对数正态分布的局限性：运用几何布朗运动评估加密货币波动率与风险价值

作者 1：Ekleen Kaur机构：佛罗里达大学，
ekleenkaur17@gmail.com

摘要： **将加密货币纳入机构投资组合，亟需采用稳健的风险建模框架。本研究是后续系列研究的一部分，旨在进一步完善加密货币的模型风险分析。本项初步研究采用传统的行业标准几何布朗运动（GBM）模型，建立基础基准。GBM 常用于非加密货币类金融资产，并假设多资产加密货币投资组合（XRP、SOL、ADA）的收益服从对数正态分布。本研究采用最大似然估计，以及结合历史协方差乔莱斯基分解的相关蒙特卡洛模拟。我们将股票投资组合模型构建为最小方差投资组合（MVP）。我们观察到，该模型在厚尾、非高斯的加密货币环境中发生了结构性变化。结果揭示了对数正态假设的局限性：计算了一年期限内、5%置信水平下的风险价值。为建立结果基准，我们还对股票投资组合（AAPL、TSLA、NVDA）进行了全面比较分析，结果显示其失效率显著较低。这一表现有力证明，GBM 模型从根本上说是后续研究的理想基准。这项创新研究的结果将为我们未来加密货币风险管理模型的成功标准提供参考，并为高级模型的开发与应用提供严谨依据。**

关键词：加密货币、区块链、金融建模、股票投资组合、风险分析、高斯分布。

I. 引言

自比特币于 2009[30], 推出以来，加密货币市场的出现既带来了金融创新的前所未有的机遇，也给传统风险管理带来了深刻挑战。市场充满了独特的风险，这些风险主要源于该资产类别所具有的高波动性、对监管变化的敏感性以及尚处于萌芽阶段的市场结构。准确建模和预测这种波动率并非单纯的学术练习；这对于在这一快速演变的领域中实现有效的资本配置、监管合规以及生存至关重要。金融建模的标准起点是 **几何布朗运动（GBM）**。该模型假设资产价格变动是连续的随机游走，且对数收益服从正态分布，由此构成了著名的布莱克–斯科尔斯–默顿期权定价模型的基础，也是传统定量金融的核心。尽管该模型在理论上优雅且在数学上易于处理，但其简洁性依赖于一些严格的假设：恒定波动率（同方差性）以及收益的高斯分布。这些假设在成熟的股票市场中经常被违反，而加密货币收益的独特性质更是系统性地对其提出了挑战。本文是探索加密货币风险管理高级定量技术系列论文的第一篇，旨在确立一个关键的 **基准与基础性批判**。我们将最简单且广泛使用的模型 GBM 应用于多资产加密货币投资组合（XRP、SOL 和 ADA）。我们的首要目标是证明，对数正态收益假设无法充分捕捉现实世界中的市场风险，并且存在系统性失效。通过使用 GBM 驱动的蒙特卡洛模拟计算优化投资组合的风险价值（VaR），我们希望从定量角度捕捉这一基础模型如何导致对市场风险的显著低估，从而说明立即采用更复杂金融工程方法的迫切性和必要性。

II. 文献综述

加密货币本质上具有高度波动性，这正是本研究的动机。我们希望将传统股票投资组合中使用的数学模型形式化，用以衡量加密货币的表现。我们的首要目标是探究：该模型能否用于风险评估？其预测准确性又能达到何种程度？作为后续系列研究的第一篇论文，我们回顾了前提相似但并非专门针对加密货币波动特性的早期研究[1]，这些研究涉及股票投资组合或风险分析。[18] 为撰写这篇科学论文，我们对各类

区块链领域中对加密货币市场的贡献。这些研究既包括基于应用的创新研究，将加密货币作为可再生股票资产[2][3]，并利用交易池；也包括采用底层证明系统且安全性极高的研究，其安全性由强有力的数学保证提供，例如基于 SNARK 的零知识证明系统[4]。

然而，García-Corral 等人[5]（2022）和 Jalal 等人[6]（2021）较早发表的综述运用文献计量分析研究了加密货币。Guangxi 等人[7]（2021）探讨了中国金融市场中加密货币的政策影响和风险分析。Bariviera 和 Merediz-Solà [8]（2021）丰富了加密货币金融经济研究领域的文献；Kyriazis 等人 [9]（2020）对加密货币市场中的价格泡沫进行了解读。Hairudin 等人 [10]（2022）围绕合法性、设计[25], 和治理方面，调查了加密货币研究中的空白。

