arXiv:2601.14308v1 [math.CV] 18 Jan 2026

# Cn 中全微分多项式的值分布与 Picard 型定理 $\mathbb{C}^n$

Molla Basir Ahamed 和 Vasudevarao Allu

摘要。本文研究了多复变数 $\mathbb{C}^n$ 中亚纯函数的线性全微分多项式 $\mathcal{L}_k[D]f$ 的值分布与增长性质。通过将经典的米卢不等式推广到全导数框架中，我们推导出 Nevanlinna 特征函数 $T(r,\ \mathcal{L}_k[D]f)$ 的一系列基本增长估计。我们探讨了亚纯函数 $f$ 与 $g$ 和其微分多项式共享值时的值共享问题。在条件 $2\delta(0,\ f)+(k+4)\Theta(\infty,\ f)>k+5$ 下，我们证明对于非超越亚纯函数，$\frac{\mathcal{L}_k[D]f-1}{\mathcal{L}_k[D]g-1}$ 是一个非零常数。此外，我们对若干 Picard 型问题给出了肯定答案，证明若 $\mathbb{C}^n$ 中的整函数 $f$ 不取某个值 $a$，而其线性全微分多项式 $\mathcal{L}_k[D]f$ 不取某个非零值 $b$，则 $f$ 必为常数。我们的结果将经典单变量情形中的若干现有唯一性与 Picard 型定理推广并扩展至高维复空间 $\mathbb{C}^n$。

## 1. 引言

关于复变量$z$ 在本性奇点 $a$附近的解析函数 $f$ 的行为，皮卡定理是经典函数论中的一项结果，也是众多深入研究的起点。如果解析函数 $f$ 在所有 $z\in\mathbb{C}$上均满足 $f(z)\neq b$，则称其不取值 $b\in\mathbb{C}$。皮卡定理断言，若整函数 $\mathbb{C}$ 不取两个复数值，则必为常数。通过线性变换，该定理还蕴含：在 $\mathbb{C}$ 中不取三个不同值的亚纯函数必为常数。该定理显著加强了著名的 Liouville 定理；后者指出，有界整函数必为常数。皮卡定理有多种众所周知的证明（参见 [16, 19, 21, 22, 34] 等）。

Nevanlinna 理论是亚纯函数理论的一个分支，由 Rolf Nevanlinna 于 1925 年创立。该理论描述方程 $f(z)=a$ 的解随 $a$ 变化时的渐近分布。Nevanlinna 理论中的一项基本工具是 Nevanlinna 特征 $T(r,\ f)$，它用于衡量亚纯函数的增长速率。Nevanlinna 理论最初研究定义在圆盘 $\mathbb{D}_R:=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\leq R\}$ 或整个复平面 $\mathbb{C}$ ($R=\infty$) 上的单复变量亚纯函数。此后的推广将 Nevanlinna 理论扩展到代数体函数、全纯曲线、不同维数复流形之间的全纯映射

文件：Basir-Vasu-Picard-type-18-01-2026.tex，打印时间：2026年1月22日，1.012010 数学主题分类。主要分类号 32A22；次要分类号 30D35、32A20、32W99。关键词和短语。亚纯函数，多复变数，全微分多项式，米卢不等式，特征函数，超越性。

以及拟正则映射和极小曲面。例如，2014年，Halburd等人 [6] 证明了 M. Green 关于全纯曲线的 Picard 型定理的差分类比。2017年，Halburd 和 Korhonen [5] 得到了某些类型的有理时滞微分方程存在非有理亚纯解的条件。2020，Hua 和 Korhonen [11]给出了计数函数以及次调和函数的特征具有平移不变性的最佳条件。此外，文献 [11] 中建立了 $\delta$-次调和函数的对数导数的差分类比。

Nevanlinna 理论是解决单个及多个复变量函数诸多有趣问题的有用工具。1986年，Hellerstein 和 Rossi[8] 从亚纯函数零点的角度研究了二阶微分方程。1988年，Stoll [27]将 Steinmetz-Nevanlinna 定理推广到了全纯曲线。2004年，Frank 等 [3]针对 Hinkka-nen 问题，从两个亚纯函数共享相同零点和极点的角度得到了一个精确答案。在 [29], 中，研究者建立了从复平面 $\mathbb{C}$ 到 $n$维复射影空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$的全纯映射的一个结果，并证明了 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$中某些非线性超曲面族的 Nevanlinna 第二主定理。

本文主要阐述亚纯函数在 $\mathbb{C}^n$中的经典 Picard 型定理版本。在深入探讨我们的研究结果之前，有必要先介绍全文通用的基本记号和符号。

我们将复 $n$空间记为 $\mathbb{C}^n$，并通过相应的符号$z$、 $r$、 $\zeta$、 $k$ 等来表示其元素（点），即（$z_1$、 $z_2$、 $\cdots$、 $z_n$）、（$r_1$、 $r_2$、 $\cdots$、 $r_n$）、（$\zeta_1$、 $\zeta_2$、 $\cdots$、 $\zeta_n$）、（$k_1$、 $k_2$、 $\cdots$、 $k_n$）等。若函数 $f$（$z$） $z \in \mathbb{C}^n$ 在点 $\zeta \in \mathbb{C}^n$ 处解析，即它能在 $\zeta$ 的某个邻域内展开为绝对收敛的幂级数。若假设 $\zeta =$（0, 0, $\cdots$, 0），则它具有如下表示形式

$$f(z) = \sum_{k=(0,0,\cdots,0)}^{\infty} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_n^{k_n} = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k,$$

其中 $k =$（$k_1$， $k_2$, ....., $k_n$）属于 $\mathcal{N} = \{k:\ k \in \mathbb{C}^n$，每个 $k_j$都是有理整数}，并且 $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.

我们知道，一个亚纯（整）函数 $f$ 不是超越的，当且仅当它是有理函数（多项式）。换言之，定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的亚纯函数 $f$称为超越的，当

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T_f(r)}{\log r} = \infty,$$

其中 $T_f$(r) 是 $f$ 的 Nevanlinna 特征函数。

多复变数中的 Nevanlinna 特征函数，记作$T(r, f)$ 或 $T_f(r)$，是单变量概念的一种推广，用于研究 $\mathbb{C}^n$中亚纯函数的值分布。虽然基本思想

相似，但由于维数更高，定义要复杂得多。在单变量情形中，特征函数是针对圆盘定义的。在多复变数情形中，则将其推广到 $\mathbb{C}^n$中的球，具体为 $B(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| < r\}$，其中$||z|| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$。特征函数 $T(r, f)$ 由两部分组成：逼近函数 $m(r, f)$ 和计数函数 $N(r, f)$。不过，这些函数的定义方式有所不同。与单变量情形中的对应函数一样，该函数衡量函数 $f$ 的整体增长性。它在多复变数的第一主定理中发挥核心作用。该定理指出，对于非常数亚纯函数 $f$ 以及目标空间中的任意值 $a$，$f$ 与 $1/(f - a)$ 的特征函数渐近相等，误差项有界。该定理对于将皮卡定理等值分布结果推广到更高维度至关重要。

**逼近函数，** $m(r, f)$。$\mathbb{C}^n$ 中的逼近函数衡量函数值在球面$S(r) = \{z \in \mathbb{C}^n$ 上接近某个特定点（通常为无穷远点）的平均程度：$||z|| = r\}$。它是通过关于归一化表面积测度 $d\sigma_n$在球面上的广义平均值积分来定义的：

$$m(r, f) = \int_{S(r)} \log^+ ||f(z)|| d\sigma_n(z)$$

其中，$d\sigma_n$ 是单位球面 $S^1$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中的归一化面积元（对应于 $S^{2n-1}$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$中的情形），而 $\log^+ x = \max(0, \log x)$。

**计数函数，** $N(r, f)$。$f$ 上的亚纯函数在 $\mathbb{C}^n$ 上的计数函数更为复杂。与极点是孤立点的单变量情形不同，$\mathbb{C}^n$ 中亚纯函数的极点集（即函数无定义或取无穷大值的点集）是一个余维 1 的解析集。

