arXiv:2601.14241v1 [math.MG] 20 Jan 2026

自相似 Laakso 型分形空间的共形维数及其达到

RIKU ANTTILA、SYLVESTER ERIKSSON-BIQUE 和 LASSI RAINIO

Abstract. Laakso 型分形空间的一般构造最近由前两位作者提出。本文给出了一个简单条件，用以刻画对称 Laakso 型分形空间的阿尔福斯正则共形维数何时能够达到。文中明确构造了达到度量。这带来了达到的新例子，并阐明了可能存在的障碍。

1. Introduction

1.1. **概述**。共形维数是 Pansu [36] 引入的一种拟对称不变量。给定一个度量空间，其（阿尔福斯正则）共形维数是所有与之拟对称等价的阿尔福斯正则度量空间的豪斯多夫维数的下确界；详细定义见第 2.1 小节。虽然通常可以对这个下确界的值进行数值估计 [11], ，但在大多数情况下，该下确界是否能取到仍然未知——也就是说，该度量空间的共形维数是否达到。这个问题称为达到问题。

更深入地理解达到问题，或许能为若干未解决问题提供答案。例如，Bonk 和 Kleiner [3] 证明，几何群论中一个由来已久的猜想 ——Cannon 猜想 —— 取决于能否解决某些双曲群边界的达到问题。达到问题的一个变体，也等价于所谓的 Kleiner 猜想[26, 猜想 7.5] ，该猜想针对满足组合 *Loewner* 性质的度量空间。尽管第一、第二位作者最近发现了这一猜想的反例 [1], ，但如何刻画达到问题仍未解决。

本文彻底解决了一类称为对称 *Laakso* 型分形空间的度量空间的达到问题。这类空间包括 [1] 中讨论的反例，以及 Laakso [29–31]提出的著名分形。这些分形还为 [8]中讨论的双曲建筑和 Fuchsian 建筑的边界提供了更简单的模型。这显著扩大了达到问题已有解答的空间类别。尽管谢尔宾斯基地毯等有趣的例子仍未解决，但

Date: 2026年1月21日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 30L10，53C23，20F65，51F99，28A78。*Key words and phrases.* 共形维数、阿尔福斯正则、达到问题、组合 Loewner、拟对称映射、自相似空间、共形规范、Loewner 空间、替换规则、Laakso 空间。第一作者和第三作者获得了 Eemil Aaltonen 基金会的部分资助。第二作者获得了芬兰研究理事会资助项目 354241 的资助。我们感谢 Mathav Murugan 和 Ryosuke Shimizu 就达到问题和共形游走维数展开的讨论。

对称 Laakso 型分形空间这一类空间，是在更一般的背景下理解达到问题的自然第一步。

1.2. 主要定理。每个 Laakso 型分形空间都是由某个迭代图系统 (IGS) 生成的图近似序列的一个特定极限空间。第 3 节将详细描述这一构造；此处先简要概述该过程。

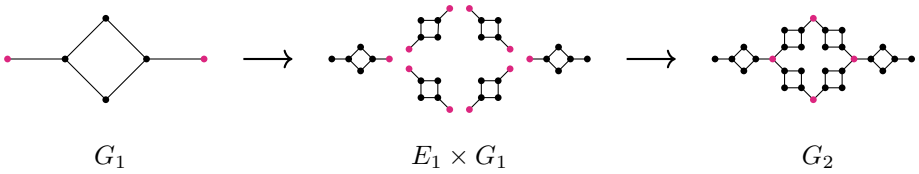


FIGURE 1.1. 生成收敛到一种称为 Laakso 菱形的极限空间的图序列的过程的首次迭代。

Laakso 型分形空间的构造始于一个生成元图 G_1。随后按如下方式归纳地生成图序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$。给定 G_n，先将 G_n 的每条边替换为 G_1的一个副本。然后，按照固定的粘合规则，通过识别顶点，将在连接点处相接的副本粘合起来，从而得到 G_{n+1}。为每个图 G_n 赋予适当的半度量 d_n后，便得到 Laakso 型分形空间 (X, d_{L_*})，它是序列 $(G_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$的 Gromov–Hausdorff 极限。极限度量 d_{L_*} 称为内在度量；参见定义 4.11。虽然度量的构造略显技术性，但在许多情况下，该度量与 G_n上的加权路径度量经重新缩放后的极限可比；参见注释 4.20。若 Laakso 型分形空间 G_1 具有某种镜面对称性，则称其为对称；更多讨论见下一小节。

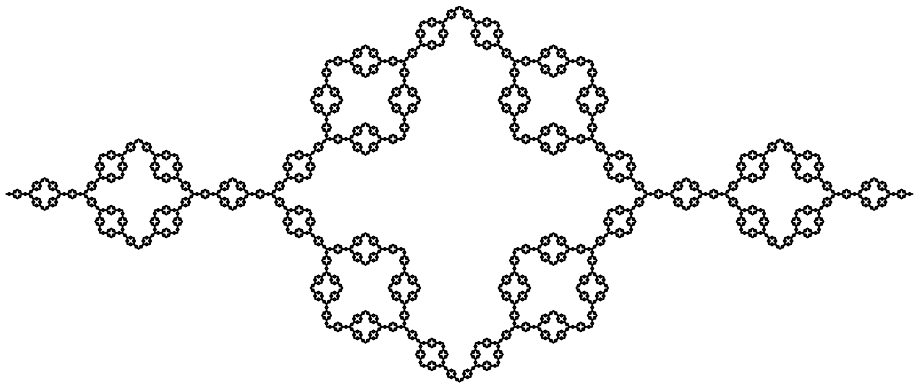


FIGURE 1.2. Laakso 菱形。

我们的主要结果表明，通过求解生成元上的离散模问题，可以理解对称 Laakso 型空间的拟共形几何。特别是，可以通过判定生成元是否包含所谓的

可移除边，来解决这一情形下颇具挑战性的达到问题。

定理 1.3。 对称 *Laakso* 型分形空间 (X, d_{L_*}) 达到其阿尔福斯正则共形维数，当且仅当它没有可移除边。

现在我们将阐述该定理中出现的术语，并概述证明中使用的技巧。

1.3. **利用可容许函数构造度量**。 对称 Laakso 型分形空间的生成元包含两个粘合集， I_-， $I_+ \subset V_1$，并且存在一个图等距变换 η: $G_1 \to G_1$，使得 $\eta(I_-) = I_+$。可以将集合 I_- 和 I_+ 视为生成元的相对端点；在粘合阶段，生成元的副本总是首尾相接地粘合。

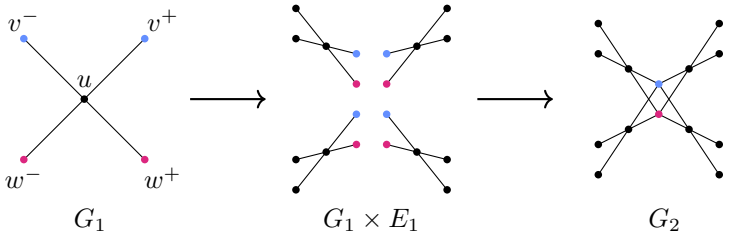


FIGURE 1.4. 对称 Laakso 型分形空间的生成元 G_1，其粘合集为 $I_- = \{v^-, w^-\}$ 和 $I_+ = \{v^+, w^+\}$。 G_2 的构造方式是：将 G_1 的每条边替换为其自身的一个副本，并在连接点 u 沿粘合集粘合这些副本。该对称变换将 v^+ 与 v^- 、 w^+ 与 w^- 互换。

作为我们的主要工具，我们在极限空间上构造了一族拟对称等价度量，其中包括内在度量 d_{L_*}。受 [11, 22, 24], 启发，这族度量中的每一个都由生成元上的一个可容许密度函数 给出。与这些参考文献类似，我们将从 I_- 到 I_+的边路径族记为 $\Theta^{(1)}$，并称函数 ρ: $E_1 \to [0, 1]$ 是一个 $\Theta^{(1)}$-可容许密度，当且仅当对每个 $\theta \in \Theta^{(1)}$都有$\sum_{e\in\theta} \rho(e) \geq 1$ 。若 ρ 满足 $\rho(\eta(e)) = \rho(e)$，则密度 ρ 是对称的 。下面的定理描述了与此类密度相关的度量族。

定理 1.5。 对于每个对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度 ρ: $E_1 \to (0, 1)$，存在 X 上的一个度量 d_ρ，使得$(X、 d_\rho)$ 是 Q-阿尔福斯正则的，其中 $Q \geq 1$ 是满足以下方程的唯一值:

$$\sum_{e\in E_1} \rho(e)^Q = 1. \tag{1.6}$$

此外，对于任意两个这样的密度 ρ，空间 (X, d_ρ) 与 (X, d_ν) 拟对称等价。

作为定理 1.5 的推论，我们得到共形维数的上界。求得下界通常要困难得多。受一系列研究工作的启发 [11, 23, 36, 40, 41],，我们将共形维数表示为一个离散模问题的临界指数。对于任意 $p \geq 1$， p-边模数 $\Theta^{(1)}$ 的值为

$$\operatorname{Mod}_p(\Theta^{(1)}, G_1) := \inf\left\{ \sum_{e\in E_1} \rho(e)^p \;\middle|\; \rho\colon E_1 \to [0,1] \text{ is } \Theta^{(1)}\text{-admissible} \right\}.$$

定理 1.7。(X, d_{L_*}) 的阿尔福斯正则共形维数是满足 $\operatorname{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(1)}, G_1) = 1$ 的唯一值 $Q_* \geq 1$。

与 [11], 中对共形维数的类似刻画相比，我们的特殊情形有一些重要的简化之处。通常需要考察复杂度呈指数增长的序列图上的某些模问题的渐近行为，而在我们的情形中，只需解决单个图上的一个模问题。例如，可与 [28] 中对谢尔宾斯基地毯共形维数所作的复杂数值估计进行比较。

根据凸优化理论，只要 $Q_* > 1$，就存在唯一的可容许密度 $\rho^*\colon E_1 \to [0,1)$，它是 Q_*-最优的，其意义是

$$\sum_{e\in E_1} \rho^*(e)^{Q_*} = \operatorname{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(1)}, G_1) = 1.$$

由于生成元具有对称性，最优密度 ρ^* 也具有对称性。由定理 1.5 和定理 1.7 可知，如果对于所有 $e \in E_1$，$\rho^*(e) > 0$，那么共形维数就能达到。我们的主要定理定理 1.3 断言，这个条件也是必要的。

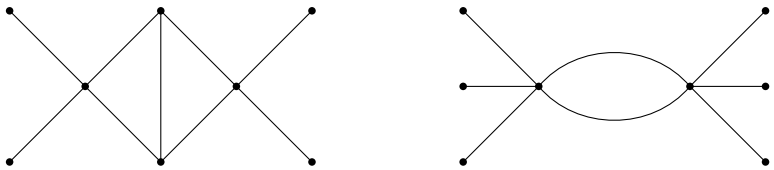


FIGURE 1.8. 对称 Laakso 型空间的两个生成元。左侧的生成元包含一条位于图中部的竖直边。这条边在对称变换下保持不变，因此必须是可移除边。这个例子是首个被发现能够反驳 Kleiner 猜想的例子，见 [1]。右侧的图不具有可移除边，从而给出了一个达到发生且猜想由定理 1.3 和推论 6.7 成立的例子。该图通过取连接中部两个顶点的两条平行边，并在两侧各接上三条边以连接边界而得到。

任何满足 $e^* \in E_1$ $\rho^*(e^*) = 0$ 的边都称为可移除边。直观地说，移除这样的边不会改变离散模问题的值，因此也不会改变共形维数。利用这一观察，我们通过证明可移除边的存在意味着存在一个具有相同共形维数的多孔子集 $X \subset X$，从而证明定理 1.3；众所周知，这会阻碍共形维数的达到。

1.4. **Kleiner 猜想与 Sobolev 空间**。研究 Laakso 型空间的最初动机之一，是 Kleiner 关于某类自相似空间的共形维数能否达到的猜想。精确定义和详细讨论见第 6 节。在 [1], 中，前两位作者通过构造具有可移除边的 Laakso 型空间，给出了这一猜想的反例。我们的结果表明，另有一大类 Laakso 型空间为这一猜想提供了非平凡的正面例子；见图 1.8、推论 6.7 和定理 6.6。在这些情况下，达到度量有明确的描述，但无法用诸如雪花化之类的方法给出简单公式。这些达到度量本身似乎也很有趣，因为它们满足 Loewner 性质。

这项工作的另一个动机，来自对分形上由重标度能量定义的 Sobolev 空间的研究。这种方法由 [27] 率先提出，随后推广到 [25, 34, 39]中的所有 $p > 1$。在 [5, 36] 中也能看到这类构造的迹象。对于 Laakso 型空间，这些空间及其性质已在 [2]中得到研究；其中也介绍了分形上的 Sobolev 空间。自[34], 以来，人们便已知道，Sobolev 空间及其能量构造与达到问题密切相关；进一步讨论见 [2, 注 8.7]。Sobolev 空间中的函数 f 与一个自然的能量测度$\Gamma_p\langle f\rangle$以及一个最小能量支配测度类 Λ 相关联；该测度类由满足以下条件的极小测度构成：对所有 Sobolev 函数 f，能量测度 $\Gamma_p\langle f\rangle \ll \Lambda$均绝对连续。在 [21,34], 中，有人指出，达到问题与倍增能量支配测度的存在性密切相关。我们的工作表明，对于 Laakso 型空间，这些问题之间的关系实际上是等价关系。事实上，对于 Laakso 型空间，倍增极小能量支配测度的存在性可通过可移除边来刻画[2, 定理 8.4]。这与我们针对达到问题得到的条件相同。因此，对于这些空间，达到等价于存在倍增极小能量支配测度。这将 [2,34] 中基于能量的达到方法与本文采用的显式度量构造紧密联系起来。以上讨论证明了以下关于达到问题的另一种刻画。

定理 1.9。 对称 *Laakso* 型分形空间达到其阿尔福斯正则共形维数，当且仅当针对 *[2]* 中构造的 *Sobolev* 空间存在一个倍增极小能量支配测度。

对于一般空间，预计不会有如此简单的刻画。例如，参见 [21], ，其中讨论了一个相关概念——共形游走维数。文中证明，Sierpi´nski 四面体是一个具有倍增能量支配测度、但未达到其共形游走维数的空间。共形维数大于一的情形与此类似，但又有所不同，而且似乎需要研究更复杂的例子。对于一般空间，若考虑的是共形维数而非共形游走维数，达到问题似乎取决于对相关能量测度更为细致的研究。为了说明这些问题有多难，我们指出，在许多情况下（例如 Sierpi´nski 地毯），目前甚至尚不清楚是否存在倍增极小能量支配测度。要充分理解这些问题，还需要开展大量研究。

1.5. **论文概要**。第 2 节介绍一些术语和预备知识。第 3 节介绍 Laakso 型分形空间的构造。第 4 节介绍如何由可容许密度构造度量，并证明定理 1.5。第 5 节通过可移除边刻画达到问题，并证明定理 1.7 和 1.3。第 6 节验证对称 Laakso 型分形空间的近似自相似性和组合 Loewner 性质。

2. Preliminaries

本节介绍度量几何和图论中的相关术语与预备知识。更多详情请参阅 $[9, 19, 33, 35]$。

2.1. **度量几何**。给定一个度量空间 (X, d)，对于每个 $x \in X$和 $r > 0$，我们将以 x 为中心、半径为 r 的开球定义为集合

$$B_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

给定两个非空集合 $A, B \subseteq X$，我们将 A 的直径以及 A 与 B 之间的距离定义为

$$\operatorname{diam}(A, d) := \sup_{x,y\in A} d(x, y) \quad \text{and} \quad \operatorname{dist}(A, B, d) := \inf_{a\in A, b\in B} d(a, b),$$

分别。当度量可由上下文确定时，我们将其从记号中省略，简记为 $B(x, r)$、$\operatorname{diam}(A)$ 和 $\operatorname{dist}(A, B)$。对于 $Q > 0$，子集 $A \subset X$ 的 Q维豪斯多夫测度 为

$$\mathcal{H}^Q(A) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^Q_\delta(A),$$

其中，对于所有 $\delta > 0$， A 的 Q维豪斯多夫 δ内容定义为

$$\mathcal{H}^Q_\delta(A) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(A_i)^Q \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \operatorname{diam}(A_i) \le \delta \right\}.$$

(X, d) 的豪斯多夫维数为

$$\dim_{\mathrm{H}}(X, d) := \inf\{Q > 0 \mid \mathcal{H}^Q(X) = 0\}.$$

定义 2.1。若存在定义在 (X, d) 上的拉东测度 μ 和常数 $C \ge 1$，使得.....，则称度量空间 (X, d) 关于 $Q > 0$ 是 Q-阿尔福斯正则的。

$$C^{-1} r^Q \le \mu(B(x, r)) \le C r^Q \text{ for all } x \in X \text{ and } r \in (0, 2\operatorname{diam}(X)]. \tag{2.2}$$

如果对于某个 $Q > 0$，(X, d) 是 Q-阿尔福斯正则的，则称 (X, d) 是阿尔福斯正则的。

现在我们回顾阿尔福斯正则度量空间的两个标准性质。首先，通过体积计数论证可知，阿尔福斯正则度量空间满足度量加倍性质。这意味着存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $x \in X$ 和 $r > 0$，都存在 $x_1, \dots, x_N \in X$，满足

$$B(x, 2r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r).$$

其次，如果一个度量空间对 $Q > 0$ 是 Q-阿尔福斯正则的，那么它的豪斯多夫维数等于 Q [19, Pages 61-62]。此外， $\mu = \mathcal{H}^Q$ 满足 (2.2)。

2.2. **共形维数**。现在我们介绍与共形维数相关的术语和一些结果；如需全面介绍，请参阅 Mackay 和 Tyson 的专著 [33] 。给定一个同胚 $\eta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，我们称度量空间之间的同胚 $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ 为η-拟对称映射，如果对所有满足 $x \neq z$ 的三元组 $x,y,z \in X$，

$$\frac{d_Y(f(x),f(y))}{d_Y(f(x),f(z))} \leq \eta\left(\frac{d_X(x,y)}{d_X(x,z)}\right).$$

若 $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ 是某个 η 的 η-拟对称映射，我们称 f 是一个拟对称映射。若集合 X 上的两个度量 d 和 δ 拟对称等价，并记作 $(X,d) \sim_{\mathrm{qs}} (X,\delta)$，则表示恒等映射 $\mathrm{id}\colon (X,d) \to (X,\delta)$ 是一个拟对称映射。(X,d) 的阿尔福斯正则共形规范是由以下对象组成的集合

$$\mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X,d) := \left\{ \delta \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta \text{ is a metric on } X,\ (X,d) \sim_{\mathrm{qs}} (X,\delta) \text{ and} \\ (X,\delta) \text{ is } Q\text{-Ahlfors regular for some } Q \geq 1 \end{array} \right\},$$

而 (X,d) 的阿尔福斯正则共形维数为

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) = \inf\{\dim_{\mathrm{H}}(X,\delta) \mid \delta \in \mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X,d)\}.$$

我们注意到，阿尔福斯正则共形维数对于包含关系并非单调。例如，单位正方形 $X = ([0,1]^2, |\cdot|)$ 的共形维数为 $\dim_{\mathrm{AR}}(X) = 2$，但子集 $Y = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset X$ 上不存在阿尔福斯正则度量，因此 $\dim_{\mathrm{AR}}(Y) = \infty$。因此，若不对该子集作出一些额外假设，则当 $Y \subset X$ 时，$\dim_{\mathrm{AR}}(Y) \leq \dim_{\mathrm{AR}}(X)$ 并非必然成立。基于此，我们考虑 Assouad 维数。

定义 2.3。设 (X,d) 是一个度量空间。对所有 $A \subset X$，记

$$N_r(A) := \inf\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists (x_i)_{i=1}^n \subset X \text{ such that } A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i,r) \right\}.$$

度量空间 X 的 ***Assouad*** 维数 定义为以下数值

$$\dim_{\mathrm{A}}(X) := \inf\left\{ \alpha > 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists C \geq 1 \text{ such that for all } 0 < r < R \\ \text{and } x \in X,\ N_r(B(x,R)) \leq C(R/r)^\alpha \end{array} \right\}.$$

Assouad 维数具有单调性；若 $Y \subset X$，则 $\dim_{\mathrm{A}}(Y) \leq \dim_{\mathrm{A}}(X)$。这可直接由定义推出。此外，若度量空间 (X,d) 是阿尔福斯正则的，则由标准的体积计数论证可得 $\dim_{\mathrm{A}}(X,d) = \dim_{\mathrm{H}}(X,d)$。我们通过考察完备且一致完美的子集来利用这些事实。

定义 2.4。若存在常数$C \geq 1$，使得对每个 $x \in X$ 以及 $r \in (0,\mathrm{diam}(X,d))$，度量空间 (X,d) 都满足 $B(x,r) \setminus B(x,r/C) \neq \varnothing$，则称其一致完美。

注意，位于阿尔福斯正则度量空间中的一致完美度量空间，其支撑着一个阿尔福斯正则度量。也就是说，$\mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X,d) \neq \emptyset$，因此 $\dim_{\mathrm{AR}}(X) < \infty$。事实上，这是一种等价关系，因为每个阿尔福斯正则空间都是一致完美的。

引理 2.5 ([19, 命题 **14**。14])。设(X,d) 是阿尔福斯正则度量空间。若 $Y \subset X$ 完备且一致完美，则维数$_{\mathrm{AR}}(Y,d|_Y) \leq$维数$_{\mathrm{A}}(X,d)$。

