别地，与之前类似，我们可以定义对象 R_u、T_u、R^b_u、T^b_u、Q、$\{X_\beta\}_{\beta\in Q}$ 和 $\mathfrak{q}$，并根据 [22, 定理 3.4] 得到一个测度分解

$$\mathfrak{m}\llcorner T^b_u=\int_Q\mathfrak{m}_\beta\,\mathfrak{q}(d\beta)\,. \tag{A.3}$$

这种测度分解是强一致的（见 [21,定义 6.18]），这意味着对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\beta\in Q$，测度 $\mathfrak{m}_\beta$ 集中在 X_β上。此外，由于（X，d $\mathfrak{m}$）是一个 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间，[22, 定理 3.6] 保证，对于 $\mathfrak{q}$- 几乎处处的 $\beta\in Q$，空间（X_β，d $\mathfrak{m}_\beta$）与（I_β，$|\cdot|$，$h_\beta\mathscr{L}^1$）同构（作为度量测度空间），其中 $I_\beta\subset\mathbb{R}$ 是一个区间，h_β是一个 $\mathrm{CD}(K,N)$ 密度的可测函数。因此，根据 [21, 附录 A],，对于 $\mathfrak{q}$-几乎处处的 $\beta\in Q$，该微分不等式

$$\big(h_\beta^{1/(N-1)}\big)''+\frac{K}{N-1}\,h_\beta^{1/(N-1)}\le 0 \tag{A.4}$$

在 I_β上以弱意义成立。最后，[22,引理 3.5] 保证 $\mathfrak{m}(T_u\backslash T^b_u)=0$。

定义集合

$$\widetilde{Q}^{\widetilde{q}}:=\{\alpha\in\widetilde{Q}:\widetilde{X}_\alpha\cap U_{\widetilde{q}}\neq\emptyset\}\qquad Q^{\widetilde{q}}:=\{\beta\in Q:X_\beta\cap\pi_{\widetilde{q}}(U_{\widetilde{q}})\neq\emptyset\}\,.$$

很容易看出这两个集合都是可测的。

命题 2： 存在一个可测双射 $\Pi\colon\ Q^q \to Q^q$ 使得

$$\pi_{\widetilde{q}}(\widetilde{X}_\alpha \cap U_{\widetilde{q}}) = X_{\Pi(\alpha)} \cap \pi_{\widetilde{q}}(U_{\widetilde{q}})\,. \tag{A.5}$$

该映射定义如下。给定 $\alpha \in Q^q$，任取 $x \in X_\alpha \cap U_{\widetilde{q}}$，并将 $\Pi(\alpha)$ 定义为 $\pi_{\widetilde{q}}(x)$ 的等价类。为证明该定义是定义良好的，任取 $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2 \in U_{\widetilde{q}}$，使得 $(\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2) \in \widetilde{R}^b_{\widetilde{u}}$，根据定义可知

$$|u(\pi_{\widetilde{q}}(\widetilde{q}_1)) - u(\pi_{\widetilde{q}}(\widetilde{q}_2))| = \mathsf{d}(\pi_{\widetilde{q}}(\widetilde{q}_1), \pi_{\widetilde{q}}(\widetilde{q}_2))\,,$$

因此 $(\pi_{\widetilde{q}}(\widetilde{q}_1)^{\pi_{\widetilde{q}}}(\widetilde{q}_2)) \in R_u$。设 $(\pi_{\widetilde{q}}(\widetilde{q}_1)^{\pi_{\widetilde{q}}}(\widetilde{q}_2)) \in R_u \setminus R^b_u$。那么不失一般性，存在 $x \in X$，使得 $(\pi_{\widetilde{q}}(\widetilde{q}_1)\ x) \in R_u$ 且 $(\pi_{\widetilde{q}}(\widetilde{q}_2)\ x) \notin R_u$。将 x 替换为连接 $\pi_{\widetilde{q}}(\widetilde{q}_1)$ 与 x 的测地线在 $\pi_{\widetilde{q}}(U_{\widetilde{q}})$ 内的某个适当点后，我们可以假设 $x \in \pi_{\widetilde{q}}(U_{\widetilde{q}})$。令 $\widetilde{x} := \pi^{-1}_{\widetilde{q}}(x)$，可得出 $(\widetilde{q}_1, \widetilde{x}) \in R_{\widetilde{u}}$ 且 $(\widetilde{q}_2, \widetilde{x}) \notin R_{\widetilde{u}}$，这与矛盾相矛盾。由此证明映射 Π 定义良好。采用相同的方法反过来证明，可知 Π 是双射，且 (A.5) 成立。由 (A.5) 可直接得出 Π 的可测性。

回顾 $\mathfrak{m}(T_u \setminus T^b_u) = 0$，类似于上文讨论的论证可得 $\widetilde{\mathfrak{m}}(\widetilde{T}_{\widetilde{u}} \setminus \widetilde{T}^b_{\widetilde{u}}) = 0$。特别地，

$$\widetilde{\mathfrak{m}} \llcorner U_{\widetilde{q}} = \int_{\widetilde{Q}^q} \widetilde{\mathfrak{m}}_\alpha \llcorner U_{\widetilde{q}}\ \widetilde{\mathfrak{q}}(d\alpha) \quad \text{and} \quad \mathfrak{m} \llcorner \pi_{\widetilde{q}}(U_{\widetilde{q}}) = \int_{\widetilde{Q}^q} \mathfrak{m}_\beta \llcorner \pi_{\widetilde{q}}(U_{\widetilde{q}})\ \mathfrak{q}(d\beta)\,.$$

根据 $\widetilde{\mathfrak{m}}$ 的定义，我们知道 $(\pi_{\widetilde{q}})_\#(\widetilde{\mathfrak{m}} \llcorner U_{\widetilde{q}}) \ll \mathfrak{m} \llcorner \pi_{\widetilde{q}}(U_{\widetilde{q}})$。因此