上述既有综述未考虑股票投资组合中的加密货币波动性，也未利用历史数据进行杠杆模式分析以确定风险。Ul Haq 等人 [11]（2021）基于经济政策的不确定性，为加密资产设计了一种风险管理工具；但我们认为，本研究首次在这一领域展示了对基础数学假设进行前沿股票投资组合分析，以验证这些假设是否适用于加密货币，并通过本系列论文的后续研究不断调整和完善最佳模型。通过这项研究，我们还旨在确定，在显著的波动时期，统一的资产收益是否能够呈现更强的相关性。 此外，我们还希望通过本研究，聚焦加密货币交易的独特方面[17], ，例如**高频数据**分析、**加密货币衍生品**的影响，以及**加密货币投资者行为**的作用；这些领域目前仍严重缺乏研究[14][20]。

尽管已知其在捕捉现实市场动态方面存在不足，本文仍有意选择**几何布朗运动（GBM）**模型作为**必要的基础基准**。它是基础金融学中采用的解析解，在数学上等同于假设对数收益相互独立且同分布（i.i.d.），并服从正态分布。通过严格应用并检验这一最简单、限制性最强的框架，本文实现了两个关键目标：**第一，**为任何可信的加密货币风险模型确立绝对的最低预期标准。**第二，**通过大量风险价值违规，揭示由 GBM 推导出的风险价值指标存在显著且可量化的失效，从而形成一个无可否认、经实证证实的**知识缺口**。这一失效充分证明，有必要采用后续的高级建模技术（改进传统跳跃扩散模型，并通过新颖的优化方法，结合历史统计算法预测来解决 GARCH 模型的局限性）。这些技术将在本研究系列后续论文的其余部分中探讨。

尽管学术研究领域已大幅拓展，当前加密货币风险建模文献仍存在若干关键局限[16]。最值得注意的是，研究依赖标准的**GARCH 系列模型**（广义自回归条件异方差[24]）；尽管这类模型较 GBM 有所改进，但往往仍无法充分反映加密货币收益中的极端**超峰态**（D. Felix[12]所展示的厚尾特征）和**非对称性**，[13]中也展示了这些局限。此外，许多研究聚焦于比特币和以太坊等流动性极高的资产，导致针对市值较低但交易量较大的资产（如 XRP、SOL 和 ADA）缺乏可靠的风险框架；这类资产的收益特征可能截然不同，而且往往波动性更高[19], 。目前，现有文献中的这一缺口十分巨大；随着各经济体转向二层区块链，我们的工作旨在缓解这一问题。一项重大不足是缺少稳健且具有比较性的**回测研究**[13]，以对照风险价值和预期损失等监管级风险指标，评估模型表现，尤其是在极端压力情景下。这导致拟议模型在实际中的有效性及其资本要求，尚未经过现实合规标准的检验。

三、方法论

A. 本框架采用的投资组合理论与风险度量基础

对于不了解这些概念的读者，为确保后续分析严谨清晰，有必要在本节回顾几何布朗运动模型所依据的基本数学概念。金融

模型通常以离散时间（例如日收益率）或连续时间来构建。**概率论**为处理这两种情形下的随机性提供了工具。本文采用的**对数正态分布**基于以下假设：连续时间对数收益率服从**正态分布**，其均值为$\boldsymbol{\mu}$，方差为σ^2。连续随机变量的方差可定义为对其相对于均值的离散程度进行量化，在数学上计算为随机变量在某一离散点处取值与均值之差的平方的期望。在连续域上，这可表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

其中，$\boldsymbol{\mu}$：连续域上该变量的均值，**f(x)：**概率密度函数，用于定义连续随机变量在离散点处出现的可能性。需要明确的是，任何资产类别的有效风险管理都始于现代投资组合理论的基础原则，而这些原则主要由**Markowitz 的均值-方差框架加以形式化。均值-方差框架（MVF）**使投资者[15] 能够根据自身的风险承受能力选择最优投资组合。关键输入包括预期收益率$\boldsymbol{\mu}$、标准差（波动率σ）以及资产之间的协方差（$\boldsymbol{\Sigma}$）。主要目标是，在给定风险水平下最大化预期收益率，或者反过来，在给定预期收益率的情况下最小化风险。

