arXiv:2601.14317v1 [math.MG] 19 Jan 2026

切比雪夫集与球算子

by

Pedro Martín, Horst Martini, and Margarita Spirova

摘要。赋范空间中有界集 K 的切比雪夫集，是其所有最小包围球的中心所构成的集合。我们运用球交和球壳算子的概念，推导出赋范空间中切比雪夫集的新性质。这些结果有助于更清晰地理解切比雪夫集、有界集的球交、球壳及完备化之间的关系。我们证明，有界集 K 的切比雪夫集总是包含某个 K 的完备化的切比雪夫集。此外，对于一类特殊的集合，我们得到了相应集合的切比雪夫集为单点集的充要条件。我们还得到了关于切比雪夫中心临界集的新结果；为此，凸体组合几何中的概念出人意料地发挥了关键作用。此外，我们还完整地给出了有限平面集的球包的几何描述。这可以作为对此类集合的球包进行算法构造的起点。

1. 引言

设 K 是有限维实巴拿赫空间（或赋范空间）中的一个有界集。所有包含 K 的最小包围球的中心之并，称为 K的切比雪夫集，其元素称为K的切比雪夫中心。切比雪夫中心通过最小化到 K中各点的最大距离而得到，常见于逼近理论、巴拿赫空间理论、选址科学和计算几何；例如参见 [3], [4], [14], [15], [16], [1],和 [2]。

另一方面，给定点集的球交和球包概念在巴拿赫空间理论、凸分析和经典凸性中发挥着重要作用；参见近期的研究成果 [26], [22], [33], 及其中所列的参考文献。从纯几何的角度来看，这些概念也很有趣，因为它们与外接球、最小包围球、完备集、定

2000年数学主题分类：41A50, 41A61, 46B20, 52A21。关键词和短语：球包、球交、巴拿赫空间、切比雪夫中心、切比雪夫集、完备集、等宽、荣格常数、闵可夫斯基几何、赋范空间、球面交性质。研究部分得到 MICINN（西班牙）和 FEDER（欧盟）项目 MTM2008-05460 以及埃斯特雷马杜拉自治区政府项目 GR10060（部分由 FEDER 资助）的支持。1

宽集和球多胞体等概念密切相关，而且对于构造这类点集也十分重要；参见 [17]、[1]、[23, § 2]、[22]、[27]、[28] 和 [29]。

本文通过对有限维实巴拿赫空间中有界集的球交和球包的新结果，推导出关于切比雪夫集和切比雪夫中心的新结论。这些结果更清晰地揭示了切比雪夫集、球交、有界集的球包及完备化之间的关系。特别是，我们证明，对于具有唯一完备化的任意集合，该集合及其完备化的切比雪夫集和切比雪夫半径均相同。此外，我们证明，有界集 K 的切比雪夫集总包含某个 K 的完备化的切比雪夫集。在第 4 节中，我们研究给定切比雪夫中心对应的所谓临界集，即相应最小包围球的边界与原集合的交集。结果表明，该集合能为相应的切比雪夫集提供更多信息。令人意外的是，在讨论临界集时，凸体组合几何中的一个基本概念（即内照明系统）发挥了关键作用。对于可中心化集，我们得出了切比雪夫集为单点集的充要条件。最后，我们对平面中有限集的球包给出了完整的几何描述。这可作为开展这一方向算法研究的起点。

2. Notation and preliminaries

设 $\mathbb{M}^d = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ 是一个 d 维实巴拿赫空间，也称为赋范空间（或闵可夫斯基空间）。$\mathbb{M}^d$ 的单位球 B 是一个以原点 o 为中心、内部非空的紧凸集（即凸体），而 B 的边界是 $\mathbb{M}^d$ 的单位球面。单位球的任意位似副本 $x + \lambda B$ 称为中心为 $x \in \mathbb{R}^d$、半径为 $\lambda > 0$ 的球，记作 $B(x, \lambda)$；其边界是相应的球面 $S(x, \lambda)$。我们使用 int、relint、bd 和 conv 分别表示内部、相对内部、边界和凸包。连接不同点 p 和 q 的线段记作 pq，相应的直线记作 $\langle p, q\rangle$。

设 K 是 $\mathbb{M}^d$. 中的一个有界集。记 $\operatorname{diam}(K) := \max\{\|x - y\| : x, y \in K\}$ 为K的直径。对于满足 p, $q \in K$ 且使该最大值取得的线段 pq，称为 K的直径弦。 K 的 λ-球交 $\operatorname{bi}(K, \lambda)$ 是所有半径为 λ 且中心位于 K 中的球的交集：

$$\operatorname{bi}(K, \lambda) = \bigcap_{x \in K} B(x, \lambda).$$

K 的 λ-球包 bh(K， λ) 定义为所有包含 K且半径为 λ 的球的交集：

$$\mathrm{bh}(K,\lambda)=\bigcap_{K\subset B(x,\lambda)} B(x,\lambda).$$

当然，只有在 bi(K， λ) $\neq\emptyset$且 bh(K， λ) $\neq\emptyset$时，这些概念才有意义。显然，bh(K， λ) $\neq\emptyset$当且仅当 $\lambda\geq\lambda_K$，其中 λ_K是使得 K 包含于 $\lambda_K B$的某个平移中的最小数。这样的平移称为 K 的最小包围球（或 K 的外接球），而 λ_K 称为 K 的最小包围半径（或外接半径或切比雪夫半径）。显然，我们有

$$K_1\subseteq K_2 \implies \lambda_{K_1}\leq\lambda_{K_2}. \tag{1}$$

在欧几里得子情形中，有界集的最小包围球总是唯一的，但对于任意范数，这一点不再成立。容易验证

$$\{x\in\mathbb{M}^d:\ x\text{ 是 }K\}\text{的最小外接圆盘的中心} = \mathrm{bi}(K,\lambda_K), \tag{2}$$

由此得到，bi(K， λ) $\neq\emptyset$当且仅当 $\lambda\geq\lambda_K$。 K 的最小包围球的中心集合称为 K的切比雪夫集，记作 Ch(K)。关系式 (2) 表明，有界集的切比雪夫集是连通且凸的。关于无限维赋范空间中切比雪夫集的凸性性质，近期的一项研究见 [7]。Ch(K) 中的元素称为 K 的切比雪夫中心。注意，与欧几里得情形不同，一般而言，有界集的切比雪夫集不一定属于该集合的凸包。图1给出了一个例子。

根据 [14], 中的定理 1，如果赋范空间$\mathbb{M}^d$ 的每个有界集 $d=2$ 都在其凸包中包含一个切比雪夫中心，那么对于 $d\geq 3$，$\mathbb{M}^d$ 是欧几里得空间。迄今为止，对集合 K 的切比雪夫集的最佳几何描述是：Ch(K)包含于 K 的（diam$K$）-球交集中（见 [6, 定理33]）。