计数函数 $N(r, f)$ 用于衡量该极点集体积的增长性。它通常被定义为一个积分，其中涉及在亚纯映射 $f$ 下对某个特定形式（Fubini-Study 形式）的拉回。简单来说，它可以理解为在球 $B(r)$内对极点集上的归一化体积元进行积分：

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}} \int_{B(t) \cap \{f=\infty\}} dV$$

其中，$dV$ 是极点集上的体积元。该积分本质上刻画了半径 $r$ 增大时极点集的“大小”。

**定义 1.1.** 设 $a \in \mathbb{C} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。对于 $a \in \mathbb{C}$，若 $f - a$ 和 $g - a$ 的零点集合相同且重数相同，则称 $f = a \Leftrightarrow g = a$，或称值 $a$ 被 $f$ 和 $g$. 共享 $CM$。若忽略上述重数，则记为 $f = a \leftrightarrow g = a$，或称值 $a$ 被 $f$ 和 $g$.共享 $IM$。对于 $a = \infty$，$f$ 和 $g$ 共享 $\infty$ $CM$（或 $IM$）当且仅当 $1/f$ 和 $1/g$ 共享值 $0$ $CM$（或 $IM$）。

**定义 1.2.** 关于 $f$ 的亏值和缩减亏值分别定义为

$$\delta(a,f)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_f(r,a)}{T_f(r)}\ and\ \Theta(a,f)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}_f(r,a)}{T_f(r)}.$$

容易看出，$0\leq\delta(a,f)\leq\Theta(a,f)\leq 1.$

亚纯函数的唯一性问题在现代复分析函数论中日益重要。1926年，R. Nevanlinna [26]建立了著名的五值定理，该定理指出，若复平面 $\mathbb{C}$ 上的两个非恒定亚纯函数 $f$ 和 $g$ 满足：对于 $\mathbb{C}$中的$\backsim j=1$，2，...，5，有 $f=a_j\leftrightarrow g=a_j$，则 $f\equiv g$。Nevanlinna四值定理指出，若两个非恒定亚纯函数满足：对于$\mathbb{P}$中的 $j=1$，2，...，4，有 $f=b_j\Leftrightarrow g=b_j$，则要么 $f\equiv g$，要么一个函数是另一个函数的莫比乌斯变换。例如，$f(z)=e^z$和 $g(z)=e^{-z}$共享值 0，$\pm1$和 $\infty(CM)$，由此可见$f=1/g$。此后，人们进行了大量研究，试图减少共享值的数量并探究共享的性质。

1976年，Yang [31] 提出了一个关于单变量函数的耐人寻味的问题。

**问题1.3**。 如果 $f$ 和 $g$ 是 $\mathbb{C}$ 中的非常数整函数，且满足 $f=0\Leftrightarrow g=0$ 和 $f'=1\Leftrightarrow g'=1$，那么 $f$与 $g$之间的关系如何?

2003年，Yi和Yang [33] 回答了问题1.3，得出了关于两个整函数 $f$ 和 $g$之间唯一性关系的以下结果。

**定理A**。 [33, 定理9。13] 设 $f$ 和 $g$ 是 $\mathbb{C}$中的两个非常数整函数，$k$ 是一个正整数。若 $f=0\Leftrightarrow g=0$、$f^{(k)}=1\Leftrightarrow g^{(k)}=1$ 和$\delta(0,f)>1/2$，则或者 $f^{(k)}g^{(k)}\equiv 1$，或者 $f\equiv g.$

在后续研究中，Yi 和 Yang 改进了关于亚纯函数的结果，并得到了以下结论。

**定理 B**。 [33, 定理 9。14] 设 $f$ 和 $g$ 是 $\mathbb{C}^1$中的两个非常数亚纯函数，$k$ 是一个正整数。若 $f=0\Leftrightarrow g=0$, $f^{(k)}=1\Leftrightarrow g^{(k)}=1$和 $2\delta(0,f)+(k+2)\Theta(\infty,f)>k+3$，则或者 $f_{(k)}$ $g^{(k)}\equiv 1$，或者 $f\equiv g.$

此后，众多研究者开始探讨这一课题（例如，见 [33]），并在这一领域作出了重要贡献（见 [4, 20, 23]）。研究 $\mathbb{C}^n$中亚纯函数的导数颇有意义。例如，1995年，Berenstein等人 [1]利用方向导数，建立了亚纯函数的唯一性结果。随后，1996年，Hu 和 Yang [10], 利用偏导数，将定理A推广到多复变数中的整函数。之后，Jin [21] 在 $\mathbb{C}^n$ 中引入了整函数的全导数，并建立了一个 Picard 型定理；后来，吕 [22] 将其推广到亚纯函数。

**定义1.4**。 [21, 22] 设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$中的亚纯函数， $f$的全导数$Df$定义为 $Df = \sum_{j=1}^{n} z_j f_{z_j}$，其中 $z = （z_1、 z_2、.....、 z_n） \in \mathbb{C}^n$，而$f_{z_j} = \partial f/\partial z_j$、（$j = 1、2、.....、 n$）是 $f$关于 $z_j$的偏导数。对于任意正整数 $k$， $f$ 的 $k$阶全导数 $D^k f$ 通过以下递推方式定义： $D^k f = D\left(D^{k-1} f\right)$.注意， $Df（0） = 0$。

**注1.1**。 $f$ 的全导数 $Df$ 也称为 $z$ 处的径向导数 $f$（见 [28]），而 $k$阶全导数称为 $f$ 的迭代全导数 $D^k f$ （见 [9]）。

从亚纯函数的相关文献（见 [13, 14, 18, 15] 及其中的参考文献）可知，由亚纯函数 $f$ 及其导数生成的线性微分多项式 $L_k[f]$ 在研究亚纯函数的特征方面发挥着重要作用。受此启发，我们自然地以如下方式引入亚纯函数 $f$ 的线性全微分多项式。

**定义1.5**。 对于 $\mathbb{C}^n$中的一个非常数亚纯函数，我们将线性全微分多项式 $L_k[D]f$ 定义为

$$L_k[D]f := a_1(z)Df + a_2(z)D^2 f + \ldots + a_k(z)D^k f,$$

*where*所有 $a_i(z)\,(i = 1,2, \ldots, k)$ （其中 $a_k(z) \not\equiv 0$）均为 $f$的小整函数 .

全导数的优势在于，若 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的超越整函数，那么其 $k$ 阶全导数 $D^k f$ 也会成为超越整函数。然而，值得一提的是，这一性质对偏导数并不成立。在 [12], ，Jin 考察了 $\mathbb{C}^n$ 中的两个整函数 $f$ 和 $g$，并证明当 $f = 0 \Leftrightarrow g = 0$ 和 $D^k f = 1 \Leftrightarrow D^k g = 1$ 满足 $\delta(0, f) > \frac{1}{2}$ 时，有 $f \equiv g$。一个值得探讨的问题是，Jin 关于整函数的结果能否推广到亚纯函数。

然而，Xu 和 Cao [30] 在 2020 年带来了一项重要进展：他们运用全导数的概念研究亚纯函数的唯一性问题，并由此确立了一项重要结果。

**定理 C.** [30]设 $f$ 和 $g$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中两个非常数亚纯函数，$k$ 是一个正整数，且 $f = 0 \Leftrightarrow g = 0$、$D^k f = \infty \Leftrightarrow D^k g = \infty$ 和 $D^k f = 1 \Leftrightarrow D^k g = 1$ 满足 $2\delta（0, f） + （k + 4）\Theta（\infty, f） > k + 5$，那么

$$\frac{D^k f - 1}{D^k g - 1} = c, \quad where \ c \ is \ a \ non\text{-}zero \ constant.$$

1940年，Milloux [25, 7] 推导出一个有趣的不等式，此后该不等式被广泛用于研究亚纯函数的导数值分布。

$$T_f(r) \leq N_f(r, 0) + N_f(r, \infty) + N_{f^{(k)}}(r, 1) - N_{f^{(k+1)}}(r, 0) + S(r, f), \tag{1.6}$$