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{m}} \llcorner U_{\widetilde{q}} &= (\pi^{-1}_{\widetilde{q}})_\#[\mathfrak{m} \llcorner \pi(U_{\widetilde{q}})] = \int_{Q^q} (\pi^{-1}_{\widetilde{q}})_\#[\mathfrak{m}_\beta \llcorner \pi_{\widetilde{q}}(U_{\widetilde{q}})]\ \mathfrak{q}(d\beta) \\ &= \int_{\widetilde{Q}^q} (\pi^{-1}_{\widetilde{q}})_\#[\mathfrak{m}_{(\Pi(\alpha))} \llcorner \pi_{\widetilde{q}}(U_{\widetilde{q}})]\ [(\Pi^{-1})_\#\mathfrak{q}](d\alpha)\,.\end{aligned}$$

这给出了 的测度分解，它是 ⊑(强）相容的，因为（A.3）是强一致的。根据相容测度分解的本质唯一性，参见[21, 定理 6。19],我们可推得

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_\alpha \llcorner U_{\widetilde{q}} = (\pi^{-1}_{\widetilde{q}})_\#(\mathfrak{m}_{\Pi(\alpha)} \llcorner \pi(U_{\widetilde{q}}))\,, \qquad \text{for } \widetilde{\mathfrak{q}}\text{-a.e. } \alpha \in \widetilde{Q}^{\widetilde{q}}\,.$$

特别地，$\widetilde{\mathfrak{m}}_\alpha|_{U_{\widetilde{q}}}$集中在 X_α上，它与一个闭^q 区间 I_α等距。并且，根据（A.4），对于 $\widetilde{\mathfrak{q}}$-几乎处处的 $\alpha \in Q^q$ 度量测度空间$(\widetilde{X}_\alpha \cap U_{\widetilde{q}},\ \mathsf{d}\ \widetilde{\mathfrak{m}}_\alpha)$同构于 $(\widetilde{I}_\alpha \cap U_{\widetilde{q}},\ |\cdot|,\ \widetilde{h}_\alpha \mathscr{L}^1)$，其中 $\widetilde{h}_\alpha$ 满足

$$(\widetilde{h}_\alpha^{1/(N-1)})'' + \frac{K}{N-1}\,\widetilde{h}_\alpha^{1/(N-1)} \le 0 \quad \text{weakly on} \quad \widetilde{I}_\alpha \cap U_{\widetilde{q}}\,. \tag{A.6}$$

在此及下文中，略微滥用一下记号，对于任意开集$E \subset O$，我们用 $I_\alpha \cap E$ 表示 I_α 中与之通过等距映射对应的子集

$\widetilde{X}_\alpha \cap E$。这一结论对每个 $\tilde{q} \in B^{\mathsf{d}}_{r_0}(\tilde{p})$ 及其相应的邻域 $U_{\tilde{q}}$ 均成立。

任取 $r_1 < r_0$。由于 $\overline{B}^{\mathsf{d}}_{r_1}(\tilde{p})$ 是紧致的，我们可以找到 $\tilde{q}_1$、…、$\tilde{q}_M \in B_{\mathsf{d}r_0}(\tilde{p})$，使得

$$\overline{B}^{\mathsf{d}}_{r_1}(\tilde{p}) \subset U_{\tilde{q}_1} \cup \cdots \cup U_{\tilde{q}_M} . \tag{A.7}$$

令 B 为由满足以下条件的元素 $\alpha \in Q$ 构成的 $\tilde{\mathfrak{q}}$-零测集：对于某个 $\tilde{q}_i$ 和 $U_{\tilde{q}_i}$，其中 $i = 1, \ldots, M$，(A.6) 不成立。因此，对于每个 $\alpha \in Q \setminus B$，微分不等式 (A.6) 在 $I_\alpha \cap U_{\tilde{q}_i}$ 上对每个满足 $I_\alpha \cap U_{\tilde{q}_i} \neq \emptyset$ 的 i 都成立。由 (A.7) 可知，对于 $\tilde{\mathfrak{q}}$-几乎处处的 $\alpha \in Q$，不等式 (A.6) 在 $\tilde{I}_\alpha \cap B^{\mathsf{d}}_{r_1}(\tilde{p})$ 上成立。因此，对于每个这样的 α，函数 $\tilde{h}_\alpha$ 是 $\tilde{I}_\alpha \cap B^{\mathsf{d}}_{r_1}(\tilde{p})$ 上的 $\mathsf{CD}(K,N)$ 密度。于是，由 Bishop-Gromov 可得

$$\frac{\tilde{\mathfrak{m}}_\alpha(B^{\tilde{\mathsf{d}}}_s(\tilde{p}))}{v_{K,N}(s)} \geq \frac{\tilde{\mathfrak{m}}_\alpha(B^{\tilde{\mathsf{d}}}_t(\tilde{p}))}{v_{K,N}(t)} , \quad \text{for every } s < t < r_1 .$$

因此，对每个 $s < t < r_1$，我们得到

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{m}}(B^{\tilde{\mathsf{d}}}_s(\tilde{p})) &= \int_{\tilde{Q}} \tilde{\mathfrak{m}}_\alpha(B^{\tilde{\mathsf{d}}}_s(\tilde{p}))\, \tilde{\mathfrak{q}}(d\alpha) \\ &\geq \int_{\tilde{Q}} \frac{v_{K,N}(s)}{v_{K,N}(t)}\, \tilde{\mathfrak{m}}_\alpha(B^{\tilde{\mathsf{d}}}_t(\tilde{p}))\, \tilde{\mathfrak{q}}(d\alpha) = \frac{v_{K,N}(s)}{v_{K,N}(t)}\, \tilde{\mathfrak{m}}(B^{\tilde{\mathsf{d}}}_t(\tilde{p})) . \end{aligned}$$

该陈述的第一部分成立，因为 $\tilde{p} \in O$ 和 $r_1 < r_0 < \mathsf{d}(\pi(\tilde{p}), X \setminus O)$ 均为任意的。

现在假设 $\mathfrak{m} = \mathscr{H}^N$，因此 $\tilde{\mathfrak{m}} = \widetilde{\mathscr{H}}^N$ 是由 d 诱导的豪斯多夫测度。要证明该陈述的最后一部分，只需证明

$$\lim_{r \to 0} \frac{\widetilde{\mathscr{H}}^n(B^{\tilde{\mathsf{d}}}_r(\tilde{p}))}{v_{K,N}(r)} \leq 1 .$$