预期收益率（μ）：对于由N种资产构成、权重为w_i的投资组合，投资组合预期收益率R_p 通过各项资产收益率的加权和计算得出：

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i$$

投资组合方差（σ_p^2）：该指标用于衡量投资组合风险，取决于各项资产的方差以及每一对资产之间的协方差：

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, i \neq j}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

MVF 定义了**有效前沿**，即在每个风险水平下都能提供最高收益率的最优投资组合集合。本研究框架要求计算两个至关重要的优化投资组合：

1. **最小方差投资组合（MVP）：**无论预期收益率如何，该投资组合组合都能实现绝对最低的波动率（σ_p）。
2. **最大夏普比率投资组合（MSRP）：**通过夏普比率（S）定义的、使风险调整收益率最大化的投资组合，其中R_f为无风险利率：

$$S = \frac{Rp - Rf}{\sigma p}$$

随机过程与维纳过程：随机过程是按时间索引的一组随机变量，用于模拟金融资产路径。几何布朗运动模型的核心是**维纳过程**（或布朗运动），W_t，这是一种连续时间随机[26] 过程，其特征如下：

1. 独立增量：在给定时间区间内，W_t 的变化与此前区间内的变化相互独立／无关。2. 正态分布增量：$W_{t+\Delta t} - W_t$ 的变化服从正态分布，其均值为 0，方差为 Δt。3. 连续路径：路径 W_t 随时间t连续。

几何布朗运动模型将这一过程纳入其中以对资产价格进行建模，将价格变化（dS_t）与确定性分量（$\mu S_t dt$）以及由波动率驱动的随机分量（$\sigma S_t dW_t$）联系起来。几何布朗运动随机微分方程的解表明，时刻 S_T 的资产价格 T服从 **对数正态分布**。这等同于说，对数收益率 $ln(S_T/S_0)$服从正态分布。这一分布至关重要，因为它意味着价格始终为正，并且能够对与当前价格水平成比例的价格变动进行建模，这与经济理论相符。

蒙特卡洛模拟（MCS）：蒙特卡洛模拟（MCS）是一种依靠重复随机抽样来获得数值结果的计算方法。在此背景下，MCS[22] 用于通过生成数千条可能的假设价格路径，预测投资组合收益率的未来分布。通过运行 10,000 次此类模拟，我们构建了未来投资组合价值的稳健经验分布，并从中直接提取 **风险价值** $_{0.05}$ （第 5th 个百分位数）。每条路径均根据几何布朗运动随机微分方程的离散化版本生成：

$$ln(\frac{St + \Delta t}{St}) \sim \mathcal{N}[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t,\ \sigma^2\Delta t]$$

几何布朗运动（GBM）假设：在传统金融模型中，资产价格（S_t）通常被假设遵循由几何布朗运动随机微分方程（SDE）定义的连续随机过程：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dS_t**：** 表示价格的变化。μ**：** 表示漂移（预期收益率）。σ**：** 表示波动率（扩散项）。dW_t**：** 表示维纳过程（或布朗运动）。

该随机微分方程（SDE）的解表明，资产收益（对数收益）**服从正态分布**（即对数正态假设）。参数（μ和 σ）通过对历史数据进行**最大似然估计（MLE）**得出。

结果基准标准：风险价值（VaR）是本研究采用的核心风险指标。它用于估计投资组合在指定时间期限（T）内，在给定置信水平（α下可能遭受的最大损失。例如，95%置信水平下的1日风险价值为10,000美元，意味着投资组合在次日损失超过10,000美元的概率仅为5%。从数学上讲，风险价值定义为损失分布的 α分位数。在几何布朗运动（GBM）的背景下，风险价值直接根据对数正态收益分布推导得出。

B. 实施细节：建立几何布朗运动基准

我们的金融股票定价模型采用全面的数据驱动方法实施，旨在为加密货币风险评估建立严谨、现实的基准。这一过程包括动态参数估计、投资组合优化，以及能够考虑资产间相关性的高保真蒙特卡洛模拟（MCS）。

动态参数估计与投资组合构建：为确保模型的相关性，所选投资组合的初始资产价格（S_0）在执行时动态获取。我们将数据与现有金融机构的数据（即现实世界中的股票）进行基准比较，并有效观察模型的漂移，同时捕捉加密金融领域中的风险。我们采用相同的参数估计，并保持统一的微调机制，以捕捉两种框架的统计性能。在本研究中，我们主要讨论 6 个金融代码：用于现实世界股票资产的 AAPL、TSLA、NVDA[21]，以及作为加密资产基准的 XRP-USD、SOL- USD、ADA-USD。尽管在研究阶段使用这些资产来获取结果，我们仍有意避免采用比特币和以太坊等巨鲸区块链，因为尽管其他主要历史加密货币存在已久，加密金融文献对它们的研究仍存在巨大空白