其中 $S(r, f)$ 是任意满足条件的函数

$$S(r, f) = o\{T(r, f)\}, \text{ as } r \to +\infty$$

可能在有限测度集之外。

这个不等式的显著特点在于，其右侧包含了 $f^{(k)}$ 的计数函数。因此，可以得出关于导数的 Picard 型定理。例如，考虑定义在复平面 $\mathbb{C}$ 上的整函数 $f$，并令 $a$ 和 $b$（其中 $b \neq 0$）为两个不同的复数。如果 $f \neq a$ 且 $f^{(k)} \neq b$，那么 $f$ 必为常数（参见 [7]）。这引出了一个直接的问题:

**Qu问题 1.7**。对于 $\mathbb{C}^n$ 中的整函数，能否证明这样的结果成立？ *?*

关于此类结果是否适用于 $\mathbb{C}^n$ 中整函数的问题，吕于 [21], 年进行了研究并予以解决，得到了如下 Picard 型结果。

**定理 D**。 [21] 设 $f$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数，且 $a$、 $b$ $(\neq 0)$ 是两个不同的复数， $k$ 是一个正整数。若 $f \neq a$ 且 $D^k f \neq b$，则 $f$ 为常数。

此外，关于省略一个单值的情形，吕证明了以下结果，表明函数 $f$ 为常数。

**定理 E**。 [21] 设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个整函数， $b \neq 0$ 是一个复数， $k \geq 2$ 是一个整数。若 $f^k Df \neq b$，则 $f$ 为常数。

以往的研究（如 Xu 和 Cao [30], ）主要关注标准的 $k$ 阶全导数 $D^k f$；而转向线性全微分多项式 $\mathcal{L}_k[D]f = D^k f + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(z) D^i f$，则带来了显著的非平凡性。在经典的常系数情形中，导数的增长性通过标准的 Nevanlinna 估计直接与原函数的增长性相关联。然而，当系数 $a_i(z)$ 相对于 $f$ 是小函数时，它们会作为“扰动”，使对数导数引理在 $\mathbb{C}^n$ 中的应用变得复杂。具体而言，这些变化的系数会影响特征函数 $T(r, \mathcal{L}_k[D]f)$ 增长估计的精确性，因此需要更精细地处理逼近函数和零点计数，以确保误差项 $S(r, f)$ 不会压过主要增长项。

为便于阐述主要结果及其证明，我们首先回顾 $\mathbb{C}^n$ 中 Nevanlinna 理论所需的定义和基本符号。

**1.1. 基本定义和一些预备结果：** 现在我们讨论 $\mathbb{C}^n$ 中的一些基本定义和符号。对于一个元素 $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$，定义 $||z|| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2}$. 令

$$\mathcal{S}_n(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| = r\} \text{ and } \mathcal{B}_n(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| < r\}.$$

设 $d = \bar{\partial} + \partial$ 且 $d^c = (\partial - \bar{\partial})/4\pi i$. 定义

$$\omega_n(z) = dd^c \log ||z||^2, \ \sigma_n(z) = d^c \log ||z||^2 \wedge \omega_n^{n-1}(z), \ \nu(z) = dd^c ||z||^2.$$

则 $\sigma_n(z)$ 是 $\mathcal{S}_n(r)$ 上的一个正测度，且总测度为 1。设 $a \in \mathbb{P}$，并令 $f^{-1}(z) \neq \mathbb{C}^n$，我们用 $\mathcal{Z}_a^f$表示 $f$ 的 $a$-除子，记作 $\mathcal{Z}_a^f(r) = \bar{\mathcal{B}}_n(r) \cap \mathcal{Z}_a^f$并定义

$$n_f(r,a) = r^{2-2n} \int_{\mathcal{Z}_a^f(r)} \nu_n^{n-1}(z).$$

则计数函数 $N_f(r, a)$定义为

$$N_f(r,a) = \int_0^r \Big( n_f(t,a) - n_f(0,a) \Big) \frac{dt}{t} + n_f(0,a) \log r,$$

其中，$n_f(0, a)$是 $\mathcal{Z}_a^f$在原点处的勒隆数。由詹森公式可得

$$N_f(r,0) - N_f(r,\infty) = \int_{\mathcal{S}_n(r)} \log |f(z)| \sigma_n(z) + O(1).$$

我们用记号$N_f(r, a)$表示 $f$的 $a$-除子的计数函数，其中不计重。我们将逼近函数 $m_f(r, a)$定义如下

$$m_f(r,a) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathcal{S}_n(r)} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a|} \sigma_n(z), & \text{if } a \neq \infty, \\ \displaystyle\int_{\mathcal{S}_n(r)} \log^+ |f(z)| \sigma_n(z), & \text{if } a = \infty. \end{cases}$$

我们还将特征函数 $T_f(r)$定义为

$$T_f(r) = m_f(r,\infty) + N_f(r,\infty).$$

奈望林纳第一基本定理指出

$$T_f(r) = m_f(r,a) + N_f(r,a) + O(1).$$

为简洁起见，我们分别将记号 $m_f(r, a)$、$N_f(r, a)$ 和 $N_f(r, \overline{a})$ 替换为 $m(r, 1/(f - a))$、$N(r, 1/(f - a))$ 和 $N(r, 1/(f - a))$。若 $a = \infty$，则记作 $m_f(r)$、$N_f(r)$ 和 $N_f(r)$。设 $I = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 为一个多重指标，其中 $\alpha_j$ 对于 $(j = 1, 2, \ldots, n)$ 均为非负整数。我们用 $|I|$ 表示 $I$ 的长度，即 $|I| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$。定义

$$\partial^I f = \frac{\partial^{|I|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_1^{\alpha_n}} = \left( \frac{\partial^{|I|} f_1}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_1^{\alpha_n}}, \ldots, \frac{\partial^{|I|} f_m}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_1^{\alpha_n}} \right)$$

以及 $f_{z_j^k} = \partial^k f / \partial z_j^k = \left( \partial^k f_1 / \partial z_j^k, \ldots, \partial^k f_m / \partial z_j^k \right)$，对于任意全纯映射

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m.$$

设 $h$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的非常数全纯函数。对于 $a \in \mathbb{C}^n$，我们可以将 $h$ 写作 $h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m(z - a)$，其中 $\mathcal{P}_m(z)$ 或恒等于零，或为次数为 $m$. 的齐次多项式。数值 $\gamma_h(a) := \min\{m: \mathcal{P}_m(z) \neq 0\}$ 称为 $h$ 在 $a$. 处的零点重数

在全文中，$E$ 始终被视为$[0, \infty)$中具有有限勒贝格测度的集合，该集合在每次出现时可能不同。按照惯例，记号“$\| P$”表示

断言 $P$ 对所有充分大的 $r \in [0, \infty)$ 都成立，但有限勒贝格测度的集合除外。

**引理1.8**。 **(**第二主定理**)** 设 $f$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的非常数亚纯函数，且 $a_1$、$a_2$、**.....**、$a_q$ 是整个复平面 $\mathbb{P}$ 中 $q(\geq 3)$ 个互不相同的复数。那么

$$(q-2)T_f(r) < \sum_{j=1}^{q} \overline{N}_f(r, a_j) + O(\log(rT_f(r))),$$

对所有 $z \notin E$. 均成立

**引理1.9**。 [32]设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的非常数亚纯函数，且 $I$ 是一个多重指标($\alpha_1$、$\alpha_2$、**...**...、$\alpha_n$)。那么

$$m_{\frac{\partial^I f}{f}}(r, f) = \int_{\mathcal{S}_n} \log^+ \left| \frac{\partial^I f}{f}(z) \right| \sigma_n(z) + O(\log(rT_f(r))$$

对所有充分大的 $r$ 均成立，但有限勒贝格测度的集合除外。

**引理 1.10**。 [21] 设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的亚纯函数。那么对于任意正整数 $k$,

$$m_{\frac{D^k f}{f}}(r, \infty) = O(\log(rT_f(r))),$$

对所有 $r \notin E$. 均成立

下一个引理是定理1.1.2（见 [33]）的一个特例（即，当 $n = 3$ 时）。

**引理 1.11.** 设 $f_1$、$f_2$ 和 $f_3$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中线性无关的亚纯函数，且满足 $f_1 + f_2 + f_3 \equiv 1$。则

$$T(r) \leq \sum_{j=1}^{3} N_{f_j}(r, 0) + 2\sum_{j=1}^{3} \overline{N}_{f_j}(r, \infty) + O(\log(rT(r)))$$

对所有 $r \notin E$ 均成立，其中 $T(r) =$最大值$_{1 \leq j \leq 3}\{T_{f_j}(r)\}$.