为此，我们注意到，当 $r > 0$ 充分小时，限制

$$\pi|_{B^{\tilde{\mathsf{d}}}_r(\tilde{p})} : B^{\tilde{\mathsf{d}}}_r(\tilde{p}) \to B_r(p)$$

是一个等距映射。因此，该结论由 [34, 推论 2.14]得出。 □

下面我们记录另一个关于 RCD空间中球的覆盖的有用技术结果。

引理 A.6. 设 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m}, p)$ 是某个 $K \in \mathbb{R}$ and $1 \leq N < \infty$ 的 $\mathsf{RCD}(K,N)$ 空间。设 $r \in (0, +\infty]$，且令 $\pi : Y \to B_r(p)$ 为一个覆盖，并采用如下约定：$B_\infty(p) := X$。令 d 和 $\tilde{\mathfrak{m}}$ 分别为通过提升 $B_r(p)$ 的长度结构及测度$\mathfrak{m}$而在 Y 上诱导的距离和测度，参见注 A.4。固定 $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$，并令 $F \subset Y$ 为以下集合的并：

$B_r(p)$ 中以 p 为端点的线段在 $\tilde{p}$ 上的提升的内部。则有以下结论：

(1) $\pi|_F : F \to B_r(p)$ 是单射；*(2)* 对每个甲板变换 $g: Y \to Y$，$F \cap g(F) = \emptyset$；*(3)* 对每个 $s \in (0, r)$，我们有 $F \cap \pi^{-1}(B_s(p)) \subset B_s^{\mathsf{d}}(\tilde{p})$；*(4)* 对每个 $s \in (0, r)$，我们有 $\mathfrak{m}(B_s(p)) = \tilde{\mathfrak{m}}(F \cap B_s^{\mathsf{d}}(\tilde{p}))$。

证明。为证明第 1 项，取 $a, b \in F$，使得 $\pi(a) = \pi(b)$。取 $\gamma_a, \gamma_b \subset X$ 为线段，它们以 p 为端点，且其内部包含 $\pi(a) = \pi(b)$，并且它们在 $\tilde{p}$ 上的提升分别包含 a 和 b。由于 RCD(K, N) 空间是无分支的，这是因为 [35]，要么 $\gamma_a \subset \gamma_b$，要么 $\gamma_b \subset \gamma_a$，这意味着 $a = b$。

为证明第2项，反设 $x \in F \cap g(F)$，则存在若干线段$\gamma_{\tilde{p}}, \gamma_{g(\tilde{p})} \subset X$，它们以 p 为端点，且从 $\tilde{p}$ 和 $g(\tilde{p})$分别提升到 Y 后的内部都包含 x。再次利用 RCD(K, N) 空间无分支这一性质，可推出$\gamma_{\tilde{p}} \subset \gamma_{g(\tilde{p})}$ 或$\gamma_{g(\tilde{p})} \subset \gamma_{\tilde{p}}$。因此，它们的公共部分从$x \in Y$出发有两个不同的提升，这就产生了矛盾。

为证明第 3项，令 $x \in F \cap \pi^{-1}(B_s(p))$，并令 $\gamma_x \subset B_s(p)$ 为以 p 为端点的线段，其在 $\tilde{p}$ 中的提升包含 x。γ_x 的长度与其提升的长度相同。因此 $x \in B_s^{\mathsf{d}}(\tilde{p})$，证明完毕。

对于第4项，由维塔利覆盖定理，存在一个由两两不相交的闭球构成的可数族

$$\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \overline{B}_s^{\tilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p}) \subset Y$$

以 $F \cap B_s^{\mathsf{d}}(\tilde{p})$ 中的点为中心，使得 $\pi|_{C_i} : C_i \to \pi(C_i) \subset B_s(p)$ 是保测等距映射，且

$$\tilde{\mathfrak{m}}\Big(F \cap \overline{B}_s^{\tilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p}) \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i\Big) = 0\,.$$

由于 $(B_s^{\mathsf{d}}(\tilde{p}), \tilde{\mathsf{d}}, \tilde{\mathfrak{m}})$ 根据引理 A.5 一致地局部倍增，故可应用维塔利定理。因此，利用最后一个不等式中的第 1 项以及以下事实：$\tilde{\mathfrak{m}}(\partial B_s^{\mathsf{d}}(\tilde{p})) = 0$ 根据引理 A.5，我们推得

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{m}}\Big(F \cap B_s^{\tilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p})\Big) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mathfrak{m}}\Big(F \cap B_s^{\tilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p}) \cap C_i\Big) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}\Big(\pi(F \cap B_s^{\tilde{\mathsf{d}}}(\tilde{p}) \cap C_i)\Big) \le \mathfrak{m}(B_s(p))\,.\end{aligned}$$

为证明反向不等式，令 $\Sigma \subset X$ 为 p的割迹。我们有 $\mathfrak{m}(\Sigma) = 0$（例如，参见 [21, 注 7.5]）。根据

F,

$$B_s(p) \setminus \Sigma \subset \pi(F \cap B_s^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{p}))\,.$$

因此，利用上文构造的集合族 $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，以及$\pi : Y \to B_r(p)$ 将 $\widetilde{\mathfrak{m}}$-零测集映射为 $\mathfrak{m}$-零测集这一事实，我们推得

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(B_s(p)) =& \mathfrak{m}(B_s(p) \setminus \Sigma) \le \mathfrak{m}\Big(\pi(F \cap B_s^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{p}))\Big)\\ &\le \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}\Big(\pi(F \cap B_s^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{p}) \cap C_i)\Big)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathfrak{m}}\Big(F \cap B_s^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{p}) \cap C_i\Big) = \widetilde{\mathfrak{m}}\Big(F \cap B_s^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{p})\Big)\,,\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

定理 A.1 的证明。沿用引理 A.5 的记号，令 d 表示由 d 在 $B_{10}(p)$ 上诱导的长度距离。赋予万有覆盖$\sim$ $\sim\pi$：$X \to B_{10}(p)$ 长度距离 d，以及通过提升 d 和 $\mathfrak{m}$ 得到的测度 $\widetilde{\mathfrak{m}}$。考虑度量空间 (Y, ρ)，其中 $Y := \pi^{-1}(p)$，而 ρ 是 d 在 Y 上的限制。

断言：存在一个常数 $C(K, N)$，使得 (Y, ρ) 的<上述 style?

