arXiv:2601.14396v1 [math.RT] 20 Jan 2026

表示论中的几何模型

SIBYLLE SCHROLL

Abstract. 几何模型已成为代数表示论中的重要工具。与温和代数相关联的曲面模型，在加深我们对其模范畴和导出范畴的理解方面尤为卓有成效。本文概述若干理论进展：这些进展得益于分次温和代数导出范畴的几何曲面模型，以及它们与曲面 Fukaya 范畴之间的联系。

1. 引言

三角范畴及其微分分次或 ∞范畴增强，为代数、几何和拓扑学提供了统一框架，并重塑了我们对同调代数的理解。同调镜像对称通过相干层范畴与 Fukaya 范畴之间的导出等价，在代数几何与辛几何之间搭建桥梁，发挥了重要作用 [105]。倾斜理论和例外序列则将代数几何与辛几何中的三角范畴同代数表示论联系起来[8, 19, 37]。

在结合代数的表示论中，三角范畴有各种各样的形式，例如模的无界、 有界或完美导出范畴、稳定模范畴或奇点范畴。或许正是由于导出范畴本身无处不在且用途广泛，其内部运作往往难以捉摸，而具体描述也少之又少，难以获得。对于代数的导出范畴，这种可把握性可以用导出离散性和导出温和性的概念来量化：对于上同调的每一种维数，导出范畴中的不可分解对象要么数量有限（导出离散） [154] ，要么至多分属有限个单参数族（导出温和） [30, 69, 82]。对于导出离散或导出温和代数，其导出范畴中不可分解对象的分类已在若干类代数中实现，尤以 gentle 代数和斜温和代数为代表 [28, 29, 48, 90]。

近年来，关于温和代数导出范畴的一种新视角，极大地推进了我们对其导出范畴乃至一般三角范畴的理解。温和代数是带有二次单项式关系的箭图路径代数（见第2节）。温和代数 A 中的极大路径自然地成为带状图 [145] 的顶点，其关联曲面 S 编码了关于 A的许多导出表示论信息。事实上， A 的完美导出范畴 $\mathsf{per}(A)$——或者说，其微分分次（dg）增强，即由加性闭包 $\mathsf{add}\, A$ 上的扭曲复形范畴 $\mathsf{tw}(\mathsf{add}\ A)$——等价于曲面 S [90, 114] 的部分缠绕福柯范畴（另见第5节）。一般而言，存在一种对应关系

$$\underset{\text{分次温和代数}}{A} \quad \longleftrightarrow \quad \underset{\text{分次标记曲面（连同一个剖分）}}{S} \tag{1.1}$$

其中， A 的分次对应于以线场形式给出的 S 的分次。在对象层面，这种对应关系将 S 中的一条曲线映射为一个显式的扭曲复形。特别地， A 的不可分解直和项可视为曲面上的曲线，并作为导出范畴中一般对象的坐标系。通过考虑无限扭曲

复形，可以得到一个模型，它不仅适用于完美导出范畴 per(A)，也适用于完整的有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(A)$ [125]。

从这一几何视角出发，还可以推导出大量关于 gentle 代数导出范畴的其他信息。例如，曲面上某些曲线的绕数组合起来，构成范畴 [7, 97, 114, 124]，的完备导出不变量，并补充了 gentle 代数的经典组合不变量 [18]。Serre 函子对 per(A) 中对象的作用，可以通过改变曲面上相应曲线的端点来描述 [125], ；这一描述也可用于计算 Serre 函子的范畴熵 [56]。霍赫希尔德上同调及其完整的 Tamarkin–Tsygan 微积分同样由曲面编码：它对应于具有 0 个或 1 个停止点的边界分支 [21, 60]。

对 gentle 代数导出范畴这一特例的研究，也为理解导出范畴研究中的一般现象提供了启示。完备例外序列及其相关的半正交分解，是导出范畴结构理论中的关键工具。在 gentle 代数的导出范畴中，例外序列可以用相应曲面上的某些剖分来刻画 [58, 59]。这一几何视角带来了三角范畴的首个例子：该范畴由一个例外序列生成，但自然的辫群作用在完备例外序列的同构类集合上并不传递 [57], ，从而回答了 Bondal 和 Polishchuk 提出的一个长期悬而未决的问题 [39]。

变形理论可以用来走出温和代数与光滑曲面的范畴。值得注意的是，分次温和代数的导出范畴的完整代数变形理论由其第二 Hochschild 上同调参数化，并且可以通过其曲面模型来理解[21]。Hochschild 2-余循环对应于具有 0 个或 1 个停止点、绕数为 1 或 2 的边界分支。于是，变形对应于将其中一些边界分支部分紧化为光滑点或轨形点，具体取决于相应边界分支的绕数。一方面，这是首个证实在部分包裹 Fukaya 范畴背景下，Fukaya 范畴的 A_∞-变形与部分紧化之间关系的案例。Seidel 曾在 [147] 中提出这种关系（针对完全缠绕情形）。另一方面，这引出了具有轨形奇点的曲面的 Fukaya 范畴理论 [6, 22, 61]。与光滑情形一样，这些 Fukaya 范畴是 A_∞-范畴余层的整体截面 [22], ，证实了 Kontsevich 猜想的一种奇异类比 [106]。此外，通过刻画能够产生这些范畴的形式生成元的剖分 [6, 22, 104], ，可以得到一类新的导出温和代数；它们由显式的带关系箭图给出，并且与斜温和代数导出等价。

Acknowledgements

我想感谢所有与我合作过的人，无论他们是否在这篇综述中被引用。我不仅非常享受这些合作，也从每一次合作中学到了很多；这篇会议论文集文章正是所有这些经历的成果。我非常感激有机会与这么多杰出的数学家共事。此外，我还要特别感谢 Severin Barmeier，在撰写这部会议论文集期间，他始终给予我支持并提供反馈。我还要感谢所有曾友好地阅读早期版本并提出反馈的人。

2. Gentle algebras: Definitions and first properties

源自倾斜理论以及双串代数表示论的温和代数及其推广，其相关研究可追溯至 20 世纪 70 年代和 80 年代，文献数量庞大且仍在迅速增长。本节将简要回顾温和代数的定义及其若干性质。遗憾的是，要全面介绍这一主题的所有精彩研究，远远超出了本论文集的篇幅。

温和代数的定义。温和代数最初于 [14, 15] 在研究 (仿射) Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 的迭代倾斜代数时被引入。

定义 2.1. 设 $\Bbbk$ 为一个域。若一个 $\Bbbk$-代数 A 与有限箭图 $Q=(Q_0,Q_1)$ 的某个代数 $\Bbbk Q/I$ Morita 等价，并且对于顶点集合 Q_0 中的每个顶点 Q，至多有两条箭终止于该顶点，至多有两条箭从该顶点出发，则称 A 为温和代数。理想 I 由一组长度为二的路径生成，并满足

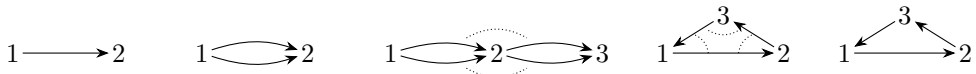
(1) 对于任意箭 a，至多存在一条箭 b 和至多存在一条箭 c，使得 $ba\notin I$ 且 $ac\notin I$;

(2) 对于任意箭 a，至多存在一条（可复合的）箭 b' 和至多存在一条（可复合的）箭 c'，使得 $b'a\in I$ 且 $ac'\in I$。

在 A 上的一个 $\mathbb{Z}$-分次是从箭的集合 Q_1 到 $\mathbb{Z}$ 的映射。

每当我们写“代数”时，都默认其为基域 $\Bbbk$ 上的代数。所有结论都适用于 $\Bbbk$ 代数闭且具有特征零的情形，但在许多情况下，这两个假设都不是必需的。