由此可直接得出，对于完备且一致完美的子集，共形维数关于包含关系具有单调性。

推论 2.6。 设(X, d)是一个度量空间，且维数$_{\mathrm{AR}}(X, d) < \infty$。若子集$Y \subset (X, d)$完备且一致完美，则维数$_{\mathrm{AR}}(Y, d|_Y) \leq$维数$_{\mathrm{AR}}(X, d)$。

证明。 设 $\delta \in \mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X, d)$。由于一致完美性在拟对称映射下保持不变（[19, 练习 11.2]），空间（$Y, \delta|_Y$）是完备且一致完美的。因此，由引理 2.5 可得

$$\dim_{\mathrm{AR}}(Y, d|_Y) = \dim_{\mathrm{AR}}(Y, \delta|_Y) \leq \dim_{\mathrm{A}}(Y, \delta|_Y) \leq \dim_{\mathrm{A}}(X, \delta) = \dim_{\mathrm{H}}(X, \delta).$$

由于 $\delta \in \mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X, d)$ 是任意的，因此可得

$$\dim_{\mathrm{AR}}(Y, d|_Y) \leq \inf_{\delta \in \mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X,d)} \dim_{\mathrm{H}}(X, d) = \dim_{\mathrm{AR}}(X, d).$$

□

达到的一个已知障碍是存在合适的多孔 子集。我们称度量空间 X 的子集 Y 是多孔的，若存在一个常数$\delta > 0$，使得对于所有 $y \in Y$和 $r \in (0,$直径$(X))$，都存在一个点 $x \in X$，使得 $B(x, \delta r) \subset B(y, r) \setminus Y$。

命题 2.7 ([1, 命题 2.9])。 设(X, d) 是一个紧致的阿尔福斯正则度量空间，且 $Y \subset X$是一个多孔子集。若 维数$_{\mathrm{AR}}(Y, d|_Y)$ =维数$_{\mathrm{AR}}(X, d)$，则(X, d) 的阿尔福斯正则共形维数未达到。

我们指出， [1, 命题 2.9] 的证明存在一个小漏洞，因为没有讨论子集 Y 的一致完美性。这可由假设 $\dim_{\mathrm{AR}}(Y, d|_Y) = \dim_{\mathrm{AR}}(X, d)$ 以及隐含假设 $\dim_{\mathrm{AR}}(X, d) < \infty$ 推出；参见引理 2.5 之前的段落。事实上，同样的证明和表述也出现在 [10, 命题 8.3], 中，其中也有同样的疏漏。

2.3. **图与模**。 图 是一个有序三元组 $G := (V, E, \xi)$，其中 V是一个有限非空的顶点集，E 是一个有限的边 集，并且

$$\xi \colon E \to \{\{v, w\} \mid v, w \in V,\ v \neq w\}$$

是一个端点映射，它将每条边映射到一对不同顶点组成的无序对，这两个顶点称为该边的端点。我们常将 $v \in e$ 简写为 $v \in \xi(e)$，表示顶点 $v \in V$是边 $e \in E$的一个端点。同样，我们用$e \cap f$表示 $\xi(e) \cap \xi(f)$，即某些边 $e, f \in E$共有的端点集。顶点 $v \in V$的度是以它为端点的边的数量：

$$\deg(v) := |\{e \in E \mid v \in e\}|.$$

约定 2.8。 当需要区分边 $e \in E$的两个端点时，我们可以将它们记为 e^- 和 e^+，使得

$$\xi(e) = \{e^-, e^+\}.$$

标签 e^- 和 e^+ 的赋值是任意的，但由简单迭代图系统产生的图除外；对于这类图，我们始终采用定义 3.2 中规定的规范赋值。

设 $G = (V, E, \xi)$ 是一个图。若 $V' \subset V$ 且 $E' \subset E$，使得 $\xi(E') \subseteq E$，则图 $G' = (V', E', \xi|_{E'})$ 是 G 的一个子图 。给定一个集合

$\{G_i = (V_i, E_i, \xi_i)$ 是 G 的子图，我们分别将它们的并和交定义为以下子图

$$\bigcup_{i\in I} G_i := \Big(\bigcup_{i\in I} V_i, \bigcup_{i\in I} E_i, \xi|_{\bigcup_{i\in I} E_i}\Big) \quad \text{and} \quad \bigcap_{i\in I} G_i := \Big(\bigcap_{i\in I} V_i, \bigcap_{i\in I} E_i, \xi|_{\bigcap_{i\in I} E_i}\Big).$$

交替序列 $\theta = [v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k]$ 是一条从 v_0 到 v_k 的路径，当且仅当对于所有 $1 \le i \le k$，$\xi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$。我们称边 $e \in E$ 属于 θ，并记作 $e \in \theta$，如果存在某个 $1 \le i \le k$ 使得 $e = e_i$。给定任意两个非空顶点集合 A，$B \subset V$，我们将连接 A 与 B 的路径集合记为

$$\Theta(A, B) := \{\theta \mid \theta \text{ is a path from } v \in A \text{ to } w \in B\}.$$

一条路径的长度是其包含的边数。给定一条路径 θ，我们将其长度记为

$$\operatorname{len}(\theta) := |\{e \in E \mid e \in \theta\}|.$$

如果对于每一对 v，$w \in V$，都存在一条从 v 到 w 的路径，那么我们称 G 是连通的，并将 V 上的路径度量 d_G 定义为

$$d_G(v, w) := \min_{\theta\in\Theta(\{v\},\{w\})} \operatorname{len}(\theta).$$

我们通常会省略路径中除第一个顶点以外的顶点，只记作 $\theta = [v_0, e_1, e_2, \ldots, e_k]$，因为其余顶点都能由等式 $\xi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$明确确定。

给定两条路径 $\theta_1 = [v_0, e_1, \ldots e_k, v_k]$ 和 $\theta_2 = [u_0, f_1, \ldots u_l, f_l]$，且满足$v_k = u_0$，我们定义拼接

$$\theta_1 * \theta_2 := [v_0, e_1, \ldots e_k, v_k, f_1, \ldots, f_l, u_l].$$

我们论证中的一个关键工具是路径族的边模数这一概念。

定义 2.9. 设 $G = (V, E, \xi)$ 是一个图。函数 $\rho\colon E \to [0, \infty)$ 称为密度。密度 ρ 的支撑是集合 $\operatorname{supp}(\rho) := \{e \in E \mid \rho(e) \neq 0\}$，而 ρ-长度是 G 中任意非恒定路径 $\theta = [v_0, e_1, e_2, \ldots, e_k]$ 的

$$L_\rho(\theta) := \sum_{i=1}^{k} \rho(e_i).$$

给定路径族 Θ in G，如果密度 ρ 满足：对于每条路径 $\theta \in \Theta$，$L_\rho(\theta) \ge 1$，则称其为 Θ-可容许。我们将 Θ-可容许密度的集合记为 $\operatorname{Adm}(\Theta)$。

对于每个 $p \in [1, \infty)$，我们将密度 ρ 的 p-质量定义为以下数值

$$\mathcal{M}_p(\rho) := \sum_{e\in E} \rho(e)^p,$$

并将路径族 Θ的 p-边模数定义为以下数值

$$\operatorname{Mod}_p(\Theta, G) := \inf_{\rho\in \operatorname{Adm}(\Theta)} \mathcal{M}_p(\rho).$$

满足 $\mathcal{M}_p(\rho^*) = \operatorname{Mod}_p(\Theta, G)$ 的密度 $\rho^* \in \operatorname{Adm}(\Theta)$ 称为针对 Θ 的 p-最优 密度。

引理 2.10。设 Θ 是图 $G = (V, E, \xi)$ 上的一个非空路径族。则存在一个 p-最优的 $\rho^* \in \operatorname{Adm}(\Theta)$。若 $p > 1$，则 p-最优的 ρ^* 是唯一的。此外，若对所有 $\theta \in \Theta$ 都有 $\operatorname{len}(\theta) \ge 2$，则对所有 $e \in E$ 都有 $\rho(e) < 1$。

证明。 存在性源于该优化问题具有凸性，并且由于最优值必须在满足 $\rho(e) \in [0,1]$ 的 ρ 上取得。$p > 1$ 的唯一性则由严格凸性得到。

最后，假设对所有边 e 都有 $\mathrm{len}(\theta) \geq 2$，并反设 ρ 是满足 $\rho(e) = 1$（其中 $e \in E$）的最优可容许对象。令 $L(e) = \min_{e \in \theta \in \Theta} L_\rho(\theta) \geq 1$，由于 $\{L_\rho(\theta) : \theta \in \Theta\}$ 是离散集，因此最小值可以取到。

若 $L(e) > 1$，则我们可以稍微减小 $\rho(e)$，而不改变可容许性。这与极小性矛盾。若 $L_\rho(e) = 1$，则存在某条边 $f \in E$ 满足 $\rho(f) = 0$。此时，为 $\epsilon \in (0, 1/2)$ 定义一个新的可容许权函数

$$\rho_\epsilon(f) = \begin{cases} 1 - \epsilon & \text{if } f = e \\ \epsilon & \text{if } \rho(f) = 0 \\ \rho(f) & \text{otherwise .} \end{cases}$$

直接验证可知，ρ_ϵ 是可容许的。此外，$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{M}_p(\rho_\epsilon)|_{\epsilon=0} = -p$。 □

引理 2.11. 设 Θ 是图 $G = (V, E, \xi)$ 上的一个非空路径族，满足对所有 $\theta \in \Theta$，均有 $\mathrm{len}(\theta) \geq 2$。则映射 $p \mapsto \mathrm{Mod}_p(\Theta, G)$ 连续且严格递减，其中 $p \in [1, \infty)$。

证明。 设 ρ 是 Θ 的 p-极小密度，其中任取 $p \in (1, \infty)$。由引理 2.10，ρ 是次单位的，因此映射 $t \mapsto \mathcal{M}_t(\rho)$ 对所有$t \in [1, \infty)$ 严格递减。设 $1 < q < p$，并令 ν 和 ρ 分别为 Θ 的 q- 极小密度和 p- 极小密度。于是我们有

$$\mathrm{Mod}_p(\Theta, G) = \mathcal{M}_p(\rho) < \mathcal{M}_q(\rho) \leq \mathcal{M}_q(\nu) = \mathrm{Mod}_q(\Theta, G),$$

因此，映射 $t \mapsto \mathrm{Mod}_t(\Theta, G)$ 对所有 $t \in [1, \infty)$ 严格递减。由此，要验证连续性，只需证明

$$\lim_{t \to p^-} \mathrm{Mod}_t(\Theta, G) = \mathrm{Mod}_p(\Theta, G) = \lim_{t \to p^+} \mathrm{Mod}_t(\Theta, G)$$

对所有 $p \in [1, \infty)$。对于第一个极限，令 ρ 为 Θ的 p-最优密度。于是，对于所有 $t \leq p$，我们有 $\mathcal{M}_t(\rho) \geq \mathrm{Mod}_t(\Theta, G) \geq \mathrm{Mod}_p(\Theta, G)$。由于映射$t \mapsto \mathcal{M}_t(\rho)$ 是连续的，我们有 $\lim_{t \to p} \mathcal{M}_t(\rho) = \mathcal{M}_p(\rho) = \mathrm{Mod}_p(\Theta, G)$，因此可得

$$\lim_{t \to p^-} \mathrm{Mod}_t(\Theta, G) = \mathrm{Mod}_p(\Theta, G).$$

对于第二个极限，令 $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ 为 Θ的 $(p+1/i)$-极小密度序列。由于 E 是有限集，且对于所有 $i \in \mathbb{N}$ 和 $e \in E$，$\rho_i(e) \in [0, 1)$，我们可以使用标准的对角线论证选取一个子列 $\{\rho_{i_j}\}_{j=1}^\infty$，使得对于每个 $e \in E$，$\{\rho_{i_j}(e)\}_{j=1}^\infty$ 都收敛。通过构造，定义密度 ν: $E \to [0, 1]$ 如下：对于所有$e \in E$，$\nu(e) := \lim^{j \to \infty} \rho_{i_j}(e)$。于是我们根据构造有

$$\lim_{t \to p^+} \mathrm{Mod}_t(\Theta, G) = \lim_{i \to \infty} \mathcal{M}_{p + \frac{1}{i}}(\rho_i) = \mathcal{M}_p(\nu).$$

由于对于所有 $t \geq p$，$\mathrm{Mod}_t(\Theta, G) \leq \mathrm{Mod}_p(\Theta, G) \leq \mathcal{M}_p(\nu)$，因此可得

$$\lim_{t \to p^+} \mathrm{Mod}_t(\Theta, G) = \mathrm{Mod}_p(\Theta, G).$$

□

在某些论证中，我们需要证明某些可容许密度是极小的。为此，我们利用路径族模与流的电阻之间的对偶关系。设 $G=(V,\ E,\ \xi)$ 为一个图，且 $A,$ $B\subset V$ 非空且不相交。函数 $\mathcal{J}\colon\ V\times E\to\mathbb{R}$ 在顶点 $v\in V$ 处的散度定义为

$$\operatorname{div}(\mathcal{J})(v):=\sum_{e\in E:v\in e}\mathcal{J}(v,e).$$

若函数 $\mathcal{J}\colon\ V\times E\to\mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为从 A 到 B 的流：

(1) $\mathcal{J}(e^-,e)=-\mathcal{J}(e^+,e)$ 对所有 $e\in E$ 均成立；(2) $\operatorname{div}(\mathcal{J})(v)=0$ 对所有 $v\notin A\cup B$ 均成立；(3) 当 $v\notin e$ 时，$\mathcal{J}(v,e)=0$。

对于流 $\mathcal{J}$ 和 $e\in E$，记 $|\mathcal{J}(e)|:=|\mathcal{J}(e^{\pm},e)|$，其中根据条件 (1)，正负号的选择无关紧要。从 A 到 B 的流 $\mathcal{J}$ 称为单位流，如果离开A 的净通量等于 1，即

$$\sum_{v\in A}\operatorname{div}(\mathcal{J})(v)=1,\quad \text{or equivalently}\quad \sum_{v\in B}\operatorname{div}(\mathcal{J})(v)=-1.$$

令 $p\in(1,\infty)$，并将其共轭指数记为 $q:=p/(p-1)$。单位流 $\mathcal{J}$ 的 p-能量为

$$\mathcal{E}_q(\mathcal{J}):=\sum_{e\in E}|\mathcal{J}(e)|^q,\quad \text{where}\quad |\mathcal{J}(e)|:=|\mathcal{J}(e^-,e)|=|\mathcal{J}(e^+,e)|.$$

p-电阻 between A 与 B 定义为以下数值

$$\operatorname{Res}_p(A,B,G):=\inf\{\mathcal{E}_q(\mathcal{J})\mid \mathcal{J}\text{ is a unit flow from }A\text{ to }B\}$$

以下命题给出了模与电阻之间的对偶关系，参见例如 [35, 定理 5.1]。不过，在本文中，我们需要一个稍微更一般的版本，该版本对某些非连通图也适用。通过对所涉及的图稍作修改，可以较直接地从标准对偶性结果推出这一版本。

命题 2.12。设 $p\in(1,\infty)$ 和 $q=p/(p-1)$。设 $G=(V,E,\xi)$ 为一个图，且 $A,$ $B\subset V$ 是一对不相交的非空子集，使得 $\Theta(A,B)\neq\varnothing$。那么

$$\operatorname{Mod}_p(\Theta(A,B),G)^{\frac{1}{p}}\cdot\operatorname{Res}_p(A,B,G)^{\frac{1}{q}}=1.$$

此外，若 $\mathcal{J}$ 是从 A 到 B 的单位流，且 $\rho\in\operatorname{Adm}(\Theta(A,B))$，使得

$$\mathcal{M}_p(\rho)^{\frac{1}{p}}\cdot\mathcal{E}_q(\mathcal{J})^{\frac{1}{q}}=1,$$

那么 $\mathcal{J}$ 和 ρ 均为最优。对于最优的 $\mathcal{J}$ 和 ρ，我们有

$$|\mathcal{F}(e)|=\operatorname{Mod}_p(\Theta(A,B),G)^{-1}\rho(e)^{p-1}\tag{2.13}$$

证明。如前所述，连通情形可直接由 [35,定理 5.1]和[1, 引理 4.13]得出。因此，我们只需考虑 G不连通的情形。令~ ~ $G=(V,E)$为经以下四步构造所得的图：首先，将A 中的所有顶点与给定顶点 $a\in A$合并；然后，将 B 中的所有顶点也与给定顶点$b\in B$合并；删除可能存在的自环；最后，取所得图中包含a 和 b 的连通分量。不难看出，$\operatorname{Mod}_p(\Theta(A,B)\ G)=\tilde{}\ \tilde{}\operatorname{Mod}_p(\Theta(\{a\},\{b\},G)$，且 $\operatorname{Res}_p(\Theta(\{a\},\{b\},G))=\operatorname{Res}_p(A,B,G)$。□

3. Construction of Laakso-type fractal spaces

本节中，我们介绍如何将 Laakso 型分形空间构造为迭代图系统的极限空间。进一步的讨论和详细示例见 [1,2]。与以往的工作不同，这里我们采用了明确适用于非简单图的记号。

3.1. **迭代图系统**。

定义 3.1. 一个迭代图系统（IGS）由以下数据组成：

(1) 一个有限连通图 $G_1 = (V_1, E_1, \xi_1)$，称为生成元。(2) 一个有限非空集合 I，称为粘合集。(3) 一组单射函数 $\{\phi_{v,e}\colon I \to V_1\}_{v\in e\in E_1}$，称为粘合映射，其像为 $I_{v,e} := \phi_{v,e}(I)$，在 $v \in e \in E_1$ 时满足以下条件：(a) $I_{e^-,e} \cap I_{e^+,e} = \varnothing$。(b) 不存在满足 $\xi(f) \subset I_{v,e}$ 的边 $f \in E_1$。

我们将这一对 $(I,\ \{\phi_{v,e}\colon I \to V_1\}_{v\in e\in E_1})$ 称为粘合规则。

一个 IGS 确定了一个无限的替换图 序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$，并且对于每个 G_n，递归地确定一组相应的粘合映射 $\{\phi_{v,e}\colon I \to V_1\}_{v\in e\in E_n}$，如下所示：考虑一个生成元为 $G_1 = (V_1,\ E_1,\ \xi_1)$、粘合规则为 $(I,\ \{\phi_{v,e}\}_{v\in e\in E_1})$ 的 IGS。序列中的第一个图就是生成元 G_1 本身。假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$，已经构造了 $G_n = (V_n,\ E_n,\ \xi_n)$ 和 $\{\phi_{v,e}\}_{v\in e\in E_n}$。那么，我们将如下定义图 $G_{n+1} = (V_{n+1},\ E_{n+1},\ \xi_{n+1})$ 以及粘合映射集合 $\{\phi_{v,e}\}_{v\in e\in E_{n+1}}$：

(1) 对每个 $i \in I$，当 e 和 f 共享端点 v 时，令 $V_{n+1} := (V_1 \times E_n)/\sim$，并作如下识别：$(\phi_{v,e}(i)\ e) \sim (\phi_{v,f}(i)\ f)$。(2) 令 $E_{n+1} := E_1 \times E_n$，并对每个 $(e, f) \in E_{n+1}$，定义 $\xi_{n+1}(e, f) := \{[(e^-, f)], [(e^+, f)]\}$。(3) 通过令 $\phi_{[(v,f)],(e,f)} := \phi_{v,e}$，对所有 $(e, f) \in E_{n+1}$ 和 $v \in e$，定义粘合映射集 $\{\phi_{v,e}\colon I \to V_1\}_{v\in e\in E_{n+1}}$。

为简化记号，我们省略括号，直接用 $[v, e]$ 表示任意顶点 $[(v,\ e)] \in V_n$。对于任意边 $e \in E_n$，我们用 $|e| := n$ 表示其层级。

IGS 的替换图具有如下定义的自然射影结构：对于每个 $n \geq 1$，我们定义投影 $\pi_{n+1}\colon V_{n+1} \cup E_{n+1} \to V_n \cup E_n$，令

$$\pi_{n+1}([v,e]) := \begin{cases} e & \text{if } v \notin I_{e^-,e} \cup I_{e^+,e} \\ e^- & \text{if } v \in I_{e^-,e} \\ e^+ & \text{if } v \in I_{e^+,e} \end{cases} \qquad \text{and} \quad \pi_{n+1}(e,f) := f$$

分别对任意顶点 $[v, e] \in V_{n+1}$ 和任意边 $(e, f) \in E_{n+1}$。此外，我们定义 $\pi_1 := \mathrm{id}|_{V_1\cup E_1}$，并对所有 $n \geq m \geq 1$，定义

$$\pi_{n,m} := \begin{cases} \mathrm{id}|_{V_n\cup E_n} & \text{if } n = m, \\ \pi_{m+1} \circ \pi_{m+2} \circ \ldots \circ \pi_n & \text{if } n > m. \end{cases}$$

定义 3.2。如果恰有两个粘合映射，ϕ_-简单 IGS 就称为简单 IGS $\phi_+\colon I \to V_1$，使得 $\{\phi_{e^-,e}, \phi_{e^+,e}\} = \{\phi_-, \phi_+\}$ 对每条边 $e \in E_1$都成立。对于简单 IGS，我们为每条边 $e \in E_n$ 固定端点标记 e^- 和 e^+，使得

$$\phi_{e^-,e} = \phi_- \quad \text{and} \quad \phi_{e^+,e} = \phi_+.$$

我们将简单 IGS 的粘合集、高阶粘合集以及连接 n 阶粘合集的路径族记为

$$I_{\pm} := \phi_{\pm}(I), \quad I_{\pm}^{(n)} := \pi_{n,1}^{-1}(I_{\pm}) \quad \text{and} \quad \Theta^{(n)} := \Theta(I_{-}^{(n)}, I_{+}^{(n)}),$$