为证明该断言，注意到由引理 A.5 可知，存在一个常数$C(K, N)$ 使得对于每个 $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ 都有

$$\widetilde{\mathfrak{m}}(B_9^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{p})) \le C(K,N)\, \widetilde{\mathfrak{m}}(B_{1/2}^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{p}))\,. \tag{A.8}$$

任取 $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)$，并假设存在 M 个两两不交的半径为 $1/2$ $\sim$ $\sim$ 的球，其中心位于 $\pi^{-1}(p) \cap B_4^{\mathsf{d}}(\widetilde{p})$，即存在 $p_1, \dots, p_M \in \pi^{-1}(p) \cap B_4^{\mathsf{d}}(\widetilde{p})$，使得 $\sim$ $\sim$ 当且仅当 $B_{1/2}^{\mathsf{d}}(p_i) \cap B_{1/2}^{\mathsf{d}}(p_j) = \emptyset$。利用 (A.8)，我们推得

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{m}}(B_{9/2}^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{p})) &\ge \sum_{i=1}^{M} \widetilde{\mathfrak{m}}(B_{1/2}^{\widetilde{\mathsf{d}}}(p_i))\\ &\ge \frac{1}{C(K,N)} \sum_{i=1}^{M} \widetilde{\mathfrak{m}}(B_9^{\widetilde{\mathsf{d}}}(p_i)) \ge \frac{M}{C(K,N)} \widetilde{\mathfrak{m}}(B_{9/2}^{\widetilde{\mathsf{d}}}(\widetilde{p}))\,,\end{aligned}$$

因此 $M \le C(K, N)$。特别地，对于任意 $\widetilde{p} \in Y$，在 (Y, ρ) 中，半径为 $1/2$ 且中心位于 $B_4^{\rho}(\widetilde{p})$ 的互不相交的球至多有 $C(K, N)$ 个。

任取一个 $p_0 \in Y$。若 $B_4^{\rho}(p_0) \setminus B_1^{\rho}(p_0) \neq \emptyset$则取 $p_1 \in B_4^{\rho}(p_0) \setminus B_1^{\rho}(p_0)$。通过在第 i步选取一点 $p_i \in B_4^{\rho}(p_0) \setminus (B_1^{\rho}(p_0) \cup \cdots \cup B_1^{\rho}(p_{i-1}))$，若 $B_4^{\rho}(p_0) \setminus (B_1^{\rho}(p_0) \cup \cdots \cup B_1^{\rho}(p_{i-1})) \neq \emptyset$，重复这一过程。注意，由构造可知，在每一步中，球 i $B_{1/2}^{\rho}(p_0) \dots, B_{1/2}^{\rho}(p_i)$ 两两不相交。因此，该过程必须在第 $C(K, N) - 1$ 步内终止，从而得到一个由至多 $C(K, N)$ 个半径为 1 的球覆盖 $B_4^{\rho}(p_0)$。

由于 X 由 [89] 可知是半局部单连通的， $B_{10}(p)$ 也同样是半局部单连通的。因此，我们可以将 $\pi_1(B_{10}(p)\ p)$ 识别为万有覆盖 π 的甲板变换: $X \to B_{10}(p)$。将任意这样的甲板变换限制到 $Y = \pi^{-1}(p)$ 上，可得 $\pi_1(B_{10}(p)\ p) \leq$ 等距变换群 $\mathrm{Iso}(Y, \rho)$，这里稍微滥用了记号。根据 [16, 推论 11.17]，存在一个常数 $\varepsilon = \varepsilon(K, N) > 0$，使得对于每个 $\widetilde{p} \in Y$，几乎稳定子群 $\Gamma_{3\varepsilon}(\widetilde{p}) := S_{3\varepsilon}(x)$（其中 $S_{3\varepsilon}(x) := \{\gamma \in \pi_1(B_{10}(p)\ p) : \rho(\gamma \cdot \widetilde{p}, \widetilde{p}) < 3\varepsilon\}$）都是几乎幂零的。另一方面，一个标准观察是， $\pi_1(B_\varepsilon(p)\ p)$ 中的每个环路都同伦等价于若干个长度小于 3ε 的环路的连接。特别地，映射 (A.1) 的像同构于几乎稳定子群 $\Gamma_{3\varepsilon}(\widetilde{p})$ 的一个子群。因此，它是几乎幂零的。□

参考文献

[1] Stephanie Alexander、Vitali Kapovitch 和 Anton Petrunin。《Alexandrov几何：基础》。英文版。第 236 卷。研究生数学丛书。普罗维登斯，罗得岛：美国数学学会（AMS），2024年。ISBN：978-1-4704-7302- 0；978-1-4704-7536-9；978-1-4704-7535-2。doi： 10.1090/gsm/236.[2] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli 和 Giuseppe Savaré。“具有黎曼Ricci曲率下界的度量测度空间”。载于：《杜克数学杂志》163.7（2014年），第 1405–1490 页。ISSN：0012-7094,1547-7398。doi： 10.1215/00127094-2681605。网址： https://doi.org/10.1215/00127094-2681605.[3] James W. Anderson 和 Gabriel P. Paternain。“单纯体积为零的3维流形的最小熵问题”。载于：第 286 卷，《动力学中的几何方法 I》。2003年，第 xvii–xviii 、 63–79 页。[4] Michael T. Anderson。“Ricci 平坦流形的 Hausdorff 扰动与分裂定理”。载于：《杜克数学杂志》68.1（1992年），第 67–82 页。ISSN：0012-7094,1547-7398。doi： 10.1215/S0012-7094-92-06803-7。网址： https://doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06803-7.[5] Michael T. Anderson。“非负里奇曲率完备流形的拓扑”。载于：Topology 29.1（1990年），第 41–55 页。ISSN：0040-9383。doi： 10.1016/0040-9383(90)90024-E。网址： https://doi.org/10.1016/0040-9383(90)90024-E.[6] Michael T. Anderson。“短测地线与引力瞬子”。载于：J. Differential Geom. 31.1（1990年），第 265–275 页。ISSN：0022-040X,1945- 743X。网址： http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214444097.[7] Michael T. Anderson、Peter B. Kronheimer 和 Claude LeBrun。“无限拓扑型的完备Ricci平坦Kähler流形”。载于：Comm. Math. Phys.125.4（1989年），第 637–642 页。ISSN：0010-3616,1432-0916。网址： http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104179632.[8] Michael T. Anderson 和 Lucio Rodríguez。“非负里奇曲率的极小曲面与3维流形”。载于：Math. Ann. 284.3（1989年），