我们指出，定义 2.1 中的 gentle 代数不一定是有限维的。以下是一些由其带关系的箭图给出的 gentle 代数示例



其中圆点表示零关系，也就是说，相应的长度为二的路径在每种情况下都是理想 I 的生成元。其他 gentle 代数的例子包括导出离散代数（除 Dynkin 型 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$之外） [154], 另见 [33], ，以及由带势箭图得到的雅可比代数；这些带势箭图来自边界上带有标记点的标记曲面的三角剖分 [13, 112]。

gentle 代数的首要性质。gentle 代数是二次单项式代数，因此由 [89]可知，它们是 Koszul 代数。根据定义可立即得出，由二次对偶给出的 Koszul 对偶同样是 gentle 的。此外，gentle 代数具有温和表示型。在 [155], （另见 [50], ）中，基于 [84, 137], ，其不可分解模按字符串和带进行组合分类。这些是由箭图中的箭及其形式逆元构成的字母表中的特定词。不可分解模之间的态射空间有一个显式基，见 [66, 108]。 [26, 45, 53, 54]以不同方式描述了不可分解模之间的扩张空间。在 [144] 中证明了有限维 gentle 代数在导出等价下封闭，也就是说，任何与有限维 gentle 代数导出等价的代数仍是 gentle 代数。在有限维代数目录 [142]中，这是一种罕见现象。我们指出，分次温和代数在导出等价下是否封闭仍是一个悬而未决的问题。

温和代数的独特之处在于，不仅它们的模范畴是驯的，其导出范畴也是驯的。导出范畴中的不可分解对象同样由一种词组合来描述，即由同伦串和带参数化[29, 48, 49]。另一类已知为导出驯代数的重要代数是斜温和代数 [28, 48]。在 Morita 等价意义下，斜温和代数是温和代数在 $\mathbb{Z}_2$作用下的斜群代数。它们最初定义于 [81]。值得注意的是，除少数例外，目前已知的所有其他导出驯代数——例如 [27], 中的导出驯中山代数、 [76], 中的导出驯二次串代数，以及 [47, 定义 5.7] 中的代数——都与斜温和代数导出等价 [104],，另见 [6, 22, 61]。

一般而言，导出范畴难以解析，显式计算往往不可能。然而，对于温和代数的导出范畴，情况则有所不同。关于导出离散温和代数的情形，文献 [42, 43] 对其导出范畴进行了完整的论述。也正是在这一背景下，文献 [44] 首次从表示论的角度提出了几何模型，并据此对导出离散

代数的有界导出范畴中的厚子范畴进行了分类。对于更一般的情形，即具有有限整体维数的有限维温和代数，文献 [127] 最近基于文献 [125] 中的几何模型，对由有界导出范畴中的弦对象生成的厚子范畴进行了分类。由带对象生成的厚子范畴的分类仍是一个开放问题。

在 [12] 中，对 gentle 代数的有界导出范畴中态射空间的基作出明确描述，是我们理解这些导出范畴的重要一步。在 [32], 中，利用从有界导出范畴到重复代数的稳定模范畴的 Happel 函子，描述了 Auslander–Reiten 三角。在 [12], 中，则用基态射描述了不可约态射。理解三角范畴的另一个重要概念是映射锥。在 [52]中，计算了 [12] 中基态射的映射锥。

3. Geometric surface models for gentle algebras

本节简要概述可与 gentle 代数相关联的不同类型的几何模型，包括源自簇理论的模型、模范畴的模型，以及导出范畴的模型。

几何曲面模型与簇理论。几何曲面模型进入代数表示论的一个重要途径，是通过它们与簇代数及其范畴化之间的联系，例如见 [75]。在曲面簇代数这一背景下，随着 [13, 51, 112] 的研究，人们很快发现 gentle 代数发挥着重要作用。它们作为带势箭图的雅可比代数出现，这些带势箭图来自边界上带有标记点的曲面的理想三角剖分。在 [13] 中证明，曲面编码了相应 gentle 代数的表示论。具体而言，建立了连接标记点的曲线同伦类（不包括三角剖分中的弧）与该 gentle 代数上的弦模之间的双射，并建立了闭曲线与带模一参数族之间的对应关系。利用 gentle 代数的表示论， [46] 对来自边界上带有标记点的曲面的簇范畴证明了类似结果。对于来自带穿孔曲面的簇范畴, [134, 141] 利用斜温和代数的表示论证明了相应结果。特别地，在这些模型中，不可分解对象之间的扩张对应于相关曲线的交叉，另见 [54]。来自曲面三角剖分的簇范畴，是由三角剖分得到的带势箭图所关联的 3-Calabi-Yau Ginzburg dg 代数的完美导出范畴的 Verdier 商范畴。对于这些导出范畴，存在若干几何模型，例如 [93, 132, 135], 研究的装饰标记曲面，以及 [62]中的反常 schober。模范畴的几何曲面模型。在 [13], 曲面模型的基础上， [25], 给出了任意 gentle 代数的模范畴模型，并在 [92]将其推广到斜温和代数。借助这些模型， [92, 129]研究了 gentle 代数和斜温和代数的 τ-倾斜理论。在 [55], 中，依据几何模型 [125]研究了 gentle 代数有界导出范畴的代数心。由此特别得到另一种模范畴模型，且该模型与第4节所述的有界导出范畴模型相容。

迈向导出范畴的几何曲面模型：带状图与曲面剖分。回到温和代数导出范畴的几何模型，文献 [15, 131,139], （另见 [143], ）证明，有限维代数 A 是温和代数，当且仅当其平凡扩张是特殊双串代数。特殊双串代数是一大类温和表示型有限维代数 [155]。此外，有限维代数的平凡扩张是对称代数；若存在一个 A-A-双模同构，将 A 映到其 $\mathbb{k}$-线性对偶 DA，则称代数 A 为对称代数。根据 [10, 140, 145] ，每个对称特殊双串代数都是所谓的 Brauer 图代数。这表明， A 是温和代数，当且仅当其平凡扩张是一个

Brauer 图代数。Brauer 图代数定义在一个（带装饰的）带状图 Δ 上。在文献 [120],（另见 [146], ）中，由带状图 Δ 构造出一个带边界的紧致定向曲面，并将其剖分为多边形；该带状图对应于 Brauer 图代数的 Brauer 图。文中证明，对底层三角剖分或 m-角剖分作对角线翻转，对应于相应 Brauer 图代数之间的导出等价。文献 [126] 利用文献 [88] 中覆盖理论的推广，并采用经由 A_∞-代数的方法，给出了以曲面数据表述的 Brauer 图代数的完整导出不变量。关于这一方向上更一般的构造，见 [63]；关于温和代数与 Brauer 图代数的推广，见 [86, 87]。

由上文可知，可以通过带状图 Δ 为每个温和代数关联一个紧致定向曲面，其中该带状图是由平凡扩张得到的 Brauer图代数的 Brauer 图。于是，一个自然的问题是，能否直接从温和代数读出这个 Brauer 图代数的带状图。 [145], 证明了这一点，其中带状图 Δ 直接由温和代数定义，无需经过平凡扩张。正是这个带状图 Δ 在 [125] 中引出了表示论上的表述：以曲面剖分成多边形的方式，为温和代数的有界导出范畴建立几何模型。这个曲面剖分是通过将带状图 Δ 的顶点粘接到相应曲面的边界上而得到的。由此， Δ 可视为曲面剖分成多边形。在部分包裹 Fukaya 范畴的背景下， Δ 对应于 [90]中定义的完全形式弧系。我们注意到，将曲面剖分成多边形的一个对偶版本见于 [64] ，称为铺砌代数。曲面的铺砌可视为温和代数的对偶带状图（相对于 Δ而言），并对应于第4节中的（对偶）曲面剖分Δ^* 。在带停止点曲面的部分包裹 Fukaya 范畴背景下， [114] 也构造了温和代数的这一对偶带状图，详见第5节。[125] 证明了与 Δ 和 Δ^* 相关的这两种对偶构造由 Koszul 对偶联系起来；函子性描述另见[115] 。总之，上述不同构造给出了多边形曲面剖分（模去曲面同胚）与温和代数（模去同构）之间的双射 [25, 125, 128]。