分别地，对于每一对 $(v,\ e)$，其中 $e \in E_n$ and $v \in \{e^-, e^+\}$，我们定义

$$I_{v,e}^{(n)} := \begin{cases} I_{+}^{(n)} & \text{if } v = e^+ \\ I_{-}^{(n)} & \text{if } v = e^- \end{cases}$$

为方便起见，我们还引入常数

$$L_* := \operatorname{dist}(I_-, I_+, d_{G_1}).$$

通常，我们需要对 IGS 施加一些额外的最低要求。我们将这些要求列于以下清单。我们称简单 IGS 为:

(1) 倍增，若对每个顶点 $v \in I_- \cup I_+$，都有 $\deg(v) = 1$; (2) 非退化，若不存在满足 $e^- \in I_{\pm}$ 和 $e^+ \in I_{\mp}$ 的边 $e \in E_1$；(3) 对称，若存在一个图同构 η：$G_1 \to G_1$，使得 $\eta \circ \phi_{\pm} = \phi_{\mp}$;

我们回顾一下该构造的一些性质。

引理 3.3 ([1,引理 3.21])。 如果一个简单 *IGS* 是倍增的，那么

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{v\in V_n} \deg(v) = \max_{v\in V_1} \deg(v).$$

图 G_n 在某种意义上是自相似的。下面的映射可以阐明这一点。对于每个 $n,\ m \in \mathbb{N}$ 和 $e \in E_n$，我们通过先设定以下相似映射$\sigma_{e,\ m}$: $V_m \cup E_m \to V_{n+m} \cup E_{n+m}$ 来进行归纳定义

$$\sigma_{e,1}(v) := [v, e] \quad \text{and} \quad \sigma_{e,1}(f) := (f, e)$$

分别对所有 $v \in V_1$ 和 $f \in E_1$，然后设定

$$\sigma_{e,m+1}([v, f]) := [v, \sigma_{e,m}(f)] \quad \text{and} \quad \sigma_{e,m+1}((g, f)) := (g, \sigma_{e,m}(f))$$

分别对所有 $[v, f] \in V_{m+1}$和 $(g,\ f) \in E_{m+1}$。此外，我们记

$$e \cdot V_m := \begin{cases} \{e^-, e^+\} & \text{if } m = 0 \\ \sigma_{e,m}(V_m) & \text{if } m \geq 1 \end{cases} \quad \text{and} \quad e \cdot E_m := \begin{cases} e & \text{if } m = 0 \\ \sigma_{e,m}(E_m) & \text{if } m \geq 1 \end{cases}$$

并将 $e \cdot G_m$ 定义为 G_{n+m} 的子图，其顶点为 $e \cdot V_m$，边为 $e \cdot E_m$。

下面的命题等价于 [1, 命题 3.11], ，与其相比，(SM2)略有不同，因为这里我们也允许非简单图。由于证明过程没有变化，我们从略。

命题 3.4. 相似映射 $\sigma_{e,\ m}$ 对每个 $e \in E_n$ 以及任意 n、$m \in \mathbb{N}$ 均具有以下性质:

(SM1) 该映射是单射，且集合 $\{f \cdot V_m\}_{f\in E_n}$ 和 $\{f \cdot E_m\}_{f\in E_n}$ 分别覆盖 V_{n+m} 和 E_{n+m}。此外，对于任意两个顶点 v_-、$v_+ \in V_m$，$\{v_-, v_+\} = \xi_m(f)$ 当且仅当存在某个 $f \in E_m$，使得 $\{\sigma_{e,m}(v_-)\, \sigma_{e,\ m}(v_+)\} = \xi_{n+m}(\sigma_{e,\ m}(f))$，并且

$$\phi_{v_\pm, f} = \phi_{\sigma_{e,m}(v_\pm), \sigma_{e,m}(f)}$$

(SM2) 对于不同的边 e、$f \in E_n$，子集 $e \cdot V_m$ 和 $f \cdot V_m$ 相交，当且仅当 e 和 f 共享一个端点 v。此外，该交集为

$$\bigcup_{v \in e \cap f} \sigma_{e,m}\big(I^{(m)}_{v,e}\big) = \pi^{-1}_{n+m,n}(e \cap f) = \bigcup_{v \in e \cap f} \sigma_{f,m}(I^{(m)}_{v,f}).$$

(SM3) 对于每个 $e \in E_n$，我们有 $e \cdot E_m = \pi^{-1}_{n+m,n}(e) \cap E_{n+m}$。特别地，$\{f \cdot E_m\}_{f \cdot E_n}$ 是 E_{n+m} 的一个划分。

对于任意两条边 $e \in E_n$ 和 $f \in E_m$，我们定义运算

$$e \cdot f := \sigma_{e,m}(f).$$

该运算满足结合律，并为我们提供了一种便捷的表示方法：任意边 $e \in E_n$ 都能唯一地表示为乘积 $e = e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n$，其中对于每个 $1 \le i \le n$，$e_i \in E_1$。给定 G_1 上的一条路径 $\theta = [v_1, f_1, \ldots, f_k, v_k]$，我们还定义路径

$$e \cdot \theta := [\sigma_{e,1}(v_0), \sigma_{e,1}(f_1), \ldots, \sigma_{e,1}(f_k), \sigma_{e,1}(v_k)].$$

以下命题大致等价于 [1, 命题 3.16]，，但路径的定义略有不同。我们省略证明，因为它非常相似；不过需要指出，指标 k_i, s_i 对应于停时类型，而指标区间 $[k_i, s_i]$ 对应于子图 $f_i \cdot G_m$ 的穿越时间。

命题 3.5。设 $\theta = [v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k]$ 是 G_{n+m} 中的一条路径，A、$B \subset V_n$ 是非空且不相交的集合。若 $v_0 \in \pi^{-1}_{n+m,n}(A)$ 且 $v_k \in \pi^{-1}_{n+m,n}(B)$，则存在数 $0 \le k_1 < s_1 \le k_2 < s_2 \le$、……、$\le k_l < s_l \le k$，顶点 u_0、……、$u_l \in V_n$ 以及边 f_1、……、$f_l \in E_n$，使得以下条件成立

(1) $[u_0, f_1, u_1 \ldots, f_l, u_l] \in \Theta(A, B)$，*(2)* 对于 $i = 1$、……、l，θ 的子路径 $\theta_i = [v_{k_i}, e_{k_i+1}, \ldots, e_{s_i}, v_{s_i}]$ 是一条从 $v_{k_i} \in \pi^{-1}_{n+m,n}(u_i)$ 到 $v_{s_i} \in \pi^{-1}_{n+m,n}(u_{i+1})$ 的路径，且包含于 $f_i \cdot G_m$ 中。

引理 3.6。设 $\theta = [v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k] \in \Theta^{(n)}$ 是一条简单路径。若 *IGS* 非退化，则 $\mathrm{len}(\theta) \ge L^n_* \ge 2^n$。

证明较为直接，故从略；详细论证见 [1, 引理 3.18] 。

引理 3.7。若一个简单 *IGS* 非退化且具有倍增性质，则对每个 $e \in E_n$，存在 f_1，$f_2 \in e \cdot E_2$，使得 $f_1 \cap f_2 = \varnothing$，并且对所有$g \in E_{n+2} \setminus (e \cdot E_2)$都有 $f_1 \cap g = \varnothing$。

证明。取一条简单路径 $\theta = [v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k] \in \Theta^{(2)}$。由于 IGS 非退化，由引理 3.6 可知 $\mathrm{len}(\theta) = k \ge 4$。令 $f_1 = e \cdot e_2$ 和$f_2 = e \cdot e_4$。由于 θ 是简单的，我们有 $e_2 \cap e_4 = \varnothing$，因此 $f_1 \cap f_2 = \varnothing$。根据倍增性质，若 $v_i \in I^{(2)}_{\pm}$，则 $\deg(v_i) = 1$，从而 $e_i = e_{i+1}$。因此，由于 θ 是简单的，对所有 $1 \le i \le k-1$，都有 $v_i \notin I^{(2)}_{\pm}$。特别地，我们有 $e_2^-, e_2^+ \notin I^{(2)}_{\pm}$，故由 (SM2) 可得，对所有$g \in E^{n+2} \setminus (e \cdot E^2)$，都有 $f_1 \cap g = \varnothing$。□

3.2. **极限空间**。IGS 的符号空间 是射影序列的集合

$$\Sigma := \big\{(e_i)_{i=1}^{\infty} \mid e_i \in E_i \text{ and } \pi_{i+1}(e_{i+1}) = e_i \text{ for all } i \in \mathbb{N}\big\}.$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $e \in E_n$，我们记为 $\Sigma_e := \{(e_i)_{i=1}^\infty \in \Sigma \mid e_n = e\}$。符号空间具有一个自然的**字度量**，其定义如下

$$\delta_\Sigma((e_i)_{i=1}^\infty, (f_i)_{i=1}^\infty) := \begin{cases} 0 & \text{if } e_i = f_i \text{ for all } i \in \mathbb{N}, \\ 2^{-\max\left\{0,\, k \,\middle|\, (e_i)_{i=1}^k = (f_i)_{i=1}^k\right\}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据构造，$(\Sigma,\ \delta_\Sigma)$ 是一个紧致度量空间。IGS 的极限空间定义为商空间 $X := \Sigma/\sim$，其中我们将以下对象视为相同

$$(e_i)_{i=1}^\infty \sim (f_i)_{i=1}^\infty \iff e_i \cap f_i \neq \varnothing \text{ for all } i \in \mathbb{N}.$$

典范投影 $\chi\colon \Sigma \to X$ 由 $\chi((e_i)_{i=1}^\infty) := [(e)_{i=1}^\infty]$ 给出，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $e \in E_n$，记 $X_e := \chi(\Sigma_e)$。对于简单 IGS，我们还通过设定来定义集合 $X_-,\ X_+ \subset X$

$$X_\pm = \{[(e_i)_{i=1}^\infty] \mid e_n \cap I_\pm^{(n)} \neq \varnothing \text{ for all } n \in \mathbb{N}\}$$

注 3.8。根据构造，每条边 $e \in E_n$ 都可以唯一表示为乘积 $e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n = e$，其中对于所有 $1 \le i \le n$ 均有 $e_i \in E_1$。同样，每个这样的乘积都对应于唯一的一条边 $e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n \in E_n$。因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们可以将边集 E_n 与以下序列集合对应起来

$$E_1^n := \{(e_i)_{i=1}^n \mid e_i \in E_1 \text{ for all } 1 \le i \le n\}$$

通过映射 $(e_i)_{i=1}^n \mapsto e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n$。类似地，我们可以将符号空间 Σ 与序列集合

$$E_1^{\mathbb{N}} = \{(e_i)_{i=1}^\infty \mid e_i \in E_1 \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}$$

通过映射 $(e_i)_{i=1}^\infty \mapsto (e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_i)_{i=1}^\infty$。从相应的乘积分解角度来理解这些边通常非常方便，这也引出了下面的定义。

定义 3.9。我们定义映射 $T\colon E_1^n \to E_n$ 和 $T\colon E_1^{\mathbb{N}} \to \Sigma$ 如下：

$$T((e_i)_{i=1}^n) := \begin{cases} e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n & \text{if } n \in \mathbb{N}, \\ (e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_i)_{i=1}^\infty & \text{if } n = \infty. \end{cases}$$

此外，若 $x = T((e_i)_{i=1}^n)$，则记为 $T^{-1}(x)_i = e_i \in E_1$。

正如注 3.8 中的讨论所明确指出的，逆映射 T^{-1} 定义良好。此外，我们可以方便地指称元素 $x \in \Sigma \cup (\bigcup_{n=1}^\infty E_n)$ 的乘积分解中的某个特定项 $T^{-1}(x)_i$，并且有

$$x = \begin{cases} T^{-1}(x)_1 \cdot \ldots \cdot T^{-1}(x)_n & \text{if } x \in E_n \text{ for some } n \in \mathbb{N}, \\ \left(T^{-1}(x)_1 \cdot \ldots \cdot T^{-1}(x)_i\right)_{i=1}^\infty & \text{if } x \in \Sigma. \end{cases}$$

引理 3.10。设 Σ 是一个倍增对称 *IGS* 的符号空间。假设 $(e_i)_{i=1}^\infty \sim (f_i)_{i=1}^\infty \in \Sigma$ 满足 $e_n \cap f_n \neq \varnothing$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。则存在 $m \le n$，使得

$$T^{-1}((e_i)_{i=1}^\infty)_i = \begin{cases} T^{-1}((f_i)_{i=1}^\infty)_i & \textit{for } 1 \le i < m \\ T^{-1}((f_i)_{i=1}^\infty)_i \ \textit{ or } \ \eta \circ T^{-1}((f_i)_{i=1}^\infty)_i & \textit{for } m < i \le n \end{cases}$$

证明。设 $m = \min\{n, k \mid e_k \neq f_k\}$，并假设 $n > 1$，否则无须证明。由于对所有 $1 \leq i < m$都有 $e_i = f_i$，我们必有

$$T^{-1}((e_i)_{i=1}^{\infty})_i = T^{-1}(e_i)_i = T^{-1}(f_i)_i = T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_i$$

对所有 $1 \leq i < m$。由于 $e_n \cap f_n \neq \varnothing$，根据 (SM2) 可知，对所有 $m \leq i < n$存在一个顶点 $v_i \in e_i \cap f_i$ 和一个元素 $a_i \in I$，使得

$$e_{i+1} \cap f_{i+1} = [\phi_{v_i,e_i}(a_i), e_i] = [\phi_{v_i,f_i}(a_i), f_i].$$

由于 IGS 是对称的，我们有 $\phi_{v_i,e_i}(a_i) \in \{\phi_{v_i,f_i}(a_i)\ \eta \circ \phi_{v_i,f_i}(a_i)\}$。根据定义，顶点 $\phi_{v_i,e_i}(a_i)$ 、 $\phi_{v_i,f_i}(a_i)$ 和 $\eta \circ \phi_{v_i,f_i}(a_i)$ 分别是边 $\sigma_{e_i}^{-1}$,$\mathbf{1}(e_{i+1})$ 、 $\sigma_{f_i}^{-1}{}_1$, (f_{i+1}) 和 $\eta \circ \sigma_{f_i}^{-1}{}_1$, (f_{i+1}) 的端点。此外，我们有 $\sigma_{e_i}^{-1}$,$\mathbf{1}(e_{i+1}) = T^{-1}((e_i)_{i=1}^{\infty})_{i+1}$ 以及 $\sigma_{f_i}^{-1}$, $\mathbf{1}(f_{i+1}) = T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_{i+1}$。因此，边 $T^{-1}((e_i)_{i=1}^{\infty})_{i+1}$ 与 $T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_{i+1}$或 $\eta \circ T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_{i+1}$有一个公共端点 $\phi_{v_i,e_i}(a_i)$。然而，由于 IGS 是倍增的，我们有 $\deg(\phi_{v_i,e_i}(a_i)) = 1$，因此存在唯一的边 $\mathfrak{e}(\phi_{v_i,e_i}(a_i)) \in E_1$，其端点之一为 $\phi_{v_i,e_i}(a_i)$。因此，对所有 $m < i \leq n$，我们有

$$T^{-1}((e_i)_{i=1}^{\infty})_i = \mathfrak{e}(\phi_{v_{i-1},e_{i-1}}(a_{i-1})) \in \{T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_i,\ \eta \circ T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_i\}$$

□

注记 3.11。设 $X_{e,\ \pm} = \{[(e_i)_{i=1}^{\infty}] \in X\colon\ e_n = e,\ \ e_k \in e \cdot I_{\pm}^{k-n},\ \ k > n\}$。引理 3.10 的证明表明，对于两条相邻的边 $e,\ f \in E_n$，有 $X_e \cap X_f \subset X_{f,\ \pm}$。

定义 3.12。对称 Laakso 型分形空间是一个简单 IGS 的极限空间 X，该 IGS 具有倍增性、非退化性和对称性。

4. Construction of metrics

本节中，我们在该极限空间上构造一族度量。最重要的是，这一构造产生了一个拟对称等价度量的子族，并具有视觉度量类性质；正如我们将在第 5 节中展示的，这个子族构成了相关共形规范的一个维数穷尽子集。

与早期的一个构造 [1]，相比，当前构造使我们能够去除均匀缩放假设，并处理不一定是拟凸的度量。涉及球、集合或点对的球的链式连接的类似构造，此前已在许多地方出现过，例如 [4, 6, 11, 37]。

在本节余下部分，我们固定一个具有生成元$G_1 = (V_1,\ E_1,\ \xi_1)$的倍增、非退化 IGS。之后，我们还要求该 IGS 具有对称性，此时将相关的对称映射记为 η。

4.1. 密度级联。密度 $\rho\colon\ E_1 \to (0,\ 1)$ 以乘法级联的方式诱导出一个密度序列 $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\rho_n\colon\ E_n \to (0,\ 1)$ 对每个 $e \in E_n$ 递归定义为

$$\rho_n(e) := \begin{cases} \rho(e) & \text{if } n = 1, \\ \rho_{n-1}(\pi_n(e)) \cdot \rho_1(\sigma_{\pi_n(e),1}^{-1}(e)) & \text{if } n > 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

等价地，序列中的每个密度都可以表示为一个乘积

$$\rho_n(e) = \prod_{i=1}^{n} \rho(T^{-1}(e)_i). \tag{4.2}$$

从现在起，给定任意密度 $\rho\colon E_1 \to (0,1)$，我们用 ρ_n 指代由方程 (4.1) 和 (4.2) 等价给出的密度 $\rho_n\colon E_n \to (0,1)$。为方便起见，我们还引入以下常数：

$$M_\rho := \max_{e\in E_1} \rho_1(e) \text{ and } m_\rho := \min_{e\in E_1} \rho_1(e).$$

注意，对于某些 $k\in\mathbb{N}$，只要 $e\in E_n$ 和 $f\in e\cdot E_k$，便可直接从构造得出

$$m_\rho^k \rho_n(e) \le \rho_{n+k}(f) \le M_\rho^k \rho_n(e). \tag{4.3}$$

回顾一下，对于 $e\in E_n$，我们记作 $|e| := n$。当 $n>m$ 且 $\Omega \in \bigcup_{i=1}^m E_i$ 时，我们将 Ω 在 G_m 中覆盖的子图定义为

$$p_n(\Omega) := \bigcup_{e\in\Omega} e\cdot G_{n-|e|}.$$

对于每一对顶点 $v,w\in V_n$，我们定义集合

$$\Lambda_{v,w}^n := \left\{ \Omega\in \bigcup_{i=1}^n E_i \;\middle|\; v \text{ and } w \text{ are connected by a path in } p_n(\Omega) \right\}.$$

接着，我们将度量 $d_{\rho,n}\colon V_n\times V_n \to [0,\infty)$ 定义为

$$d_{\rho,n}(v,w) := \begin{cases} 0 & \text{if } v=w, \\ \inf\limits_{\Omega\in\Lambda_{v,w}^n} \sum\limits_{e\in\Omega} \rho_{|e|}(e) & \text{if } v\neq w. \end{cases}$$

对于任意一对 $e,f\in E_n$，我们记 $d_{\rho,n}(e,f) := \min\{d_{\rho,n}(v,w) \mid v\in e,\ w\in f\}$。

注记4.4。为了验证$d_{\rho,n}$ 满足三角不等式，只需注意，对于任意三个顶点 $v,w,u\in V_n$，若$\Omega_1\in\Lambda_{v,w}^n$ 且$\Omega_2\in\Lambda_{w,u}^n$，则$\Omega_1\cup\Omega_2\in\Lambda_{v,u}^n$。由于

$$\sum_{e\in\Omega_1\cup\Omega_2} \rho_{|e|}(e) \le \sum_{e\in\Omega_1} \rho_{|e|}(e) + \sum_{e\in\Omega_2} \rho_{|e|}(e),$$

因此，取下确界可得$d_{\rho,n}(v,u) \le d_{\rho_n}(v,w) + d_{\rho,n}(w,u)$。

若 $m>n$，则称 $x_m\in V_m$ 是 $x_n\in V_n$ 的祖先，当且仅当$\pi_{m,n}(x_m) = x_n$。

引理4.5。设 $\rho\colon E_1\to(0,1)$ 可 $\Theta^{(1)}$-可容许且 $n,m\in\mathbb{N}$ 使得 $n<m$。(DL1) 若 $x_m,y_m\in V_m$ 是 $x_n,y_n\in V_n$的祖先，且 $x_n\neq y_n$，则

$$d_{\rho,m}(x_m,y_m) = d_{\rho,n}(x_n,y_n).$$

(DL2) 若 $e\in E_n$ 且 $x_m,y_m\in e\cdot V_{m-n}$，则

$$d_{\rho,m}(x_m,y_m) \le \rho_n(e).$$

(DL3) 若 e，$f\in E_n$，$v\in e$ 且 $w\in f$，则

$$d_{\rho,n}(v,w) - \rho_n(e) - \rho_n(f) \le d_{\rho,n}(e,f) \le d_{\rho,n}(v,w).$$