第 461–475 页。ISSN：0025-5831,1432-1807。doi： 10.1007/BF01442497。网址： https://doi.org/10.1007/BF01442497.[9] Giuseppe Bargagnati 和 Roberto Frigerio。“可缩三维流形的单纯体积”。载于：美国数学会汇刊 375.5（2022年），第 3305–3323 页。ISSN：0002-9947,1088-6850。doi：10.1090/tran/8605。网址： https://doi.org/10.1090/tran/8605.[10] Lionel Bérard-Bergery。“正里奇曲率的非紧致完备黎曼流形的若干例子”。载于：C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 302.4（1986年），第 159–161 页。ISSN：0249-6291。[11] L. Bessières 等。“基本群非平凡的不可约三维流形的塌缩”。载于：Invent. Math. 179.2（2010年），第 435–460 页。ISSN：0020-9910,1432-1297。doi： 10.1007/s00222-009-0222-6。网址：https://doi.org/10.1007/s00222-009-0222-6.[12] G. Besson。“某些开三维流形上的标量曲率”。载于：Internat. J. Math. 32.12（2021年），论文编号 2140014，共 11 页。ISSN：0129-167X,1793-6519。doi：10.1142/S0129167X21400140。网址： https://doi.org/10.1142/S0129167X21400140.[13] Gerard Besson 和 Sylvestre Gallot。“关于标量曲率与里奇曲率”。载于：SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 17（2021年），论文编号 046，共 42 页。ISSN：1815-0659。doi：10.3842/SIGMA.2021.046。网址： https://doi.org/10.3842/SIGMA.2021.046.[14] Camillo Brena、Elia Bruè 和 Alessandro Pigati。《里奇曲率下界与空间的可定向性》。预印本，arXiv:2412.19288[math.DG]（2024年）。2024年。网址：https://arxiv.org/abs/2412.19288.[15] Camillo Brena、Alessandro Cucinotta 和 Mattia Magnabosco。《关于RCD空间切片定理的一则注记》。撰写中。[16] Emmanuel Breuillard、Ben Green 和 Terence Tao。“近似群的结构”。载于：高等科学研究所数学出版物 116（2012年），第 115–221 页。ISSN：0073-8301,1618-1913。doi： 10.1007/s10240-012-0043-9。网址：https://doi.org/10.1007/s10240-012-0043-9.[17] Elia Bruè、Aaron Naber 和 Daniele Semola。“里奇曲率有下界的空间的边界正则性与稳定性”。英文。载于：Invent. Math. 228.2（2022年），第 777–891 页。ISSN：0020-9910。doi：10.1007/s00222-021-01092-8.[18] Elia Bruè、Enrico Pasqualetto 和 Daniele Semola。“通过 δ-分裂映射研究 RCD(K,N) 空间的可整性”。载于：芬兰数学年刊 46.1（2021年），第 465–482 页。ISSN：2737-0690,2737-114X。doi：10.5186/aasfm.2021.4627。网址：https://doi.org/10.5186/aasfm.2021.4627.[19] Elia Bruè、Alessandro Pigati 和 Daniele Semola。“里奇曲率有下界的非塌缩空间的拓扑正则性与稳定性”。即将在《杜克数学杂志》发表，预印本 arXiv: 2405.03839。[20] 曹建国和葛健。“佩雷尔曼3维流形塌缩定理的一个简单证明”。载于：几何分析杂志 21.4（2011年），第 807–869 页。ISSN：1050-6926,1559-002X。doi：10.1007/s12220-010-9169-5。网址：https://doi.org/10.1007/s12220-010-9169-5。

[21] Fabio Cavalletti 和 Emanuel Milman。“曲率-维数条件的整体化定理”。载于：Invent. Math. 226.1（2021年），第 1–137 页。issn：0020-9910,1432-1297。doi：10.1007/s00222-021-01040-6。url：https://doi.org/10.1007/s00222-021-01040-6。[22] Fabio Cavalletti 和 Andrea Mondino。“距离函数拉普拉斯算子的新公式及其应用”。载于：Anal. PDE 13.7（2020年），第 2091–2147 页。issn：2157-5045,1948-206X。doi：10.2140/apde.2020.13.2091。url：https://doi.org/10.2140/apde.2020.13.2091。[23] Jeff Cheeger。“度量测度空间上利普希茨函数的可微性”。载于：Geom. Funct. Anal. 9.3（1999年），第 428–517 页。issn：1016-443X,1420-8970。doi：10.1007/s000390050094。url：https://doi.org/10.1007/s000390050094。[24] Jeff Cheeger 和 Tobias H. Colding。“里奇曲率下界与扭曲积的几乎刚性”。载于：Ann. of Math. (2) 144.1（1996年），第 189–237 页。issn：0003-486X,1939-8980。doi：10.2307/2118589。url：https://doi.org/10.2307/2118589。[25] Jeff Cheeger 和 Tobias H. Colding。“里奇曲率有下界的空间结构 I”。载于：J. Differential Geom. 46.3（1997年），第 406–480 页。issn：0022-040X,1945-743X。url：http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214459974。[26] Jeff Cheeger 和 Tobias H. Colding。“里奇曲率有下界的空间结构 III”。英文。载于：J. Differ. Geom. 54.1（2000年），第 37–74 页。issn：0022-040X。doi：10.4310/jdg/1214342146。[27] Jeff Cheeger、Wenshuai Jiang 和 Aaron Naber。“里奇曲率有下界的非塌缩极限空间奇异集的可整性”。载于：Ann. of Math. (2) 193.2（2021年），第 407–538 页。issn：0003-486X,1939-8980。doi：10.4007/annals.2021.193.2.2。url：https://doi.org/10.4007/annals.2021.193.2.2。[28] Jeff Cheeger 和 Aaron Naber。“爱因斯坦流形的正则性与余维 4 猜想”。载于：Ann. of Math. (2) 182.3（2015年），第 1093–1165 页。issn：0003-486X。doi：10.4007/annals.2015.182.3.5。url：https://doi.org/10.4007/annals.2015.182.3.5。[29] Stefan Cohn-Vossen。“曲面上的最短路径与总曲率”。载于：Compositio Math. 2（1935年），第 69–133 页。issn：0010-437X,1570-5846。url：http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__69_0。[30] Tobias H. Colding。“里奇曲率与体积收敛”。载于：Ann. of Math. (2) 145.3（1997年），第 477–501 页。issn：0003-486X,1939-8980。doi：10.2307/2951841。url：https://doi.org/10.2307/2951841。[31] Tobias Holck Colding 和 Aaron Naber。“里奇曲率有下界的空间切锥的尖锐赫尔德连续性及其应用”。载于：Ann. of Math. (2) 176.2（2012年），第 1173–1229 页。issn：0003-486X,1939-8980。doi：10.4007/annals.2012.176.2.10。url：https://doi.org/10.4007/annals.2012.176.2.10。[32] Xianzhe Dai 等。“里奇曲率有下界时的奇异韦伊定律”。载于：Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 10（2023年），第 1212–1253 页。