4. Derivedcategories of graded gentle algebras and their geometric model

本节简要介绍 [125] 中分次温和代数的有界导出范畴的几何模型。我们指出， [125] 最初是为未分次有限维温和代数（其整体维数不一定有限）发展起来的。在后续版本中，研究结果扩展到了有限维、未必同调光滑的分次温和代数 A 的有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(A)$；该代数被视为具有零微分的适当微分分次代数，相关研究尤其运用了近期在 [9] 中研究的无界扭复形。

下面我们更明确地描述 (1.1) 中的对应关系，如下表所示

$\mathcal{D}^b(A)$， A 适当分次 gentle	边界上带有 $\circ$点的紧致定向曲面
X_γ 不可分解对象	γ 分次弧或 带有不可分解局部系统的分次闭曲线
$\Bbbk$-Hom$_{\mathcal{D}^b(A)}(X_\gamma, X_\delta)$的基	从 γ 到 δ的定向交点
$X_\gamma \xrightarrow{f} X_\delta \to X_{\alpha_1} \oplus X_{\alpha_2} \to$	将 γ 和 δ 的交叉消解为与 f 对应的结果，得到 两条曲线 α_1 和 α_2 （其中一条可能为零）
per(A) 上的 Serre 函子 $\mathbb{S}$	将连接 $\circ$点的分次弧的两个端点移动到 各自边界分支上的下一个 $\circ$点

4.1. 有界导出范畴与完美导出范畴。在更详细地描述几何模型和各种对应之前，我们先搭建所采用的范畴框架。

设 A 是一个微分分次代数（或微分分次范畴）。我们用 $\mathcal{D}(A)$ 表示它的（导出）三角范畴，用 $\mathrm{per}(A)$ 表示完美导出范畴，即 $\mathcal{D}(A)$ 中紧对象构成的子范畴；它等于 $\mathcal{D}(A)$ 中包含 A 的最小幂等完备三角子范畴。我们用 $\mathcal{D}^b(A)$ 表示 A 的有界导出范畴，它是 $\mathcal{D}(A)$ 的全子范畴，由总上同调有限维的所有微分分次 A-模组成。回顾一下，对于适当微分分次代数 A（即 $A \in \mathcal{D}^b(A)$），当 A 同调光滑时，全忠实嵌入 $\mathrm{per}(A) \subseteq \mathcal{D}^b(A)$ 是一个等价。在这种情况下，如果 A 是零次分次的，那么每个有限生成 A 模都有有限投射分解，因此可由有限生成投射模构成的有界复形来表示。

由自由 A-模 A 生成的 $\mathrm{per}(A)$ 的三角子范畴具有自然的微分分次增强，即微分分次范畴 $\mathrm{add}\, A$ 上的扭曲复形范畴 $\mathrm{tw}(A)$；该范畴是 A 作为微分分次 A-模 [38] 的加性闭包。微分分次范畴或 A_∞ 范畴 $\mathcal{A}$ 上的扭曲复形范畴 $\mathrm{tw}(\mathcal{A})$，可以看作是 $\mathcal{A}$ 在移位和映射锥运算下的闭包。因此，$\mathrm{tw}(\mathcal{A})$ 是预三角微分分次范畴或 A_∞ 范畴，其同伦范畴 $\mathrm{H}^0\mathrm{tw}(\mathcal{A})$ 是三角范畴，并且除直因子外与 $\mathrm{per}(\mathcal{A})$ 等价。

如果 A 是适当的，但不是同调光滑的，那么嵌入 $\mathrm{per}(A) \subseteq \mathcal{D}^b(A)$ 通常不是本质满的。至少对于本综述关注的代数，我们可以使用 [9] 中扭曲复形的无界推广，为 $\mathcal{D}^b(A)$ 提供增强。具体而言，若 A 是有限维分次温和代数（视为具有平凡微分的适当微分分次代数），其有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(A)$ 由简单 A- 模 [40] 生成。在这种情况下，$\mathcal{D}^b(A)$ 的微分分次增强可由相应简单模（可能无界）分解所对应的扭曲复形（可能无限多个）生成的范畴给出，并将其视为 $\mathrm{Tw}_{\pm}(\mathrm{add}\, A)$ 的全子范畴；后者是无界双侧扭曲复形范畴。

因此，（可能无界的）扭曲复形理论提供了一个自然的 dg 增强框架，将经典等价 $\mathrm{per}(A) \simeq \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}\, A)$ 和 $\mathcal{D}^b(A) \simeq \mathcal{K}^{-,\,b}(\mathrm{proj}\ A)$ 推广到有限维零分次代数 A 的情形。其中，$\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}\, A)$ 和 $\mathcal{K}^{-,\,b}(\mathrm{proj}\ A)$ 分别表示投射模的有界复形以及具有有界上同调的投射模上有界复形的同伦范畴。

4.2. 分次温和代数有界导出范畴的几何模型。现在我们为分次温和代数 A（见 [125]）的有界导出范畴 $\mathcal{D}^b(A)$ 引入曲面模型 S。如第 3 节最后一段所述，曲面 S 源自与 A 相关的带状图 Δ，其构造如 [145]所示。具体而言，给定一个有限维（分次）温和代数 $A = \Bbbk Q/I$，其关联带状图 Δ 的顶点由 (Q, I) 中的极大路径，以及顶点仅在所有极大路径中出现一次的所有零长度路径构成。Q 的每个顶点 v 都会产生 Δ的一条边，该边连接 Δ 中与包含 v 的路径相对应的两个顶点。与 Δ 的一个顶点相对应的路径中的箭会确定一个线性序，其循环完备化赋予 Δ 带状图结构。针对无限维分次温和代数的 Δ 构造也作了相应调整，示例见图 1。

曲面剖分由 S 中的一组曲线给出，将曲面切割成多个多边形。这里我们考虑由带状图 Δ 嵌入 S 所诱导的曲面剖分，其中 Δ 的顶点与 S 的边界粘合。顶点对应于标记点，记作 $\circ$，而与 Δ 的边相对应的曲线在图中以绿色表示。随后，Δ 的对偶（记作 Δ^*，以红色表示）充当 $\mathcal{D}^b(A)$ 的一种坐标系。$\mathcal{D}^b(A)$ 的不可分解对象对应于 S 中的某些曲线；它们作为扭曲复形的表示，可以直接从与属于 Δ^* 的曲线的交叉中读出。$\circ$ 的顶点与 Δ 的顶点 $\bullet$ 在每个边界分支上交替出现。对于同调非光滑温和代数，曲面内部还存在 $\bullet$点。因此，剖分 Δ 是

使得每个多边形恰好包含一个 •点，该点位于边界上或内部。我们将具有此性质的任何剖分称为容许剖分。具体示例见图 1。

此外，温和代数的分次会诱导带状图 Δ 的分次，进而诱导相关曲面 S 上所有曲线的分次。事实证明，对于闭曲线，这种分次恰好对应于闭曲线的绕数。这里的绕数是相对于由分次温和代数在 [114] 中构造的曲面上的线场而言的。

关于 Koszul 对偶的说明。分次温和代数的 Koszul 对偶会互换 Δ 和 Δ^* 的角色。特别地，我们注意到，适当的同调非光滑分次温和代数在曲面内部有 • 个点（对应于每个长度为 2 的子路径上都有关系的循环），但没有 ∘ 个点。相比之下，同调光滑但非适当的分次温和代数将会有 ∘ 个点位于曲面内部（对应于没有关系的循环），但没有内部 •点。例如，请参见图 1 中的两个 Koszul 对偶代数。非光滑且非适当的分次温和代数所对应的曲面，其内部既有 •点，也有 ∘点；Koszul 对偶会互换这两类点的作用。