**引理 1.12.** [21] 设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的超越整函数。则

$$T_f(r) \leq 2\overline{N}_f(r, 0) + N_{Df}(r, 1) + O(\log(rT_f(r)))$$

对所有 $r \notin E$ 均成立。

## 2. 主要结果

容易看出，亚纯函数 $f$ 的线性全微分多项式 $L_k[D]f$ 是全导数 $D^k f$ 的一种一般形式。此外，显然，定理 C 中的要求可表示为

$$2\delta(0, f) + (k+4)\Theta(\infty, f) > k + 5 \tag{2.1}$$

不受 $D^k f$ 的影响。因此，在保持条件 (2.1) 的同时，于 $\mathcal{L}_k[D]f$ 的背景下研究定理 C，能够带来有价值的见解。我们建立了以下结果，拓展了定理 C 的适用范围。

**定理 2.1**。 设 $f$ 和 $g$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的非常数亚纯函数，且设 $k$ 是一个正整数，使得 $f = 0 \Leftrightarrow g = 0$、 $L_k[D]f = \infty \Leftrightarrow L_k[D]g = \infty$ 和 $L_k[D]f = 1 \Leftrightarrow L_k[D]g = 1$，并且 $f$ 不是超越的。若 $2\delta(0, f) + (k+4)\Theta(\infty, f) > k + 5$，则

$$\frac{L_k[D]f - 1}{L_k[D]g - 1} = c,$$

其中， $c$ 是一个非零常数。

**注记 2.1**。 定理 2.1 的一个值得注意之处在于包含了 $f$ 不是超越亚纯函数这一条件。这一限制使我们的结果区别于若干经典的 Picard 型定理，后者仅关注超越情形。在 $\mathbb{C}^n$的背景下，非超越亚纯函数（多复变数的有理函数）表现出严格的代数结构，这些结构与超越函数的增长模式有着根本区别。通过纳入这一条件，我们旨在划清纯粹代数行为与值的渐近分布之间的界限。目前尚不清楚，若不作此限制，本文所述结果能否完全统一，或者算子 $\mathcal{L}_k[D]f$ 与 $\mathbb{C}^n$ 中的有理函数之间独特的相互作用是否代表着对超越理论的根本偏离。

多复变数值分布理论中的一个基本结果是定理 D。该定理表明，若 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数 $f$ 遗漏一个值$a$ ，且其 $k$阶全导数 $D^k f$ 遗漏一个非零值 $b$，那么 $f$ 必为常数。虽然这一结果为标准全导数提供了一个稳健的框架，但它在很大程度上局限于微分算子的最简单形式。在更一般的情形下，线性全微分多项式 $\mathcal{L}_k[D]f$ 通过将小整函数 $a_i$（$z$）作为系数纳入其中，提供了更为广阔的视角。这一转变并非微不足道，因为这些变化的系数充当动态的“扰动”，会干扰标准奈望林纳增长估计的精确性。具体而言，系数与导数之间的相互作用使得对数导数引理在 $\mathbb{C}^n$中的应用变得复杂。

鉴于结构复杂性有所增加，自然会想探究标准全导数的 Picard 型刚性是否也适用于这些更一般的微分算子。这引出了以下核心问题：

**问题 2.2.** 将全导数 $D^k f$ 替换为线性全微分多项式 $L_k[D]f$后，定理 *D* 是否仍然成立？

针对问题 2.2 中提出的问题，我们证明，全导数的 Picard 型性质在更一般的微分算子下确实得以保留。通过仔细考量系数函数 $a_i(z)$ 对特征函数增长性的影响，我们确立了以下定理，该定理给出了肯定的回答，并拓展了定理 D 的适用范围。

**定理 2.2**。 设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个整函数， $a$、 $b$（$\neq 0$） 是两个不同的复数，且 $k$ 是一个正整数。若 $f \neq a$ 且 $L_k[D]f \neq b$，则 $f$ 是常数。

为拓展定理 E 的适用范围并探究代数结构对值分布的影响，我们考虑由下式定义的一个次数为 $m \geq 1$ 的一般多项式 $Q_m(z)$：

$$Q_m(z) = \beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \beta_0, \tag{2.3}$$

其中 $\beta_m$，……，$\beta_0 \in \mathbb{C}$ 以及 $\beta_m \neq 0$。这一推广的动机在于，$f$ 的定点性质或值遗漏性质通常与相关多项式 $Q_m(f)$ 的次数和零点有着内在联系。因此，有必要确定：当函数与此类代数算子复合时，关于标准导数的结果是否仍然成立。这引出了以下研究问题：

**问题 2.4**。在定理 $E$ 中保持其他所有条件不变，当 $f^k Q_m(f) Df \neq b$ 时，关于 $f$ 我们能得出什么结论？

我们通过证明以下定理，对问题 2.4 给出了肯定的回答。该结果表明，当标准全导数推广为多项式算子 $Q_m(f)$ 及其相关微分多项式时，其值共享性质仍然稳健。

**定理 2.3**。设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个整函数，$b \neq 0$ 是一个复数，$k \geq 2$ 是一个整数。若存在一个多项式 $Q_m$，使得 $f^k Q_m(f) Df \neq b$，则 $f$ 是一个常数。

以下引理构成了证明我们的主要结果所需的技术基础。

**引理 2.5.** 设 $f$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的超越亚纯函数。那么，对于任意正整数 $k$ 和任意 $L_k[D]f$，

$$m_{\frac{L_k[D]f}{f}}(r, f) = O(\log(rT_f(r))$$

对除去一个勒贝格测度有限的集合外的所有 $r$，均成立。

以下引理给出了与线性全微分多项式 $\mathcal{L}_k[D]f$ 相关的特征函数的若干基本不等式。

**引理 2.6.** 设 $f$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的超越亚纯函数，且 $a$ 是一个复数。那么

(i) $T_{L_k[D]f}(r) \leq T_f(r) + N_{L_k[D]f}(r, \infty) - N_f(r, \infty) + O(\log(rT_f(r)))$.

(ii) $T_{L_k[D]f}(r) \leq (k + 1 + o(1))T_f(r)$.

(iii) $m_{\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f}}(r, \infty) \leq O(\log(rT_f(r)))$, *where* $L_{k+1}[D]f = D(L_k[D]f)$.

我们通过以下引理将米卢不等式推广到 $\mathbb{C}^n$ 中的线性全微分多项式。

**引理 2.7**。设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$中的超越亚纯函数，则对任意正整数 $k$,

$$T_f(r) \leq N_f(r, 0) + N_{L_k[D]f}(r, 1) - N_{L_{k+1}[D]f}(r, 0) + O(\log(rT_f(r))),$$

对所有 $r \notin E$. 均成立

在定理 2.1 的假设下，下面的引理确立了特征函数 $T(r,f)$ 和 $T(r,g)$ 之间的基本增长关系。

**引理 2.8.** 设 $f$ 和 $g$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的两个非常数亚纯函数，且 $k$ 是一个正整数。若 $f=0 \Leftrightarrow g=0$、$L_k[D]f=\infty \Leftrightarrow L_k[D]g=\infty$和 $L_k[D]f=1 \Leftrightarrow L_k[D]g=1$，则 $f$ 是超越的，当且仅当 $g$ 是超越的。此外，若 $f$ 是超越的，则

$$(1-o(1))T_f(r) \le (2k+3+o(1))T_g(r)$$
$$(1-o(1))T_g(r) \le (2k+3+o(1))T_f(r),$$