issn：2330-0000。doi： 10.1090/btran/160。url： https://doi.org/10.1090/btran/160。[33] Guido De Philippis 和 Nicola Gigli。“非光滑情形下从体积锥到度量锥”。载于：Geom. Funct. Anal. 26.6（2016年），第 1526–1587 页。issn：1016-443X,1420-8970。doi： 10.1007/s00039-016-0391-6。url： https://doi.org/10.1007/s00039-016-0391-6。[34] Guido De Philippis 和 Nicola Gigli。“里奇曲率有下界的非塌缩空间”。载于：J. Éc. polytech. Math. 5（2018年），第 613–650 页。issn：2429-7100,2270-518X。doi： 10.5802/jep.80。url： https://doi.org/10.5802/jep.80。[35] Qin Deng。“RCD(K, N)空间中切锥的赫尔德连续性及其在非分支性方面的应用”。英文。载于：Geom. Topol. 29.2（2025年），第 1037–1114 页。issn：1465-3060。doi： 10.2140/gt.2025.29.1037。[36] Qin Deng 和 Alessandro Pigati。《非塌缩三维 RCD 空间的拓扑》。预印本，arXiv:2512.21961 [math.DG] （2025 年）。2025 年。url： https://arxiv.org/abs/2512.21961。[37] Qin Deng 等。“RCD(K, N)空间上的马古利斯引理”。英文。载于：Anal. PDE 18.10（2025年），第 2481–2536 页。issn：2157-5045。doi：10.2140/apde.2025.18.2481。[38] Behnam Esmayli 和 Piotr Hajłasz。“余面积不等式”。载于：芬兰数学年刊 46.2（2021年），第 965–991 页。issn：2737-0690。doi：10.5186/aasfm.2021.4654。url： https://doi.org/10.5186/aasfm.2021.4654。[39] Roberto Frigerio 和 Marco Moraschini。“Gromov 多复形理论及其在有界上同调和单纯体积中的应用”。载于：Mem. Amer. Math. Soc. 283.1402（2023年），第 vi+153 页。issn：0065-9266,1947-6221。doi： 10.1090/memo/1402。url： https://doi.org/10.1090/memo/1402。[40] Kenji Fukaya。“黎曼轨形的收敛理论”。载于：Japan. J. Math. (N.S.) 12.1（1986年），第 121–160 页。issn：0289-2316。doi： 10.4099/math1924.12.121。url： https://doi.org/10.4099/math1924.12.121。[41] Kenji Fukaya 和 Takao Yamaguchi。“几乎非负曲率流形的基本群”。载于：Ann. of Math. (2) 136.2（1992年），第 253–333 页。issn：0003-486X,1939-8980。doi： 10.2307/2946606。url： https://doi.org/10.2307/2946606。[42] Fernando Galaz-García 等。“里奇曲率有下界的空间的商空间”。载于：J. Funct. Anal. 275.6（2018年），第 1368–1446 页。issn：0022-1236,1096-0783。doi： 10.1016/j.jfa.2018.06.002。url： https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.06.002。[43] Nicola Gigli。《非光滑背景下的分裂定理》。2013年。arXiv:1302.5555 [math.MG]。url： https://arxiv.org/abs/1302.5555。[44] Nicola Gigli、Andrea Mondino 和 Giuseppe Savaré。“带基点的非紧度量测度空间的收敛与里奇曲率的稳定性

曲率界与热流”。载于：伦敦数学会会刊 111（2013年11月）。doi: 10.1112/plms/pdv047.[45] Nicola Gigli 和 Chiara Rigoni。“RCD空间上的强最大值原理札记”。载于：加拿大数学通报 62.2（2019年），第259–266页。issn：0008-4395,1496-4287。doi： 10.4153/cmb-2018-022-9。网址：https://doi.org/10.4153/cmb-2018-022-9.[46] Michael Gromov。“体积与有界上同调”。载于：高等科学研究所数学出版物 56（1982年），第5–99页。issn：0073-8301,1618-1913。网址：http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1982__56__5_0.[47] Luis Guijarro 和 Jaime Santos-Rodríguez。“关于 $RCD^*(K,N)$空间的等距群”。英文。载于：数学手稿 158.3-4（2019年），第441–461页。issn：0025-2611。doi： 10.1007/s00229-018-1010-7。网址：hdl.handle.net/10486/684632.[48] Larry Guth。“大型黎曼流形中的球体积”。载于：Ann. of Math. (2) 173.1（2011年），第51–76页。issn：0003-486X,1939-8980。doi：10.4007/annals.2011.173.1.2。网址：https://doi.org/10.4007/annals.2011.173.1.2.[49] Larry Guth。“黎曼流形中的球体积与乌雷松宽度”。载于：拓扑分析杂志 9.2（2017年），第195–219页。issn：1793-5253,1793-7167。doi： 10.1142/S1793525317500029。网址： https://doi.org/10.1142/S1793525317500029.[50] Morris W. Hirsch 和 Stephen Smale。“3维球面上的对合”。英文。载于：美国数学杂志 81（1959年），第893–900页。issn：0002-9327。doi：10.2307/2372994.[51] Bobo Hua、Martin Kell 和 Xia Chao。“度量测度空间上的调和函数”。预印本见：arXiv:1308.3607v2。[52] Hongzhi Huang 和 Xian-Tao Huang。“近似分裂映射、变换定理与光滑纤维化定理”。载于：数学进展 457（2024年），论文编号109914，共54页。issn：0001-8708,1090-2082。doi：10.1016/j.aim.2024.109914。网址： https://doi.org/10.1016/j.aim.2024.109914.[53] Hongzhi Huang 和 Xian-Tao Huang。“非负里奇曲率开流形的分裂与慢体积增长”。2025年。电子版： arXiv:2510.22708.[54] L. S. Husch 和 T. M. Price。“为3维流形寻找一个边界”。载于：Ann. of Math. (2) 91（1970年），第223–235页。issn：0003-486X。doi：10.2307/1970605。网址： https://doi.org/10.2307/1970605.[55] Vitali Kapovitch 和 Burkhard Wilking。“里奇曲率有下界的流形的基本群结构”。2011年。电子版：arXiv:1105.5955.[56] Atsushi Kasue 和 Takumi Washio。“等变调和映射与调和态射的增长”。载于：大阪数学杂志 27.4（1990年），第899–928页。issn：0030-6126。网址：http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1200782683。