4.3. $\mathcal{D}^b(A)$中的不可分解对象与曲面上的分次曲线之间的双射。在 [90] 中证明，对于分次温和代数 A ，per(A)中的不可分解对象（以扭曲复形表示）与相应分次标记曲面上带局部系统的曲线同伦类之间存在双射。从表示论的角度出发， [125] 中也针对 $\mathcal{D}^b(A)$证明了同样的结论。对于零次分次情形，这建立在以同伦串和同伦带对不可分解对象进行分类的基础上 [28], 另见[48]。在一般分次情形中，还用到了 [90] 和 [9] ，以及 Koszul对偶。我们注意到， [125] 的新分次版本也依赖于 [40] 中的证明：对于分次温和代数，由单对象生成的导出范畴的厚子范畴与 $\mathcal{D}^b(A)$相同。不可分解对象与曲线之间的双射。基本思路是， Δ^* 的边充当一种坐标系。最简单的情况下，由 Δ的边给出的曲线对应于形如 $P_i = e_iA$的不可分解 dg A-模，其中 i 是 Q 中与 Δ的边对应的顶点，见图 1。更一般地，给定一条曲线 γ，其对应的扭曲复形X_γ 及其微分 d_γ 由该曲线 γ 与 Δ^*的边依次交叉而构造。微分 d_γ 由 Q中相应的路径诱导。我们在图 2 中对此加以说明。我们注意到，一般而言，曲线上的分次也由曲线与对偶剖分 Δ^*的交叉决定，它们编码了移位函子在 $\mathcal{D}^b(A)$中对象上的作用。

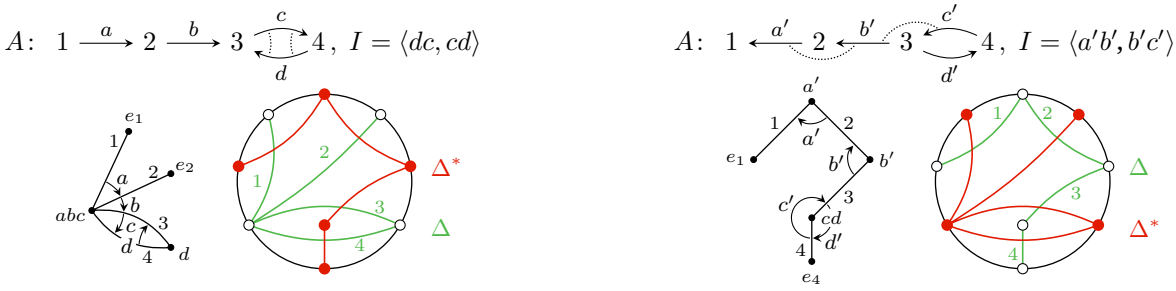
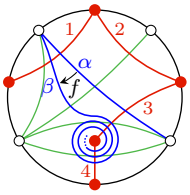


FIGURE 1. 两个互为 Koszul 对偶的（分次）温和代数、它们的带状图以及相应的容许剖分。箭图中的每条路径都会在相应的不可分解 dg A模之间诱导一个态射 $e_iA = P_i$。例如，对于左侧的模型，我们有态射 $P_1 \xrightarrow{a.} P_2[|a|]$ $P_2 \xrightarrow{b.}$ ，

$P_3[|b|]$ $P_1 \xrightarrow{ba.} P_3[|a| + |b|]$ $|a|$ $|b|$ a b

以及 ，其中 和 分别表示 和 的次数。

$A\colon\ 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \underset{d}{\overset{c}{\rightleftarrows}} 4\,,\ I = \langle dc, cd\rangle$



$$X_\alpha = P_1 \oplus P_3[|a|+|b|-1] \qquad d_\alpha = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$X_\beta = P_1 \oplus P_3[|a|+|b|-1] \oplus P_4[|a|+|b|-1-|d|+1] \oplus P_3[|a|+|b|-1-|d|+1-|c|+1] \oplus \cdots \qquad d_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ ba & 0 & d & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & c & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

FIGURE 2. 有界扭复形 X_α 和无界扭复形 X_β 的示例，其微分分别为 d_α 和 d_β；两者之间存在一个态射 f，该态射由分量 $P_1 \oplus P_3[|a|+|b|-1]$上的恒等映射诱导。

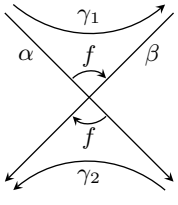
总之，与同伦串相关联的扭曲复形，在曲面上对应于连接 $\circ$-点且带有分次的开曲线同伦类。与同伦带相关联的扭曲复形，则对应于（可分次）闭曲线的同伦类，详见 [125] 。就 [114], 中由分次温和代数定义的线场而言，可分次闭曲线就是绕数为零的曲线。我们将连接 $\circ$-点的曲线同伦类称为分次弧，并将可分次闭曲线的同伦类称为分次闭曲线。正如同伦带伴有一个有限维不可分解$\mathbb{k}[X^{\pm}]$-模，相应的分次闭曲线也伴有一个有限秩不可分解局部系统。这描述了 per(A)中的不可分解对象。

要从 per(A过渡到 $\mathcal{D}^b$(A，我们需要添加额外的曲线。对于非光滑分次温和代数，其关联曲面的内部将有 $\bullet$点。为了在 $\mathcal{D}^b$(A中的不可分解对象与曲面上的曲线之间建立对应关系，我们需要在上述分次弧和曲线的集合中加入所有（同伦类意义下的）分次曲线：它们的一端或两端（在局部）沿顺时针方向绕曲面上的 $\bullet$点螺旋，并附带一个分次。

4.4. $\mathcal{D}^b$(A)中态射与映射锥的几何解释。对于 A 有限维温和代数， $\mathcal{D}^b$(A)中两个不可分解对象之间的态射空间的一组基，在 [12] 中借助（同伦）串组合得到了明确描述。 [125] 证明了 [12] 中的结果在分次情形下仍然成立，从而给出了 A 适当分次温和代数对应的 $\mathcal{D}^b$(A) 中不可分解对象之间态射空间基的代数描述。基于 [12] 中对这些基态射的描述及其在分次情形下的推广， [125] 证明了基态射与 A所关联的分次标记曲面上的（有向）交点之间存在双射。

此外，基态射的映射锥可以从曲面模型中读出。具体来说，给定一个对应于定向交点的基态射，其映射锥由与消解该交叉的曲线相关联的不可分解对象的直和给出。这一结果基于用同伦串组合来计算这些映射锥， [52] 而这同样可以推广到分次情形。

更确切地说，对于与曲线 α 和 β 相关联的 X_α 和 X_β 扭曲复形，设 $f\colon X_\alpha \to X_\beta$ 是与定向交点 f 相关联的态射。那么，可以在 γ_1 和 γ_2 上定义分次，使得存在一个三角形 $X_\alpha \xrightarrow{f} X_\beta \to X_{\gamma_1} \oplus X_{\gamma_2}$，其中 X_{γ_1} 和 X_{γ_2} 是与分次曲线 γ_1 和 γ_2 相关联的扭曲复形。我们注意到，如果 α 和 β 的交点位于边界上，则 X_{γ_1} 或 X_{γ_2} 中的任一个都可能为零；如果交叉消解对应于一条闭曲线，则 γ_1 可能与 γ_2 视为相同。在后一种情况下，相应的对象 X_{γ_1} 可能是可分解的。



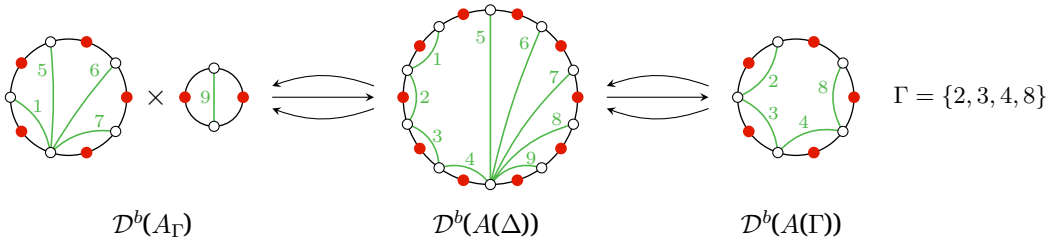


FIGURE 3.以曲面切割描述分次 gentle 代数的导出范畴拼接示例，其中代数 $A(\Delta)$ 由下式给出$1 \xrightarrow{a_1} 2 \xrightarrow{a_2} 3 \xrightarrow{a_3} 4 \xrightarrow{a_4} 5 \xrightarrow{a_5} 6 \xrightarrow{a_6} 7 \xrightarrow{a_7} 8 \xrightarrow{a_8} 9$ 且 $\Gamma = \{2,3,4,8\}$。于是 $A_\Gamma : (1 \xrightarrow{b} 5 \xrightarrow{a_5} 6 \xrightarrow{a_6} 7) \times 9$ 其中 $|b| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| - 3$ 且$A(\Gamma)$: $2 \xrightarrow{a_2} 3 \xrightarrow{a_3} 4 \xrightarrow{c} 8$ 其中 $|c| = |a_4| + |a_5| + |a_6| + |a_7|$。