下文中，当我们谈到集合 K的 λ-球交或 λ-球包时，始终指的是 $\lambda\geq\lambda_K$。容易验证

$$\lambda_K\leq\mathrm{diam}K\leq 2\lambda_K; \tag{3}$$

另见 [6]。如果 $\lambda=$diam$K$，那么我们就简单地称 K的球交和球包，分别记为 bi(K) 和 bh(K)。

λ_K 的上确界，其中 K 是直径为 2 的有界集，是所考虑赋范空间的荣格常数 $J_{\|\cdot\|}$，即 $J_{\|\cdot\|}$ 是一个最小数，使得直径为 ≤ 1 的球能够覆盖任何直径为 ≤ 1 的集合。

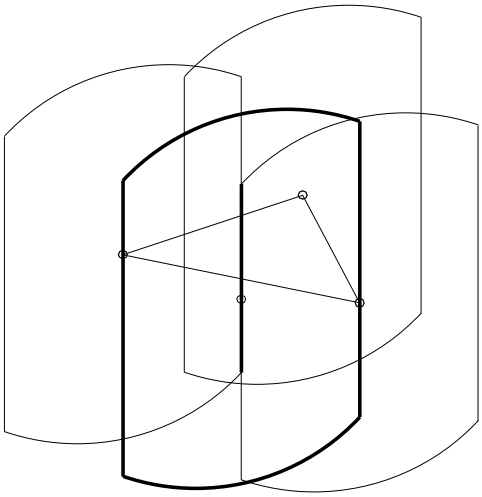


FIGURE 1. Ch(K) 不属于 K 的凸包

3. Properties of the operators ball hull and ball intersection

根据球交的定义，立即可得

$$\mathrm{bi}(\bigcup_j K_j, \lambda) = \bigcap_j \mathrm{bi}(K_j, \lambda) \tag{4}$$

满足 $\lambda \geq \mathrm{diam}(\bigcup_j K_j)$。

我们的第一个命题表明，球交算子关于集合是非增的，关于半径是非减的。反之，球包算子关于集合是非减的，关于半径是非增的。Edelsbrunner 使用了最后一条结论的欧几里得子情形来近似给定点集的形状（见 [12, 第 309]页）。

命题1。

$$K_1 \subseteq K_2 \Longrightarrow \mathrm{bi}(K_1, \lambda) \supseteq \mathrm{bi}(K_2, \lambda) \; and \; \mathrm{bh}(K_1, \lambda) \subseteq \mathrm{bh}(K_2, \lambda), \tag{5}$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \Longrightarrow \mathrm{bi}(K, \lambda_1) \subseteq \mathrm{bi}(K, \lambda_2) \; and \; \mathrm{bh}(K, \lambda_1) \supseteq \mathrm{bh}(K, \lambda_2). \tag{6}$$

证明。式（5）中的包含关系以及式（6）中的第一个包含关系可直接由球交和球包的定义得出。因此，只需证明式（6）中的第二个包含关系。设 $y \in \mathrm{bh}(K, \lambda_2)$，并假设存在 $B(x, \lambda_1)$，使得 $K \subset B(x, \lambda_1)$ 且 $y \notin B(x, \lambda_1)$。令 x' 为一个

属于 $\langle x, y\rangle$ 的点，并且满足 $\lambda_2 - \lambda_1 = \|x - x'\| < \|y - x'\|.$。我们对球 $B(x', \lambda_2)$ 证明如下结论：

(i) $B(x, \lambda_1) \subset B(x', \lambda_2)$,

且 (ii) $y \notin B(x', \lambda_2)$。

事实上，如果 $z \in B(x, \lambda_1)$，那么 $\|z-x'\| \leq \|z-x\|+\|x-x'\| \leq \lambda_1+\lambda_2-\lambda_1 = \lambda_2$且 $\|y-x'\| = \|y-x\|+\|x-x'\| = \|y-x\|+\lambda_2-\lambda_1 > \lambda_2$。因此存在一个球 $B(x', \lambda_2)$，它包含 K，使得 $y \notin B(x', \lambda_2)$，矛盾。□

由 [32, 命题 2.1.1]，我们得到如下结论

命题 2。设 K 是赋范空间中的一个集合。那么

(i) $\mathrm{bh}(K) = \mathrm{bi}(\mathrm{bi}(K), \mathrm{diam}(K))$,

(ii) $\mathrm{bi}(K) = \mathrm{bi}(\mathrm{bh}(K), \mathrm{diam}(K))$。

注意，如果 $\lambda \geq \mathrm{diam} K$，那么我们有以下包含关系

$$K \subseteq \mathrm{bh}(K, \lambda) \subseteq \mathrm{bi}(K, \lambda). \tag{7}$$

第一个包含关系直接由球包的定义得出。对于第二个包含关系，我们取 $x \in \mathrm{bh}(K, \lambda)$。因此，$x$ 属于所有包含 K 的球 $B(y, \lambda)$。如果 y 是 K 中的任意一点，那么 $B(y, \lambda) \supseteq B(y, \mathrm{diam}(K)) \supseteq K$。因此，每个半径为 λ 且中心来自 K 的球都包含 K。

如果 $\lambda = \mathrm{diam} K$，那么

$$K \subseteq \mathrm{bh}(K) \subseteq K^c \subseteq \mathrm{bi}(K), \tag{8}$$

其中，K^c 是 K 的**完备化**，即包含 K 且具有相同直径的完备集。（回顾一下，如果一个集合不能在不增大其直径的情况下通过添加额外的点而扩大，则称其为**完备** 集合。）包含关系 $\mathrm{bh}(K, \lambda) \subseteq K^c$ 已在 [17] 中定理 5 的证明里给出。集合 K 的完备性等价于 $K = \mathrm{bi}(K)$；参见[13, 第 167 页，(E)]。此外，在欧几里得子情形以及每个二维赋范空间中，完备性与等宽性等价。（关于赋范空间中**定宽集** 的定义和许多性质，请参见综述 [23] 的第 2 节。）在维数至少为三的赋范空间中，等宽性蕴含完备性，但反之不成立；参见 [13] 和 [23, 第 98-99] 页。

下一个命题展示了给定集合的球包、球交与完备化这些概念之间的关系。

命题 3。设 K 是赋范空间中的有界集。则

$$\mathrm{bh}(K) = \bigcap (\textit{all completions of } K) \tag{9}$$

and

$$\mathrm{bi}(K) = \bigcup (\textit{all completions of } K). \tag{10}$$

证明。 首先证明（10）。由（8）可知，我们只需检验：对于 bi(K) 中的每个点 x，是否存在 K 的一个完备化，使得 x 属于这个完备化。由于 $x \in$ bi(K)，对于 K 中的任意点 y，不等式 $\|x-y\| \leq$ diam(K) 成立。这意味着 diam($K \bigcup \{x\}$) $=$ diam(K)，并且存在集合 $K \bigcup \{x\}$ 的一个完备化 K^c，它同时也是 K 的一个完备化。