信任度和稳定性。年化漂移（μ）和波动率（σ）是使用 **最大似然估计（MLE）** 根据一年的历史日对数收益率计算得出的。一个关键的设计选择是计算**协方差矩阵**（σ）。我们没有假设对数收益率恒定且彼此独立，而是根据资产的历史相关结构推导出 σ ，然后将其年化。这一选择承认这些加密货币固有的共同变动，使模型虽然从根本上受限于对数正态假设，但相比简单、不相关的几何布朗运动模型，仍能提供更精细的表征。随后，我们使用**序列最小二乘规划（SLSQP）**约束优化技术求解**最小方差投资组合（MVP）**的权重，以基于历史观测到的协方差实现尽可能低的投资组合波动率。

用于风险价值计算的相关蒙特卡洛模拟： 风险评估的核心在于**蒙特卡洛模拟（MCS）**[29], ，该模拟在一年的时间期限内（$T=1$）执行了 10,000 条独特的价格路径。GBM 价格路径以离散时间步长进行模拟（$\Delta t = 1/252$）。关键在于，通过对 GBM 方程中的随机项（dW_t）进行**乔莱斯基分解**，引入了资产间依赖关系，分解了

年化协方差矩阵（σ）。该技术分解协方差矩阵（$\sigma = LL^T$），以得到下三角
矩阵（L）。随后，将该矩阵 L 与由相互独立且服从标准正态分布的随机冲击组成的向量（Z）相乘。所得向量 ZL^T生成一组相关冲击[28] ，同时驱动 XRP、SOL 和 ADA 的价格路径，从而构建加密货币的股票投资组合模型。这一改进确保模拟路径保持与历史数据相同的相关性结构；与分别独立模拟每项资产相比，它能够更真实地描述联合投资组合风险。

通过百分位数分析量化风险：蒙特卡洛模拟生成了 10,000 个一年后的可能投资组合价值。最后一步是使用百分位数分析量化下行风险。按 5%置信水平计算的**风险价值（$VaR_{0.05}$）**计算为5th 最终投资组合价值分布的百分位数。若初始投资组合价值为 100,000 美元，$VaR_{0.05}$ 数值表示投资组合仅有 5% 的概率会跌至该值以下。随后各节将采用这一基于几何布朗运动得出的**风险价值$_{0.05}$** 作为回测的主要指标，回测结果揭示了对数正态假设的局限性。

四、结果分析

采用几何布朗运动模型进行的蒙特卡洛模拟，应用于两个不同的投资组合：加密货币投资组合（XRP、SOL、ADA）和传统大盘股股票投资组合（AAPL、TSLA、NVDA）。结果显示，在对数正态假设下，两者的风险特征和投资组合稳定性存在显著差异，并提供了明确的实证证据，表明仅靠该模型不足以描述加密货币资产类别。**投资组合优化与权重分布：**优化过程以实现**最小方差投资组合（MVP）**为目标，即在给定一年期协方差矩阵的情况下，将历史波动率降至最低。**加密货币投资组合（XRP、SOL、ADA）：**优化后，权重主要集中在该组合中两个最成熟、历史波动率相对较低的资产上：**XRP（55.1%）和 SOL（44.9%）**。

一个值得关注的现象是，**ADA 的权重为 0.0%**（Cardano）。这直接反映了几何布朗运动模型固有的僵化性，以及该资产特定的历史收益特征。优化算法判定，考虑到 ADA 的历史漂移率、波动率及其与另外两种资产的共同变动，其对投资组合风险（方差）的边际贡献过高，不足以支持将其纳入最小方差投资组合。简单来说，在正态对数收益假设下运行的优化引擎认为，ADA 的价格历史会给投资组合方差带来不可接受的巨大影响。尽管在对数正态约束下，这种彻底剔除在数学上是最优的，但它也立即暴露出潜在的局限：该模型在结构上无法利用 ADA 可能存在的真实但暂时的多元化机会，或更优的收益风险特征，导致仅由加密货币构成的投资组合解受到人为限制，且可能不稳定。