4.5. per(A) 中 Serre 函子的几何解释。由于适当分次温和代数 A 是 Gorenstein 的，完美导出范畴 per(A) 具有由导出 Nakayama 函子 $\nu = - \otimes^{\mathbb{L}}_A DA$ 给出的 Serre 函子 $\mathbb{S}$，例如参见 [96, 98, 109]。这就是 Auslander–Reiten 平移 τ 的平移，即 $\mathbb{S} = \tau[1]$。此外，文献 [125], 证明，对于一条分次弧 γ 及其相关联的扭曲复形 X_γ，该弧连接 S 上的 $\circ$点，则 $\mathbb{S}(X_\gamma)$ 是与曲线 γ' 对应的扭曲复形；该曲线由 γ 得到，具体方法是沿顺时针方向将该曲线的每个端点移动到同一边界分支上的下一个 $\circ$点。对于与分次闭曲线对应的扭曲复形，Serre 函子仅作为平移发挥作用，只改变曲线的分次。

导出范畴中的 Serre 函子及其范畴熵（定义见 [68], ）已得到广泛研究，例子见 [73, 74]。近期， [56] 给出了适当且同调光滑的分次 gentle 代数的完美导出范畴中 Serre 函子的范畴熵，并以相关分次标记曲面中边界分支的绕数及其标记点数量来表示。

4.6. 拼接与曲面切割。本节将看到，分次温和代数的有界导出范畴的拼接可以用曲面切割来表示，另见 [70]。这为下面许多结果的证明提供了约化技巧。我们指出，在研究曲面 Fukaya 范畴的 Bridgeland 稳定性条件时，也曾采用过类似的曲面切割思路，见 [151]。

在 [58], 中，给定一个同调光滑且适当的分次温和代数 A（Δ），以及与之关联的曲面剖分 Δ，文中证明，对 Δ 中的一组弧 Γ 进行切割（并沿切口收缩），会得到分次温和代数的有界导出范畴之间的一个拼接。切割集 Γ 本身是一个带状图（可能不连通），其分次由 Δ 的分次诱导，并由此得到一个温和代数 A（Γ）。另一方面，拼接左侧的三角范畴等价于某个分次温和代数 A_Γ 的有界导出范畴。因此，根据 [58]，存在一个三角范畴的拼接（见图3）

$$\mathcal{D}^b(A_\Gamma) \rightleftarrows \mathcal{D}^b(A(\Delta)) \rightleftarrows \mathcal{D}^b(A(\Gamma)).$$

该证明基于一个分次二次单项式代数相对于一部分二次关系的部分余纤维化微分分次代数分解。 [36] 中讨论了一个类似的结果，即对带对象进行局部化。

5. Fukaya categories of surfaces with stops

在辛几何中，扭曲复形范畴（见第4.1节）是研究 Fukaya 范畴的核心工具 [148]。在此背景下，通常考虑 $\mathcal{A}$ 上的有界扭曲复形范畴 tw($\mathcal{A}$)，其中 $\mathcal{A}$ 是一个 A_∞ 范畴。 $\mathcal{A}$ 的对象对应一组生成拉格朗日子流形，其态射反映拉格朗日交理论，而高阶态射则对应伪全纯圆盘的计数。于是，tw($\mathcal{A}$) 是一个预三角 A_∞ 范畴，有时也称为拓扑 Fukaya 范畴。范畴 tw($\mathcal{A}$) 不仅包含 $\mathcal{A}$ 中的生成拉格朗日子流形，也包含扭曲复形，例如态射的映射锥，它们为拉格朗日子流形的连通和（拉格朗日手术）建模 [77, 78]。

温和代数在表示论中历史悠久（参见第2节），而分次温和代数则作为标记曲面拓扑Fukaya范畴的形式生成元出现。第4节中的曲面模型可以视为一个正合辛曲面，而属于该剖分的曲线 [90] 则构成一组生成拉格朗日子流形。该 Δ -点对应于部分缠绕 Floer 理论意义下的停止点 •。此外，[16, 17, 79, 80]-点和 ◦-点在曲面内部对应于拓扑 Fukaya 范畴模型中的 •非停止边界分支和完全停止边界分支，分别如此。

这一辛几何视角为研究温和代数带来了新的启示，也为考虑具有 $\mathbb{Z}$-分次且可能具有非平凡 A_∞-结构的温和代数提供了强有力的动机。在这一分次背景下，还可以考虑没有边界线段且内部没有

•点，此外还有第4节中讨论的带有 •点的多边形。这些新类型的多边形可以理解为伪全纯圆盘，由此产生高阶乘积 μ_n，使相应的 gentle 代数具有非平凡的 A_∞结构。这些多边形自然出现在像第4节那样向容许剖分中添加额外弧时。具体而言，对于边界上的每个 •点，都添加一条弧，使 •点位于一个二边形中。用 [90] 的术语来说，所得的曲面剖分是完全弧系的一个例子，见图 4 左侧。

将由不含 •点的多边形所给出的、配备这一 A_∞结构的分次温和代数视为一个 A_∞范畴 $\mathcal{A}$，便可将分次标记曲面（S, M, η）的（拓扑）部分缠绕福柯范畴定义为 $\mathcal{W}$（S, M, η）$=$tw（$\mathcal{A}$）。 S 上的分次结构由线场 η给出，它是 S的射影化切丛的一个截面。此外，研究表明，除 Morita 等价外，tw（$\mathcal{A}$）与所选的完全弧系无关。范畴$\mathcal{DW}$（S, M, η）：$=\mathrm{H}^0$ tw（$\mathcal{A}$）是三角范畴。根据 [90]，它的不可分解对象包括 S 中连接 ◦点的所有曲线（及其平移），以及所有绕数为零的闭曲线（相对于线场 η而言），每条曲线还配备一个有限秩的不可分解局部系统。 [90]还表明，对于由（S, M, η）的容许剖分定义的任意分次温和代数 A， $\mathcal{DW}$（S, M, η）都与 per（A）三角等价，见图 4。也就是说，特别地，如果 A和 B是由（S, M, η）的两个容许剖分得到的两个分次温和代数，那么 per（A）$\simeq$per（B）。用 [90] 的术语来说，容许剖分称为完全形式弧系。

在 [114] 中给出了一种逆向构造。从一个（同调光滑的）分次 gentle 代数 A 出发，构造一个带状图（按照第4节的术语，它对应于剖分 Δ^*），并由此得到一个标记曲面（S， M）。此外，根据 A 的分次，在（S， M）上定义了一个线场 η，使得 per(A) 与 $\mathcal{DW}$（S， M， η）三角等价。

在预三角化的 A_∞范畴层面上工作时，Kontsevich 猜想 Stein 流形 [106]的全包裹 Fukaya 范畴具有余层论描述。在 [90] 中，作者证明这种余层论构造适用于带停止点的曲面的部分包裹 Fukaya 范畴，并将其与分次温和代数联系起来。按照第4节的术语，他们证明，对于具有对偶容许剖分 Δ和 Δ^*的分次标记曲面（S， M， η），范畴 tw($\mathcal{A}$) 是定义在 Δ^* 上的预三角化 A_∞范畴余层的整体截面范畴（ Δ^* 在其中发挥曲面拉格朗日核的作用）。