由 (10) 和 (4) 可得陈述 (9)。 □

备注 *1.* 命题 *3* 的欧几里得平面子情形由 *Bavaud* 证明；参见 [8, 定理*IV*]。*Moreno* 在 [25] 中给出了这一陈述的另一种证明；参见其中的命题 *2*。请注意，在该论文以及此处引用的 *Moreno* 和 *Schneider* 的论文中，分别使用记号 $\eta(K)$ 和$\theta(K)$ 表示 K 的球交和球包。事实上，$\theta(K)$ 定义为 $\cap_{x \in \eta(K)} B(x, diam K)$。根据命题 *2 (i)*，后者就是球包 *bh(*K*)*。在 [27] 和 [28] 中，*Moreno* 和 *Schneider* 分别将 *bi(*K*)* 和 *bh(*K*)* 称为 K 的宽球面壳和紧球面壳。我们还注意到，*Baronti* 和 *Papini* 在 [6] 中使用记号 K' 表示球交，使用 K^c 表示 K 的球包。

命题 3 的第一个推论可由 (10) 立即得到。

推论1. 任何半径为 $\lambda =$直径K 、中心属于 K 且包含 K 的球，也包含 K 的任意完备化。

正如第 2 节所述，我们有 Ch(K) $\subset$bi(K)；参见 [6,定理3.3]。此事实与命题 3 中的 (10) 得出

推论 2. 设 $B(x, \lambda_K)$ 是集合 K 的最小包围球。那么存在一个完备化 K^c *of* K，它包含 x。

接下来的讨论需要用到 [6] 中的定理3.5，该定理指出：对于每个包含 K、半径为 $\lambda \geq \frac{1}{2}$diam$K$ 的球，都存在一个完备化 K^c of K 包含于此球中。由此定理可立即推出

引理 1. 设 $B(x, \lambda_K)$ 是 K 的最小包围球。那么 $B(x, \lambda_K)$ 包含 K 的某个完备化 K^c。

命题4. 集合 K 的每个最小包围球都包含其球包。

证明。 这由引理 1 和 (8) 得出。 □

引理 2. 对于任意有界集 $K \subset \mathbb{M}^d$，存在某个完备化 K^c，使得关系 $\lambda_K = \lambda_{K^c}$ 和 $\mathrm{Ch}(K^c) \subseteq \mathrm{Ch}(K)$ 成立。

证明。 由引理 1 和不等式 (1)，存在一个完备化 K^c，满足第一个关系。鉴于 Ch(K) $=$ bi(K, λ_K)、Ch(K^c) $=$ bi(K^c, λ_K) 以及 (5)，我们得到 Ch(K^c) $\subseteq$Ch(K)。 □

引理 3。 对于任意有界集 $K \subset \mathbb{M}^d$ 和 $x \in \mathrm{Ch}(K)$，存在某个完备化 K^c，使得 $x \in \mathrm{Ch}(K^c)$。

证明。设 $x \in \mathrm{Ch}(K)$。由引理 1，存在一个完备化 K^c 包含于 $B(x, \lambda_K)$ 中，使得 $\lambda_{K^c} = \lambda_K$.因此，对于每个 $y \in K^c$以及 $x \in \cap_{y \in K^c} B(y, \lambda_{K^c})$，都有 $\|x - y\| \leq \lambda_{K^c}$。我们得出，$x \in \mathrm{bi}(K^c, \lambda_{K^c}) = \mathrm{Ch}(K^c)$。□

下一个定理给出了一个集合的切比雪夫集与其完备化的切比雪夫集之间的关系。

定理 1。 对于任意有界集 $K \subset \mathbb{M}^d$，包含关系

$$\bigcap \mathrm{Ch}(K^c) \subseteq \mathrm{Ch}(K) \subseteq \bigcup \mathrm{Ch}(K^c)$$

成立。

证明。第一个包含关系由引理 2 得出，第二个包含关系由引理 3 得出。

□

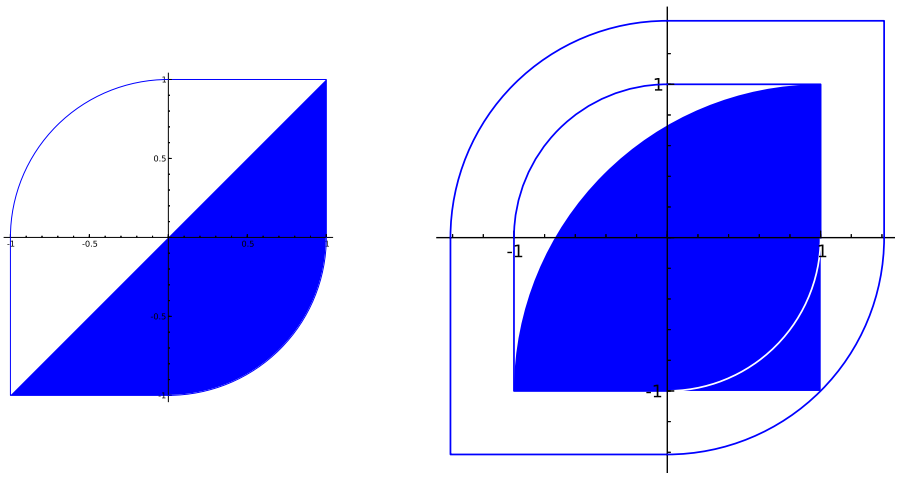


FIGURE 2. 一个集合 K 和一个完备化 K^c

注意，等式 $\mathrm{Ch}(K) = \cup \mathrm{Ch}(K^c)$ 一般并不成立。若我们考虑 $\mathbb{R}^2$ 中单位球如图 2（左）所示的赋范空间，那么集合 $K = \{(x, y) \in B(0, 1) : x - y < 0\}$ 的切比雪夫集是点 $(0, 0)$，但图 2（右）所示完备化 K^c 的切比雪夫集并不是这个点。还应注意，定理 1 给出的有界集切比雪夫集的位置强化了包含关系

定理 3.3]中给出的 Ch(K) $\subset$ bi(K)。事实上，由 Ch(K) $\subset$bi(K) 和 (5)，可得

$$\begin{aligned}\bigcup \mathrm{Ch}(K^c) &\subseteq \bigcup \mathrm{bi}(K^c, \mathrm{diam}(K^c)) \\ &= \bigcup \mathrm{bi}(K^c, \mathrm{diam}(K)) \subseteq \bigcup \mathrm{bi}(K) = \mathrm{bi}(K).\end{aligned}$$