传统股票投资组合（AAPL、TSLA、NVDA）：相比之下，传统股票最小方差投资组合由**AAPL（82.6%）**主导，其次是**NVDA（17.4%）**，而 TSLA 的**权重为 0.0%**。尽管 TSLA 以高波动性著称，但模型发现，AAPL 与 NVDA 之间较高的相关性足以构建稳定的基础，并主要依靠成熟科技巨头 AAPL 较低的风险特征。

图1. 股票投资组合模型（AAPL、TSLA、NVDA）的结果

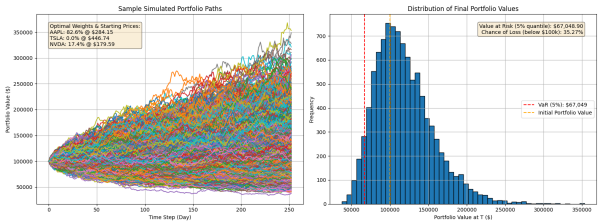
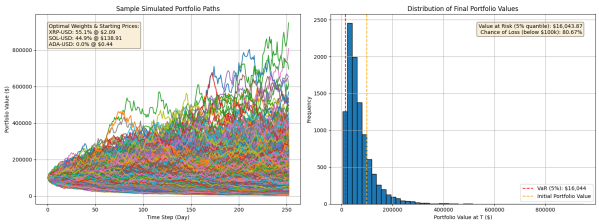


图2. 加密货币投资组合模型（XRP、SOL、ADA）的结果



风险价值与亏损分析对比：对一年期限末的投资组合价值进行分析，以计算5%置信水平下的风险价值（$VaR_{0.05}$），以及期末价值低于初始投资额100,000美元的总体概率。

投资组合	**风险价值$_{0.05}$ (5% 分位数)**	**亏损概率（低于 10 万美元）**
加密货币（几何布朗运动）	~ $16,044	80.67%
传统股权（几何布朗运动）	~ $67,049	35.27%

五、结论

模拟结果清楚地表明，加密货币投资组合具有高风险的相关性动态。**较低的风险价值下限——**加密货币投资组合的风险价值$_{0.05}$（16,044美元）远低于股票投资组合（67,049美元）。这意味着模型预测，在最差的5%情景中，加密货币投资组合仅保留约17%的初始价值，而股票投资组合则保留67%。**系统性失效率——**最引人注目的发现是，加密货币投资组合的亏损概率高达80.67%。这一比例证实，基于对数正态假设优化的最小方差投资组合，在模拟中几乎总是导致价值低于初始投资额。与之形成鲜明对比的是，股票投资组合的亏损率为35.27%，这表明尽管几何布朗运动模型存在已知缺陷，但它仍能以一定的可预测性管理相对成熟、波动率较低资产的风险，而这种可预测性在加密货币市场中并不存在。风险价值失效的程度提供了确凿的实证证据：几何布朗运动／对数正态框架在加密货币风险建模方面存在根本性缺陷。这一结果直接且有力地证明，必须采用先进的非高斯模型[27]，以明确捕捉该资产类别的厚尾和动态波动率。

六、局限性与未来工作

对数正态假设虽然具有基础性，但应用于高频和新兴市场数据时，效果却明显有限，在加密货币领域尤其如此。这是由一系列经实证观察到的现象所致，即**典型事实**；这些现象违背了几何布朗运动的核心假设：恒定波动率和正态分布收益。

几何布朗运动模型在加密金融中的局限性

将 GBM 应用于加密货币资产面临若干根本性的方法论局限，而本文的回测结果直接回应并凸显了这些局限：

局限性	**对几何布朗运动和风险的影响**	**对风险价值的影响**
厚尾分布	加密货币收益率呈现 超峰态（超额峰度）， 这意味着概率质量集中在 尾部的概率远高于 正态分布所预测的水平。	风险价值严重低估了 .....发生的概率和幅度 极端损失，导致 风险价值违规数量较多。
非恒定波动率	加密货币市场的波动率并非 恒定（σ），呈现出波动率 聚集和持续性。几何布朗运动 假设具有同方差性。	该模型无法适应不断变化的 市场状况，并根据 平均波动率而非 当前的高波动 状态计算 风险。
加密货币市场中的跳跃过程	价格变化往往 是不连续的，由突发事件驱动 监管新闻、黑客攻击或巨鲸 活动。这会引入跳跃， 违背了几何布朗运动（GBM）关于.....的假设 连续价格路径。	几何布朗运动无法模拟 突发的极端价格变动， 因此无法捕捉以下关键驱动因素： 加密货币风险。
市场低效与相关性	加密货币市场的监管较少，且 可能会受到 市 场 操纵或非线性效应的影响 而传统股票 市场 吸收。	投资组合多元化收益 在对数正态 假设下计算的收益往往会在 压力情景下崩溃，因为资产相关性会上升， 导致模型在 这正是最需要它的时候。