(DL4) 若 e，$f\in E_m$，则

$$\begin{aligned} &d_{\rho,n}(\pi_{m,n}(e),\pi_{m,n}(f)) \le d_{\rho,m}(e,f) \\ &\le d_{\rho,n}(\pi_{m,n}(e),\pi_{m,n}(f)) + \rho_n(\pi_{m,n}(e)) + \rho_n(\pi_{m,n}(f)). \end{aligned}$$

证明。我们从（DL1）开始。只需考虑的情形，因为一般情形随后可由归纳法得到。根据构造，有，$_{y_n} \subset \Lambda^{n+1}_{x_{n+1},\ y_{n+1}}$，因此可直接推出

$$d_{\rho,n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}) \leq d_{\rho,n}(x_n, y_n).$$

对于逆向不等式，令 $\Omega \in \Lambda^{n+1}_{x_{n+1},\ y_{n+1}}$。根据定义，存在一条简单路径$\theta$，其位于 p_{n+1}中，连接 x_{n+1} 与 y_{n+1}。根据命题 3.5，由于 $x_{n+1} \neq y_{n+1}$，路径θ 可以提升到 G_n；也就是说，存在一条简单路径 $\vartheta = [x_n, e_1, \ldots, e_k, y_n]$，其位于$G_n$ 中，并且对于每个 $1 \leq i \leq k$，存在一条简单路径 $\theta_i \in \Theta^{(1)}$，使得 $\{e_i \cdot \theta_i\}_{i+1}^{k}$ 是 θ的一组边不相交子路径。由于 ρ 是 $\Theta^{(1)}$-可容许的，对于每个$1 \leq i \leq k$，我们有

$$\rho_n(e_i) \leq \rho_n(e_i) \cdot L_{\rho_1}(\theta_i) = L_{\rho_{n+1}}(e_i \cdot \theta_i) = \sum_{e \in e_i \cdot \theta_i} \rho_{n+1}(e). \tag{4.6}$$

定义

$$\Omega_u := \{e_i \in \vartheta \mid e_i \notin p_n(\Omega \setminus E_{n+1})\},$$

使得 $\vartheta \subset p_n((\Omega \setminus E_{n+1}) \cup \Omega_u)$，从而 $(\Omega \setminus E_{n+1}) \cup \Omega_u \in \Lambda^n_{x_n,\ y_n}$。对于每个$e_i \in \Omega_u$，相应的子路径 $e_i \cdot \theta_i$ 包含于 $p_{n+1}(\Omega)$ 中，但不能与 $p_{n+1}(\Omega \setminus E_{n+1})$ 相交；否则将存在某个 $f \in \Omega \setminus E_{n+1}$，使得 $e_i \cdot \theta_i$ 中的一条边位于 $f \cdot E_{n+1-|f|}$ 中，从而导致 $e_i \in f \cdot E_{n-|f|} \subset p_n(\Omega \setminus E_{n+1})$，这与 $e_i \in \Omega_u$ 矛盾。因此，如果 $e_i \in \Omega_u$，则 $e_i \cdot \theta_i$ 的每条边都必须属于 $p_{n+1}(\Omega \cap E_{n+1})$，因而属于 $\Omega \cap E_{n+1}$。

由方程 (4.6)，可得

$$\sum_{e \in \Omega_u} \rho_n(e) \leq \sum_{e \in \Omega \cap E_{n+1}} \rho_{n+1}(e),$$

因此

$$\sum_{e \in (\Omega \setminus E_{n+1}) \cup \Omega_u} \rho_{|e|}(e) \leq \sum_{e \in \Omega \setminus E_{n+1}} \rho_{|e|} + \sum_{e \in \Omega \cap E_{n+1}} \rho_{|e|} = \sum_{e \in \Omega} \rho_{|e|},$$

最后，由于 $(\Omega \setminus E_{n+1}) \cup \Omega_u \in \Lambda^n_{x_n,\ y_n}$，我们得到

$$d_{\rho,n}(x, y) \leq \sum_{e \in \Omega \setminus E_{n+1} \cup \Omega_u} \rho_{|e|}(e) \leq \sum_{e \in \Omega} \rho_{|e|}.$$

由于 $\Omega \in \Lambda^{n+1}_{x_{n+1},\ y_{n+1}}$ 是任意的，因此可得

$$d_{\rho,n}(x_n, y_n) \leq d_{\rho,n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

接下来证明 (DL2)。对于任意 $e \in E_n$，子图 $p_m(\{e\}) = e \cdot G_{m-n}$ 是连通的，且包含 $e \cdot V_{m-n}$。因此，若 $x_m,\ y_m \in V_{m-n}$，则 $\{e\} \in \Lambda^m_{x_m,\ y_m}$，进而 $d_{\rho,\ m}(x_m,\ y_m) \leq \rho_n(e)$。

接下来，我们证明 (DL3)。由 $d_{\rho,\ n}$ 关于边的定义，直接可得

$$d_{\rho,n}(e, f) = \min_{x \in e, y \in w} d_{\rho,n}(x, y) \leq d_{\rho,n}(v, w).$$

另一方面，由于 $\{e\} \in \Lambda^n_{e^-,\ e^+}$ 且 $\{f\} \in \Lambda^n_{f^-,\ f^+}$ 根据三角不等式可得

$$\begin{aligned} d_{\rho,n}(v, w) &\leq d_{\rho,n}(e, f) + d_{\rho,n}(e^-, e^+) + d_{\rho,n}(f^-, f^+) \\ &\leq d_{\rho,n}(e, f) + \rho_n(e) + \rho_n(f). \end{aligned}$$

因此，我们得到剩余的不等式

$$d_{\rho,n}(v,w)-\rho_n(e)-\rho_n(f)\le d_{\rho,n}(e,f).$$

最后，我们证明 (DL4)。我们先证明第一个不等式。首先注意，如果$\pi_{m,n}(e)\cap\pi_{m,n}(f)\neq\varnothing$，那么显然有

$$d_{\rho,n}(\pi_{m,n}(e),\pi_{m,n}(f))=0\le d_{\rho,m}(e,f).$$

因此，假设 $\pi_{m,n}(e)\cap\pi_{m,n}(f)=\varnothing$，并令 $x,y\in V_m$ 满足$d_{\rho,m}(e,f)=d_{\rho,m}(x,y)$。令 $\Omega\in\Lambda^m_{x,y}$。根据定义，存在一条路径 θ，在 $p_m(\Omega)$ 中连接x 和 y；由命题 3.5，存在某些顶点 $x_n\in\pi_{m,n}(e)$ 和 $y_n\in\pi_{m,n}(f)$ 的祖先 x_m,y_m，使得 θ 有一条从x 到 x_m 的子路径，以及另一条从 y 到 y_m的子路径。因此，我们有 $\Omega\in\Lambda^m_{x_m,y_m}$；又由于 (DL1) 给出 $d_{\rho,m}(x_m,y_m)=d_{\rho,n}(x_n,y_n)$，可得

$$d_{\rho,n}(\pi_{m,n}(e),\pi_{m,n}(f))\le d_{\rho,n}(x_n,y_n)=d_{\rho,m}(x_m,y_m)\le\sum_{g\in\Omega}\rho_{|g|}(g). \tag{4.7}$$

由于集合 $\Omega\in\Lambda^m_{x,y}$ 是任意的，我们得到第一个不等式

$$d_{\rho,n}(\pi_{m,n}(e),\pi_{m,n}(f))\le d_{\rho,m}(e,f).$$

对于第二个不等式，令 $x,y\in V_m$ 满足 $d_{\rho,m}(e,f)=d_{\rho,m}(x,y)$，并令 $v,w\in V_n$ 满足 $d_{\rho,n}(v,w)=d_{\rho,n}(\pi_{m,n}(e)\,\pi_{m,n}(f))$。令 $\Omega\in\Lambda^n_{v,w}$，并定义

$$\Omega_0:=\Omega\cup\{\pi_{m,n}(e),\pi_{m,n}(f)\}.$$

由于 $e\in\pi_{m,n}(e)\cdot E_{m-n}$ 且 $f\in\pi_{m,n}(f)\cdot E_{m-n}$，我们有 $\Omega_0\in\Lambda^m_{x,y}$，因此

$$d_{\rho,m}(e,f)\le d_{\rho,m}(x,y)\le\sum_{g\in\Omega_0}\rho_{|g|}(g)=\rho_n(\pi_{m,n}(e))+\rho_n(\pi_{m,n}(f))+\sum_{g\in\Omega}\rho_{|g|}(g). \tag{4.8}$$

由于 $\Omega\in\Lambda^n_{v,w}$ 是任意的，我们得到第二个不等式

$$d_{\rho,m}(e,f)\le d_{\rho,n}(\pi_{m,n}(e),\pi_{m,n}(f))+\rho_n(\pi_{m,n}(e))+\rho_n(\pi_{m,n}(f)).$$

□

4.2. **极限度量**。令 $\rho\colon E_1\to(0,1)$ 为一个 $\Theta^{(1)}$-可容许密度。我们在 IGS 的极限空间 X 上定义度量 d_ρ 如下

$$d_\rho([(e_i)_{i=1}^\infty],[(f_i)_{i=1}^\infty]):=\lim_{i\to\infty}d_{\rho,i}(e_i,f_i).$$

该度量定义良好，因为极限不依赖于 $[(e_i)_{i=1}^\infty]$ 和 $[(f_i)_{i=1}^\infty]$所选取的代表元，正如下一条引理将要证明的那样。

引理 4.9。函数 d_ρ 是 X上的一个定义良好的度量。

证明。给定 $(e_i)_{i=1}^\infty$，$(f_i)_{i=1}^\infty$，$(h_i)_{i=1}^\infty\in\Sigma$，使得 $(e_i)_{i=1}^\infty\sim(f_i)_{i=1}^\infty$，根据定义，对于所有 $i\in\mathbb{N}$，我们有 $e_i\cap f_i\neq\varnothing$。由于 $\{e_i\}\in\Lambda^i_{e_i^-,\,e_i^+}$ 且 $\{f_i\}\in\Lambda^i_{f_i^-,\,f_i^+}$ 对所有 $i\in\mathbb{N}$均成立，度量 $d_{\rho,i}$ 的三角不等式给出

$$|d_{\rho,i}(e_i,h_i)-d_{\rho,i}(f_i,h_i)|\le d_{\rho,i}(e_i^-,e_i^+)+d_{\rho,i}(f_i^-,f_i^+)\le\rho_i(e_i)+\rho_i(f_i),$$

并且由于 $\rho_i(e_i)$ $\rho_i(f_i)\overset{i\to\infty}{\longrightarrow}0$，我们有

$$\lim_{i\to\infty}d_{\rho,i}(e_i,h_i)=\lim_{i\to\infty}d_{\rho,i}(f_i,h_i).$$

因此，若 $(e_i)_{i=1}^\infty,(f_i)_{i=1}^\infty,(g_i)_{i=1}^\infty,(h_i)_{i=1}^\infty \in \Sigma$ 满足 $(e_i)_{i=1}^\infty \sim (f_i)_{i=1}^\infty$ 且 $(h_i)_{i=1}^\infty \sim (g_i)_{i=1}^\infty$，则

$$\lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(e_i,h_i) = \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(f_i,h_i) = \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(f_i,g_i) = \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(f_i,g_i).$$

因此，d_ρ 定义良好。

接下来，我们将证明 d_ρ 确实是一个度量。令 $[(e_i)_{i=1}^\infty]$，$[(f_i)_{i=1}^\infty] \in X$。若$[(e_i)_{i=1}^\infty] = [(f_i)_{i=1}^\infty]$，则根据定义，$e_i \cap f_i \neq \varnothing$，因此$d_{\rho,i}(e_i, f_i) = 0$，对所有$i \in \mathbb{N}$均成立，由此可得

$$d_\rho([(e_i)_{i=1}^\infty],[(f_i)_{i=1}^\infty]) = \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(e_i,f_i) = 0.$$

若 $[(e_i)_{i=1}^\infty] \neq [(f_i)_{i=1}^\infty]$，则存在某个 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $e_i \cap f_i = \varnothing$，因此$d_{\rho,i}(e_i, f_i) > 0$，对所有 $i \geq j$均成立。特别地，由于根据(DL4)，序列$d_{\rho,i}(e_i, f_i)$是递增的，我们有 $d_{\rho,i}(e_i, f_i) > d_{\rho,i}(e_j, f_j) > 0$ 对所有 $i \geq j$均成立，因此可得

$$d_\rho([(e_i)_{i=1}^\infty],[(f_i)_{i=1}^\infty]) = \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(e_i,f_i) \geq d_{\rho,i}(e_j,f_j) > 0.$$

因此，我们有 $d_\rho([(e_i)_{i=1}^\infty], [(f_i)_{i=1}^\infty]) = 0$ 当且仅当 $[(e_i)_{i=1}^\infty] = [(f_i)_{i=1}^\infty]$。关于 d_ρ 的对称性直接由度量的对称性d_ρ得出。对于三角不等式，(DL3) 给出

$$|d_{\rho,i}(e_i,f_i) - d_{\rho,i}(e_i^-,f_i^-)| \leq d_{\rho,i}(e_i^-,e_i^+) + d_{\rho,i}(f_i^-,f_i^+) \leq \rho_i(e_i) + \rho_i(f_i),$$

由于 $\rho_i(e_i)\ \rho_i(f_i) \xrightarrow{i\to\infty} 0$，因此

$$d_\rho([(e_i)_{i=1}^\infty],[(f_i)_{i=1}^\infty]) = \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(e_i,f_i) = \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(e_i^-,f_i^-). \tag{4.10}$$

给定第三个点 $[(h_i)_{i=1}^\infty] \in X$，我们有 $d_{\rho,i}(e_i^-,\ f_i^-) \leq d_{\rho,i}(e_i^-,\ h_i^-) + d_{\rho,i}(h_i^-,\ f_i^-)$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立，由此可得

$$\begin{aligned} d_\rho([(e_i)_{i=1}^\infty],[(f_i)_{i=1}^\infty]) &\overset{(4.10)}{=} \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(e_i^-,f_i^-) \\ &\leq \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(e_i^-,h_i^-) + \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(h_i^-,f_i^-) \\ &\overset{(4.10)}{=} d_\rho([(e_i)_{i=1}^\infty],[(h_i)_{i=1}^\infty]) + d_\rho([(h_i)_{i=1}^\infty],[(f_i)_{i=1}^\infty]), \end{aligned}$$

因此，d_ρ 满足三角不等式。 □

定义 4.11。在 X 上的内在度量 d_{L_*} 是由平凡的可容许密度 $\rho \equiv L_*^{-1}$给出的度量 d_ρ。

虽然度量 d_ρ 的构造适用于所有可容许的 ρ，但我们需要以下对称条件来建立倍增性质。它也是确保不同 ρ 对应的度量 d_ρ 彼此拟对称所必需的。

定义 4.12。设 ρ: $E_1 \to (0,1)$ 是 $\Theta^{(1)}$-可容许的，并假设 IGS 是对称的，且对应的对称映射为 η: $G_1 \to G_1$。若对所有 $e \in E_1$，密度 ρ 满足 $\rho(\eta(e)) = \rho(e)$，则称其为对称的。

该极限空间具有覆盖 $\mathbf{X}^n := \{X_e : e \in E_n\}$ 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，并且它满足准视觉逼近条件，其含义见 [4, 定义 2.1]。为证明这一点，我们首先推导极限度量的一些不等式。

引理 4.13。 设 $x = [(e_i)_{i=1}^{\infty}]$、 $y = [(f_i)_{i=1}^{\infty}] \in X$，并设 ρ: $E_1 \to (0,\ 1)$ 为一个$\Theta^{(1)}$-可容许密度。

(DL5) 对于所有 $n \in \mathbb{N}$， 我们有

$$d_{\rho,n}(e_n, f_n) \le d_\rho(x, y).$$

(DL6) 如果 $e_n \cap f_n \neq \varnothing$ 对于某个 $n \in \mathbb{N}$，那么

$$d_\rho(x, y) \le \rho_n(e_n) + \rho_n(f_n).$$

(DL7) 如果 $e_n \cap f_n \neq \varnothing$ 对于某个 $n \in \mathbb{N}$，且 *IGS* 和 ρ 是对称的，那么

$$\frac{m_\rho}{M_\rho}\rho_n(e_n) \le \rho_n(f_n) \le \frac{M_\rho}{m_\rho}\rho_n(e_n).$$

(DL8) 如果 $e_n \cap f_n = \varnothing$ 对于某个 $n \in \mathbb{N}$，且 *IGS* 和 ρ 是对称的，那么

$$d_\rho(x, y) \ge \frac{m_\rho}{M_\rho}\rho_n(e_n).$$

证明。 我们先从 (DL5) 开始。根据 (DL4)，我们有 $d_{\rho,\ i+1}(e_{i+1},\ f_{i+1}) \ge d_{\rho,\ i}(e_i,\ f_i)$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都成立，因此对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立

$$d_\rho(x, y) = \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(e_i, f_i) \ge d_{\rho,n}(e_n, f_n).$$

(DL6) 可直接推出；因为 $e_n \cap f_n \neq \varnothing$，子图 $e_n \cdot G_m \cup f_n \cdot G_m$是连通的，并且对于所有 $m \in \mathbb{N}$，都包含 e_{n+m} 和 f_{n+m}。因此，对于所有 $i \ge n$，$d_{\rho,i}(e_i, f_i) \le \rho_n(e_n) + \rho_n(f_n)$，所以

$$d_\rho(x, y) = \lim_{i\to\infty} d_{\rho,i}(e_i, f_i) \le \rho_n(e_n) + \rho_n(f_n).$$

接下来讨论 (DL7)。对于任意序列 $(h_i)_{i=1}^{\infty} \in \Sigma$，由构造可知 $(T^{-1}(h_n))_i = (T^{-1}((h_i)_{i=1}^{\infty}))_i$对所有 $1 \le i \le n$都成立。因此，我们可以将 $\rho_n(e_n)$ 和 $\rho_n(f_n)$ 写成如下乘积

$$\rho_n(e_n) = \prod_{i=1}^{n} \rho\big(T^{-1}((e_i)_{i=1}^{\infty})_i\big) \quad \text{and} \quad \rho_n(f_n) = \prod_{i=1}^{n} \rho\big(T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_i\big). \tag{4.14}$$

由于 IGS 是倍增、非退化且对称的，引理 3.10 保证存在一个数 $m \le n$，使得

$$T^{-1}((e_i)_{i=1}^{\infty})_i = \begin{cases} T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_i & \text{for } 1 \le i < m, \\ T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_i \ \text{ or } \ \eta \circ T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_i & \text{for } m < i \le n. \end{cases} \tag{4.15}$$

由于 ρ是对称的，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，我们有 $\rho(T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_i) = \rho(\eta \circ T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_i)$，因此由 (4.15) 可得

$$\prod_{\substack{1\le i\le n\\ i\neq m}} \rho(T^{-1}((e_i)_{i=1}^{\infty})_i) = \prod_{\substack{1\le i\le n\\ i\neq m}} \rho(T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_i). \tag{4.16}$$

结合（4.14）和（4.16），我们得到

$$\frac{\rho_n(e_n)}{\rho(T^{-1}((e_i)_{i=1}^{\infty})_m)} = \frac{\rho_n(f_n)}{\rho(T^{-1}((f_i)_{i=1}^{\infty})_m)},$$

并且由于对所有 $e \in E_1$，$0 < m_\rho \le \rho(e) \le M_\rho < 1$，我们得到了所需的估计

$$\frac{m_\rho}{M_\rho}\rho_n(e_n) \le \rho_n(f_n) \le \frac{M_\rho}{m_\rho}\rho_n(e_n).$$

最后，我们证明 (DL8)。设 $v \in e_n$ 和 $w \in f_n$，使得 $d_{\rho,n}(v, w) = d_{\rho,n}(e_n, f_n)$。由于 $e_n \cap f_n = \varnothing$，我们有 $v \neq w$，因此可以选取 $\Omega \in \Lambda^n_{v,w}$，使得

$$d_{\rho,n}(v, w) = \sum_{e \in \Omega} \rho_{|e|}(e).$$

根据定义，$p_n(\Omega)$ 包含一条连接 v 与 w 的路径，因此存在一条边 $g \in p_n(\Omega)$，使得 $v \in g \cap e_n$。对于每个满足 $g \in e \cdot G_{n-|e|}$ 的 $e \in \Omega$，我们有 $\rho_n(g) \leq \rho_{|e|}(e)$，因此

$$\rho_n(g) \leq \sum_{e \in \Omega} \rho_{|e|}(e) = d_{\rho,n}(v, w) = d_{\rho,n}(e_n, f_n).$$

由于 $g \cap e_n \neq \varnothing$，根据 (DL7) 可得 $\rho_n(g) \geq (m_\rho / M_\rho) \cdot \rho_n(e)$。由 (DL5)，我们有 $d_\rho(x, y) \geq d_{\rho,n}(e_n, f_n)$，从而得到所需的不等式

$$d_\rho(x, y) \geq d_{\rho,n}(e_n, f_n) \geq \rho_n(g) \geq \frac{m_\rho}{M_\rho} \rho_n(e_n).$$

□

推论 4.17. 若 $\rho\colon E_1 \to (0, 1)$ 是对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度，则

$$\frac{m_\rho^3}{M_\rho} \rho_n(e) \leq \operatorname{diam}(X_e, d_\rho) \leq \rho_n(e) \leq \frac{M_\rho}{m_\rho^3} \rho_n(e). \tag{4.18}$$