本节的最后一个推论可由定理 1 直接推出。

推论 3. 若 K 是具有唯一完备化 K^c的有界集，则关系 $\lambda_K = \lambda_{K^c}$ 和 $\mathrm{Ch}(K)$ $=\mathrm{Ch}(K^c)$ 成立。

值得注意的是，具有唯一完备化的集合类相当广泛且已得到充分研究；参见 [23] 及其中所列的参考文献。我们希望推论 3 能对进一步研究该类集合的切比雪夫集和切比雪夫半径有所助益。根据此推论，无须对该类中的任意集合研究这些概念，只需研究完全集即可。

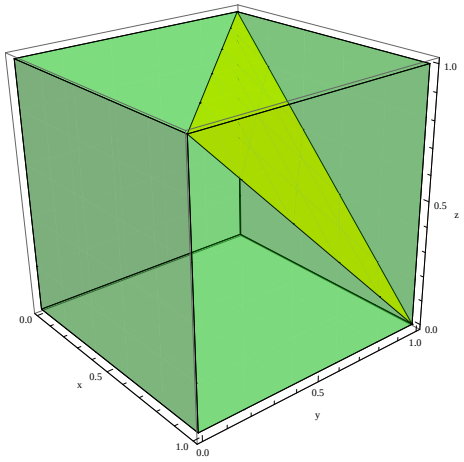


FIGURE 3. Ch(K) 与 K的凸包不相交

注 *2.* 下面我们想对包含关系链 *(8)* 进行评论。对于有界凸集 K，一般而言 $Ch(K) \nsubseteq K$；另见 [14] 中的定理 *1*。根据 [6, 定理*3.*3]，我们有 *Ch(*K*)* $\subseteq$*bi(*K*)*；更确切地说，推论 *2* 表明，存在一个 K^c 的K 完备化，使得 *Ch(*K*)* $\subset K^c$。下面的例子表明，*Ch(*K*)* $\nsubseteq$*bh(*K*)*。此外，在一般的赋范空间中，存在一些集合，其切比雪夫集不一定与其凸包相交。图 *3* 展示了具有这一性质的一个集合。考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的最大范数。那么集合$K = \{$*(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)*$\}$ 只有一个切比雪夫中心，而该中心并不

属于这些点的凸包。构造一个具有非空内部的类似例子很容易。

4. Critical sets

设 $B(x,\ \lambda_K)$ 是集合 K 的一个最小包围球。K 中属于 $\mathrm{bd}B(x,\ \lambda_K)$ 的所有边界点组成的集合称为 K 关于 x 的临界集，记作 $\mathrm{cr}(K,\ x)$。$\mathrm{cr}(K,\ x)$ 中的元素称为临界点。临界集这一概念由 Garkavi 于 [15], 引入，事实证明，这类集合能为切比雪夫集提供重要信息。例如，借助临界点，我们可以完全判定可中心化集这一类集合的切比雪夫集是否为单点集；参见命题9。满足 $\mathrm{diam}K = 2\lambda_K$ 性质的集合 K 称为可中心化集。换言之，如果某个集合使 (3) 中的第二个不等式成为等式，那么它就是可中心化的。例如，[30], 研究了可中心化的每个有限集都具有该性质的实巴拿赫空间，并对这类空间进行了刻画。

定理2。设赋范平面 $\mathbb{M}^2$ 中有一个不可可中心化的紧凸集 K，且 $B(x,\ \lambda_K)$ 是 K 的最小包围球。那么存在 $m \in \{2,3\}$ 个点 $t_1, \ldots, t_m \in \mathrm{cr}(K,\ x)$，它们是一个$(m-1)$-单纯形的顶点，使得

$$x \in \mathrm{relint}(\mathrm{conv}(t_1, \ldots, t_m)).$$

证明。根据 [11], 中的引理2.2，存在 m 个临界点 $t_1, \ldots, t_m (m \in \{2,3\})$，使得集合 $S = \mathrm{conv}(t_1, \ldots, t_m)$ 的最小包围半径为 λ_K.

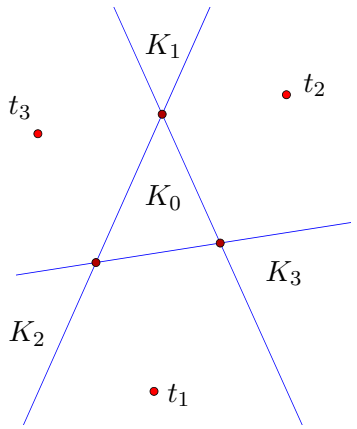


Figure 4

如果 $m = 2$ 和 $S = \text{conv}(t_1, t_2)$，那么 $x \in B(t_1, \lambda_K) \cap B(t_2, \lambda_k)$。这两个球的交集没有内点，因为否则就存在一个球包含 t_1 和 t_2，且其半径小于 λ_K。因此（参见 [24, 第 3.3] 节），该交集是一条线段，并且根据 $\|t_1 - t_2\| = 2\lambda_K$， K 是可中心化的。

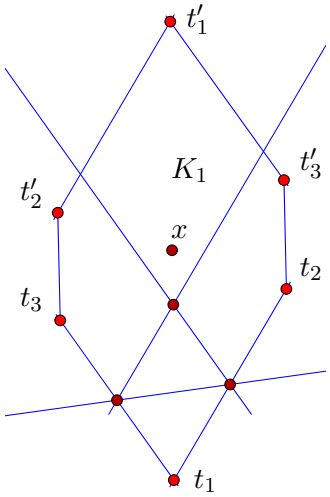


FIGURE 5

我们假设 $m = 3$ 和 $S =$ 凸包(t_1, t_2, t_3)。任意最小包围球的中心 x 可以位于图4所示的某些区域 K_0、 K_1、 K_2 或 K_3中；这些区域由经过 t_1、 t_2、 t_1、 t_3和 t_2、 t_3的中点的直线所界定（见 [1] 和 [2]）。如果 $x \in K_0$，证明即告完成。假设 x 属于 K_1 （ $x \in K_2$ 或 $x \in K_3$ 的情形与此类似）。情况如图5所示（再次见 [1] 和[2]），其中 t_i'（$i \in \{1, 2, 3\}$）关于 x与 t_i对称。因此，凸包$(t_1, t_2, t_3, t_1', t_2', t_3')$属于 B（x, λ_K）。

设 x' 是 x 沿方向 $t_3 - t_2'$ 的平移，使得 x' 位于 $\langle t_2, t_3 \rangle$ 上。显然，$\|t_1 - t_2\| \leq 2\lambda_K$。若等号成立， K 就是可中心化的。否则， $B(x', \lambda_K)$ 包含 S，并且存在一个半径为 $\lambda < \lambda_K$ 的球也包含 S。因此， λ_K 不是 S 的最小包围半径，矛盾。