[57] Robion C. Kirby。《四维流形的拓扑》。英文。第1374卷。数学讲义。柏林等地：Springer-Verlag，1989年。isbn：3-540-51148-2。doi：10.1007/BFb0089031.[58] Yu Kitabeppu。“RCD空间中正则集具有正测度的充分条件”。载于：Potential Anal. 51.2（2019年），第179–196页。issn：0926-2601,1572-929X。doi：10.1007/s11118-018-9708-4。网址：https://doi.org/10.1007/s11118-018-9708-4.[59] Yu Kitabeppu 和 Sajjad Lakzian。“低维$RCD^*(K,N)$空间的刻画”。载于：Anal. Geom. Metr. Spaces 4.1（2016年），第187–215页。issn：2299-3274。doi：10.1515/agms-2016-0007。网址：https://doi.org/10.1515/agms-2016-0007.[60] Bruce Kleiner 和 John Lott。“局部塌缩的三维流形”。载于：Astérisque 365（2014年），第7–99页。issn：0303-1179,2492-5926。[61] Peter Li。《几何分析》。第134卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥：剑桥大学出版社，2012年，第x+406页。isbn：978-1-107-02064-1。doi：10.1017/CBO9781139105798。网址：https://doi.org/10.1017/CBO9781139105798.[62] Zhenhao Li。“局部有限空间上CD(K,N)的整体化定理”。载于：Ann. Mat. Pura Appl. (4) 203.1（2024年），第49–70页。issn：0373-3114,1618-1891。doi：10.1007/s10231-023-01352-9。网址：https://doi.org/10.1007/s10231-023-01352-9.[63] Gang Liu。“具有非负里奇曲率的3维流形”。载于：Invent. Math. 193.2（2013年），第367–375页。issn：0020-9910,1432-1297。doi：10.1007/s00222-012-0428-x。网址：https://doi.org/10.1007/s00222-012-0428-x.[64] Clara Löh。“l^1同调中的同构”。载于：Münster J. Math. 1（2008年），第237–265页。issn：1867-5778,1867-5786。[65] John Lott 和 Zhongmin Shen。“具有二次曲率衰减和慢体积增长的流形”。载于：Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 33.2（2000年），第275–290页。issn：0012-9593。doi：10.1016/S0012-9593(00)00110-5。网址：https://doi.org/10.1016/S0012-9593(00)00110-5.[66] Roger C. Lyndon 和 Paul E. Schupp。《组合群论》。英文。1977年版重印本。古典数学。柏林：Springer，2001年。isbn：3-540-41158-5。[67] Alexander Lytchak 和 Stephan Stadler。“二维中的里奇曲率”。载于：《欧洲数学学会杂志》（JEMS）25.3（2023年），第845–867页。issn：1435-9855,1435-9863。doi：10.4171/jems/1196。网址：https://doi.org/10.4171/jems/1196.[68] X. Menguy。“具有正里奇曲率和无限拓扑型的非塌缩例子”。载于：Geom. Funct. Anal. 10.3（2000年），第600–627页。issn：1016-443X,1420-8970。doi：10.1007/PL00001632。网址：https://doi.org/10.1007/PL00001632.[69] Edwin E. Moise。“3维流形中的仿射结构。V. 三角剖分定理与豪普特猜想”。载于：Ann. of Math. (2) 56（1952年），