证明。根据定义，每个点 $x \in X_e$ 都有一个代表元 $(e_i)_{i=1}^\infty \in \Sigma$，满足 $e_n = e$；由此根据 (DL2) 可得 $\operatorname{diam}(X_e, d_\rho) \leq \rho_n(e)$。因此，只需证明最左侧的不等式。根据引理 3.7，存在 $f, h \in e \cdot E_2$，使得 $f \cap h = \varnothing$。固定 $y \in X_f$ 和 $z \in X_h$。那么，根据定义，y 有一个代表元 $(f_i)_{i=1}^\infty \in \Sigma$，满足 $f_{n+2} = f$，而 z 有一个代表元 $(h_i)_{i=1}^\infty \in \Sigma$，满足 $h_{n+2} = h$。因此，由于 $X_f, X_h \subset X_e$ 和 $f \cap h = \varnothing$，根据引理 (DL8) 可得

$$\operatorname{diam}(X_e, d_\rho) \geq d_\rho(x, y) \geq \frac{m_\rho}{M_\rho} \rho_{n+2}(f) \geq \frac{m_\rho^3}{M_\rho} \rho_n(e),$$

其中最后一个不等式由方程 (4.3) 得出。 □

利用目前得到的估计，我们可以确立极限空间的一些基本拓扑性质。

引理 4.19. 对于每个 $\Theta^{(1)}$-可容许密度 $\rho\colon E_1 \to (0, 1)$，度量空间 (X, d_ρ) 是紧致且连通的。

证明。我们首先证明典范投影 $\chi\colon (\Sigma, \delta_\Sigma) \to (X, d_\rho)$ 是连续的。若 $x = (e_i)_{i=1}^\infty, y = (f_i)_{i=1}^\infty \in \Sigma$，使得 $\delta_\Sigma((e_i)_i^\infty, (f_i)_i^\infty) < 2^{-k}$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$ 成立，则 $e_k \cap f_k \neq \varnothing$，因此，由 (DL6) 可得，

$$d_\rho(\chi(x), \chi(y)) \leq \rho_k(e_k) + \rho_k(f_k) \leq 2M_\rho^k.$$

因此，对于每个 $\varepsilon > 0$，都可以选取 $\delta = 2^{-\log(\varepsilon/4)/\log(M_\rho)}$，使得当 $x, y \in \Sigma$ 且 $\delta_\Sigma(x, y) < \delta$ 时，$d_\rho(\chi(x)\ \chi(y)) < \varepsilon$。因此，$\chi$ 是连续的。由于 (Σ, δ_Σ) 是紧致的，且 χ 连续，所以 $\chi(\Sigma) = (X, d_\rho)$ 是紧致的。

接下来证明 (X, d_ρ) 是连通的。对任意 $x, y \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，选取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $M_\rho^n < \varepsilon$。由于 G_n 是连通的，我们可以选取一条边路径 $\theta = [v_0, e_1, v_2, \ldots, e_l, v_l]$，使得 $x \in X_{e_1}$、$y \in X_{e_l}$ 和 $l \leq |E_n|$。对每个 $1 \leq i \leq l$，选取一个点 $z_i \in X_{e_i}$。由于 $\operatorname{diam}(X_{e_i}, d_\rho) \leq \rho_n(e_i) \leq M_\rho^n < \varepsilon$，对于每个 $1 \leq i \leq i-1$，都有 $B_{d_\rho}(z_i, \varepsilon) \cap B_{d_\rho}(z_{i+1}, \varepsilon) \neq \varnothing$。也就是说，每一对

点 x, y 都可以通过一个 2ε-链 $(z_i)_{i=1}^{l}$ 相连（即一组点，使得$z_1 = x, z_l = y$且 $d(z_i, z_{i+1})$ $\leq 2\epsilon$ 对每个 $i = 1, \ldots, l-1$都成立）。由于 x, y 和 ε 是任意选取的，且 X 是紧致的，因此 (X, d_ρ) 是连通的。□

注 4.20。 虽然空间 $(X,\ d_\rho)$ 一般不一定是拟凸的，但在相对温和的附加假设下，我们可以恢复拟凸性。可以证明，如果 IGS 是对称的，且 $\rho\colon E_1 \to (0,\ 1)$ 是对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许函数，那么空间 $(X,\ d_\rho)$ 是拟凸的，当且仅当存在一条路径 $\theta \in \Theta^{(1)}$，其满足 $L_\rho(\theta) = 1$。例如，只要 IGS 是对称的，内在度量 d_{L_*} 就是拟凸的。

在拟凸的情况下，度量 d_ρ 还有一种更简单的构造：经过双 Lipschitz 变形后，它可以实现为 G_n 上重新缩放的路径度量的 Gromov-Hausdorff 极限，其中边的权重为 ρ_n。特别地，这为对称情况下的内在度量 d_{L_*} 提供了一种略为简单的描述。

现在我们简要概述拟凸性的证明。本文后续不需要这一结果，这里仅为保证论述完整而将其纳入。

由于 $L_\rho(\theta) = 1$，对于任意 $e \in E_n$，都有 $L_{\rho_{n+1}}(e\cdot\theta) = \rho_n(e)\cdot L_\rho(\theta) = \rho_n(e)$。因此，给定 G_n 中从 v_a 到 v_b 的任意路径 θ_n，我们可以像引理 5.12 的证明中那样利用对称性，通过拼接构造一条 G_{n+1} 中的路径 θ_{n+1}，其端点为 $w_a \in \pi_{n+1}^{-1}(v_a)$ 和 $w_b \in \pi_{n+1}^{-1}(v_b)$，使得 $L_{\rho_{n+1}}(\theta_{n+1}) = L_{\rho_n}(\theta_n)$。此外，可以证明，路径 θ_n 可以提升为 X 上的一条 1-Lipschitz 路径 γ，其端点分别属于 X_{v_a} 和 X_{v_b}，使得 $\ell(\gamma) \leq L_{\rho_n}(\theta_n)$。

现在，对于任意的 $x = [(e_i)_{i=1}^{\infty}]$, $y = [(e_i)_{i=1}^{\infty}]$，首先固定一条路径 θ_n，连接 e_n 的一个端点与 f_n的一个端点，其中 $n = \min\{n \in \mathbb{N} \mid e_n \cap f_n = \varnothing\}$。随后将其延拓为 G_{n+1} 中的一条等长路径，并添加尾段，以得到一条路径 θ_{n+1}，连接 e_{n+1} 与 f_{n+1}。继续这一过程，在第 $i > n$ 阶段，尾段对 $L_{\rho_i}(\theta_i)$ 的贡献至多为 $K \cdot M_\rho^{i-n}$，其中$K \geq 1$，因此可得到一列 1-Lipschitz 路径 $(\gamma_i)_{i=n}^{\infty}$，从 X_{e_i} 连接到X_{f_i}，使得对于所有 $n \leq i < \infty$，都有 $\ell(\gamma_i) \leq L_{\rho_n}(\theta_n) + K\sum_{j=1}^{\infty} M_\rho^{j-n} \leq Cd(x, y)$，其中某个常数为 $C \geq 1$。由于 $x = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{e_i}$ 且 $y = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{f_i}$，Arzel`a–Ascoli 定理保证存在一条路径 γ，定义在 X 上，从 x 连接到 y，且满足 $\ell(\gamma) \leq Cd(x, y)$。

4.3. **Gromov–豪斯多夫收敛**。 迄今为止，称空间 X 为极限空间，主要是出于直观上的考虑。本小节的内容在论文其他部分不会用到；我们将证明，极限空间也可以作为替换图的 Gromov–豪斯多夫极限得到；关于这一概念的背景知识，参见例如 [9]。

序列 (X_n, d_{X_n}) *Gromov–豪斯多夫收敛* 到 (X, d)，如果存在某个序列$\varepsilon_n \to 0$

- 存在映射 $\iota_n\colon X_n \to X$ 使得

$$d_{X_n}(x, y) - \varepsilon_n \leq d(\iota_n(x), \iota_n(y)) \leq d_{X_n}(x, y) + \varepsilon_n;$$

对所有 $x, y \in X_n$均成立；并且

- 对每个 $x \in X$，都存在一个 $x_n \in X_n$ 使得 $d(\iota_n(x_n),\ x) \leq \varepsilon_n$。

命题 4.21。 对于任意 $\Theta^{(1)}$-可容许密度 $\rho\colon E_1 \to (0,\ 1)$，序列$(G_n, d_{\rho,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *Gromov–豪斯多夫收敛到极限空间* (X, d_ρ)。

证明。 对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $v \in V_n$，选取一个顶点 $\hat{}v \in V_{n+1}$，使得 $\pi_{n+1}(\hat{}v) = v$。然后，对每个 $m > n$，递归定义映射 $\iota_{n,\ m}\colon V_n \to V_m$，使得

$\iota_{n,\,n+1}(v) := \hat{}v$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\iota_{n,\,m} := \iota_{n,\,n+1} \circ \iota_{n+1,\,n+2} \circ \ldots \circ \iota_{m-1,\,m}$。于是我们有

$$\iota_{n,m} \circ \iota_{m,k} = \iota_{m,k} \quad \text{and} \quad \pi_{k,m} \circ \iota_{n,k} = \iota_{n,m} \quad \text{for all } n < m < k.$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $v \in V_n$，选取一个边序列 $(e_{v,\,i})_{i=n}^{\infty}$，使得 $v \in e_{v,\,n}$，$i_{n,\,m}(v) \in e_{v,\,m}$ 且 $\pi_m(e_{v,\,m}) = e_{v,\,m-1}$ 对所有 $m > n$ 都成立，并定义映射 $\iota^E_{n,\,m}$：对所有 $m \in \mathbb{N}$，$V_n \to E_m$，定义如下：

$$\iota^E_{n,m}(v) = \begin{cases} \pi_{n,m}(e_{v,n}) & \text{for } n > m, \\ e_{v,m} & \text{for } n \leq m. \end{cases}$$

那么，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们可以将每个 $v \in V_n$ 与 X 中的一个点通过映射 ι_{V_n}：$V_n \to X$ 定义为 $\iota_{V_n}(v) := [(\iota^E_{n,\,i}(v))_{i=1}^{\infty}]$。由 (DL3) 和 (DL1)可知，对所有 v，$w \in V_n$ 均有

$$\begin{aligned} d_{\rho,m}(\iota_{n,m}(v), \iota_{n,m}(w)) - 2M_\rho^m &\leq d_{\rho,m}(\iota^E_{n,m}(v), \iota^E_{n,m}(w)) \\ &\leq d_{\rho,m}(\iota_{n,m}(v), \iota_{n,m}(w)) = d_{\rho,n}(v,w) \end{aligned}$$

对所有 $m > n$ 都成立，因此

$$\begin{aligned} d_\rho(\iota_{V_n}(v), \iota_{V_n}(w)) &= \lim_{m\to\infty} d_{\rho,m}(\iota^E_{n,m}(v), \iota^E_{n,m}(w)) \\ &= \lim_{m\to\infty} d_{\rho,m}(\iota_{n,m}(v), \iota_{n,m}(w)) \\ &= \lim_{m\to\infty} d_{\rho,n}(v,w) = d_{\rho,n}(v,w), \end{aligned}$$

因此 ι_{V_n} 是一个等距嵌入，并且满足 Gromov–豪斯多夫收敛的第一个条件。对于每个 $x = [(e_i)_{i=1}^{\infty}] \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$，选取一个端点 $v_n \in e_n$。由 (DL6) 可得

$$d_\rho(x, \iota_{V_n}(v_n)) \leq 2\rho_n(e_n) \leq 2M_\rho^n,$$

因此，Gromov–豪斯多夫收敛可由 $M_\rho \in (0,1)$ 得出。 □

4.4. 准视觉逼近。 为验证阿尔福斯正则性，我们为极限空间建立一个良好的准视觉逼近。

定义 4.22 ([4, 定义 2.1])**.** 设 S 是一个有界度量空间。若由 S 的子集构成的有限覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足 $\mathbf{X}^0 = \{S\}$，则称其为 S 的准视觉逼近，如果存在一个常数 C，使得以下性质对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 均成立：

(i) 对所有满足 $X \cap Y \neq \varnothing$ 的 $X, Y \in \mathbf{X}^n$，$\operatorname{diam}(X) \leq C\operatorname{diam}(Y)$。 (ii) 对所有满足 $X \cap Y = \varnothing$ 的 $X, Y \in \mathbf{X}^n$，$\operatorname{dist}(X,Y) \geq C^{-1}\operatorname{diam}(X)$。 (iii) 对所有满足 $X \cap Y \neq \varnothing$ 的 $X \in \mathbf{X}^n, Y \in \mathbf{X}^{n+1}$，$C^{-1}\operatorname{diam}(Y) \leq \operatorname{diam}(X) \leq C\operatorname{diam}(Y)$。 (iv) 存在一些常数 $k_0 \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda \in (0,1)$，它们与 n 无关，且对所有满足 $X \cap Y \neq \varnothing$ 的 $X \in \mathbf{X}^n$ 和 $Y \in \mathbf{X}^{n+k_0}$，均有 $\operatorname{diam}(Y) \leq \lambda\operatorname{diam}(X)$。

对于 IGS 的极限空间，我们使用覆盖 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，其中 $\mathbf{X}^0 := \{X\}$ 且 $\mathbf{X}^n := \{X_e \mid e \in E_n\}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

引理 4.23。设 ρ：$E_1 \to (0,\,1)$ 是一个对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度。那么序列 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是 (X, d_ρ) 的准视觉逼近。

证明。 性质 (i) 和 (ii) 直接由 (DL7)、(DL8)及推论 4.17 得出。设 $X_e \in \mathbf{X}$ 和 $X_f \in \mathbf{X}^{n+k}$，其中 $k \in \mathbb{N}$，故 $X_e \cap X_f \neq \varnothing$。那么，存在一条边 $g \in e \cdot E_k$使得 $f \cap g = \varnothing$，因此，由 (DL7) 和公式 (4.3),

$$\frac{m_\rho^{k+1}}{M_\rho}\rho_n(e) \le \frac{m_\rho}{M_\rho}\rho_{n+k}(g) \le \rho_{n+k}(f) \le \frac{M_\rho}{m_\rho}\rho_{n+k}(g) \le \frac{M_\rho^{k+1}}{m_\rho}\rho_n(e). \tag{4.24}$$

因此，由推论 4.17 可知

$$\frac{m_\rho^{k+4}}{M_\rho^2}\operatorname{diam}(X_e, d_\rho) \le \operatorname{diam}(X_f, d_\rho) \le \frac{M_\rho^{k+2}}{m_\rho^4}\operatorname{diam}(X_e, d_\rho). \tag{4.25}$$

由于 $M_\rho < 1$，存在一个值 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得 $M_\rho^{k+2} < m_\rho^4$。因此，性质 (iii) 和 (iv) 分别由方程 (4.25) 在取 $k = 1$ 和 $k = k_0$ 时推出。□

4.5. 阿尔福斯正则性与拟对称性。 现在我们已经具备证明定理 1.5 所需的所有工具。经过一些准备工作后，我们将在本节末尾给出证明。

设 $\rho: E_1 \to (0,1)$ 是一个对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度。由 ρ的可容许性可知

$$\mathcal{M}_1(\rho) = \sum_{e \in E_1} \rho(e) \ge 1.$$

由于 $M_\rho = \max_{e \in E_1} \rho(e) < 1$，存在唯一的 $Q \ge 1$，使得

$$\mathcal{M}_Q(\rho) = \sum_{e \in E_1} \rho(e)^Q = 1.$$

事实上，这是因为映射 $Q \mapsto \mathcal{M}_Q(\rho)$ 连续且严格递减，在无穷远处趋于零，并且 $\mathcal{M}_1(\rho) \ge 1$。

定义概率测度 $\tau_1(\{e\}) = \rho(e)^Q$ 于 E_1 上，并令 τ 为 $E_1^{\mathbb{N}}$ 上的乘积测度，它是将 T 按照 $\mathfrak{m}_\rho = T_*(\tau_\infty)$ 在 Σ 上的推前测度，其中 T 的定义见 3.9。注意，在可测映射 $f: X \to Y$ 下，将 ν 上的测度 X 推前得到的测度定义为 $f_*(\nu)(A) = \nu(f^{-1}(A))$。

该测度满足 $\mathfrak{m}_\rho(\Sigma_e) = \rho_{|e|}(e)^Q$，其中 $e \in E_n$。接下来，令 $\mu_\rho = \chi_*(\mathfrak{m}_\rho)$。注意，$\chi^{-1}(X_e) = \Sigma_e \bigcup_{f \cap e \neq \emptyset} \chi^{-1}(X_f \cap X_e) \cap \Sigma_f$。利用注 3.11 和 $\mathfrak{m}_\rho(\chi^{-1}(X_{e,\pm})) = 0$ 进行简单计算可得，$\mu_\rho(X_e) = \rho_n(e)^Q$ 对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 和 $e \in E_n$ 都成立；更多细节请参见命题 3.42] [2, 。

引理 4.26。 设 $\rho: E_1 \to (0, 1)$ 是一个对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度。那么，度量测度空间 (X, d_ρ, μ_ρ) 是 Q-阿尔福斯正则的，其中 $Q \ge 1$ 是满足下式的唯一指数

$$\sum_{e \in E_1} \rho(e)^Q = 1.$$

证明。 固定 $x = [(e_i)_{i=1}^\infty] \in X$，并令 $0 < r \le 2\operatorname{diam}(X, d_\rho)$。我们首先证明 $\mu_\rho(B(x, r)) \gtrsim r^Q$。为此，令 $n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid r \ge \rho_i(e_i)\}$。于是我们有 $X_{e_n} \subseteq B(x, r)$，并且

$$\begin{cases} \rho_n(e_n) \le r \le 2\operatorname{diam}(X, d_\rho) & \text{if } n = 1, \\ \rho_n(e_n) \le r < \rho_{n-1}(e_{n-1}) & \text{if } n > 1. \end{cases} \tag{4.27}$$

由于对所有 $i > 1$， $\rho_i(e_i) \geq m_\rho \rho_{i-1}(e_{i-1})$，且由于 $\rho_1(e_1) \geq m_\rho$，由方程（4.27）可得 $\rho_n(e_n) \geq r \cdot m_\rho/(2\mathrm{diam}(X, d_\rho))$，因此我们作如下近似：

$$\mu_\rho(B(x,r)) \geq \mu_\rho(X_{e_n}) = \rho_n(e_n)^Q \geq \frac{m_\rho^Q r^Q}{2^Q \mathrm{diam}(X,d_\rho)^Q}.$$

接下来，我们证明 $\mu_\rho(B(x, r)) \lesssim r^Q$。令 $k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid r \geq \rho_i(e_i) \cdot m_\rho^2/M_\rho\}$。若$k = 1$，则有 $r \geq \rho_1(e_1) \cdot m_\rho^2/M_\rho \geq m_\rho^3/M_\rho$，从而 $r \cdot M_\rho/m_\rho^3 \geq 1$，由此可得

$$\mu_\rho(B(x,r)) \leq \mu_\rho(X) = 1 \leq \left(\frac{M_\rho}{m_\rho^3}\right)^Q r^Q.$$

另一方面，若 $k > 1$，则有

$$\frac{m_\rho^2}{M_\rho}\rho_k(e_k) \leq r < \frac{m_\rho^2}{M_\rho}\rho_{k-1}(e_{k-1}) \leq \frac{m_\rho}{M_\rho}\rho_k(e_k),$$

因此由 (DL7) 和 (DL8) 可知 $X_f \cap B(x, r) \neq \varnothing$ 对某个 $f \in E_k$ 当且仅当 $f \cap e_k \neq \varnothing$。因此， $B(x, r) \subseteq \bigcup_{f \in E_k:\ f \cap e_k \neq \varnothing} X_f$，其中根据(DL7) 有

$$\max_{f \in E_k : f \cap e_k \neq \varnothing} \rho_k(f) \leq \frac{M_\rho}{m_\rho}\rho_k(e_k) \leq \frac{M_\rho^2 r}{m_\rho^3} \leq \frac{M_\rho r}{m_\rho^3}.$$

现在，由于 IGS 具有倍增性，根据引理 3.3，存在一个常数 $C_{\mathrm{deg}} \in \mathbb{N}$，使得

$$C_{\mathrm{deg}} = \max_{v \in V_1} \deg(v) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{v \in V_n} \deg(v).$$

因此，我们有 $|\{f \in E_k \mid f \cap e_k \neq \varnothing\}| \leq 2C_{\mathrm{deg}} + 1$，从而可以进行如下逼近：

$$\begin{aligned}\mu_\rho(B(x,r)) &\leq \sum_{f \in \Omega} \mu_\rho(X_f) \leq (2C_{\mathrm{deg}} + 1)\left(\frac{M_\rho}{m_\rho}\rho_k(e_k)\right)^Q \\ &\leq (2C_{\mathrm{deg}} + 1)\left(\frac{M_\rho^2 r}{m_\rho^3}\right)^Q = (2C_{\mathrm{deg}} + 1)\left(\frac{M_\rho^2}{m_\rho^3}\right)^Q r^Q.\end{aligned}$$

□

推论 4.28。 度量空间 (X, d_{L_*}) 是 $\log^{L_*}(|E_1|)$-阿尔福斯正则的。

本文引入拟视觉逼近的动机，是下面的引理；该引理为拟对称性的证明提供了一条简短途径。

引理 4.29 ([4, 命题 2.7])。 设(S, d) 和(T, δ) 是有界度量空间，映射 $F\colon S \to T$ 是一个双射，并且 $\{\boldsymbol{X}^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ 是(S, d)的拟视觉逼近。那么，当且仅当 $F\colon S \to T$ 是拟对称性时， $\{F(\boldsymbol{X}^n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$是$(T, \delta)$的拟视觉逼近。