□

作为定理2的直接推论，我们得到以下结论，它完全阐明了非可中心化平面集的切比雪夫集的位置。

推论 4。 如果 K 是赋范平面中的非可中心化集合，那么 K 的切比雪夫集属于 K 的凸包的相对内部。

以下来自凸体组合几何的概念也与我们的研究有关：

凸体 K 边界上的子集 P 称为 K 的内照明系统，如果对每个 $x \in \mathrm{bd}K$，至少存在一个 $p \in P$，使得线段 px 与 K 的内部相交；参见 [10, § 34]。

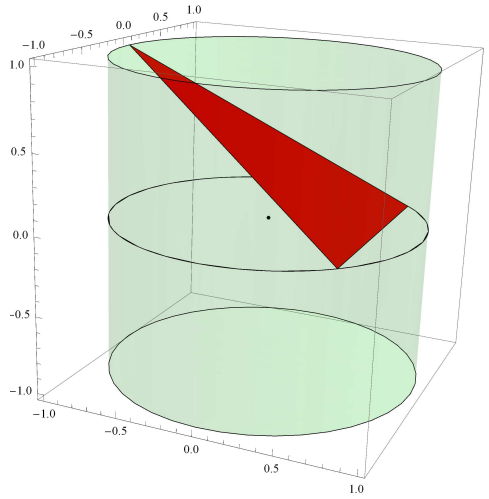


FIGURE 6. Ch(K) 不属于 relint(K)

如图 6 所示，维数至少为三时，定理2不成立。此外，并非每个凸体都有一个具有定理2所述性质的最小包围球。否则，每个有界集都会有一个属于其凸包的切比雪夫中心。这与 [14] 中的定理 1 相矛盾，该定理指出，只有当底层赋范空间的维数为 2，或者对于任意维数 $d \geq 3$，该空间是欧几里得空间时，这种情况才可能发生。但如果某个切比雪夫中心对应的点 $t_1, \ldots, t_m$ 如定理2所述存在，那么这些点就构成相应凸体的内照明系统。由于这类系统在凸体组合几何中得到了深入研究，我们因而引出下一个定义。设 K 是赋范空间 $\mathbb{M}^d$ 中的一个凸体，其切比雪夫中心为 x，且具有如下性质：对于某个 $m \in \{2, \ldots, d+1\}$，存在 m 个点 $t_1, \ldots, t_m \in \mathrm{cr}(K, x)$，它们是一个 $(m-1)$-单纯形的顶点，使得

$$x \in \mathrm{relint}(\mathrm{conv}\{t_1, \ldots, t_m\}).$$

那么， x被称为 K的均值流切比雪夫中心。我们的定理2表明，平面情形中的所有切比雪夫中心都是均值流切比雪夫中心。如果 x

是 K的均值流切比雪夫中心，那么具有上述性质的最小整数 m 称为 x的次数，而系统 $\{t_1,\ldots,t_m\}$ 称为 x的基系统。

下一个命题直接由均值流切比雪夫中心次数的定义得出。

命题5。 设 K 是赋范空间 $\mathbb{M}^d$中的有界集。那么 K 可中心化，当且仅当它具有一个次数为*2*的均值流切比雪夫中心。

若 K 是中心对称的，则称$\mathrm{bd}K$ 的一个子集为全局的，如果它不包含于任何一个边界超平面经过 K中心的闭半空间中；参见 [19]。

命题6。 设 $K\subset(\mathbb{R}^d,\ \|\cdot\|)$ 是一个凸体，具有一个次数为 m、基系统为 $\{p_1,\ldots,p_m\}$的均值流切比雪夫中心 x。那么集合$\{p_1,\ldots,p_m\}$ 是 K的最小包围球$B(x,\ \lambda_K)$ 的内照明系统。

证明。 固定一点 p_i。$\mathrm{bd}B(x,\ \lambda_K)$中未被 p_i 从内部照亮的点，恰好是属于 $B(x,\ \lambda_K)$某个真面的点。但并非所有 p_1、……、 p_m 都属于这样的真面。□

类似地，我们得到

命题7。 设 $K\subset(\mathbb{R}^d,\|\cdot\|)$ 是一个均值流切比雪夫中心为 x、次数为 $d+1$ 且基系统为 $\{p_1,\ldots,p_{d+1}\}$的凸体。那么$\mathrm{cr}(K,x)$ 是全局的，并且 $\{p_1,\ldots,p_{d+1}\}$ 是 K的内照明系统。

现在，我们旨在阐明：对于给定的可中心化集 K，何时 $\mathrm{Ch}(K)$ 是单点集。为此，我们需要一些关于凸体面结构的基本概念。首先回顾一下，凸体 K 的边界点 q 称为极点，如果它不属于 K中任何线段的相对内部。

应当注意，如果 x 是一个以 $\{p_1,p_2\}$为基的可中心化集 K的均值流切比雪夫中心，那么 $x=\frac{1}{2}(p_1+p_2)$ 且 $\lambda_K=\frac{1}{2}\|p_1-p_2\|$。

命题8. 两个不同点 p_1 和 p_2 的切比雪夫集是单点集，当且仅当 p_1（因此 p_2）是 $B(\frac{1}{2}(p_1+p_2)\ \frac{1}{2}\|p_1-p_2\|)$ 的极点。

证明. 设 p_1 是一个极点。假设存在一个不同于 $\{p_1,p_2\}$ 的切比雪夫中心 $x+v$, $v\neq 0$。那么

$$2\lambda_K=\|p_1-p_2\|\leq\|p_1-(x+v)\|+\|p_2-(x+v)\|\leq 2\lambda_K,$$

其中 $K=\{p_1,p_2\}$。这只有在 $\|p_1-(x+v)\|=\|p_2-(x+v)\|=\lambda_K$ 时才可能。因此，点 p_1-v和 p_1+v属于 $\mathrm{bd}B(x,\lambda_K)$，矛盾。逆命题的证明从略。

□

命题9。 设 K 是赋范空间 $\mathbb{M}^d$中的可中心化集。 K 的切比雪夫集是单点集，当且仅当 K 有一个切比雪夫中心x ，其基系统为 $\{p_1, p_2\}$ ，且 p_1 （因而 p_2）是 $B(x, \lambda_K)$的极点。

证明。 由于 K 可中心化，根据命题5，存在一个切比雪夫中心x 以及两个点 $\{p_1, p_2\} \in \mathrm{cr}(K,\ x)$，使得 $x \in \mathrm{relint}(\mathrm{conv}\{p_1, p_2\})$。因此，$x = \frac{p_1+p_2}{2}$、 $\lambda_K = \frac{\|p_1-p_2\|}{2}$ ，且 $\overline{p_1}$是关于 x与 p_2 对称的点。