对所有 $r \notin E$.均成立

结合引理 1.10 中的估计应用第一基本定理，我们得到了 $\mathbb{C}^n$中亚纯函数的如下增长性质。

**引理 2.9.** 设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$中的一个超越亚纯函数，则对于任意正整数 $k$，不等式

$$N_{L_k[D]f}(r,0) \le N_f(r,0)+T_{L_k[D]f}(r)-T_f(r)+O(\log(rT_f(r))),$$

对所有 $r \notin E$.均成立

下面的引理建立了特征函数 $T(r,\ f)$ 与 $T(r,\ \mathcal{L}_k[D]f)$ 之间的关系。

**引理 2.10.** 设 $f$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的超越亚纯函数，且 $k$ 是正整数。若 $\delta(0,\ f)>1/2$，则

$$(1-o(1))T_f(r) \le 2T_{L_k[D]f}(r),$$

对所有 $r \notin E.$均成立

下面的命题刻画了在定理 2.1 的假设下，线性全微分多项式 $\mathcal{L}_k[D]f$ 与 $\mathcal{L}_k[D]g$ 之间的关系。

**命题 1.** 设 $f$ 和 $g$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的非常数亚纯函数，且 $k$ 是正整数。若 $f=0 \Leftrightarrow g=0$、$L_k[D]f=\infty \Leftrightarrow L_k[D]g=\infty$ 和$L_k[D]f=1 \Leftrightarrow L_k[D]g=1$，且 $f$ 不是超越的，则

$$\frac{L_k[D]f-1}{L_k[D]g-1}=c,$$

其中 $c$ 是非零常数。

## 3. 主要结果的证明

为便于后续分析，我们首先证明上一节中引入的预备引理。

**引理 2.5 的证明**。对于两个亚纯函数 $f_1$ 和 $f_2$以及常数 $a_1$、$a_2$，我们有

$$\begin{aligned} m_{a_1f_1+a_2f_2}(r,\infty) &\le m_{f_1}(r,\infty)+m_{f_2}(r,\infty)+m_{a_1}(r,\infty)+m_{a_2}(r,\infty)+\log 2 \\ &\le m_{f_1}(r,\infty)+m_{f_2}(r,\infty)+\log 2. \end{aligned}$$

因此，应用引理 1.10，可得

$$\begin{aligned} m_{\frac{L_k[D]f}{f}}(r,\infty) &\leq \sum_{j=1}^{k} m_{\frac{D^j f}{f}}(r,\infty) + \log k \leq \sum_{j=1}^{k} O(\log(rT_f(r)) + \log k \\ &= O(\log(rT_f(r)), \end{aligned}$$

对所有 $r \notin E$. 均成立。证明至此完成。 □

**引理 2.6 的证明**。(i) 根据引理 2.5，简单计算可得

$$\begin{aligned} T_{L_k[D]f} &= m_{L_k[D]f}(r,\infty) + N_{L_k[D]f}(r,\infty) \\ &\leq m_f(r,\infty) + m_{\frac{L_k[D]f}{f}}(r,\infty) + N_{L_k[D]f}(r,\infty) \\ &\leq T_f(r) + N_{L_k[D]f}(r,\infty) - N_f(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \end{aligned}$$

对所有 $r \notin E$.

(ii) 易见，$N_{L_k[D]f}(r,\infty) = N_{D^k f}(r,\infty)$。因此，根据 [22,引理 2.3], ，容易得到以下估计

$$\begin{aligned} N_{L_k[D]f}(r,\infty) - N_f(r,\infty) &= N_{D^k f}(r,\infty) - N_f(r,\infty) \\ &\leq k\overline{N}_f(r,\infty) \leq kT_f(f,r). \end{aligned} \tag{3.1}$$

将 (i) 与 (3.1) 结合可得

$$T_{L_k[D]f}(r) \leq (k+1)T_f(r) + O(\log(rT_f(r))),$$

对所有 $r \notin E$.

（iii）根据全导数的定义可得

$$D(D^j f - a) = D^{j+1} f, \text{ for all } j = 1, 2, ...$$

由引理 2.5 和（ii）的结论可知

$$\begin{aligned} m_{\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f-a}}(r,\infty) &= m_{\frac{D(L_k[D]f-a)}{L_k[D]f-a}}(r,\infty) \\ &= O(\log(rT_{L_k[D]f-a})) \\ &= O(\log(rT_{L_k[D]f})) \\ &= O(\log(rT_f(r))), \end{aligned}$$

对所有 $r \notin E$. □

**引理 2.7 的证明**。应用第一主定理可得

$$\begin{aligned} m_{\frac{L_k[D]f-1}{L_{k+1}[D]f}}(r,\infty) &= m_{\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f-1}}(r,\infty) + N_{\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f-1}}(r,\infty) \\ &\quad - N_{\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f-1}}(r,0) + O(1). \end{aligned} \tag{3.2}$$

容易看出

$$\frac{1}{f} = \frac{L_k[D]f}{f} - \frac{(L_k[D]f-1)}{L_{k+1}[D]f}\frac{L_{k+1}[D]f}{f}.$$

由 (3.2)、引理 2.5 和引理 2.6 (iii) 可得

$$\begin{aligned} m_f(r,0) &= m_{\frac{L_k[D]f}{f}}(r,\infty) + m_{\frac{L_k[D]f-1}{\mathcal{L}_{k+1}[D]f}}(r,\infty) + m_{\frac{L_{k+1}[D]f}{f}}(r,\infty) + O(1) \\ &\leq N_{\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f-1}}(r,\infty) - N_{\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f-1}}(r,0) - \overline{N}(r,f) + O(\log(rT_f(r))), \end{aligned}$$

这对所有 $r \notin E.$ 均成立

由詹森公式可得

$$\begin{aligned} &N_{\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f-1}}(r,0) - N_{\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f-1}}(r,\infty) \\ &= \int_{\mathcal{S}_n(r)} \log\left|\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f-1}\right|\sigma_n(z) + O(1) \\ &= \int_{\mathcal{S}_n(r)} \log\left|L_{k+1}[D]f\right|\sigma_n(z) + \int_{\mathcal{S}_n(r)} \log\left|\frac{1}{L_k[D]f-1}\right|\sigma_n(z) + O(1) \\ &= N_{L_{k+1}[D]f}(r,0) - N_{L_{k+1}[D]f}(r,\infty) - N_{L_k[D]f}(r,1) + N_{L_k[D]f}(r,\infty) + \overline{N}(r,f) + O(1) \\ &= N_{L_{k+1}[D]f}(r,0) - N_{L_k[D]f}(r,1) + O\left(\log r\, T(r,f)\right). \end{aligned}$$

由引理 2.5 和引理 2.6 (iii)，经简单计算可得

$$\begin{aligned} T_f(r) &= T_{1/f}(r) + O(1) \\ &= m_f(r,0) + N_f(r,0) + O(1) \\ &\leq N_f(r,0) + N_{L_k[D]f}(r,1) - N_{L_{k+1}[D]f}(r,0) \\ &\quad + m_{\frac{L_k[D]f}{f}}(r,\infty) + m_{\frac{L_{k+1}[D]f}{f}}(r,\infty) + m_{\frac{L_{k+1}[D]f}{L_k[D]f}-1}(r,\infty) + O(1) \\ &\leq N_f(r,0) + N_{L_k[D]f}(r,1) - N_{L_{k+1}[D]f}(r,0) + O\left(\log r\, T(r,f)\right) \end{aligned}$$

对所有 $r \notin E$ 均成立。证毕。 □

**引理 2.8 的证明**。假设 $f$ 是一个超越亚纯函数。如果 $g$ 不是超越的，那么 $g$ 必然是一个有理函数。根据全导数的定义可知，对于每个 $j \in \{1,2,\ldots,k\}$， $D^j g$ 都是有理函数，这意味着 $\mathcal{L}_k[D]g$ 也是一个有理函数。因此，我们有

$$T_g(r) = O(\log r) \text{ and } T_f(r) = O(\log r).$$

由引理 2.7，得

$$T_f(r) \leq N_f(r,0) + N_{L_k[D]f}(r,1) + \overline{N}_{L_k[D]f}(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))), \tag{3.3}$$

对所有 $r \notin E.$，该引理的假设意味着

$$\begin{cases} N_f(r,0) = N_g(r,0), \\ \overline{N}_{L_k[D]f}(r,\infty) = N_{L_k[D]g}(r,\infty), \\ N_{L_k[D]f}(r,1) = N_{L_k[D]g}(r,1). \end{cases}$$

结合上述关系，我们推得

$$\begin{aligned} T_f(r) &\leq N_g(r,0) + N_{L_k[D]g}(r,1) + \overline{N}_{L_k[D]f}(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \\ &= O(\log(rT_f(r))), \end{aligned}$$