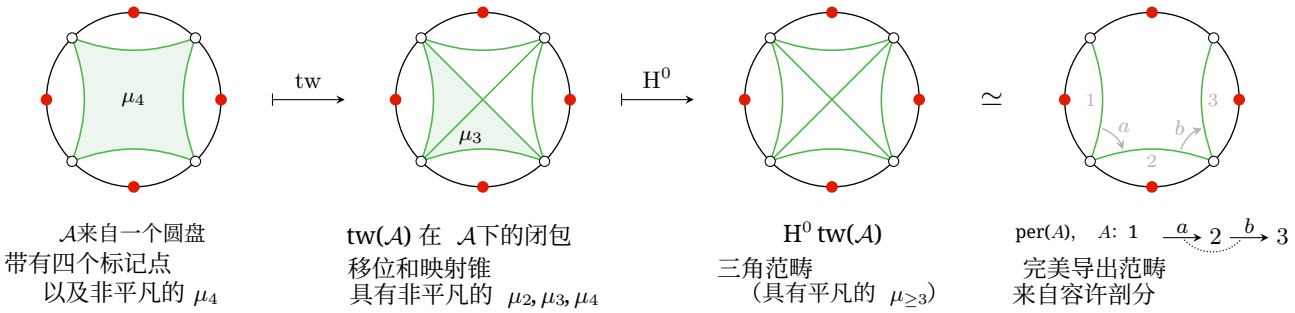


FIGURE 4. tw($\mathcal{A}$) 的形式生成元和非形式生成元 $= \mathcal{W}(S, M, \eta)$。

这种余层理论视角也揭示了温和代数本身的性质。具体而言，分次温和代数 A 可以视为由以下构件组成的同伦余极限：类型为 $\mathbb{A}$和 $\mathbb{A}$的分次~箭图，模去由所有长度为二的路径生成的关系理想；该余极限取自微分分次范畴的同伦范畴，其意义见 [101, 150, 153], 图 6及其说明。

我们进一步指出，在 [90], 中，曲面 (S, M, η) 是带有指数型奇点的黎曼曲面 Σ 上某个平坦度量的度量完备化。它在 $\mathcal{DW}(S, M, \eta)$ 上的 Bridgeland 稳定性条件空间与 Σ [90, 151] 上的平坦结构 $\mathcal{M}(\Sigma)$ 空间之间给出了一个同构。

6. Exceptional sequences: Existence and braid group action

例外序列是一种将三角范畴分解为更小部分的工具，而完整例外序列可以看作三角范畴的一个特定生成元。它们最早出现在 Beilinson 对 $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}\,\mathbb{P}^n)$ 的研究中，在该研究中他证明了线丛序列 $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1) \ldots, \mathcal{O}(n))$ 构成一个完整例外序列。对其他三角范畴的推广很快发展起来，完整例外序列也逐渐成为连接代数几何与有限维代数的表示论的桥梁之一 [37]。

三角范畴 $\mathcal{T}$中的序列 $\mathsf{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ 是例外序列，当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_i, E_i[\mathbb{Z}_{\neq 0}]) = 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_i, E_i)$ 是除环，且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_i, E_j[\mathbb{Z}]) = 0$，对 $j > i$ 均成立。若 $\mathrm{thick}_{\mathcal{T}}(\mathsf{E}) = \mathcal{T}$，则例外序列 E 是完备的。我们注意到，对例外序列中的 E_i 作平移会得到另一个例外序列，因此 $\mathbb{Z}^n$ 在 $\mathcal{T}$ 中的完备例外序列集合上有自然作用。

6.1. 分次温和代数导出范畴中的例外序列。一般而言，在三角范畴中寻找完备例外序列，或确定其是否存在，都非常困难。对于分次温和代数 A 的完美导出范畴 per(A，其对应的分次标记曲面为（S， M， η），文献 [58, 59] 证明，完备例外序列存在，当且仅当 • 的内部没有 S -点（等价地，A 同调光滑），且边界上至少有两个 ∘-点。此外，若完备例外序列存在，则它们与满足相应箭图没有有向圈 [58, 59] 的可容许曲面剖分一一对应。这一判据完全可以仅用曲面来表述，见 [59]。用可容许曲面剖分刻画完备例外序列表明，若 per(A) 存在完备例外序列，则任何长度相同的例外序列都是完备的，从而证实了 [111, 猜想 110] 对 per(A) 成立。例外序列与半正交分解密切相关；对于分次温和代数的导出范畴，文献 [107]从相应曲面的角度研究了半正交分解。

6.2. 辫群作用于完备例外序列的非传递性示例。根据 [85] ，例外序列上存在一种自然的突变运算，它在 $\mathcal{T}$ [37] 中完备例外序列的集合上诱导出辫群 $\mathfrak{B}_n$ 的作用。在 [39] 中，这一作用得到进一步研究，并提出猜想，认为 $\mathbb{Z}^n \rtimes \mathfrak{B}_n$ 的作用应当是传递的。已证明这一结论在许多情形下成立，例如遗传代数的导出范畴 [65, 138], 、德尔佩佐曲面、射影平面和加权射影直线上的相干层的导出范畴[110, 121], ，以及对应曲面亏格为零的温和代数的完美导出范畴 [59]。

利用分歧覆盖理论中的Birman–Hilden理论和Hurwitz系统，文献 [57] 证明，对于某些分次温和代数， $\mathbb{Z}^n \rtimes \mathfrak{B}_n$ 在per(A)的完备例外序列集合上的作用不仅不是传递的，而且还分解为无穷多个轨道。特别地，这适用于这样一类分次温和代数：其对应的分次标记曲面（S， M， η）恰好有两个标记点，且亏格大于1。这些分次温和代数与如下分次温和代数导出等价；对于后者，其箭图（ $n \geq 3$）为：



最近，文献 [122]给出了这些代数的辫群作用非传递性的一种新的代数证明。

7. Derived equivalences

本节展示如何利用第4节的曲面模型来获得关于导出等价的结果，并为分次温和代数给出一个完备导出不变量。

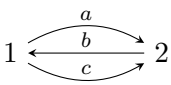
7.1. 导出等价：作为可容许曲面剖分的silting对象与倾斜对象。三角范畴中的另一类生成元由所谓的silting对象给出，该概念由 [103] 引入。根据 [1] ，每个完整例外序列都会产生一个silting对象。由此立即得到，只要 $\mathcal{T}$ 具有一个完整例外序列，它也具有一个silting对象。正如完整例外序列并不总是存在一样，silting对象也未必存在。

设 $\mathcal{T}$ 是一个三角范畴。若对象 $X \in \mathcal{T}$ 满足 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X[\mathbb{Z}_{>0}]) = 0$，则称其为预silting对象。若进一步满足 $\mathrm{thick}_{\mathcal{T}}(X) = \mathcal{T}$，则称 X 为silting对象。注意，对于非正分次微分分次代数 A，代数 A 本身是 per(A) 中的一个silting对象。silting对象会产生导出等价，例如参见 [98, 99]。

silting对象是倾斜对象的一种推广。在结合代数的语境下，为推广（广义）倾斜模而提出了导出范畴中的倾斜复形这一概念 [136] ，并将其用于研究导出Morita等价；另见 [99]。关于倾斜理论的介绍性论述，可参见例如 [8] 或 [95]。给定一个三角范畴 $\mathcal{T}$，若对象 $T \in \mathcal{T}$满足 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[\mathbb{Z}_{\neq 0}]) = 0$，且 $\mathrm{thick}_{\mathcal{T}}(T) \simeq \mathcal{T}$，则称其为倾斜对象。例如，对于有限维代数 A，若 $\mathcal{T} = \mathrm{per}(A)$，且 T是 $\mathcal{T}$中的倾斜对象，并且 $B = \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(T)$，那么 per($A$)与 per($B$)，以及 $\mathcal{D}^b(A)$与 $\mathcal{D}^b(B)$分别三角等价。在这一框架下，任何导出等价都由一个倾斜复形诱导。