假设 $\mathrm{Ch}(K)$ 是一个单点集。如果 p_1 和 p_2 不是 $B(x,\ \lambda_K)$的极点，那么 p_1和 p_2都属于方向为 v的平行线段，且这些线段包含在 $B(x,\ \lambda_K)$的边界上。考虑在 p_1和 p_2处的 $B(x,\ \lambda_K)$的平行支撑超平面，它们包含方向 v。沿方向 v 移动中心 x ，便可以找到 K的一个新切比雪夫中心，这就产生了矛盾。

假设 p_1和 p_2是 $B(x,\ \lambda_K)$的极点。由于$x = \frac{p_1+p_2}{2}$ 和 $\lambda_K = \frac{\|p_1-p_2\|}{2}$ ，由命题8可得 ~~$\mathrm{Ch}(\{p_1, p_2\}) = x$ 和$\lambda_{\{p_1,p_2\}} = \lambda_K$~~。由于 $\{p_1, p_2\} \subseteq K$，由(5)可得

$$x = \mathrm{Ch}(\{p_1, p_2\}) = \mathrm{bi}(\{p_1, p_2\}, \lambda_K) \supseteq \mathrm{bi}(K, \lambda_K) = \mathrm{Ch}(K)$$

□

5. On ball hulls of finite sets in the planar case

正如命题4所示，在研究最小包围球时会出现集合的球包，这也促使人们更加精确地描述平面有限集的球包。一些作者利用欧氏平面中的球包（也称为 α-包或圆包）来开发组合几何中的算法（例如， [12, p.309]）和聚类分析中的算法（例如， [20], [21], [31]）。本节旨在为一般范数下的类似算法介绍基础知识。对于我们的讨论，需要用到下面这个可追溯至 Grünbaum [18] 和 Banasiak [5]的引理；另见 [24, § 3。3]。

引理 4. 设 $\mathbb{M}^2$ 为一个赋范平面。设 $C \subset \mathbb{M}^2$ 为一个紧致凸圆盘，其边界是闭曲线 γ；设 v 为 $\mathbb{M}^2$中的一个向量；设 $C + v$ 为 C 的一个平移，其边界为 γ'。则 $\gamma \cap \gamma'$ 是两条线段的并集，其中每条线段都可能退化为一个点或空集。

假设这个交集由两个非空连通分支 A_1, A_2 组成。那么，支撑 $C \cap C'$ 的两条平移直线恰好交于 A_1 和 A_2.

从每个分支 A_i 中选取一点 p_i，并令 $c_i = p_i - v$ 和 $c_i' = p_i + v$ 对于 $i = 1, 2$。令 γ_1 为 γ 中与 c_1 和 c_2 位于直线 $\langle p_1, p_2\rangle$ 同一侧的部分；令 γ_2 为 γ 中位于 $\langle p_1, p_2\rangle$ 相对于 c_1 和c_2 的另一侧的部分；对于 γ, γ_1' 和 γ_2'，也类似处理。

那么 $\gamma_2 \subseteq$ 凸包(γ_1') 和 $\gamma_2' \subseteq$凸包(γ_1)。

设 p 和 q 是圆 $S(x, \lambda)$上的两个点。下文中，与 p 和 q 相交的 $B(x, \lambda)$ 的最小圆弧，是 $S(x, \lambda)$上以 p 和 q 为端点、位于由直线 $\langle p, q\rangle$界定且不包含中心 x的半平面内的那一段。若 p 和 q 在 $S(x, \lambda)$上互为对径点，则以 p 和 q 为端点的两个半圆都是与 p 和 q相交的 $S(x, \lambda)$的最小圆弧。为简单起见，下文假设 $\lambda = 1$。我们用 $\widehat{pq}$表示与 p和 q 相交的最小圆弧。

利用引理 4，我们可以证明 [20]中的引理 4.1 的一个推广。

引理 5. 设 $\mathbb{M}^2$ 是一个赋范平面，其单位圆盘为 B，且点 $p, q \in B$满足 $\|p - q\| \leq 1$。

(1) 若 $p, q \in S(o,1)$，且存在另一个经过 p和q的圆 $S(x, 1)$，那么原点 o和 x 要么位于直线 $\langle p, q\rangle$两侧的不同半平面内，要么线段 pq 属于 $S(x,1)\cap S(o,1)$。(2) 任何与 p和 q 相交的半径为*1*的最小圆弧也属于 B。(3)若一条与 p 和 q 相交的圆弧包含于 B 中，且其中包含 B的内点，则这条圆弧是最小圆弧。

证明。**(1)** 令 v 为向量 $p - q$。假设 x 和 o 位于边界直线 $p + \lambda v$ 同侧的半平面内（若 x 和 o 位于直线 $p + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}$所确定的不同半平面内，则无需证明）。

情形 1：点 x 位于直线 $o + \lambda v$ 和 $p + \lambda v$、 $\lambda \in \mathbb{R}$ 之间。点 x 不属于 oq，因为 $\|q - o\| = \|q - x\| = 1$。出于类似原因， x 不属于 op。如果 x 位于由 o、p 和 q 定义的三角形的内部，那么 S（p，**1**）不是凸曲线，因为 o 和 x 位于 S（p，**1**）和 $q \in B$（p，**1**）中。如果 x 不在由 o、 p和 q 定义的三角形内，不妨设 x 和 p 关于 $\langle o$、$q\rangle$ 位于不同的半平面内（若 x 和 q 关于 $\langle o$、$p\rangle$ 位于不同的半平面内，论证类似）。点 $x + p$、 $x + q$、 p 和 q 位于 S（x，**1**）中，但两对点（$x + p$， $x + q$）和（p， q）定义了两条平行线段。因此，这四个点位于同一直线上，且线段 pq 位于 S（x，**1**）中。

情形 2：原点 o位于直线 $x + \lambda v$和 $p + \lambda v$之间， $\lambda \in \mathbb{R}$。我们可以像情形 1 那样进行论证，交换 x 和 o的角色，因为在引理的这一部分中， o 和 x 所起的作用是对称的。

（2）考虑一条与 p和 q相交的半径为1的最小圆弧，并设 $S(x,\ 1)$ 是包含这条圆弧的圆。曲线 $C = S(o,\ 1)$ 和 $C' = S(x,\ 1)$ 满足引理 4 的假设。设 p_i、 γ_i 和 γ_i'（其中$i = 1,\ 2$）如引理 4 中所述。存在两点 p_1 和 p_2，使得分支 γ_2' 是最大的。于是，点 p和 q 以及与 p 和 q 相交的最小圆弧都在 γ_2' 中。由引理 4 可得 $\gamma_2' \subseteq$ 凸包$(\gamma_1) \subseteq B(0,\ 1)$。