这与假设 $f$ 是超越的相矛盾。因此， $g$ 必然也是超越的。由对称性，若假设 $g$ 是超越的，则可推出 $f$ 也必然是超越的。

若 $f$ 是超越的，则 $g$ 也是超越的，因此，根据引理 2.6 (ii)，我们得到不等式

$$\begin{aligned} T_f(r) &\leq T_g(r) + T_{L_k[D]f}(r) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq (3 + 2k + o(1))T_g(r) + O(\log(rT_f(r))), \end{aligned}$$

对所有 $r \notin E.$ 均成立。因此，经过简单计算可得

$$(1 - o(1))T_f(r) \leq (3 + 2k + o(1))T_g(r) + O(\log(rT_f(r))).$$

类似地，我们可以证明

$$(1 - o(1))T_g(r) \leq (3 + 2k + o(1))T_f(r) + O(\log(rT_f(r))).$$

证明完毕。 □

**引理 2.9 的证明**。容易看出

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_k[D]f}\frac{L_k[D]f}{f}. \tag{3.4}$$

利用引理 1.10 和第一基本定理，并考虑方程(3.4)，我们得到:

$$\begin{aligned} T_f(r) &= m_f(r,0) + N_f(r,0) + O(1) \\ &\leq m_{L_k[D]f}(r,0) + m_{\frac{L_k[D]f}{f}}(r,\infty) + N_f(r,0) + O(1) \\ &= m_{L_k[D]f}(r,0) + N_f(r,0) + O(\log(rT_f(r))) \\ &= T_{L_k[D]f}(r) + N_f(r,0) - N_{L_k[D]f}(r,0) + O(\log(rT_f(r))). \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$N_{L_k[D]f}(r,0) \leq N_f(r,0) + T_{L_k[D]f}(r) - T_f(r) + O(\log(rT_f(r))).$$

证明至此完成。 □

**引理 2.10 的证明**。由于 $f$ 是一个超越亚纯函数，因此由引理 1.10 和第一基本定理可知

$$\begin{aligned} m_f(r,0) &\leq m_{L_k[D]f}(r,0) + m_{\frac{L_k[D]f}{f}}(r,0) + O(1) \\ &\leq T_{L_k[D]f}(r) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq T_{L_k[D]f}(r) + O(T_f(r)), \end{aligned}$$

对所有 $r \notin E.$ 均成立。从 $\delta(0,\ f)$ 的定义可知，

$$\delta(0,f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m_f(r,0)}{T_f(r)} > \frac{1}{2}.$$

也就是说，我们有 $m_f(r,\ 0)/T_f(r) > 1/2$，当 $r.$ 的值充分大时。因此，

$$\frac{1}{2}T_f(r) \leq T_{L_k[D]f}(r) + O(T_f(r)).$$

至此，证明完毕。 □

**命题 1 的证明**。我们假设 $f$ 是一个有理函数，那么根据假设和引理 2.8，显然 $g$ 也是一个有理函数。令

$$\Psi := \frac{L_k[D]f - 1}{L_k[D]g - 1}. \tag{3.5}$$

假设 $L_k[D]f = \infty \Leftrightarrow L_k[D]g = \infty$和 $L_k[D]f = 1 \Leftrightarrow L_k[D]g = 1$保证亚纯函数 $\Psi$ 没有零点和极点。因此，我们可以假设 $\Psi = e^{h(z)}$，其中 $h$（$z$）是一个整函数。由于 $f$ 和 $g$ 都是有理函数，因此 $L_k[D]f$ 和 $L_k[D]g$ 都是有理函数。因此，容易看出 $\Psi = e^{h(z)}$ 是一个没有零点和极点的有理函数。于是，函数$h$ 必为常数，记作 $\eta$。因此， $\Psi = c$，其中 $c = e^{\eta}$ 是一个非零常数。至此，证明完毕。□

借助上述引理，我们现在证明本文的主要结果。

**定理 2.1 的证明**。 如果 $f$ 是非超越亚纯函数，则由命题 1 可立即得到结论。因此，我们假设 $f$ 是超越亚纯函数。于是，条件 $2\delta(0,\ f) + (k+4)\Theta(\infty,\ f) > k+5$蕴含 $\delta(0,\ f) > 1/2$，因此由引理 2.10 可得

$$T_f(r) \leq O(T_{L_k[D]f}(r)), \tag{3.6}$$

对所有 $r \notin E$ 均成立，并且 $L_k[D]f$ 也是超越的。根据假设 $f = 0 \Leftrightarrow g = 0$, $L_k[D]f = \infty \Leftrightarrow L_k[D]g = \infty$, $L_k[D]f = 1 \Leftrightarrow L_k[D]g = 1$，由引理 2.8 易知 $g$ 也是超越亚纯函数。因此

$$T_g(r) \leq o(T_f(r)) \text{ and } T_f(r) \leq o(T_g(r)) \tag{3.7}$$

对所有 $r \notin E$ 均成立。由引理 2.6(ii)，根据 (3.6) 和 (3.7) 可得

$$T_{L_k[D]g}(r) \leq o(T_g(r)) \leq o(T_f(r)) \leq o(T_{L_k[D]f}(r)) \leq o(T_f(r)). \tag{3.8}$$

我们断言 $L_k[D]g$ 是超越的。若 $L_k[D]g$ 不是超越的，则 $T_{L_k[D]g}(r) = O(\log r)$，并由定理的假设可得

$$\overline{N}_{L_k[D]f}(r,\infty) \leq N_{L_k[D]f}(r,\infty) = N_{L_k[D]g}(r,\infty) \leq T_{L_k[D]g}(r) = O(\log r) \tag{3.9}$$

and

$$N_{L_k[D]f}(r,1) = N_{L_k[D]g}(r,1) \leq T_{L_k[D]g}(r) = O(\log r). \tag{3.10}$$

因此，由 (3.7)、(3.9) 和 (3.10) 可得

$$T_f(r) \leq N_f(r,0) + O(\log(rT_f(r))),$$

由此可得 $\delta(0,\ f) = 0$，这与 $\delta(0,\ f) > 1/2.$ 矛盾。因此， $L_k[D]g$ 必为超越的。令

$$\Psi := \frac{L_k[D]g - 1}{L_k[D]g - 1}. \tag{3.11}$$

显然， $\Psi$ 是一个没有零点和极点的亚纯函数，因为 $L_k[D]f = 1 \Leftrightarrow L_k[D]g = 1$ 且 $L_k[D] = \infty \Leftrightarrow L_k[D]g = \infty$。假设 $f_1 = L_k[D]f$， $f_2 = \Psi$ 且 $f_3 = -\Psi L_k[D]$。现在，(3.11) 可表示为

$$f_1 + f_2 + f_3 \equiv 1. \tag{3.12}$$

我们还看到

$$\sum_{j=1}^{3} N_{f_j}(r,0) = N_{L_k[D]f}(r,0) + N_{L_k[D]g}(r,0). \tag{3.13}$$

由引理 2.9，可得

$$N_{L_k[D]f}(r,0) \leq N_f(r,0) + T_{L_k[D]f}(r) - T_f(r) + O(\log(rT_f(r))), \tag{3.14}$$

对所有 $r \notin E.$ 均成立。由引理 2.9、引理 2.6 (i)，由 (3.1) 和 (3.7) 可得

$$\begin{aligned} N_{L_k[D]g}(r,0) &\leq N_g(r,0) + T_{N_{L_k[D]g}}(r) - T_g(r) + O(\log(tT_g(r))) \\ &\leq N_f(r,0) + N_{L_k[D]g}(r,\infty) - N_g(r,0) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq N_f(r,0) + k\overline{N}_{L_k[D]g}(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq N_f(r,0) + k\overline{N}_{L_k[D]f}(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))). \end{aligned} \tag{3.15}$$

将 (3.13) 和 (3.14) 代入 (3.15)，得到

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3} N_{f_j}(r,0) \leq{}& 2N_f(r,0) + T_{L_k[D]f}(r) - T_f(r) + k\overline{N}_{L_k[D]f}(r,\infty) \\ &+ O(\log(rT_f(r))). \end{aligned} \tag{3.16}$$