现在我们可以证明定理 1.5 了。

定理 1.5 的证明。 令 $\rho, \nu\colon E_1 \to (0, 1)$ 为对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许稠密度。根据引理 4.26，空间 (X, d_ρ, μ_ρ) 和 (X, d_ν, μ_ν) 分别是 Q_ρ-阿尔福斯正则和 Q_ν-阿尔福斯正则的，其中 Q_ρ and Q_ν 是使得

$$\mathcal{M}_{Q_\rho}(\rho) = \mathcal{M}_{Q_\nu}(\nu) = 1.$$

根据引理 4.19，两个空间都是紧致的，因而有界；根据引理 4.23，集合 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，其中 $\mathbf{X}^0 := \{X\}$ 和 $\mathbf{X}^n := \{X_e \mid e \in E_n\}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，是这两个空间的准视觉逼近。因此，由引理 4.29 可知，id: $(X, d_\rho) \to (X, d_\nu)$ 是一个拟对称性。

□

5. Moduli and Conformal Dimension

本节中，我们刻画对称 Laakso 型分形空间的共形维数及其达到情况。在本节余下部分，我们固定一个简单 IGS，它是倍增、非退化且对称的，其生成元为 $G_1 = (V_1, E_1, \xi_1)$，对称映射为 η。我们用 X 表示其极限空间。

5.1. 临界指数。 一般度量空间的共形维数可以通过不同层级的图近似的离散模数来研究；例如参见[11, 23, 33, 38]。在我们的情形中，这涉及求解一列图 G_n 的模数问题，这些图近似于极限空间 X。逐一求解这些模问题在计算上不可行，因为这些图的规模会随着近似层级的增加而呈指数增长。然而，下面的引理表明，实际上只需为 G_1求解模数问题，而 G_n 的解可通过乘法构造得出。这是我们方法中最重要的方面之一，体现了这样一种思想：G_1 包含了研究 X共形几何所需的全部信息。

引理 5.1。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $p \in (1, \infty)$，唯一的 p-最小 $\Theta^{(n)}$-可容许密度 ρ_n: $E_n \to [0, 1]$ 是对称的，满足 $\rho_n(e) < 1$ 对所有 $e \in E_n$均成立，并且具有乘法级联表示

$$\rho_n(e) = \prod_{i=1}^{n} \rho_1(T^{-1}(e)_i) \quad \textit{for all } e \in E_n, \tag{5.2}$$

其中 ρ_1: $E_1 \to [0, 1)$ 是 p-最小的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度。此外，映射 $t \mapsto \mathrm{Mod}_t(\Theta^{(n)}, G_n)$ 对所有 $t \in [1, \infty)$均连续且严格递减。

证明。固定 $p \in (1, \infty)$。由于 IGS 是非退化的，我们有：对于所有 $\theta \in \Theta^{(n)}$, $\mathsf{len}(\theta) \geq 2$。由引理 2.10 可直接推出，唯一的 p-最小$\Theta^{(n)}$-可容许密度 ρ_n: $E_n \to [0, 1]$ 满足 $\rho_n(e) < 1$ 对所有 $e \in E_n$均成立，并且映射 $t \mapsto \mathrm{Mod}_t(\Theta^{(n)}, G_n)$ 对所有$t \in [1, \infty$均连续且严格递减。由于 IGS 是对称的，我们有

$$\mathcal{M}_p(\rho_n \circ \eta) = \mathcal{M}_p(\rho_n) = \mathrm{Mod}_p(\Theta^{(n)}, G_n).$$

由于极小化元 ρ_n 唯一，我们必然有 $\rho_n \circ \eta = \rho_n$。

现在我们针对每个 $n \in \mathbb{N}$ 验证 (5.2)。首先，通过归纳应用命题 3.5，我们得到

$$\min_{\theta\in\Theta^{(n)}} L_{\rho_n}(\theta) \geq \big(\min_{\theta\in\Theta^{(1)}} L_\rho(\theta)\big)^n \geq 1.$$

因此，ρ_n 是 $\Theta^{(n)}$-可容许的。根据命题 2.12以及ρ_n的唯一性，只需证明存在一个从 $I_-^{(n)}$ 到 $I_+^{(n)}$ 的单位流 $\mathcal{J}_n$，使得若 ρ_n 满足方程（5.2），则

$$\mathcal{M}_p(\rho_n)^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{E}_q(\mathcal{J}_n)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

由于 $\mathcal{M}_p(\rho_1) = \mathrm{Mod}_p(\Theta^{(1)}, G_1)$，根据命题 2.12，存在一个从 I_- 到 I_+ 的单位流 $\mathcal{J}_1$，使得 $\mathcal{M}_p(\rho_1)^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{E}_q(\mathcal{J}_1)^{\frac{1}{q}} = 1$。注意，由于 $\rho_1 \circ \overline{\eta} = \rho_1$，可得对于每个 $z \in e \in E_1$，$\mathcal{J}_1(\eta(z), \eta(e)) = -\mathcal{J}_1(z, e)$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们定义 $\mathcal{J}_{n+1}$ 如下：对于每个 $z \in e \in E_1$ 和 $f \in E_n$，我们令

$$\mathcal{J}_{n+1}([z,f],(e,f)) := \mathcal{J}_n(f^-, f)\mathcal{J}_1(z,e).$$

我们将通过归纳法证明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{J}_{n+1}$ 都是从 $I_-^{(n+1)}$ 到 $I_+^{(n+1)}$ 的单位流。为此，假设 $\mathcal{J}_n$ 是单位流。由于 $\mathcal{J}_1$ 是单位流，对于所有 $e \in E_1$ 和 $f \in E_n$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{n+1}([e^+,f],(e,f)) = \mathcal{J}_n(f^-,f)\mathcal{J}_1(e^+,e) &= -\mathcal{J}_n(f^-,f)\mathcal{J}_1(e^-,e)\\ &= -\mathcal{J}_{n+1}([e^+,f],(e,f)).\end{aligned}$$

现在，令某个 $z \in V_1$ 和$\hat{e} \in E_n$满足 $v = [z\hat{e}] \in e \in E_{n+1}$，并假设$z \notin I_- \cup I_+$。所有以 v为端点的边都包含在$\hat{e} \cdot G_1$中，而由于$\mathcal{J}_1$ 是一个流，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathcal{J}_{n+1})(v) = \sum_{\{f \mid v \in f\}} \mathcal{J}_{n+1}(v,f) &= \sum_{\{f \mid z \in f\}} \mathcal{J}_n(\hat{e}^-,\hat{e})\mathcal{J}_1(z,f)\\ &= \mathcal{J}_n(\hat{e}^-,\hat{e}) \cdot \operatorname{div}(\mathcal{J}_1)(z) = 0.\end{aligned}$$

接下来，假设 $z \in I_- \cup I_+$。那么，对于某个 $\hat{v} = \pi_{n+1}(v) \in V_n$，有 $v \in \pi_{n+1}^{-1}(\hat{v})$。由于 IGS 是倍增的，对于每条以 $\hat{v}$ 为端点的边 $f \in E_n$，集合 $\hat{f} \cdot E_1 \subset E_{n+1}$ 恰好包含一条以 v 为端点的边 f；根据构造，不可能存在其他以 v 为端点的边。由于 IGS 是对称的，$\hat{}$ 存在一个顶点 $x \in I_-$，使得 $z \in \{x, \eta(x)\}$，因此，对于每条以 $\hat{v}$ 为端点的边 f，顶点 v 满足：

$$v = [z,\hat{e}] = \begin{cases}[x,\hat{f}] & \text{if } \hat{v} = \hat{f}^-,\\ [\eta(x),\hat{f}] & \text{if } \hat{v} = \hat{f}^+.\end{cases}$$

因此，我们有

$$\mathcal{J}_{n+1}(v,f) := \begin{cases}\mathcal{J}_n(\hat{v},\hat{f})\mathcal{J}_1(x,\mathfrak{e}(x)) & \text{if } \hat{v} = \hat{f}^-,\\ -\mathcal{J}_n(\hat{v},\hat{f})\mathcal{J}_1(\eta(x),\mathfrak{e}(\eta(x))) & \text{if } \hat{v} = \hat{f}^+,\end{cases}$$

并且由于 $\mathfrak{e}(\eta(x)) = \eta(\mathfrak{e}(x))$ 且 $\mathcal{J}_1(x, \mathfrak{e}(x)) = -\mathcal{J}_1(\eta(x), \eta(\mathfrak{e}(x)))$，由此可得

$$\mathcal{J}_{n+1}(v,f) = \mathcal{J}_n(\hat{v},\hat{f})\mathcal{J}_1(x,\mathfrak{e}(x)),$$

由此我们可以计算出

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathcal{J}_{n+1})(v) = \sum_{\{f \mid v \in f\}} \mathcal{J}_{n+1}(v,f) &= \sum_{\{\hat{f} \mid \hat{v} \in \hat{f}\}} \mathcal{J}_n(\hat{v},\hat{f})\mathcal{J}_1(x,\mathfrak{e}(x))\\ &= \mathcal{J}_1(x,\mathfrak{e}(x)) \cdot \operatorname{div}(\mathcal{J}_n)(\hat{v}).\end{aligned} \tag{5.3}$$

如果 $v \notin I_-^{(n+1)} \cup I_+^{(n+1)}$，则 $\hat{v} \notin I_-^{(n)} \cup I_+^{(n)}$，从而 $\operatorname{div}(\mathcal{J}_n)(\hat{v}) = 0$，因此由 (5.3) 可得 $\operatorname{div}(\mathcal{J}_{n+1})(v) = 0$。所以，$\mathcal{J}_{n+1}$ 是一个流。为说明它是

单位流，我们归纳地计算总流量：

$$\begin{aligned}\sum_{v\in I_-^{(n+1)}}\operatorname{div}(\mathcal{J}_{n+1})(v) &\overset{(5.3)}{=} \sum_{\hat{v}\in I_-^{(n)}}\sum_{x\in I_-^{(1)}}\mathcal{J}_1(x,\mathfrak{e}(x))\cdot\operatorname{div}(\mathcal{J}_n)(\hat{v})\\ &= \sum_{\hat{v}\in I_-^{(n)}}\operatorname{div}(\mathcal{J}_n)(\hat{v})\sum_{x\in I_-^{(1)}}\mathcal{J}_1(x,\mathfrak{e}(x))\\ &= \sum_{\hat{v}\in I_-^{(n)}}\operatorname{div}(\mathcal{J}_n)(\hat{v})=1\end{aligned}$$

构造出对每个 $n\in\mathbb{N}$从 $I_-^{(n)}$ 到 $I_+^{(n)}$ 的单位流 $\mathcal{J}_n$ 后，我们只需证明，若 ρ_n 满足方程（5.2），则 $\mathcal{M}_p(\rho_n)^{1/p}\cdot\mathcal{E}_q(\mathcal{J}_n)^{1/q}=1$。为此，首先注意到，对每个 $e\in E_n$，由构造可知

$$|\mathcal{J}_n(e)|=\prod_{i=1}^{n}|\mathcal{J}_1(T^{-1}(e)_i)|. \tag{5.4}$$

那么，若 ρ_n 满足方程（5.2），我们可以计算得：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_q(\mathcal{J}_n)&\overset{(5.4)}{=}\sum_{e\in E_n}\prod_{i=1}^{n}|\mathcal{J}_1(T^{-1}(e)_i)|^q=\prod_{i=1}^{n}\sum_{e\in E_1}|\mathcal{J}_1(e)|^q=\mathcal{E}_q(\mathcal{J}_1)^n,\\ \mathcal{M}_p(\rho_n)&\overset{(5.2)}{=}\sum_{e\in E_n}\prod_{i=1}^{n}|\rho_1(T^{-1}(e)_i)|^p=\prod_{i=1}^{n}\sum_{e\in E_1}|\rho_n(e)|^p=\mathcal{M}_p(\rho_1)^n.\end{aligned} \tag{5.5}$$

由于 $\mathcal{M}_p(\rho_1)^{1/p}\cdot\mathcal{E}_q(\mathcal{J}_1)^{1/q}=1$，因此可得

$$\mathcal{M}_p(\rho_n)^{\frac{1}{p}}\cdot\mathcal{E}_q(\mathcal{J}_n)^{\frac{1}{q}}\overset{(5.5)}{=}\mathcal{M}_p(\rho_1)^{\frac{n}{p}}\cdot\mathcal{E}_q(\mathcal{J}_1)^{\frac{n}{q}}=1.$$

□

由方程（5.2）和（5.5）直接可得不同层级的模数的显式公式如下。

推论 5.6。对于任意 $p\in(1,\infty)$，对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均有

$$\operatorname{Mod}_p(\Theta^{(n)},G_n)=\operatorname{Mod}_p(\Theta^{(1)},G_1)^n.$$

临界指数 Q_* 通过求解方程 $\operatorname{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(1)},G_1)=1$ 得到。根据介值定理可以找到该方程的解，因为很容易看出 $\operatorname{Mod}_1(\Theta^{(1)},G_1)\geq 1$，因为 $\Theta^{(1)}$ 中至少存在一条路径。在下一个引理中，我们刻画 $\operatorname{Mod}_1(\Theta^{(1)},G_1)=1$ 的情形。

引理 5.7。以下四个条件等价：

(A) $\operatorname{Mod}_1(\Theta^{(1)},G_1)=1$。*(B)* 存在一条边 $e^*\in E_1$，它包含在每一条路径 $\theta\in\Theta^{(1)}$ 中。*(C)* $\Theta^{(1)}$ 中不存在边不相交路径。

证明。首先，我们证明 $(A)\Longrightarrow(C)$。假设 $\operatorname{Mod}_1(\Theta^{(1)},G_1)=1$。那么，存在一个 $\Theta^{(1)}$-可容许密度 $\rho\colon E_1\to[0,1]$，使得 $\mathcal{M}_1(\rho)=1$。如果存在一条简单路径 $\theta\in\Theta^{(1)}$，它不包含 $e\in\operatorname{supp}(\rho)$ 中的每一条边，那么

$$L_\rho(\theta)=\sum_{e\in\theta}\rho(e)<\sum_{e\in E_1}\rho(e)=\mathcal{M}_1(\rho)=1,$$

这与 ρ 的可容许性矛盾。因此， $\Theta^{(1)}$ 中的每条路径都包含 $\operatorname{supp}(\rho)$ 中的所有边。特别地，现在 $\Theta^{(1)}$ 中存在两条边不相交路径。

蕴含关系（C） $\Longrightarrow$ （B）是门格尔定理 [18] 的直接推论。

最后，通过令 $\rho(e^*) = 1$ 以及对所有 $e \neq e^*$ 令 $\rho(e) = 0$，并注意到 ρ 是 $\Theta^{(1)}$-可容许的，即可得到（B） $\Longrightarrow$ （A）。□

注 5.8。如果 $\operatorname{Mod}_1(\Theta^{(1)}, G_1) = 1$，则由前一个引理不难得出存在一个割点 $p \in X$，即存在点 p 使得 $X \setminus \{p\}$ 不连通。此外，该点还可以选择为使 p 将 X_- 与 X_+ 分离。反之亦然，但证明起来稍微复杂一些。在定理 1.5 中，我们还将证明，所有这些条件都等价于极限空间的共形维数为一。简而言之：割点的存在等价于共形维数为 1，而不存在割点则等价于共形维数大于 1。这些结论应与 [12, 定理 1.2] 和 [32, 推论 1.2],进行比较，后者是关于共形维数与割点存在性之间联系的一般性陈述。

引理 5.9. 存在唯一的值 $Q_* \geq 1$，使得 $\operatorname{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(1)}, G_1) = 1$。此外，值 Q_* 满足

$$\begin{aligned} Q_* &= \inf\left\{ Q \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \rho \colon E_1 \to (0,1) \text{ } s.t. \text{ } \mathcal{M}_Q(\rho) = 1, \\ \rho \text{ } is \text{ } symmetric \text{ } and \text{ } \Theta^{(1)}\text{-}admissible \end{array} \right\} \\ &= \inf\left\{ Q \geq 1 \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} \operatorname{Mod}_Q(\Theta^{(n)}, G_n) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

证明. 设 $p \in (1,\infty)$，并令 $\rho\colon E_1 \to [0,1]$ 为某个 $p \in (1,\infty)$ 对应的 p-极小 $\Theta^{(1)}$-可容许密度。由引理 5.1 可得 $\rho(e) < 1$ 对所有$e \in E_1$均成立，因此

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{Mod}_t(\Theta^{(1)}, G_1) \leq \lim_{t\to\infty} \mathcal{M}_t(\rho) = 0.$$

由于可容许性条件，我们有 $\operatorname{Mod}_1(\Theta^{(1)}, G_1) \geq 1$；又由引理 5.1，映射 $t \to \operatorname{Mod}_t(\Theta^{(1)}, G_1)$ 对所有$t \in [1,\infty)$均连续且严格递减，因此存在唯一的值 $Q_* \geq 1$，使得 $\operatorname{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(1)}, G_1) = 1$。

接下来，我们将证明 $Q_* = Q_{\inf}$，其中

$$Q_{\inf} := \inf\left\{ Q \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \rho \colon E_1 \to (0,1) \text{ s.t. } \mathcal{M}_Q(\rho) = 1, \\ \rho \text{ is symmetric and } \Theta^{(1)}\text{-admissible} \end{array} \right\}.$$

设 $\varepsilon > 0$。由引理 5.1，存在对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度$\rho_\varepsilon\colon E_1 \to [0,1]$，使得 $\mathcal{M}_{Q_*+\varepsilon}(\rho_\varepsilon) < 1$。因此，对于某个值 $\delta \in (0, 1 - \mathcal{M}_{\rho_\varepsilon})$，由下式给出的对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度 $\nu_\varepsilon\colon E_1 \to (0,1)$

$$\nu_\varepsilon(e) := \rho_\varepsilon(e) + \delta \quad \text{for all } e \in E_1$$

满足 $\mathcal{M}_{Q_*+\varepsilon}(\nu_\varepsilon) = 1$。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，因此可得 $Q_{\inf} \leq Q_*$。

另一方面，由于根据引理 5.1，映射 $t \mapsto \operatorname{Mod}_t(\Theta^{(1)}, G_1)$ 严格递减，因此可得

$$\mathcal{M}_Q(\rho) \geq \operatorname{Mod}_Q(\Theta^{(1)}, G_1) \geq \operatorname{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(1)}, G_1) = 1$$

只要 $1 \leq Q \leq Q_*$ 和 $\rho\colon E_1 \to (0,1)$ 是对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度，因此我们有 $Q_* \leq Q_{\inf}$。

最后，我们证明 $Q_* = \inf\{Q \geq 1 \mid \lim_{n\to\infty} \mathrm{Mod}_Q(\Theta^{(n)}, G_n) = 0\}$。再次利用 $t \to \mathrm{Mod}_t(\Theta^{(1)}, G_1)$ 严格递减这一事实，由推论 5.6 可知，对所有 $Q \in [1, \infty)$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Mod}_Q(\Theta^{(n)}, G_n) = \begin{cases} \infty & \text{if } Q < Q_*, \\ 1 & \text{if } Q = Q_*, \\ 0 & \text{if } Q > Q_*. \end{cases}$$

断言现在直接得出。 □

现在我们得到临界指数 Q_*，作为共形维数的上界。

推论 5.10. 令 $Q_* \geq 1$ 为满足 $\mathrm{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(1)}, G_1) = 1$的唯一值。那么 $\dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}) \leq Q_*$。

证明。 由引理 5.9，存在一个由对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度组成的序列 $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$: $E_1 \to (0, 1)$，以及一个序列 $(Q_n)_{n=1}^{\infty} \in (Q_*, \infty)$，其下确界为 $\inf_{n\in\mathbb{N}} Q_n = Q_*$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{M}_{Q_n}(\rho_n) = 1$。因此，由定理 1.5 可得$d_{\rho_n} \in \mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*})$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，从而

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \dim_{\mathrm{H}}(X, d_{\rho_n}) = \inf_{n\in\mathbb{N}} = Q_*. \tag{5.11}$$

□

接下来，我们证明共形维数的相应下界。这将依赖于找到合适的多孔子集。

5.2. **多孔子集**。令 $F \subset E_1$。我们定义子集 $E_n(F) \subset E_n$ 和$V_n(F) \subset V_n$，对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义如下

$$E_n(F) := \{e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \in E_n \mid e_i \in F \text{ for all } 1 \leq i \leq n\},$$
$$V_n(F) := \{v \in \{e^-, e^+\} \mid e \in E_n(F)\},$$

并将 $G_n(F)$ 记为 G_n 的子图，其边为 $E_n(F)$，顶点为 $V_n(F)$。我们定义子集 $X(F) \subset X$ 如下

$$X(F) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{e\in E_n(F)} X_e = \{[(e_n)_{n=1}^{\infty}] \in X \mid e_n \in E_n(F) \text{ for all } n \in \mathbb{N}\},$$

并且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $e \in E_n(F)$，定义子集 $X_e(F) := X_e \cap X(F)$。

下面的引理对于研究子集 $X(F)$ 的几何性质是必要的。

引理 5.12。设 $F \subseteq E_1$ 满足 $G_1(F)$ 包含一条路径 $\theta = [v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k]$，且 $v_k = \eta(v_0)$。那么