(3) 假设 p 和 q 属于 B、 $\|p - q\| \leq 1$，且存在一条弧与 p 和 q 相交，并且这条弧有点位于 int$B$ 中。设 $B(x, 1)$ 为满足该弧位于 $S(x, 1)$ 中的球。于是有 $x \neq o$，因为该弧上有点位于 int$B$ 中。集合 $S(o, 1) \cap S(x, 1)$ 是两条线段的并，每条线段都可能退化为一个点或空集。若交集由两个连通分支 A_1 和 A_2 组成，则可像引理 4 中那样选取两点 $p_1 \in A_1$ 和 $p_2 \in A_2$，使得存在由 p_1 和 p_2 确定的 $S(x, 1)$ 的一个极大分支 γ_2，并满足：它位于 B 内，而 $S(x, 1)$ 的另一个分支在 B 中只有 p_1 和 p_2 这两点。点 p 和 q 属于 B；根据上述结果，与 p 和 q 相交的 $S(x, 1)$ 的最短弧也位于 B 中。因此，这条最短弧位于 γ_2 中。于是，由 p 和 q 在 $S(x, 1)$ 中确定的另一条弧有点位于 B 之外。

□

设 p 和 q 是两个满足 $\|p-q\| \leq 1$的点。由引理 5 的第 (1) 部分可知，只有两条最小弧与 p 和 q 相交（如果单位球的中心位于同一半平面内，这两条弧可能退化为线段 pq）。

由引理 5 的第 (2) 部分，我们立即得到

引理 6. 设 $K = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ 是赋范平面 $\mathbb{M}^2$中的一个直径为 *1* 的有限集。那么，任何可能包含 K的单位球 $B(x,1)$ 也包含每一条与 p_i 和 p_j 相交的半径为*1*的最小圆弧（i, j =1、2、. . .、 n）。

下面继续给出一个引理。

引理 7. 设 p_1、 p_2 和 p_3 是赋范平面 $\mathbb{M}^2$ 中的三个点，满足 $\|p_i - p_j\| \leq 1$（$i, j \in \{1, 2, 3\}$）且

- 存在一个点 x_{12} 以及一条包含于$S(x_{12},1)$ 中的最小圆弧 $\widehat{p_1p_2}$，使得 p_3 是 $B(x_{12}, 1)$的内点，
- 存在一个点 x_{23} 以及一条包含于$S(x_{23},1)$ 中的最小圆弧 $\widehat{p_2p_3}$，使得 p_1 是 $B(x_{23}, 1)$的内点，
- p_1、 p_2 和 p_3 不在同一直线上。

那么 $p_1 \notin$ 凸包$(\widehat{p_2p_3},\ \overline{p_2p_3})$ 和 $p_3 \notin$ 凸包$(\widehat{p_1p_2},\ \overline{p_1p_2})$。

证明。 假设 $p_3 \in$ 凸包($\widehat{p_1p_2}$, p_1p_2)。由于 p_1 是 $B(x_{23}, 1)$ 的内点，因此 $S(x_{23}, 1)$ 与 p_1p_2 或 $\widehat{p_1p_2}$ 相交于一点，该点不同于 p_2。无论如何，弧 $\widehat{p_1p_2}$ 不包含于 $B(x_{23}, 1)$ 中，这与引理 6 矛盾。理由类似，可得 $p_1 \notin$ 凸包($\widehat{p_2p_3}$, p_2p_3)。□

命题10. 设 $K = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ 是赋范平面 $\mathbb{M}^2$ 中直径为 *1* 的有限集。那么

$$\mathrm{bh}(K) = \bigcap_{i=1}^{k} B(x_i, 1),$$

其中 $B(x_i, 1)$、 $i = 1$、2，....., k 是包含 K 的球，且它们的球面包含一些经过 K 中点的最小弧。

证明。 我们将 $\mathbb{M}^2$ 中闭曲线的顺时针方向规定为该曲线的负向 。荣格定理（参见例如 [9]）保证存在一个球 $B(x_1,1)$，使得 $K \subset B(x_1, 1)$。必要时经过平移并重新命名这些点后，我们可以假设

- $S(x_1,1)$ 包含两个点 $p_1, p_2 \in K$,
- 从 p_1 开始沿负向并在 p_2 结束的圆弧是一条最小圆弧,

- 在 $S(x_1,1)$ 中，不存在另一条经过 K 中点且长于经过 p_1 和 p_2 的最小圆弧的最小圆弧。

集合 K 的直径为 1，因此 K 包含于 $B(p_1,1) \cap B(p_2,1) \cap B(x_1,1)$ 中。从 $z = x_1$ 出发，我们沿着 $S(p_2,1)$ 朝负方向移动。令 x_2 表示 z 满足以下条件之一的第一个位置:

(1) 存在一个新点 $p_3 \in S(x_2,1)$，使得
  - 从 p_2 出发、沿负方向定向并以 p_3 为终点的 $S(x_2,1)$ 中的圆弧是最小圆弧,
  - $S(x_2,1)$ 中不存在另一条最小圆弧，它与 K 的点相交，且比与 p_2 和 p_3 相交的最小圆弧更大；(2) $p_1 \in S(x_2,1)$，其中 x_2 位于由直线$\langle p_1, p_2\rangle$确定的另一个半平面内。

在这两种情况下，我们都考虑集合 $A = B(x_1, 1) \cap B(x_2, 1)$。由于 z在 $S(p_2, 1)$ 中连续移动，因此 A 包含 K。

若 $p_1 \in S(x_2,1)$ 位于由 $\langle p_1, p_2\rangle$ 确定的另一半平面内，且 x_2 ，则A是 K 的球包,

$$\bigcap_{K \subset B(x,1)} B(x, 1) \subset A,$$

因为 A 可以表示为包含 K 的球 $B(x_i,1)$ 的交集。此外， A 的边界由经过 K中各点的最小弧构成。因此

$$A \subset \bigcap_{K \subset B(x,1)} B(x,1).$$

若存在一个新点 $p_3 \in S(x_2, 1)$，则 K 包含在 $B(p_1, 1) \cap B(p_2, 1) \cap B(p_3, 1) \cap B(x_1, 1) \cap B(x_2, 1)$ 中。从 $z = x_2$ 出发，我们沿 $S(p_3, 1)$ 向负方向移动。令 x_3 为满足以下条件之一的 z 的第一个取值：

(1) 存在一个新点 $p_4 \in S(x_3, 1)$，使得

- 在 $S(x_3, 1)$ 中从 p_3 开始、沿负方向定向并以 p_4 结束的圆弧是最小圆弧，
- 在 $S(x_3, 1)$ 中，不存在另一条包含 K 中各点且大于包含 p_3 和 p_4 的最小圆弧的最小圆弧。(2) $p_1 \in S(x_3, 1)$。