这些局限性共同表明，GBM 在数学上便于处理的假设与加密货币价格动态的经验现实并不相符，因此有必要采用能够明确纳入这些典型事实的高级模型[23]。为了丰富并推进加密货币波动率理论，我们目前正对以下典型事实开展全面探索。简单的 GBM／对数正态框架不足以捕捉这些事实，这促使我们在未来的工作中进一步完善模型，使其更贴近加密市场跳跃。我们计划在本系列后续论文中探讨以下方面：

● **非对称波动率／杠杆效应：**负向冲击对未来波动率的影响，大于幅度相同的正向冲击。

● **波动率聚集：**价格的大幅变动往往伴随大幅变动，而小幅变动则往往伴随小幅变动。这违背了 GBM 的恒定波动率假设（σ）。

● **均值回归：**尽管价格遵循随机游走，收益率波动率往往会回归至长期平均水平。

● **波动率持续性：**波动率过程受到冲击（价格大幅波动）后，其影响会持续相当长的时间。 ● **尾部依赖与厚尾：**加密货币收益率分布的尾部明显**更厚**，这意味着极端事件（暴跌或暴涨）的发生频率远高于对数正态模型的预测。这直接削弱了基于几何布朗运动得出的风险价值的准确性。

参考文献[1]：Mohamed Shaker Ahmed 等。《加密货币波动率：综述、综合分析与研究议程》，《国际商务与金融研究》，第 71 卷，2024年，102472，ISSN 0275-5319，https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2024.102472。