(1) $G_n(F)$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$，都在 $\Theta^{(n)}$ 中包含一条路径。*(2)* 对每个 $e \in E_n(F)$，都存在一个点 $x \in \mathrm{int}(X_e(F))$ 使得

$$B_{d_{L_*}|_{X(F)}}(x, L_*^{-(n+2)}) \subset X_e(F).$$

(3) $X(F)$ 是完备且一致完美的。

(4) 对于每个 $\delta \in \mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X(F)\ d_{L_*})$，存在一个常数 $K > 1$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $e \in E_n(F)$，都存在 $x \in X_e(F)$ 和 $r > 0$，使得

$$B_\delta(x, r) \subset X_e(F) \subset B_\delta(x, Kr).$$

证明。首先，我们将用归纳法证明断言 (1)。假设 $G_n(F)$ 包含一条路径 $[u_0, f_1, \dots, f_m, u_m] \in \Theta^{(n)}$。由于 $v_0 \in I_-$ 和 $v_k = \eta(v_0) \in I_+$，可得对所有$1 \le i \le m-1$，

$$\begin{cases} (v_k, f_i) \sim (v_0, f_{i+1}) & \text{if and only if} \quad u_i = f_i^+ = f_{i+1}^-, \\ (v_k, f_i) \sim (v_k, f_{i+1}) & \text{if and only if} \quad u_i = f_i^+ = f_{i+1}^+, \\ (v_0, f_i) \sim (v_0, f_{i+1}) & \text{if and only if} \quad u_i = f_i^- = f_{i+1}^-, \\ (v_0, f_i) \sim (v_k, f_{i+1}) & \text{if and only if} \quad u_i = f_i^- = f_{i+1}^+. \end{cases} \tag{5.13}$$

对所有 $1 \le i \le m$ 定义路径

$$\theta_i := [v_0^i, e_1^i, \dots, e_k^i, v_k^i] = \begin{cases} \theta & \text{if} \quad u_i = f_i^+, \\ \theta^{-1} & \text{if} \quad u_i = f_i^-. \end{cases}$$

于是，根据 (5.13)，对所有 $1 \le i \le m-1$，我们有 $[v_k^i, f_i] = [v_0^{i+1}, f_i]$，因此拼接 $\vartheta := (f_1 \cdot \theta_i) * (f_2 \cdot \theta_2) * \ldots * (f_m \cdot \theta_m)$ 定义良好。此外，我们有 $[v_0^1, f_1] \in I_-^{(n+1)}$ 和 $[v_k^m, f_m] \in I_+^{(n+1)}$，从而 $\vartheta \in \Theta^{(n+1)}$。由于 $f_i \in E_n(F)$ 且 $e_j \in E_1(F)$，根据定义，对所有 $1 \le i \le m$ 和 $1 \le j \le k$，我们有 $f_i \cdot e_j \in E_{n+1}(F)$，因此路径 θ 包含于 $G_{n+1}(F)$ 中。归纳法得证。

现在我们将证明断言（2）。根据断言（1），存在一条路径 $\theta \in \Theta^{(2)}$，其每条边都包含于 $E_2(F)$ 中。由于 IGS 是非退化的，我们有 $\operatorname{len}(\theta) \ge 4$，因此可以选择一条边 $h \in E_2(F)$，使得 $h \cap I_\pm^{(2)} = \varnothing$。于是，我们可以选择一条边 $f = (e \cdot h) \in e \cdot E_2(F)$，使得对于所有 $g \in E_{n+2}(F) \setminus (e \cdot E_2(F))$，都有 $f \cap g = \varnothing$。根据定义，对于任意 $x \in X_f(F)$ 和 $y \in X(F) \setminus X_e(F)$，分别存在代表元 $(e_i)_{i=1}^\infty$ 和 $(g_i)_{i=1}^\infty$，使得 $e_{n+2} = f$ 以及 $g_{n+2} \notin e \cdot E_2(F)$，从而 $e_{n+2} \cap f_{n+2} = \varnothing$。于是，由（DL8）可知，只要 $x \in X_f(F)$ 且 $y \in X(F) \setminus X_e(F)$，就有 $d_{L_*}(x, y) \ge L_*^{-n-2}$，因此

$$x \in B_{d_{L_*}|_{X(F)}}(x, L_*^{-n-2}) \subset \operatorname{int}(X_e(F)).$$

接下来，我们证明断言 (3)，先从完备性开始。由于对任意 $e \in E_n$，集合 X_e 都是闭集，因此对所有 $n \in \mathbb{N}$，有限并集 $\bigcup_{e \in E_n(F)} X_e$ 都是闭集。由于闭集的任意交仍是闭集，$X(F)$ 是紧致度量空间的闭子集。因此，$X(F)$ 是完备的。对于一致完美性，令$C = 2L_*^3\operatorname{diam}(X(F), d_{L_*})$ 且 $x = [(e_i)_{i=1}^\infty] \in X(F)$。由断言 (1)，存在一条路径 $\theta \in \Theta^{(2)}$，其每条边都包含于 $E_2(F)$ 中。由于 IGS 是非退化的，我们有 $\operatorname{len}(\theta) \ge 4$，因此，对于任意边 $e \in E_2(F)$，都可以选取一条边$f \in E_2(F)$，使得 $e \cap f = \varnothing$。因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都可以选取一条边 $f_{n+2} \in e_n \cdot E_2(F)$，使得 $e_{n+2} \cap f_{n+2} = \varnothing$，以及一个点 $y_n \in X_{f_{n+2}}(F)$。由此可得

$$L_*^{-n-2} \le d_{L_*}(x, y_n) \le L_*^n$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$。令 $r \in (0, \operatorname{diam}(X(F), d_{L_*}))$，并且

$$k := \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2L_* < r \le 2L_*^{-k+1}\operatorname{diam}(X(F), d_{L_*})\}.$$

于是有 $y_k \in B(x, 2L_*^{-k}) \setminus B(x, L_*^{-k-2}) \subset B(x, r) \setminus B(x, r/C)$，并且 $B(x, r) \setminus B(x, r/C) \ne \varnothing$。由于 $x \in X(F)$ 和 $r \in (0, \operatorname{diam}(X(F), d_{L_*}))$ 是任意的，因此 $(X(F), d_{L_*})$ 是 C-一致完美的。

最后，我们证明断言 (4)。根据断言 (3)，度量空间 $(X(F)\ d_{L_*})$ 是完备且一致完美的，因此存在一个度量 $\delta \in \mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X(F)\ d_{L_*})$。根据断言 (2)，存在一个点 $x \in X_e(F)$，使得

$$B_{d_{L_*}|_{X(F)}}(x, L_*^{-n-2}) \subset X_e(F).$$

令 η 为拟对称映射的畸变函数 id: $(X(F)\ d_{L_*}) \to (X(F)\ \delta)$，并令 $K = 4\eta(2L_*^2)$。我们不妨假设 $\mathrm{diam}(X_e(F)\ \delta) > 0$，否则 $\mathrm{diam}(X(F)\ \delta) = 0$，断言便显然成立。令 $r = 2K^{-1}\mathrm{diam}(X_e(F)\ \delta)$。于是，由于 $\mathrm{diam}(X_e(F)\ d_{L_*}) \le L_*^{-n}$，可得 $X_e(F) \subset B_\delta(x, Kr)$，因此只需证明 $B_\delta(x,r) \subset X_e(F)$。为此，令 $y \in B_\delta(x,r)$，并选取满足 $\delta(x,z) \ge \mathrm{diam}(X_e(F)\ \delta)/2 = Kr/4$ 的 $z \in X_e(F)$。根据准对称条件

$$\frac{K}{4} \le \frac{\delta(x,z)}{\delta(x,y)} \le \eta\left(\frac{d_{L_*}(x,z)}{d_{L_*}(x,y)}\right).$$

因此，

$$\frac{d_{L_*}(x,y)}{d_{L_*}(x,z)} \le \frac{1}{\eta^{-1}(K/4)},$$

and

$$d_{L_*}(x,y) \le \frac{d_{L_*}(x,z)}{\eta^{-1}(K/4)} \le \frac{L_*^{-n}}{\eta^{-1}(K/4)} < L_*^{-n-2}.$$

因此，$y \in X_e(F)$。由于 $y \in B_\delta(x,\ r)$ 是任意的，故可得 $B_\delta(x,\ r) \subset X_e(F)$，如所述。□

为了利用多孔性阻止共形维数达到，我们证明如下结果。

引理 5.14. 若 $F \subsetneq E_1$ 非空，则 $X(F)$ 是(X, d_{L_*})的一个闭多孔子集。

证明。固定一个常数 $c = L_*^{-5} \cdot \mathrm{diam}(X,\ d_{L_*})^{-1}$。令 $y = [(e_i)_{i=1}^{\infty}] \in X(F)$，$0 < r \le \mathrm{diam}(X,\ d_{L_*})$，并选取 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$L_*^{-n} \le r \le L_*^{-(n-1)} \cdot \mathrm{diam}(X, d_{L_*}).$$

由于 $\mathrm{diam}(X_{e_{n+1}},\ d_{L_*}) \le L_*^{-(n+1)}$，可得 $X_{e_{n+1}} \subset B(y,\ L_*^{-n}) \subset B(y,\ r)$。现在，任取 $g \in E_1 \setminus F$ 并令 $f = e_{n+1} \cdot g \in E_{n+2}$。那么，根据定义，$f \notin E_{n+2}(F)$，因此 $\mathrm{int}(X_f) \subset X \setminus X(F)$，由此可得

$$\mathrm{int}(X_f) \subset X_{e_{n+1}} \setminus X(F) \subset B(y,r) \setminus X(F).$$

注意到 $X = X(E_1)$。因此，根据引理 5.12，存在 $x \in \mathrm{int}(X_f)$，使得$B(x,\ L_*^{-(|f|+2)}) = B(x,\ L_*^{-(n+4)}) \subset \mathrm{int}(X_f)$。由于 $r \le L_*^{-(n-1)} \cdot \mathrm{diam}(X,\ d_{L_*})$，常数 c 因而满足

$$B(x, cr) \subset B(x, L^{-(n+4)}) \subset \mathrm{int}(X_f) \subset B(y,r) \setminus X(F).$$

由于点 $y \in X(F)$ 和半径 $0 < r \le \mathrm{diam}(X, d_{L_*})$ 均为任意的，我们得出 $X(F)$ 是 $(X,\ d_{L_*})$ 的多孔子集。□

5.3. **达到的刻画**。对于本小节，我们固定一条简单的 pat h

$$\theta^* := [v_0^*, e_1^*, \dots, e_{L_*}^*, v_{L_*}^*] \in \Theta^{(1)}$$

其中 $\eta(v_0^*) = v_k^*$ 且 $\mathrm{len}(\theta^*) = L_*$。若 $Q_* > 1$，我们还固定 ρ^*，它是 $\mathrm{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(1)}, G_1)$。的极小化元

定义 5.15。我们定义子集 $E \subseteq E_1$ 如下

$$\widehat{E} := \begin{cases} \{e : e \in \theta^*\} & \text{if} \quad Q_* = 1, \\ \mathrm{supp}(\rho^*) & \text{if} \quad Q_* > 1, \end{cases}$$

并对所有 $n \in \mathbb{N}$ 定义路径族

$$\widehat{\Theta}^{(n)} := \{[v_0, e_1, \dots, e_k, v_k] \in \Theta^{(n)} \mid e_i \in E_n(\widehat{E}) \text{ for all } 1 \le i \le k\}.$$

此外，我们记 $X := X(E)$、$X_\pm := X_\pm \cap X$ 和 $X_e := X_e(E)$。我们称该 IGS 具有可移除边，若 $E \neq E_1$。

$E \neq E_1$ 中的边称为可移除边，因为将其从 E_1中移除不会改变模的值，正如下引理所示。回顾一下，$\mathrm{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(n)}, G_n) = 1$。

引理 5.16。**</style}对于每个，路径族 非空，并满足$\mathrm{Mod}_{Q_*}(\widehat{\Theta}^{(n)}, G_n(\widehat{E})) = 1$。**

证明。我们首先考虑 $Q_* = 1$ 的情形。由引理 5.12 可直接推出，$\widehat{\Theta}^{(n)}$ 非空。由于每条边 $e \in E_n(\widehat{E})$ 都具有 $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$ 的形式，其中$e_i \in \theta^*$ 对所有 $1 \le i \le n$ 均成立，并且由于 θ^* 是一条长度为 $\mathrm{len}(\theta^*) = L_*$ 的简单路径，因此可得 $|E_n(\widehat{E})| = \mathrm{len}(\theta^*)^n = L_*^n$。我们还知道 $\min\{\mathrm{len}(\theta) \mid \theta \in \Theta^{(n)}\} = L_*^n$，因此 $\widehat{\Theta}^{(n)}$ 中的每条路径都必须包含 $E_n(\widehat{E})$ 中的每条边。因此，密度 $\rho_n \equiv L_*^{-n}$ 是 $\widehat{\Theta}^{(n)}$-可容许的，且满足 $\mathcal{M}_1(\rho_n) = 1$，从而

$$1 = \mathrm{Mod}_1(\widehat{\Theta}^{(n)}, G_n(\widehat{E})) = \mathrm{Mod}_{Q_*}(\widehat{\Theta}^{(n)}, G_n(\widehat{E})).$$

接下来，我们考虑情形 $Q_* > 1$。令 ρ_n^* 为 $\mathrm{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(n)}, G_n)$ 的最优密度函数，$\mathcal{J}_n^*$ 为 $\mathrm{Res}^p(X_-, X_+, G_n)$ 的最优流。由引理 5.1，我们有 $\rho_n^*(e_1 \cdot \ldots \cdot e_n) > 0$ 当且仅当对所有 $1 \le i \le n$，$e_i \in \mathrm{supp}(\rho_1^*(e)) = E$。此外，由命题 2.12，我们有 $|\mathcal{J}_n^*(e)| > 0$ 当且仅当 $\rho_n^*(e) > 0$。因此，

$$E_n(\widehat{E}) = \{e \in E_n \mid \rho_n^*(e) > 0\} = \{e \in E_n \mid |\mathcal{J}_n^*(e)| > 0\}.$$

非平凡流的支撑必须包含一条路径，因此由引理 5.12 可知 $\widehat{\Theta}^{(n)}$ 非空。显然，$\mathcal{J}_n^*|_{V_n(\widehat{E}) \times E_n(\widehat{E})}$ 是单位流，而 $\rho_n^*|_{E_n(\widehat{E})}$ 是 $\widehat{\Theta}^{(n)}$-可容许密度。由于

$$\mathcal{M}_Q(\rho_n^*|_{E_n(\widehat{E})}) = \sum_{e : \rho_n^*(e) \neq 0} \rho_n^*(e)^Q = \mathcal{M}_Q(\rho_n^*),$$

and

$$\mathcal{E}_Q(\mathcal{J}_n^*|_{\mathcal{I}(G_n(\widehat{E}))}) = \sum_{e : |\mathcal{J}_n^*(e)| \neq 0} |\mathcal{J}_n^*(e)| = \mathcal{E}_Q(\mathcal{J}_n^*),$$

对于所有 $1 \le Q < \infty$，可得

$$\mathcal{M}_{Q_*}(\rho_n^*|_{E_n(\widehat{E})})^{\frac{1}{Q_*}} \cdot \mathcal{E}_{\frac{Q_*}{Q_*-1}}(\mathcal{J}_n^*|_{\mathcal{I}(G_n(\widehat{E}))})^{\frac{Q_*-1}{Q_*}} = 1,$$

因此，由于 $\widehat{\Theta}^{(n)}$ 非空，由命题 2.12 可得

$$\mathrm{Mod}_{Q_*}(\widehat{\Theta}^{(n)}, G_n(\widehat{E})) = \mathcal{M}_{Q_*}(\rho_n^*|_{E_n(\widehat{E})}) = \mathcal{M}_{Q_*}(\rho_n^*) = \mathrm{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(n)}, G_n) = 1.$$

□

推论 5.17. 设 $q \geq 1$。若对每个 $p > q$，都存在一个 $\widehat{\Theta}^{(n)}$-可容许密度 ρ： $E_n \to (0, 1)$，其中 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{M}_p(\rho) < 1$，则 $q \geq Q_*$。

证明。由引理 5.16 可知，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Mod}_{Q_*}(\widehat{\Theta}^{(n)}, G_n(\widehat{E})) = 1$。因此，由引理 2.11 可知，对所有 $n \in \mathbb{N}$，

$$\mathrm{Mod}_q(\widehat{\Theta}^{(n)}, G_n(\widehat{E})) > \mathrm{Mod}_p(\widehat{\Theta}^{(n)}, G_n(\widehat{E})) > 1$$

只要 $1 \leq q < p < Q_*$。因此，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $1 \leq q < p < Q_*$，都不存在满足 $\mathcal{M}_p(\rho) < 1$ 的 $\widehat{\Theta}^{(n)}$-可容许密度 ρ。□

现在我们可以证明共形维数的下界了。下面的命题也可以用 [11]中的技巧来证明。但这种证明方式相当迂回，因此我们更倾向于给出一个简短且自成一体的证明。

命题 5.18。 令 $Q_* \geq 1$ 为使得 $\mathrm{Mod}_{Q_*}(\Theta^{(1)}, G_1) = 1$ 成立的唯一值。于是，$\dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}) \geq Q_*$

证明。</style>令 $q \in (1, \infty)$，使得 $p > q > \dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}|_{\widehat{X}})$，并选取一个 q-Ahlfors 正则度量 $\delta \in \mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*})$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义密度 ρ_n: $E_n(E) \to (0,1)$，如下所示:

$$\rho_n(e) := \frac{\mathrm{diam}(\widehat{X}_e, \delta)}{\mathrm{dist}(X_-, X_+, \delta)}.$$

由于 $X_- \cap X_+ = \emptyset$，我们有 $\mathrm{dist}(X_-, X_+, \delta) > 0$。给定 $\theta = [v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k] \in \widehat{\Theta}^{(n)}$，对于所有 $1 \leq i \leq k-1$，均有 $\widehat{X}_{e_i} \cap \widehat{X}_{e_{i+1}} \neq \varnothing$，并且 $\widehat{X}_{e_1} \cap X_- \neq \varnothing$ 和 $X_{e_k} \cap X_+ \neq \varnothing$。因此，由三角不等式可得 $\mathrm{dist}(X_-, X_+, \delta) \leq \sum_{e \in \theta} \mathrm{diam}(X_e, \delta)$，从而

$$L_{\rho_n}(\theta) = \sum_{e \in \theta} \rho_n(e) = \sum_{e \in \theta} \frac{\mathrm{diam}(\widehat{X}_e, \delta)}{\mathrm{dist}(X_-, X_+, \delta)} \geq \frac{\mathrm{dist}(X_-, X_+, \delta)}{\mathrm{dist}(X_-, X_+, \delta)} = 1.$$

因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，密度 ρ_n 都是 $\widehat{\Theta}^{(n)}$-可容许的。现在，我们希望估计 $\mathcal{M}_p(\rho_n)$。由引理 5.12，存在一个常数 $K > 1$，使得对于每条边 $e \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n(E)$，我们都可以选取一个点 $x(e) \in X_e$ 和一个半径 $r(e) > 0$，从而

$$B_\delta(x(e), r(e)) \subset \widehat{X}_e \subset B_\delta(x(e), Kr(e)). \tag{5.19}$$

记 $B_e := B_\delta(x(e), r(e))$。回忆一下，测度 $\mu = \mathcal{H}^q$（相对于度量 δ）满足条件（2.2）。由方程（5.19）以及 δ 的 $q-$ 阿尔福斯正则性，存在某个常数 $C > 1$，使得

$$C^{-1}\mathcal{H}^q(B_e, \delta) \leq \mathrm{diam}(\widehat{X}_e, \delta) \leq CK^q\mathcal{H}^q(B_e, \delta) \tag{5.20}$$

对每条边 $e \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n(E)$。由于当 $e, f \in E_n(E)$ 且 $e \neq f$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$成立时，$\mathrm{int}X_e \cap \mathrm{int}X_f = \varnothing$，球集 $\{B_e\}_{e \in E_n(\widehat{E})}$ 两两不相交，并且

$$\sum_{e \in E_n(\widehat{E})} \mathcal{H}^q(B_e, \delta) \leq \mathcal{H}^q(X, \delta) < \infty. \tag{5.21}$$

令 $M_n := \max\{\rho_n(e) \mid e \in E_n(E)\}$。由拟对称性条件可轻易推出 $M_n \leq \operatorname{diam}(\widehat{X}, \delta)\, \eta(L_*^{1-n})$ 且 $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$。由于对所有 $e \in E_n$，$\rho_n(e)^p \leq \rho_n(e)^{p-q}\rho_n(e)^q \leq M_n^{p-q}\rho_n(e)^q$，我们可以估计：

(5.22)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_p(\rho_n) &\leq M_n^{p-q} \sum_{e\in E_n(\widehat{E})} \rho_n(e)^q = M_n^{p-q} \sum_{e\in E_n(\widehat{E})} \frac{\operatorname{diam}(\widehat{X}_e, \delta)^q}{\operatorname{dist}(X_-, X_+, \delta)^q} \\ &\overset{(5.20)}{\leq} M_n^{p-q} \sum_{e\in E_n(\widehat{E})} \frac{CK^q\mathcal{H}^q(B_e, \delta)}{\operatorname{dist}(X_-, X_+, \delta)^q} \overset{(5.21)}{\leq} M_n^{p-q} \frac{CK^q\mathcal{H}^q(X, \delta)}{\operatorname{dist}(X_-, X_+, \delta)^q}.\end{aligned}$$

由于 $p - q > 0$ 和 $M_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$，可得 $M_n^{p-q} \overset{n\to\infty}{\to} 0$，因此存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{M}_p(\rho_n) < 1$。由于 $p > q$ 是任意的，根据推论 5.17 可得 $q \geq Q_*$。由于 $q > \dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}|_{\widehat{X}})$ 是任意的，因此可得 $\dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}) \geq Q_*$。□

现在我们可以证明主要定理了。

定理 *1.7* 的证明。由引理 5.16 和 5.12 可知，子集 X 是完备且一致完美的。因此，由于 $\dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}) \leq \log_{L_*}(|E_1|) < \infty$，根据推论 2.6 可得

$$\dim_{\mathrm{AR}}(\widehat{X}, d_{L_*}) \leq \dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}). \tag{5.23}$$

由推论 5.10 可知 $\dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}) \leq Q_*$，而由命题 5.18 可知 $\dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}) \geq Q_*$。因此可得

$$Q_* = \dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}) = \dim_{\mathrm{AR}}(\widehat{X}, d_{L_*}).$$

□

定理 *1.3* 的证明。如果 IGS 有可移除边，即 $E_1 \neq E_1$，那么引理 5.14 表明子集 X 是多孔的。正如定理 1.7 的证明所示，$\dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}) = \dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*})$，因此根据命题 2.7，$(X, d_{L_*})$ 的共形维数无法达到。另一方面，如果 IGS 没有可移除边，那么根据定义，存在一个对称的 $\Theta^{(1)}$-可容许密度 $\rho^*\colon E_1 \to (0, 1)$，使得 $\mathcal{M}_{Q_*}(\rho^*) = 1$。由此根据定理 1.5 可得 $d_{\rho^*} \in \mathcal{G}_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*})$，并且

$$\dim_{\mathrm{H}}(X, d_{\rho^*}) = Q_* = \dim_{\mathrm{AR}}(X, d_{L_*}),$$

其中，最后一个等式由定理 1.7 给出。因此，(X, d_{L_*}) 的共形维数可以达到。□

6. On the Combinatorial Loewner Property

这项工作的动机之一，源于 [7]，中讨论的组合 Loewner 性质（CLP）以及相关的***Kleiner*** 猜想 [26, 猜想 7.5]。该猜想指出，CLP 与近似自相似性相结合，意味着一个空间拟对称于某个 Loewner 空间。根据 [14, §1.6]（或 [34,命题 11.14]），对于这类空间，这个问题等价于共形维数能否达到。在 [1], 中，前两位作者找到了该猜想的反例。这些例子都来自带有可移除边的 IGS，而无法达到共形维数的原因与定理 1.3 中相同。虽然这些

反例针对特定空间解决了这一猜想，但要理解一般情形仍是一个困难的开放问题；例如参见 [16] 中的讨论。特别是，了解该猜想对某些空间类是否有肯定答案，将十分重要。要保证一个空间拟对称于某个 Loewner 空间，还需要哪些额外假设?