接下来，我们的目标是证明函数 $f_1$、 $f_2$ 和 $f_3$ 线性相关。若不然，则由引理 1.11、引理 2.6(ii) 及方程 (3.8)，可推得如下结果：

$$\begin{aligned} T_{L_k[D]f}(r) \leq T_f(r) &\leq \sum_{j=1}^{3} N_{f_j}(r,0) + 2\sum_{j=1}^{3} \overline{N}_{f_j}(r,\infty) + O(\log(rT_{f_j}(r))) \\ &\leq 2N_f(r,0) + T_{L_k[D]f}(r) - T_f(r) + k\overline{N}_{L_k[D]f}(r,\infty) + 2\overline{N}_{L_k[D]f}(r,\infty) \\ &\quad + 2\overline{N}_{L_k[D]g}(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq 2N_f(r,0) + T_{L_k[D]f}(r) - T_f(r) + (4k+1)\overline{N}_f(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))). \end{aligned}$$

经过简单计算可得

$$T_f(r) \leq 2N_f(r,0) + (4+k)\overline{N}_f(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))),$$

对所有 $r \notin E.$ 均成立。因此，我们有

$$(2\delta(0,f) + (4+k)\Theta(\infty,f) - (k+5))T_f(r) \leq O(\log(rT_f(r))) = o(T_f(r)),$$

这与 $2\delta(0,f) + (4+k)\Theta(\infty,f) > k+5.$ 矛盾

因此，存在常数 $c_1$、 $c_2$ 和 $c_3$，且它们不全为零，使得

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0. \tag{3.17}$$

下面我们分别讨论以下三种不同的情形。

情形1. 设函数 $f_2$ 和 $f_3$ 均为非常数函数。我们的目的是在这种情况下得到矛盾。若 $c_1 = 0$，则由（3.17）可得 $c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$。若 $c_2 = 0$，则 $c_3 \neq 0$，从而 $f_3 = -\Psi L_k[D]g \equiv 0$，这与 $f_3$ 为非常数函数的假设相矛盾。若 $c_3 = 0$，则 $c_2 \neq 0$，从而 $f_2 \equiv 0$，这与 $f_2 = \Psi$ 为非常数函数相矛盾。因此，必有 $c_2 \neq 0$ 和 $c_3 \neq 0$。因此，我们看到 $f_3 = -c_2/c_3$，即 $L_k[D]g = c_2/c_3 \neq 0$，这与 $L_k[D]g$ 是超越的事实相矛盾。因此，我们有 $c_1 \neq 0$。若 $c_3 = 0$，则（3.17）化为 $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0.$。在这种情况下，不难证明 $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 \neq 0$。因此，我们有 $f_1 = (c_1/c_2) f_2$，即我们有$L_k[D]f = -(c_2/c_1)\Psi \neq 0.$。又由于 $\Psi$ 是一个没有零点和极点的亚纯函数，所以 $L_k[D]f$ 必须是一个没有零点的整函数，这与 $L_k[D]f(0) = \sum_{j=1}^{k} a_j D^j f(0) = 0.$ 的事实相矛盾。因此，我们看到 $c_3 \neq 0.$。若 $c_2 = 0$，则由（3.17）可得 $c_1 f_1 + c_3 f_3 = 0$。由于已证明 $c_1 \neq 0$ 和 $c_3 \neq 0$，可以看出

$$\left(1 - \frac{c_1}{c_3}\right) f_1 + f_3 = 1. \tag{3.18}$$

容易看出，在（3.18）中有 $c_1 \neq c_3$，否则 $f_3 \equiv 1$，这将导致矛盾。根据关于 $\mathbb{C}^n$ 的 Nevanlinna 第二基本定理，并利用 2.6 (ii)，我们得到

$$\begin{aligned} T_{L_k[D]f}(r) = T_{f_1}(r) &< \overline{N}_{f_1}(r,0) + \overline{N}_{f_1}\left(r, \frac{1}{1-\frac{c_1}{c_3}}\right) + \overline{N}_{f_1}(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq \overline{N}_{L_k[D]f}(r,0) + \overline{N}_{f_2}(r,0) + \overline{N}_{f_1}(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq \overline{N}_f(r,0) + T_{L_k[D]f}(r) - T_f(r) + \overline{N}_f(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \end{aligned}$$

这意味着

$$T_f(r) \leq N_f(r,0) + \overline{N}(r,\infty) + O(\log(rT_f(r)))$$

当 $r$ 足够大时。

因此，我们得到

$$(\delta(0,f) + \Theta(\infty,f) - 1)T_f(r) \leq O(\log(rT_f(r))),$$

由此可得 $\delta(0, f) + \Theta(\infty, f) \leq 1$。由于条件 $2\delta(0, f) + (k+4)\Theta(\infty, f) > k+5$意味着 $\delta(0, f) + \Theta(\infty, f) > 3/2 > 1$，我们得到矛盾。因此，由于 $c_2 \neq 0$，由方程（3.12）和（3.17）可得

$$(c_1 - c_2)f_1 + (c_3 - c_2)f_3 = -c_2.$$

若 $c_1 = c_2$ 或 $c_2 = c_3$ 成立，则会导致矛盾，因为它们分别意味着 $f_3$ 或 $f_1$ 是常数。因此，我们有 $c_1 \neq c_2$ 和 $c_3 \neq c_2.$。由 $\mathbb{C}^n$ 上亚纯函数的第二基本定理以及引理 2.6 (ii)，我们

得到

$$\begin{aligned} T_{L_k[D]f}(r) = T_{f_1}(r) &< \overline{N}_{f_1}(r,0) + \overline{N}_{f_1}\left(r, \frac{-c_2}{c_1-c_2}\right) + \overline{N}_{f_1}(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq \overline{N}_{L_k[D]f}(r,0) + \overline{N}_{f_3}(r,0) + \overline{N}_f(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq \overline{N}_{L_k[D]f}(r,0) + \overline{N}_{L_k[D]g}(r,0) + \overline{N}_f(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq \overline{N}_f(r,0) + T_{L_k[D]f}(r) - T_f(r) + \overline{N}_f(r,0) + k\overline{N}_f(r,\infty) \\ &\quad + \overline{N}_f(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))) \end{aligned}$$

这意味着

$$T_f(r) \leq 2N_f(r,0) + (k+1)\overline{N}_f(r,\infty) + O(\log(rT_f(r))).$$

这进一步表明，不等式

$$(2\delta(0,f) + (k+1)\Theta(\infty,f) - (k+2))T_f(r) \leq O(\log(rT_f(r)))$$

意味着 $2\delta(0, f) + (k+1)\Theta(\infty, f) \leq k+2$。

我们还注意到，条件

$$2\delta(0,f) + (k+4)\Theta(\infty,f) > k+5$$

表明

$$2\delta(0,f) + (k+1)\Theta(\infty,f) > k+3 > k+2,$$

这就导致矛盾。

**情形 2.** 令 $f_3 = -\Psi L_k[D]g$ 为常数。由于 $\Psi$ 是一个没有零点和极点的亚纯函数，因此 $L_k[D]g = -f_3/\Psi$ 是一个整函数。因此，我们有 $L_k[D]g(0) = \sum_{j=1}^{k} a_j D^j g(0) = 0$，于是可得 $f_3 = 0$，从而$L_k[D]g \equiv 0$，这与 $L_k[D]g$ 是超越的矛盾。

**情形 3.** 令 $f_2 = \Psi$ 为常数。这里回顾一下，$\Psi$ 是一个没有零点和极点的亚纯函数，因此根据 (3.5)，我们有

$$\frac{L_k[D]f - 1}{L_k[D]g - 1} = c,$$

其中 $c$ 为非零常数。证明完毕。 □

**定理 2.2 的证明**。我们首先证明 $f$ 是一个多项式。为反证，假设 $f$ 是一个超越整函数。因此，函数 $F(z) := (f(z) - a)/b$ 也是超越整函数。由引理 2.7，我们得到

$$T_{F(r)} \leq N_F(r,0) + N_{\mathcal{L}_k[D]F}(r,1) + O(\log(rT_f(r))).$$

对于正整数 $j$，显然有 $D^j F = D^j f/b$，$T_F(r) = T_f(r) + O(1)$ 且 $L_k[D[f]](r, b) = L_k[D]f/b.$，因此可得

$$T_f(r) \leq N_f(r,a) + N_{L_k[D]f}(r,b) + O(\log(rT_f(r))). \tag{3.19}$$

假设 $f \neq a$和 $L_k[D]f \neq b$，则有 $N_f(r, a) = 0$且$N_{L_k[D]f}(r, b) = 0.$。因此，方程 (3.19) 给出

$$T_f(r) = O(\log(rT_f(r))),$$

这与 $f$ 是超越的这一假设矛盾。因此， $f$ 必为多项式。由于对所有 $z \in \mathbb{C}$， $f(z) \neq a$，由 Liouville 定理可知， $f$ 必为常数，证明完毕。□