构造导出等价的一项关键技术是构造倾斜对象和 silting 对象，并计算它们的自同态代数。对于分次温和代数，与之相关的分次标记曲面是一个有用的工具。更具体地说， [7, 124] 证明，对于零分次gentle代数，倾斜复形对应于某些容许剖分。在 [97] 中证明，对于分次温和代数，同样的结论也成立，即在这种情况下，silting对象也对应于容许剖分。然而请注意，目前没有几何判据可以判断某个容许剖分对应的是 silting 对象还是倾斜对象。

7.2. silting对象的存在性。在零分次代数的情形下，倾斜对象（因此也包括 silting 对象）总是存在的（代数本身就是一个倾斜对象）；而对于并非非正分次的分次代数，per(A)中可能不存在 silting 对象。事实上，利用[58], 中通过曲面切割与导出范畴的拼接之间的对应关系给出的约化技术，我们在 [97] 中完整刻画了何时一个同调光滑（不一定是 proper）的分次温和代数存在 silting 对象。也就是说，这样的代数 A 存在 silting 对象，当且仅当其箭图不存在一个 $C = a_m \cdots a_1$ 无关系的有向圈，且 $|C| = |a_1| + \cdots + |a_m| > 0$；或者当 A 同构于具有如下箭图的分次温和代数 A' 时，才不存在 silting 对象。



以及关系 ba、cb 和分次 $|a| + |b| = 1 = |b| + |c|$。从几何角度看， A 存在一个 silting 对象，当且仅当相应的分次曲面 S 内部没有绕数为负的 $\circ$点；或者，当 S 是只有一个边界分支的环面，且该边界上恰有一个 $\circ$点，并且每条非分离简单闭曲线的绕数均为零时。关于代数 A' 不存在 silting 对象这一观察，已在 [58] 中出现，并且也在 [116]中得到了证明。

请注意，对于代数 A'（其 per(A') 不存在 silting 对象），近期研究已在 [91] 中证明，per(A') 同样不允许任何 Bridgeland 稳定性条件。

7.3. 并非每个预silting对象都能补全为 silting 对象。首个关于有限维代数的例子——该代数存在一个无法补全为 silting 对象的预silting对象——见于 [116]。在 [97], 中，作者在 [58], 的基础上进一步证明，无穷多个有限维 gentle 代数都存在无法补全为 silting 对象的预silting对象。更确切地说，他们证明了：只要有限维、零次分次、整体维数有限的 gentle 代数 A 所对应的分次曲面亏格严格大于 1，该代数就存在一个无法补全为 silting 对象的预silting对象。

7.4. 分次温和代数的完备导出不变量。曲面模型为理解分次温和代数的导出等价提供了洞见。由 [90] 中的构造可知，所有源自分次标记曲面之曲面剖分的分次温和代数都是导出等价的，另见第5节。

另一方面，分次温和代数在导出等价时其曲面模型是否同胚，先验而言并不清楚。事实证明确实如此：对于零分次gentle代数， [7] 和 [124] 分别独立地利用倾斜理论证明了这一点；对于（同调光滑但不一定是适当的）分次温和代数， [97] 利用 silting理论证明了这一点：给定两个分次温和代数 A 和 A'，其曲面模型分别为（S， M， η）和（S'， M'， η'），则代数 A 和 A' 导出等价，当且仅当存在一个保定向同胚ϕ： $S \to S'$，使得 ϕ（M） $= M'$，且 ϕ_*（η）同伦于 η'。

换言之，分次标记曲面可以被视为分次温和代数 [7, 97, 124]的完备导出不变量。文献 [18]已经引入了零次分次温和代数 A 的一个纯组合导出不变量 AG(A)。文献 [114] 和 [125]分别独立证明了 AG(A)具有几何解释。它刻画了边界分支的数量、每个边界分支上的标记点数量以及边界分支的绕数。特别地，这一结果将不变量 AG 扩展到了分次温和代数。然而，文献 [2] 已知这并不是一个完备不变量。换言之，AG(A) =AG(A')并不必然意味着 A 和 A' 是导出等价的。在文献 [2, 5] 中，这一不变量被扩展为文献 [67]所定义的温和代数子类的完备导出不变量。更一般地，对于任意分次温和代数，文献 [114] 在不变量 AG(A)的基础上增加了另外两个不变量，它们涉及相应的闭曲面的基本群的一组生成元的绕数。随后证明，这个扩充后的不变量是一个完备导出不变量

在 [7, 124] 中适用于零次分次情形，在 [97] 中适用于分次情形。最近，文献 [123]又给出了分次情形的另一种证明。

8. A_∞-deformations of gentle algebras and topological Fukaya categories of orbifold surfaces

本节讨论分次温和代数的霍赫希尔德上同调（以及 Tamarkin–Tsygan 微积分）如何编码在相应的分次标记曲面上。特别是，掌握分次温和代数的第二霍赫希尔德上同调群，有助于研究它们的 A_∞- 变形。随后构造分次轨形曲面的拓扑 Fukaya 范畴，便可证明分次温和代数的 A_∞- 变形对应于相应分次标记曲面的部分紧化。

8.1. 分次温和代数的霍赫希尔德上同调与 Tamarkin–Tsygan 微积分。

Tamarkin–Tsygan 微积分（TT-演算）或微分演算这一概念由 [152] 引入。这种微积分的第一类例子是结合代数的霍赫希尔德上同调与同调，以及由杯积和帽积、Gerstenhaber 括号和 Connes 微分 [83, 152] 所诱导的相关结构。正如不同作者的一系列论文所证明的，代数的 TT-演算在导出等价下是不变量；这一系列论文最终以 [11], 收尾，另请参阅其中的参考文献。

由于计算 TT-演算所涉及的所有要素通常都非常困难，因此完整计算的案例寥寥无几。少数能够进行完整计算的情况之一是温和代数类。一个（可能是无限维的）零分次 gentle 代数的完整 TT-演算 $A = \Bbbk Q/I$ 已在 [60]中计算。特别地，研究表明，作为分次交换代数的霍赫希尔德上同调的生成元 [60] 可以通过有界导出范畴的曲面模型得到几何解释。HH 中所谓的欧拉导子[1](A与带边界曲面的基本群的一组生成元一一对应（根据 [125] ，该基本群同构于 A的箭图基本群）。HH*(A的所有其他生成元，则与由带一个标记点的边界分支，以及曲面内部的 $\bullet$-点和 $\circ$-点（S, M, η）组成的集合一一对应，这些点与 A相关。此外，绕边界或 $\bullet$-点或 $\circ$-点的绕数，与相应生成元所属的 HH*(A次数有关，见图 5。

由文献 [60], 中以生成元和关系的形式对（HH*(A) $\smile$）作为分次交换代数的结构所作的完整描述可知，它是一个二次代数。在许多情况下，它甚至是二次单项式代数，因而是 Koszul 代数。例如，当 A 既是有限维的且具有有限整体维数时，这一结论成立；但对于许多具有无限整体维数的无限维 gentle 代数，这一结论同样成立，见 [60]。

利用 Bardzell 分辨率的分次版本 [20], , 文献 [21]将这些计算推广到计算分次 gentle 代数 A的 HH^2(A)。随后，这一结果被用于研究分次 gentle 代数的 A_∞- 变形。特别地，文中证明了 HH^2(A) 的一个基与以下集合的并一一对应：

- 绕数为 1 或 2 的内部 $\bullet$点的集合，
- 恰好具有一个 $\circ$点且绕数为 1 的边界分支集合
- 绕数为 1 或 2 的内部 $\circ$-点集。

在 [31], 中证明，分次（斜）gentle 代数的分次交换结构乃至其 HH*(A) 的整个 Gerstenhaber 结构，都可以用相应的分次标记（轨形）曲面来描述，方式与图 5 所示完全相同。在 [123] 中也对分次温和代数情形下的霍赫希尔德上同调的 Gerstenhaber 结构进行了计算。