[2]: Kaur, E., Oza, A. 基于区块链的智慧城市多组织分类体系。SN Appl. Sci. 2, 440 (2020). https://doi.org/10.1007/s42452-020-2187-4[3]: Kaur, Ekleen. (2022). 面向智慧环境、通过机器学习进行物联网监管的水质预测。10.1007/978-3-030-97516-6 3.[4] : Ekleen Kaur 等，《密码学与安全》，arXiv预印本 arXiv:2108.06389, https://doi.org/10.48550/ arXiv. 2108 06389, 2021 . : García-Corral, F.J., Cordero-García, J.A., de Pablo-Valenciano, J. 等。加密货币的文献计量综述：它们如何发展？Financ Innov [5] 8, 2 2022 10 1186 40854 021 00306 5 ( )。https://doi.org/ . /s - - - : Raja Nabeel-Ud-Din [6] 2021 Jalal, Ilan Alon & Andrea Paltrinieri ( ): 加密货币作为金融资产的文献计量综述，《技术分析与战略管理》，DOI: 10 1080 09537325 2021 1939001 . / . . : Guangxi Cao, Wenhao Xie. 停摆政策对 [7] 加密货币与中国金融市场非对称相互依存结构及风险传导的影响。《北美经济与金融杂志》，第58卷，2021年，101514，ISSN 1062-9408，https://doi.org/10.1016/j.najef.2021.101514。[8]: Bariviera, A.F. 和 Merediz-Solà, I. (2021)，《加密货币经济研究现状如何？基于混合分析的调查》。《经济调查杂志》。https://doi.org/ 10 1111 12412 . /joes. : [9] Nikolaos Kyriazis 等。加密货币价格泡沫动态的系统综述。《国际商务与金融研究》，第54卷，2020年，101254，ISSN 0275-5319，https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2020.101254。[10]: Hairudin, Aiman & Sifat, Imtiaz & Mohamad, Azhar & Yusof, Yusniliyana. (2020). 加密货币：关于接受度、治理和市场动态的调查。《国际金融与经济学杂志》。27. 4633-4659. 10.1002/ijfe.2392。[11]: Inzamam Ul Haq 等。2021。《经济政策不确定性与作为风险管理途径的加密货币市场：系统综述》，《风险》，MDPI，第9卷第9期，第1-24页，9月。[12]: Daniel Felix Ahelegbey, Paolo Giudici, Fatemeh Mojtahedi. 加密资产市场的尾部风险测度。《国际金融分析评论》，第73卷，2021年，101604，ISSN 1057-5219，https://doi.org/10.1016/j.irfa.2020.101604。[13]: Guglielmo Maria Caporale, Timur Zekokh，使用马尔可夫转换GARCH模型对加密货币波动率进行建模。《国际商务与金融研究》，第48卷，2019年，第143-155页，ISSN 0275-5319，https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2018.12.009。[14]: Elie Bouri, Xuan Vinh Vo, Tareq Saeed，加密货币市场的收益率等相关性：分析与决定因素。《金融研究快报》，第38卷，2021年，101497，ISSN 1544-6123，https://doi.org/10.1016/j.frl.2020.101497。[15]: Alexander Brauneis, Roland Mestel. 均值-方差框架下的加密货币投资组合。《金融研究快报》，第28卷，2019年，第259-264页，ISSN 1544-6123，https://doi.org/10.1016/j.frl.2018.05.008。[16]: Nguyen Phuc Canh 等。加密货币市场中的系统性风险：来自DCC-MGARCH模型的证据。《金融研究快报》，第29卷，2019年，第90-100页，ISSN 1544-6123，https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.03.011。[17]: Oliver Borgards, Robert L. Czudaj，加密货币市场过度反应的特征。《经济与金融季刊评论》，第80卷，2021年，第31-48页，ISSN 1062-9769，https://doi.org/10.1016/j.qref.2021.01.010。[18]: Mohamed Al Guindy. 加密货币价格波动率与投资者关注度。《国际经济与金融评论》，第76卷，2021年，第556-570页，ISSN 1059-0560，https://doi.org/10.1016/j.iref.2021.06.007。[19]: Jamie L. Cross, Chenghan Hou, Kelly Trinh. 2017—2018年加密货币泡沫期间的收益率、波动率及其影响。《经济建模》，第104卷，2021年，105643，ISSN 0264-9993，https://doi.org/10.1016/j.econmod.2021.105643。[20]: Yeguang Chi, Wenyan Hao. 加密货币波动率模型及其在期权市场中的应用。《国际金融市场、机构与货币杂志》，第75卷，2021年，101421，ISSN 1042-4431，https://doi.org/10.1016/j.intfin.2021.101421。[21]: Rahma Chemkha, Ahmed BenSaïda, Ahmed Ghorbel. 加密货币与外汇市场之间的关联性：对风险管理的启示。《跨国金融管理杂志》，第59卷，2021年，100666，ISSN 1042-444X，https://doi.org/10.1016/j.mulfin.2020.100666。[22]: Andersen, Torben G., and Bent E. Sørensen. 1996年。随机波动率模型的GMM估计：蒙特卡罗研究。《商业与经济统计杂志》14: 328–52。[23]: Bariviera, Aurelio F., María José Basgall, Waldo Hasperué, and Marcelo Naiouf. 2017年。比特币市场的一些典型事实。《物理学A：统计力学及其应用》484: 82–90。[24]: Bollerslev, Tim. 1986年。广义自回归条件异方差。《计量经济学杂志》31: 307–27。[25]:Assaf, Ata, Avishek Bhandari, Husni Charif, and Ender Demir. 2022年。加密货币市场的多变量长记忆结构：新冠肺炎的影响。《国际金融分析评论》82: 102132。[26]: Breidt, F. Jay, Nuno Crato, and Pedro De Lima. 1998年。随机波动率中的长记忆检测与估计。《计量经济学杂志》83: 325–48。[27]: Cabral, Rafael, David Bolin, and Håvard Rue. 2024年。使用变分贝叶斯和拉普拉斯近似拟合潜在非高斯模型。《美国统计学会杂志》，1–13。[28]: Charfeddine, Lanouar, and Youcef Maouchi. 2019年。加密货币收益率与波动率的冲击是否真的具有持续性？《金融研究快报》28: 423–30。[29]: Chib, Siddhartha, Federico Nardari, and Neil Shephard. 2002年。随机波动率模型的马尔可夫链蒙特卡罗方法。《计量经济学杂志》108: 281–316。[30]: Nakamoto, Satoshi，《比特币：点对点电子现金系统》，2008年8月21日。http://dx.doi.org/10.2139/ ssrn.3440802