第96–114页。issn：0003-486X。doi: 10.2307/1969769。网址： https://doi.org/10.2307/1969769.[70] Andrea Mondino和Aaron Naber。“具有Ricci曲率下界的度量测度空间的结构理论”。载于：《欧洲数学学会杂志》（J EMS）21.6（2019年），第1809–1854页。issn：1435-9855,1435-9863。doi: 10.4171/JEMS/874。网址： https://doi.org/10.4171/JEMS/874.[71] Andrea Mondino和Vanessa Ryborz。“分布意义下与综合意义下的Ricci曲率下界之等价性”。载于：《泛函分析杂志》289.8（2025年），论文编号111035，共82页。issn：0022-1236,1096-0783。doi:10.1016/j.jfa.2025.111035。网址： https://doi.org/10.1016/j.jfa.2025.111035.[72] Andrea Mondino和Guofang Wei。“RCD$^*(K,N)$空间的万有覆盖与基本群”。载于：《纯粹与应用数学杂志》753（2019年），第211–237页。issn：0075-4102,1435-5345。doi：10.1515/crelle-2016-0068。网址： https://doi.org/10.1515/crelle-2016-0068.[73] John Morgan和Gang Tian。《几何化猜想》。第5卷。克莱数学专著。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛；克莱数学研究所，剑桥，马萨诸塞州，2014年，第x+291页。isbn：978-0-8218-5201-9。[74] Philippe Nabonnand。“关于具有正里奇曲率的完备黎曼流形”。载于：C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 291.10（1980年），A591–A593。issn：0151-0509。[75] Jiayin Pan。“非负里奇曲率、无穷远处的近稳定性与基本群的结构”。载于：《数学进展》474（2025年），论文编号110310，共35页。issn：0001-8708,1090-2082。doi： 10.1016/j.aim.2025.110310。网址： https://doi.org/10.1016/j.aim.2025.110310.[76] Jiayin Pan和Guofang Wei。“具有非整数Hausdorff维数的Ricci极限空间的例子”。载于：Geom. Funct. Anal. 32.3（2022年），第676–685页。issn：1016-443X,1420-8970。doi： 10.1007/s00039-022-00598-4。网址： https://doi.org/10.1007/s00039-022-00598-4.[77] Jiayin Pan和Zhu Ye。“非负里奇曲率、无穷远处分裂与第一贝蒂数刚性”。载于：《数学进展》459（2024年），论文编号110028，共29页。issn：0001-8708,1090-2082。doi： 10.1016/j.aim.2024.110028。网址： https://doi.org/10.1016/j.aim.2024.110028.[78] C. D. Papakyriakopoulos。“关于Dehn引理与纽结的非球面性”。载于：Ann. of Math. (2) 66（1957年），第1–26页。issn：0003-486X。doi:10.2307/1970113。网址： https://doi.org/10.2307/1970113.[79] Panos Papasoglu。“乌雷松宽度与体积”。载于：Geom. Funct. Anal. 30.2（2020年），第574–587页。issn：1016-443X,1420-8970。doi: 10.1007/s00039-020-00533-5。网址： https://doi.org/10.1007/s00039-020-00533-5.[80] Giuseppe Savaré。“Bakry-Émery条件的自我改进以及RCD(K,∞)度量测度空间中热流的Wasserstein收缩”。载于：Discrete Contin. Dyn. Syst. 34.4（2014年），第1641–1661页。

issn：1078-0947,1553-5231。doi： 10.3934/dcds.2014.34.1641。网址：https://doi.org/10.3934/dcds.2014.34.1641.[81] Richard Schoen和Shing Tung Yau。“具有正里奇曲率和正标量曲率的完备三维流形”。载于：《微分几何研讨会》。第102卷。数学年刊研究。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1982年，第209–228页。isbn：0-691-08268-5。[82] Ji-Ping Sha和DaGang Yang。“ $S^n \times S^m$的连通和上的正Ricci曲率”。载于：J. Differential Geom. 33.1（1991年），第127–137页。issn：0022-040X,1945-743X。网址： http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214446032.[83] Takashi Shioya和Takao Yamaguchi。“曲率下界下的三维流形塌缩”。载于：J. Differential Geom. 56.1（2000年），第1–66页。issn：0022-040X,1945-743X。网址： http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090347524.[84] P. A. Smith。“有限周期变换。II”。英文。载于：Ann. Math. (2) 40（1939年），第690–711页。issn：0003-486X。doi： 10.2307/1968950.[85] Teruhiko Soma。“链环的格罗莫夫不变量”。载于：Invent. Math. 64.3（1981年），第445–454页。issn：0020-9910,1432-1297。doi： 10.1007/BF01389276。网址：https://doi.org/10.1007/BF01389276.[86] Gerardo Sosa。“RCD* 空间的等距群是李群”。载于：Potential Anal. 49.2（2018年），第267–286页。issn：0926-2601,1572-929X。doi:10.1007/s11118-017-9656-4。网址：https://doi.org/10.1007/s11118-017-9656-4.[87] Karl-Theodor Sturm。“度量测度空间的几何。II”。载于：数学学报196.1（2006年），第133–177页。issn：0001-5962,1871-2509。doi:10.1007/s11511-006-0003-7。网址： https://doi.org/10.1007/s11511-006-0003-7.[88] Jian Wang。“完备3维流形与正标量曲率”。2019年。预印本： https://theses.hal.science/tel-02953229/file/WANG_2019_diffusion.pdf.[89] Jikang Wang。“RCD*(K, N)空间是半局部单连通的”。载于：《纯粹与应用数学杂志》806（2024年），第1–7页。issn：0075-4102,1435-5345。doi： 10.1515/crelle-2023-0058。网址：https://doi.org/10.1515/crelle-2023-0058.[90] J. H. C. Whitehead。“关于 C^1-复形”。载于：Ann. of Math. (2) 41（1940年），第809–824页。issn：0003-486X。doi： 10.2307/1968861。网址：https://doi.org/10.2307/1968861.[91] Shing-Tung Yau。“完备黎曼流形的一些函数论性质及其在几何学中的应用”。载于：《丘成桐选集》。第1部分，1971–1991年。第2卷。度量几何与调和函数。重印自 [0417452]。国际出版社，波士顿，马萨诸塞州，2019年，第173–184页。[92] Zhu Ye。“非负里奇曲率开流形的最大第一贝蒂数刚性”。载于：《几何分析杂志》34.4（2024年），论文编号。

101, 12. 国际标准连续出版物号：1050-6926,1559-002X. doi: 10.1007/s12220-024-01551-7. 网址: https://doi.org/10.1007/s12220-024-01551-7.[93] Zhu Ye. “关于非负里奇曲率流形及体积增长阶的下确界 < 2”。英文。载于：《纯粹与应用数学杂志》817 (2024年)，第239–250页。国际标准连续出版物号：0075-4102. doi: 10.1515/crelle-2024-0078. [94] Sergio Zamora. RCD空间的 Anderson 有限性。2023年。网址：https://archive.mpim-bonn.mpg.de/id/eprint/5009/1/mpim-preprint_2023-4.pdf.[95] Shun-Hui Zhu. “三维里奇曲率有限性定理”。英文。载于：《微分几何杂志》37.3 (1993)，第711–727页。国际标准连续出版物号：0022-040X. doi: 10.4310/jdg/1214453906.

牛津大学，数学研究所，伍德斯托克路，牛津 OX2 6GG–英国电子邮箱地址：alessandro.cucinotta@maths.ox.ac.uk牛津大学，数学研究所，伍德斯托克路，牛津 OX2 6GG–英国电子邮箱地址：mattia.magnabosco@maths.ox.ac.uk维也纳大学，数学学院，奥斯卡·摩根施特恩广场 1 号，1090 维也纳 – 奥地利电子邮箱地址：daniele.semola@univie.ac.at