本节中，我们找到了 Kleiner 猜想成立的一大类非平凡情形。为此，我们验证了所构造极限空间 X 的近似自相似性和组合 Loewner 性质。因此，在不存在可移除边的情况下，定理 1.3 表明共形维数能够达到，从而验证了许多对称 Laakso 型空间中的 Kleiner 猜想。正如前文所见，达到共形维数的度量是明确的，但并非源自雪花变形或其他某种简单的构造。

本节的另一个动机是指出，具有最小豪斯多夫维数的对称 Laakso 型空间是 *Loewner* 空间。这可由 [13,§1.6]（或 [34, 命题 11.14]）立即得出，并在本节末尾陈述。关于 Loewner 空间的定义，参见 [13, 定义 1.11] 或 [20]。

为了讨论 Kleiner 猜想，我们需要证明所关注的空间具有近似自相似性和 CLP。验证 CLP 的大部分工作已在 [1], 中完成，此处唯一的区别是我们采用了略有不同的度量。为便于说明，我们定义近似自相似性和 CLP，并概述如何针对我们的度量证明这些性质。对于大多数技术步骤，我们参考 [1], ，并仅指出其中的改动。

定义 6.1。若存在一个常数 $L > 1$，使得对于每个 $x \in X, r \in (0, \operatorname{diam}(X)]$，都存在一个开集 $U_{x,r} \subset X$ 以及一个 L-双 Lipschitz 映射 $f\colon (B(x,r),\ d/r) \to U_{x,r}$，则度量空间 (X,d) 称为近似自相似的。

我们回顾定义 4.11 中内在度量 d_{L_*} 的定义。

命题 6.2. 对称 *Laakso* 型分形空间 (X, d_{L_*}) 是近似自相似的。

证明。 证明与 [1, 第 3 节8] 非常相似，这里仅略述细节。对于每个 $e \in G_n$，令 $\mathcal{N}(e)$ 表示以 e 为中心、大小为 1 的子图，并令 $\widehat{\mathcal{N}}(e)$ 表示一个大小为 2 的子图。若两条边 $e \in G_n$, $f \in G_m$ 在组合意义下$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$等价，则 $\mathcal{N}(e)$ $\mathcal{N}(f)$ 作为图同构，且同构映射为 ψ，并满足以下条件：对于 $\mathcal{N}(e)$ 中的每条边 u 以及 $a \in u$，均有 $\phi_{\psi(u),\psi(a)} = \phi_{u,a}$ 。

此外，度量定义中连接 $y, z \in \mathcal{N}(e)$⌒的任何最短边路径都必须包含在 $\mathcal{N}(e)$ 中。利用这些事实以及 [1, 推论 3.34] 的证明，可以看出存在一个 L_*^{n-m}- 相似变换 $\mathcal{N}(e) \cdot X \to \mathcal{N}(f) \cdot X$，其中 $A \cdot X = \bigcup_{e \in A} e \cdot A$ 对任意 $A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ 均成立。

最后，近似自相似性可由同构类的有限性和这些相似变换推出。显然，边的同构类只有有限多个，并且存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得每个同构类都已包含某个 $e \in G_n$ 的一个代表元，其中 $n \le N$。令 $x \in e \cdot X$ 和 $r < L_*^{-N}$。根据性质 (DL4)，有 $B(x,r) \subset \mathcal{N}(e) \cdot X$，其中某条边 $e \in G_m$满足 $L_*^{-m-1} \le r \le L_*^{-m}$。因此，上一段构造出了所需的相似变换。这足以说明近似自相似性成立；更多细节见 [1, 命题 3.35。]□

组合 Loewner 性质（CLP）的表述更加技术化，经典定义见 [1] [7] 和 [15]。这里，我们将给出一个更简单且更适合当前情形的定义。

对于 $v \in V_n$，令 $X_v = \bigcup_{e \in E_n,\ v \in e} e \cdot X$。这个集合形似围绕 v 的星形，并且 $X_v \cap X_w$ 当且仅当 v，w 之间有一条边时成立。若 A，$B \subset X$ 是两个子集，令 $\Gamma(A, B)$ 表示连接 A 与 B 的连续路径的集合，并令 $\Gamma_L(A, B)$ 表示直径至多为 L 的连续曲线的集合。若函数 $\rho\colon V_n \to [0,1]$ 满足以下条件，则称其为曲线族 Γ 的 可容许函数：

$$\sum_{v \in V_n, X_v \cap \gamma \neq \varnothing} \rho(v) \geq 1 \text{ for all } \gamma \in \Gamma.$$

Let

$$\operatorname{Mod}_p^D(\Gamma; G_n) = \inf \sum_{v \in V_n} \rho(v)^p,$$

其中，下确界取遍所有对于 $\Gamma(E, F)$ 可容许的函数 ρ。

定义 6.3。设 $Q > 1$。若 (X, d_{L_*}) 满足以下条件，则称其具有 Q-组合 *Loewner* 性质。

(CLP1) 对于每个 $A \geq 4$，都存在一个 $\delta > 0$ 和 $L \geq 1$，使得对所有 x，$y \in X$，$r > 0$满足 $d_{L_*}(x, y) \leq Ar$，以及所有 $n > 0$ 满足 $L_*^{-n} < r/2$，

$$\operatorname{Mod}_Q^D(\Gamma_{Lr}(B(x,r), B(y,r); G_n)) \geq \delta.$$

(CLP2) 对于每个 $A \geq 2$，都存在一个 δ_A，且 $\lim_{A \to \infty} \delta_A = 0$ 使得以下条件成立。对于每个 $x \in X$，$r <\operatorname{diam}(X) = 1/2$ 以及 $n > 0$ 满足 $L_*^{-n} < r/2$，有

$$\operatorname{Mod}_Q^D(\Gamma(B(x,r), X \setminus B(x, Ar)); G_n) \leq \delta_A.$$

这个定义不同于经典定义，但很容易看出二者是等价的。与经典定义不同，这里我们不使用 α-逼近的概念，而且 (CLP1)仅给出了连接球的曲线模下界，而不是连接任意两组成对集合的曲线模下界；经典定义见 [1] 。这种等价性可通过结合两个观察得到。首先，根据 [7, 命题 2。9]，可以将任意集合约化为球。其次，我们的图 G_n 与一个 α-逼近同构。这可由 [1,命题 3。37]中的论证与引理 5.12 和引理4.5结合得出；这两条引理说明了我们使用的度量略有不同。该论证表明，G_n 是覆盖 $\{X_v$ 的关联图：$v \in V_n\}$，且该覆盖构成一个 α-逼近。

迄今为止，本文研究了边模数，幸运的是，它与相应的顶点模数可比。若 $A \subset X$ 是一个集合，令 $G_n(A) = \{v \in V_n\colon X_v \cap A \neq \varnothing\}$。

引理 6.4 ([1, 命题 5.4.9])**.** 存在一个常数 $C \geq 1$，使得以下结论成立。若 $A, B \subset X$ 满足 $G_n(A)$ $G_n(B)$ 不相交，则

$$C^{-1}\operatorname{Mod}_p^D(A, B; G_n) \leq \operatorname{Mod}_p(\Theta(G_n(A), G_n(B)); G_n) \leq C\operatorname{Mod}_p^D(A, B; G_n),$$

其中，可比常数与 n 无关。

此外，通过一个简单的论证，我们可以计算图在不同层级的模数。令 $M_Q = \operatorname{Mod}_Q(\Theta^{(1)}, G_1)$。

引理 6.5 （[1, 定理 4。38]）。 设 $n > m$. 对于每个 A， $B \subset V_m$ 均有

$$\mathrm{Mod}_p(\Theta(\pi_{n,m}^{-1}(A), \pi_{n,m}^{-1}(B)), G_n) = \mathrm{Mod}_p(\Theta(A, B), G_m) M_Q^{m-n}.$$

现在，我们可以通过改编 [1, 定理 5.2] 来证明极限空间 X 满足 CLP。注意，使度量空间成为 Q-CLP 的数值 $Q > 1$ 是唯一的。事实上，如果存在这样的 Q，那么 Q 就等于共形维数；例如参见 [17, 引理 4.2]。

定理 6.6. 对称 *Laakso* 型分形空间 (X, d_{L_*}) 是 *Q-CLP*（对某个 $Q > 1$ ），当且仅当与之关联的路径族 $\Theta^{(1)}$ 包含两条边不相交路径。

证明. 必要性可由逆否命题证明。若 G_1 没有两条边不相交路径，则根据引理 5.7，有 $\mathrm{Mod}_1(\Theta^{(1)}, G_1) = 1$；根据定理 1.7，阿尔福斯正则共形维数为 1。另一方面，一个具有 $Q > 1$ 的 Q-CLP 空间满足 $\dim_{AR}(X) = Q > 1$ ，根据 [17, 引理 4.2]。因此，在这种情况下，极限空间不可能是 Q-CLP。

接下来，我们证明充分性。设 $Q =$ 维数$_{\mathrm{AR}}(X)$，由引理 5.7、命题 5.18 和推论 5.10 可知，它满足 $Q > 1$。界 (CLP2) 可由 [1, 命题 5.2], 中的论证得到，其中相关的界 $\mathrm{diam}(X_v) \leq 2L_*^{-n}$由 (DL6) 得出。

接下来，界 (CLP1) 可由 [1,命题 5.7] 得出。这里需要使用引理 5.12，以替代 [1, 命题 3.37] 中的用法。 □

最后，由 CLP 还可推出极小化元的经典 Loewner 性质。Loewner 空间的经典定义见 [20] ，关于这一概念的更多讨论见 [14] 。

推论 6.7。 对称 *Laakso* 型分形空间 (X, d_{L_*}) 与一个Q-阿尔福斯正则 Q-*Loewner* 空间拟对称，当且仅当其关联的 *IGS* 没有可移除边，且 $Q =$ 维数$_{\mathrm{AR}}(X) > 1$。此外，若 (X, d) 是阿尔福斯正则共形维数的任意极小化元，且 $Q =$ 维数$_{\mathrm{AR}}(X) > 1$，则 (X, d) 是 Q-*Loewner*。

证明。 如果 (X, d_{L_*}) 与某个 $Q > 1$ 的 Q-阿尔福斯正则 Q-Loewner 空间拟对称，那么根据 [40, 1.7. 推论], Q 必须等于 (X, d_{L_*}) 的阿尔福斯正则共形维数。因此，X 达到了其阿尔福斯正则共形维数 Q ，并且根据定理 1.3，不可能存在可移除边。

另一方面，如果 (X, d_{L_*}) 没有可移除边，且 $\dim_{\mathrm{AR}}(X) > 1$，那么根据定理 1.3，它达到了其阿尔福斯正则共形维数，并且$Q = \dim_{\mathrm{AR}}(X) > 1$。根据定理 6.6，$(X, d_{L_*})$ 也是 Q-CLP；根据 [14, §1.6] ，阿尔福斯正则共形维数的任意极小化元都是 Q-Loewner。这就完成了逆命题以及“此外”部分的证明。

□

References

[1] Anttila, R., and Eriksson-Bique, S. 关于使用替换构造分形空间及组合 Loewner 性质。*arXiv preprint arXiv:2406.08062* (2024年)。[2] Anttila, R., Eriksson-Bique, S., and Shimizu, R. Laakso 型分形空间上自相似能量形式的构造与 Sobolev 空间的奇异性。*arXiv preprintarXiv:2503.13258* (2025年)。

[3] Bonk, M., and Kleiner, B. 共形维数与具有二维球面边界的 Gromov 双曲群。 *Geometry & Topology 9* (2005), 219–246。[4] Bonk, M., and Meyer, D. 均匀分枝树。 *Trans. Amer. Math. Soc. 375*, 6 (2022), 3841–3897。[5] Bonk, M. and Saksman E. *J. Reine Angew. Math.* , , *737* 2018 161 187 Sobolev 空间与双曲填充。( ), – 。[6] Bonk, M., and Schramm, O. Gromov 双曲空间的嵌入 [mr 1771428]。载于*Selected works of Oded Schramm. Volume 1*, 2, Sel. Works Probab. Stat. Springer, New York, 2011, pp. 243–284。由 Bonk 修订。[7] Bourdon, M., and Kleiner, B. 组合模、组合 Loewner 性质与 Coxeter 群。 *Groups Geom. Dyn. 7*, 1 (2013), 39–107。[8] Bourdon, M., and Pajot, H. 某些双曲建筑边界上的 Poincaré 不等式与拟共形结构。 *Proceedings of the American Mathematical Society*127, 8 (1999), 2315–2324。[9] Burago, D., Burago and Ivanov 33 *Graduate* , Y., , *Studies in Mathematics* 2001 S. *A course in metric geometry*, vol. of 。美国数学会, Providence, RI, 。[10] Carrasco, M., and Mackay, J. M. 在初等子群上分裂的双曲群的共形维数。 *Invent. Math. 227*, 2 (2022), 795–854。[11] Carrasco Piaggio M. *Ann. Sci. Éc.* , 关 *Norm. Supér. (4) 46* 3 2013 495 548 于紧致度量空间的共形规范。, ( ), – 。[12] Carrasco Piaggio, M. 双曲群的共形维数与典范分裂。 *Geom. Funct. Anal. 24*, 3 (2014), 922–945。[13] Cheeger, J. *Geom. Funct.* 度量测度 *Anal. 9* 3 1999 428 517 空间上 Lipschitz 函数的可微性。, ( ), – 。[14] Cheeger, J., and Eriksson-Bique, S. 薄 Loewner 地毯及其在 S^2中的拟对称嵌入。 *Commun. Pure Appl. Math. 76*, 2 (2023), 225–304。[15] Clais, A. *Anal.* 直角双曲 *Geom. Metr. Spaces 4* 1 2016 1 531 建筑边界上的组合模。, ( ), – 。[16] David, G. C., and Eriksson-Bique, S. 解析一维平面与组合 Loewner 性质。 *J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 112*, 4 (2025年), 45。编号/No e70305。[17] Eriksson-Bique, S. 拟自相似 CLP 空间中共形维数不同定义的等价性。 *Ann. Fenn. Math. 49*, 2 (2024年), 405–436。[18] Göring, F. 门格尔定理的简短证明。 *Discrete Mathematics 219*, 1 (2000), 295–296。[19] Heinonen, J. “度量空间上的分析讲义”。Universitext。Springer-Verlag, New York, 2001。[20] Heinonen, J., and Koskela, P. 具有受控几何的度量空间中的拟共形映射。 *Acta Math. 181*, 1 (1998), 1–61。[21] Kajino, N., and Murugan, M. 关于共形游走维数：对称扩散的拟对称一致化。 *Invent. Math. 231*, 1 (2023), 263–405。[22] Keith, S. 度量测度空间上的可微结构。 *Adv. Math. 183*, 2 (2004), 271–315。[23] Keith, S. and Laakso T. *Geom. Funct. Anal.* , , 共形 *14* 6 2004 1278 1321 Assouad维数与模。, ( ), – 。[24] Kigami, J. *Geometry and analysis of metric spaces via weighted partitions*, *Lecture Notes in Mathematics* 卷2265。Springer, Cham, [2020] ©2020。[25] Kigami, J. *Conductive homogeneity of compact metric spaces and construction of p-energy*, *Memoirs of the European Mathematical Society*卷5。欧洲数学会 (EMS), Berlin, [2023] ©2023。[26] Kleiner, B. 负曲率空间的渐近几何：一致化、几何化与刚性。载于 *International Congress of Mathematicians. Vol. II*。Eur. Math. Soc., Z¨urich, 2006, pp. 743–768。[27] Kusuoka, S., and Zhou, X. Y. 分形上的 Dirichlet 形式：Poincar´e 常数与电阻。 *Probab. Theory Related Fields 93*, 2 (1992), 169–196。[28] Kwapisz, J. p ´ *Ann. Acad. Sci. Fenn.* 通过-电阻 *Math. 45* 1 2020 3 51 定义共形维数：谢尔宾斯基地毯。, ( ), – 。[29] Laakso, T. 具有任意 $Q > 1$ 且满足弱 Poincar´e 不等式的 Ahlfors Q-正则空间。 *Geom. Funct. Anal. 10*, 1 (2000), 111–123。

[30] Laakso带 -加权度量的平面无法双 Lipschitz 嵌入到 。 , ( ), – 。
T. J. A_∞ $\mathbb{R}^N$ *Bull.* ,[31] Lang将度
London Math. Soc. 34 6 2002 667 676
量空间双 Lipschitz 嵌入空间形式。 , - ( ), – 。
U. and Plaut C. *Geom.* ,[32] MacKay
Dedicata 87 1 3 2001 285 307
共形维数大于一的空间与群。 , ( ), – 。
J. M. *Duke Math.* ,[33] Mackay,
J. 153 2 2010 211 227
J. M., and Tyson, J. T. *Conformal dimension*的第 54 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2010 年。
理论与应用。 *University Lecture Series*,[34] Murugan, M., and ShimizuSierpiński 地毯上的一阶 Sobolev 空
间、自相似能量与能量测度。 R. , 9（2025年） , 1523–1608。 ´, *Commun. Pure Appl. Math. 78*,
[35] Nakamura, T.无限网络的广义极值长度。 and Yamasaki, 1（1976） , 95–111。 M. ,
*Hiroshima Mathematical Journal 6*负曲率流形的共形维数与无穷远处的球面。 , （） , –。[36] Pansu,
P. ` ` ´ ´ ` ´ *Ann.* 双 Lipschitz 映
Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 14 2 1989 177 212
射与强权。 , （） , –。[37] Semmes,
S. A_∞ *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*关于刻画从紧致
Math. 18 2 1993 211 248
倍增空间到阿尔福斯正则空间的拟对称映射的 Carrasco Piaggio 定理。载于[38] Shanmugalingam N. , 第 8 卷,
*Potentials and partial differential*De Gruyter, 柏林, *equations—the legacy of David R. Adams*©2023, 第
23–48 页。 *Adv. Anal. Geom.* ,[2023] [39] Shimizu-能量的构造及其在 Sierpiński 地毯上的相关能量测度。 R. ,
2（2024年） , 951–1032。 *p,* ′度量测度空间中的拟共形性与拟对称性。 , , （） 。
Trans. Amer. Math. Soc. 377,[40] Tyson拟共形映射的最小豪斯多夫维数集合。 , （） , –。（Riku Anttila）
J. T. *Ann. Acad.* ,[41] Tyson,
Sci. Fenn. Math. 23 2 1998
J. T. *Proc. Amer.* ,
Math. Soc. 128 11 2000 3361 3367

Department of Mathematics and Statistics: University of Jyväskylä（Sylvester Eriksson-Bique）
P.O. Box 35 FI-40014 Jyväskylä Finland , , ,
Email address, riku.t.anttila@jyu.fi:
Department of Mathematics and Statistics University of （Lassi Jyväskylä P.O. Box 35 FI-40014 Jyväskylä Finland
Rainio） *Email address*, sylvester.d.eriksson-bique@jyu.fi,
Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä:
P.O. Box 35 FI-40014 Jyväskylä Finland