**定理 2.3 的证明**。 我们首先证明 $f$ 是多项式。反之，假设 $f$ 是超越整函数。令

$$G(z) := \frac{1}{b}\left(\beta_m \frac{f^{k+m+1}}{k+m+1} + \beta_{m-1}\frac{f^{k+m}}{k+m} + \cdots + \beta_1 \frac{f^{k+1}}{k+1}\right).$$

容易看出， $G$ 也是超越整函数。通过简单计算并利用（2.3），可得

$$DG = \frac{f^k Q_m(f)Df}{b}. \tag{3.20}$$

容易看出， $G$ 的零除子的每个点处的零点重数至少为$k+1 \geq 3.$。因此可得

$$\overline{N}_G(r,0) \leq \frac{1}{3}N_G(r,0) + O(\log r).$$

根据假设，我们有

$$DG = \frac{f^k Q_m(f)Df}{b} \neq 1.$$

根据引理 1.12，我们很容易得到

$$\begin{aligned} T_G(r) &\leq 2\overline{N}_G(0) + N_{DG}(r,1) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq \frac{2}{3}N_G(r,0) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq \frac{2}{3}T_G(r) + O(\log(rT_f(r))) \end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{1}{3}T_G(r) \leq O(\log(rT_f(r)))$$

这就产生了矛盾，因为 $G$ 是一个超越函数。

因此， $f$是一个多项式， $f^k Q_m(f)Df$也是如此。条件 $f^k Q_m(f)Df \neq b$意味着该函数必为常数。如果 $f$ 不是常数，那么$f^k Q_m(f)Df$的次数将大于或等于 1，这与它是常数这一事实相矛盾。因此， $f$ 必为常数，证明完毕。□

**伦理标准遵循：**

**经费：** 作者未获得任何经费以开展这项研究。

**作者贡献：** 两位作者共同撰写了稿件，并共同审阅了稿件。

**利益冲突。** 作者声明，就本文的发表而言不存在利益冲突。

**数据可用性声明。** 由于本研究期间未生成或分析任何数据集，因此本文章不适用数据共享。

## 参考文献

[1] C. Berenstein、D.C. Chang 和 B.Q. Li，多复变数中亚纯函数的指数和与共享值，《Adv. Math.》115(1995)，201–220。[2]B. Davis，皮卡定理与布朗运动，《Trans. Amer. Math. Soc.》23（1975），353–362。[3] G. Frank、X. Hua 和 R. Vaillancourt，共享相同零点和极点的亚纯函数，《Canad. J. Math.》56(6)(2004)，1190–1227。[4] G. G. Gundersen、N. Steinmetz 和 K. Tohge，共享四对或五对值的亚纯函数，《Comput. Methods Funct. Theory》18(2)(2018)，239–258。[5] R. Halburd 和 R. Korhonen，时滞微分方程亚纯解的增长性，《Proc. Amer. Math. Soc.》145(2017)，2513-2526。[6] R. Halburd、R. Korhonen 和 K. Tohge，具有平移不变超平面原像的全纯曲线，《Trans. Amer. Math. Soc.》366(8)(2014)，4267-4298。[7] W. K. Hayman，《亚纯函数》，牛津大学出版社，牛津，1964。[8] S. Hellerstein 和 J. Rossi，二阶线性微分方程亚纯解的零点，《Math. Z.》192(1986)，603-612。[9]Z. Hu，混合范数空间上的扩展Cesàro算子，《Proc. Amer. Math. Soc.》131(7)(2003)，2171–2179。[10] P. C. Hu 和 C. C. Yang，$\mathbb{C}^m$上的亚纯函数唯一性，《Complex Var. Elliptic Equ.》30(1996)，235-–270。[11] Z. J. Hua 和 R. Korhonen，从Nevanlinna理论的角度研究差分，《Trans. Amer. Math. Soc.》373（2020），4285-4318[12] L. Jin，多复变数整函数的唯一性定理，《Chin. Ann. Math. Ser. B.》25(4)(2004)，483-–492。[13] I. Lahiri，与其线性微分多项式共享两个值的整函数，《Bull. Australian Math. Soc.》97(2)(2018)，265-273。[14] P. Li，与其线性微分多项式共享三个值im的亚纯函数，《Complex Var. Elliptic Equ.》41(2007)，221-229。[15] P. Li 和 C. C. Yang，当整函数及其线性微分多项式共享两个值时，《Illinois J. Math.》44(2)(2000)：349-362。[16] B. Q. Li，多复变数中的对数导数引理及其应用，《Trans. Amer. Math. Soc.》363(2011)，6257-6267。[17] B. Q. Li，全纯函数的导数和对数导数估计及皮卡定理，《数学分析及其应用杂志》442（2016），446-450。[18] X.-M. Li、C. Liu 和 H. X. Yi，在某些角域中与其线性微分多项式共享三个值的亚纯函数，《Results Math》68(2019)，441-453。[19] B. Q. Li，关于皮卡定理，《数学分析及其应用杂志》460（2018），561-564。[20] J. R. Long，五值丰富直线、Borel方向与亚纯函数的唯一性，《Bull. Iran. Math. Soc.》43(5)(2017)，1467–1478。[21] J. Lu，多复变数整函数的皮卡型定理，《Kodai Math. J.》26（2003），221–229。

[22] F. Lü，多复变数亚纯函数的皮卡型定理，《*Complex Var. Elliptic Equ.*》**58**(8)（2013），1085–1092。[23] F. Lü 和 W. Lü，与其差分算子共享三个值的亚纯函数。《*Comput. Methods Funct. Theory*》**17**(3)(2017)，395–403。[24] F. Lü 和 H. X. Yi，关于亚纯函数及其线性微分多项式的唯一性问题，《数学分析及其应用杂志》**362**(2)(2010)，301-312。[25] H. Milloux，M. R. Nevanlinna定理的推广及其应用，*Act. Scient. etInd., 888, Hermann et Cie.* 巴黎，1940年。[26] R. Nevanlinna，亚纯函数理论中的单值性定理，《*Acta. Math.*》**48**(1926年)，367–391。[27] W. Stoll，Steinmetz-Nevanlinna定理向全纯曲线的推广，《*Math. Ann.*》**282**(1988年)，185-222。[28] W. Rudin，单位球中的函数论，$\mathbb{C}^n$，施普林格，纽约（1980）。[29] Y. Tiba，射影空间中超曲面的第二主定理，《*Math. Z.*》（2012）272:1165–1186，DOI 10.1007/s00209-012-0981-4。[30] L. Xu 和 T.B. Cao，多复变数中关于全导数的亚纯函数唯一性定理，《马来西亚数学科学学会通报》**43**(2020)，3923–3940。[31] C. C. Yang，关于两个整函数及其一阶导数具有相同零点的问题，《数学分析及其应用杂志》**56**(1976年)。1-6。[32] Z. Ye，关于射影空间中的Nevanlinna 第二基本定理，《数学创刊》**122**(1995年)，475—507。[33] H. X. Yi 和 C. C. Yang，《亚纯函数唯一性理论》，科学出版社，克鲁维尔（2003）。[34] G.Y. Zhang，曲线、区域与皮卡定理，《伦敦数学学会通报》**34**(2002) 205–211。

Molla Basir Ahamed，贾达普大学数学系，印度西孟加拉邦加尔各答 700032。电子邮件地址：mbahamed.math@jadavpuruniversity.in

Vasudevarao Allu，印度理工学院布巴内斯瓦尔分校基础科学学院数学系，印度奥迪沙邦布巴内斯瓦尔 752 050。电子邮件地址：avrao@iitbbs.ac.in