在这两种情况下，我们都考虑集合 $A = B(x_1,1) \cap B(x_2,1) \cap B(x_3,1)$。由于$z$ 在 $S(p_3,1)$中连续移动， A 包含 K。

如果 $p_1 \in S(x_3,1)$，那么根据下式， A 是 K 的球包

$$\bigcap_{K \subset B(x,1)} B(x,1) \subset A,$$

因为 A 是包含 K的球 $B(x_i,1)$的交集。此外， A 的边界由经过 K的点的最小弧生成。因此

$$A \subset \bigcap_{K \subset B(x,1)} B(x,1).$$

如果上述条件中存在一个新点 p_4 ，则该过程以相同方式继续，并且由于点 p_i 的数量有限，该过程会在有限步内结束。在这个过程中，从 p_j 开始，由于引理 7，不可能得到满足$1 < i < j$的点 p_i 。该过程结束时，我们得到集合 $A = \bigcap_{i=1}^{k} B(x_i,1)$是 K 的球包，因为它是包含 K的单位球的交集，且其边界由经过 K的点的最小弧生成。

□

由引理 6 和命题10的证明可得

定理3。 设 $K = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ 是赋范平面$\mathbb{M}^2$ 中的一个直径为*1*的有限集。设 $\widehat{p_i p_j}$ 表示半径为*1*的最小圆弧

与 p_i 和 p_j相交。设 H 是所有半径为*1*的球所组成的集合，这些球的边界包含一条与 K中的点相交的圆弧。于是

$$\mathrm{bh}(K) = \bigcap_{K\subset B(x,1)\subset H} B(x,1) = \mathrm{conv}(\bigcup_{i,j=1}^{n} \widehat{p_ip_j}).$$

References

[1] J. Alonso, H. Martini, M. Spirova：《赋范平面中的最小包围圆盘、外接圆和外接中心（第一部分）》，计算几何 45 (2012), 258-274。[2] J. Alonso, H. Martini, M. Spirova：《赋范平面中的最小包围圆盘、外接圆和外接中心（第二部分）》，计算几何 45 (2012), 350-369。[3] D. Amir, Z. Ziegler：赋范线性空间中的相对切比雪夫中心 I，逼近理论杂志 29 (1980), 235-252。[4] D. Amir, Z. Ziegler：赋范线性空间中的相对切比雪夫中心 II，逼近理论杂志 38 (1983), 293-311。[5] J. Banasiak：对赋范线性空间几何的若干贡献，《数学札记》139 (1988), 175-184。[6] M. Baronti, P. L. Papini：直径、中心与直径极大集，巴勒莫数学学会论文集增刊 38 (1995), 11-24。[7] J. M. Borwein：近性与切比雪夫集，优化通讯 1 (2007), 21-32。[8] F. Bavaud：伴随变换、过凸性与定宽集，美国数学会汇刊 333 (1992), 315-324。[9] V. Boltyanski, H. Martini：一对闵可夫斯基空间的荣格定理，几何学进展 6 (2006), 645-650。[10] V. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan：《组合几何漫游》，施普林格出版社，柏林、海德堡，1997。[11] R. Brandenberg, S. K¨onig：位似下包含不存在与维数无关的核集，计算几何研讨会论文集，2011, 464–471。[12] H. Edelsbrunner：《组合几何算法》，理论计算机科学 EATCS 专著丛书，第10卷，施普林格出版社，纽约、柏林，1987。[13] H. G. Eggleston：有限维巴拿赫空间中的定宽集，《以色列数学杂志》3 (1965), 163-172。[14] A. L. Garkavi：关于集合的切比雪夫中心和凸包（俄文），数学科学进展 19 (1964), 第6期（120），139-145。[15] A. L. Garkavi：关于极大极小的细化定理及内切球问题（俄文），数学札记 30 (1981), 第1期（155），109–121。（英文译本：《数学札记》30 (1981), 第1-2期，542–548 (1982)。）[16] P. Gritzmann, V. Klee：有限维赋范空间中凸体的内、外 j半径，离散计算几何 7 (1992), 255-280。[17] H. Groemer：关于完备凸体，献给几何学 20 (1986), 319-334。[18] B. Gr¨unbaum：闵可夫斯基平面中的博尔苏克分割猜想，以色列研究理事会公报，F辑 7F (1957/1958), 25-30。[19]B. Gr¨unbaum：固定系统与内部照明，《匈牙利数学学报》15 (1964), 161–163。[20] J. Hershberger, S. Suri：寻找定制分割，算法杂志 12 (1991), 431–463。

[21] J. Hershberger：双中心判定问题的更快算法，《信息处理快报》47 (1993), 23–29。[22] H. Martini, M. Spirova：赋范平面中的圆形壳性质，《匈牙利数学学报》125 (2009), 275-285。[23] H. Martini 和 K. J. Swanepoel：闵可夫斯基空间几何综述，第二部分，Expositiones Math. 22 (2004), 93-144。[24] H. Martini、K. J. Swanepoel 和 G. Weiss：闵可夫斯基空间几何综述，第一部分，Expositiones Math. 19 (2001), 97-142。[25] J. P. Moreno：严格凸空间中的孔隙性与唯一完备化，《数学杂志》267 (2011), 173-184。[26] J. P. Moreno, R. Schneider：球壳映射的连续性，Nonlinear Anal. 66 (2007), 914-925。[27] J. P. Moreno, R. Schneider：闵可夫斯基空间中的直径完备集，《以色列数学杂志》（即将出版）。[28] J. P. Moreno, R. Schneider：直径完备化映射的局部利普希茨连续性，Houston J. Math.（即将出版）。[29] M. A. Perles, H. Martini, Y. S. Kupitz：球多胞体与 V´aszonyi 问题，《匈牙利数学学报》126 (2009), 99–163。[30] T. S. S. R. K. Rao：切比雪夫中心与可中心化集，美国数学会论文集 130 (2002), 2593–2598。[31] M. Sharir：平面双中心问题的近线性算法，离散计-算几何 18 (1997), 125–134[32] M. Spirova：《赋范空间中的离散几何》，S¨udwestdeutscher Verlag f¨ur Hochschulschriften，Saarbr¨ucken，2011。[33] P. Ter´an：球的交集与球壳映射，J. Convex Anal. 17 (2010), 277–292。

Pedro Mart´ın，埃斯特雷马
杜拉大学数学系，06006 巴达
霍斯，西班牙 电子邮箱：
pjimenez@unex.es

Horst Martini，开姆尼茨工业大学数学学院，
D-09107 开姆尼茨，德国 电子邮箱：
horst.martini@mathematik.tu-chemnitz.de

Margarita Spirova，开姆尼茨工业大学数学学院，
D-09107 开姆尼茨，德国 电子邮箱：
margarita.spirova@mathematik.tu-chemnitz.de