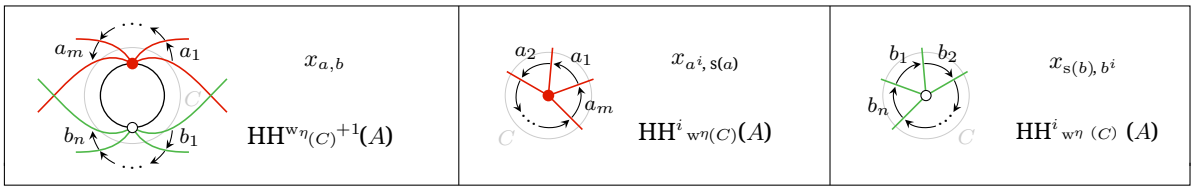


FIGURE 5. 三种非欧拉 Hochschild余循环的几何表示，它们生成 $\mathrm{HH}^*(A)$ 这一分次交换代数。对于 $a = a_m \cdots a_1$ 和$b = b_n \cdots b_1$，生成元 $x_{a,b}$ 对应于态射 $A^{\otimes m} \to A$，它将$a_m \otimes \cdots \otimes a_1$ 映射到 b（左图）；$x_{a^i,\mathrm{s}(a)}$：$A^{\otimes im} \to A$ 对所有 $0 \le j < m$，将 $(a_{j+m-1} \otimes \cdots \otimes a_j)^{\otimes i}$ 映射到 $e_{\mathrm{s}(a_j)}$（中图）；对偶地，$x_{\mathrm{s}(b),b^i}$：$\Bbbk Q_0 \to A$ 对所有 $0 \le j < n$，将 $e_{\mathrm{s}(b_j)}$ 映射到 $(b_{j+n-1} \cdots b_j)^{\,i}$（右图）。指标按循环顺序标记；若 $\mathrm{w}\eta(C)$ 为偶数或 $\mathrm{char}(\Bbbk) = 2$，则 $i = 1$。

8.2. 分次温和代数的 A_∞-变形。关于霍赫希尔德上同调的知识可用于描述分次温和代数的 A_∞-变形理论。在 [21]，中，利用微分分次范畴的变形理论在导出等价下的不变性，[100]，（另见 [117]，）构造了一个显式的变形族 $\{\mathrm{per}(A_\lambda)\}_{\lambda \in \Bbbk^d}$，其对象是分次温和代数的（微分分次增强）完美导出范畴。每个 A_λ 都可视为分次温和代数 $A = A_0$ 的 dg 变形。由于 A 的 Hochschild 2-余循环自然对应于绕数为 1 或 2 的边界分支（见第 8.1 节），一个自然的问题是，相应的变形是否也有自然的几何解释。事实确实如此：该 A_∞-变形族的各个纤维 $\mathrm{per}(A_\lambda)$ 对应于 A 的分次标记曲面的部分紧化。具体而言，绕数为 1 的边界分支被替换为带有 2 阶轨形点的圆盘，而绕数为 2 的边界分支则被替换为光滑圆盘。这反映了这样一个事实：恰好在这两种情况下，线场可以光滑地延拓到粘接在边界分支上的圆盘或轨形圆盘。

这些结果首次阐述了在部分缠绕 Fukaya 范畴背景下，Fukaya 范畴的变形与部分紧化之间的关系；这一关系在完全缠绕情形下由 [147] 提出，并在例如 [130, 149] 中得到研究。

A_∞ 对无限维 $\mathbb{Z}/2$-分次温和代数的变形进行了研究，承接了 [34] 的工作，详见 [35]。

8.3. 带停止点的轨形曲面的拓扑 Fukaya 范畴。关于从曲面 Fukaya 范畴变形的角度出发，将轨形点加入曲面以实现部分紧化的观察，可以发展为一套内在理论，用以研究带有 2 阶轨形点的分次轨形曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴（S、M、η）。不同研究者从多个角度独立完成了这项工作（[6, 22, 61]）。将剖分的概念推广到轨形曲面后，便可用几种不同方式定义分次轨形曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴

- 通过与轨形曲面上弧系相关联的显式 A_∞-范畴，其中在 [61] 中使用标记弧，在 [22], 中使用未标记弧$\sim$ $\sim$
- 作为整体商范畴或不变范畴：作为轨形曲面在 [6, 22] 中的双覆盖 $(S, M, \widetilde{\eta})$ 的 Fukaya$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$范畴的轨道范畴 $\mathcal{W}(S, M, \widetilde{\eta})/\mathbb{Z}_2$，以及作为 [61] 中双覆盖的不变范畴 $\mathcal{W}(\widetilde{S}, \widetilde{M}, \widetilde{\eta})^{\mathbb{Z}_2}$（注意，$\mathcal{W}(\widetilde{S}, \widetilde{M}, \widetilde{\eta})/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathcal{W}(\widetilde{S}, \widetilde{M}, \widetilde{\eta})^{\mathbb{Z}_2}$），

- 作为 [22] 中沿轨形曲面的带状图粘合的、由根基平方为零的 dgalge-$\widetilde{\ }$bras 类型 $\mathbb{A}$、$\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{D}$ 的 A_∞-范畴余层的整体截面范畴。

在 [22] 中，证明了这三种构造是等价的。此外，通过 A_∞范畴的余层来理解的第三种视角，可以看作是 Kontsevich 的一个猜想 [106],的实例，该猜想推广了光滑曲面的情形（见第5节）。图 6 展示了一个构造示例

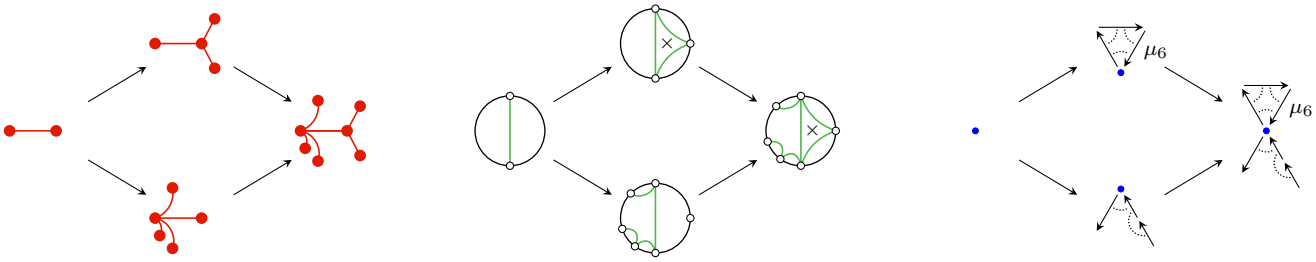


FIGURE 6. 左侧展示了一个（同伦）推出的例子，其中沿着（对偶）带状图中的边进行粘合 Δ^*，由此在中间得到轨形曲面的粘合，在右侧则得到沿顶点粘合的代数（位于微分分次范畴的同伦范畴中）。非平凡的 μ_6 记录了轨形结构，而设置 $\mu_6 \equiv 0$ 对应于第5节中光滑曲面的余层构造。

将 $\mathcal{W}(S, M, \eta)$表示为沿左侧（红色）带状图的微分分次范畴的同伦推出。含有一个轨形点的内部三边形在右侧产生了高阶乘积μ_6，也可以将其视为类型为 $\mathbb{D}$的一个分量，见 [22, 24]。

8.4. 轨形曲面 Fukaya 范畴中的新分次结合代数。分次轨形曲面的 Fukaya 范畴 $\mathcal{W}(S, M, \eta)$总存在一个形式生成元，其对应的结合代数是分次斜温和代数。这为斜温和代数 [3, 4, 113, 133]的导出范畴的不同轨形曲面模型提供了辛解释。与温和代数不同，斜温和代数在导出等价下并不封闭。然而，与 $\mathbb{D}$ 型箭图导出等价的代数（即导出斜温和代数）已于 [6] 利用轨形圆盘的几何模型完成分类。更一般地，轨形曲面的剖分会产生一类新的分次结合代数，称为半温和代数。这些代数已在 [22, 104]中根据轨形剖分完成分类。半温和代数与分次斜温和代数导出等价，并且据猜想在导出等价下封闭[22,猜想 8.1]。

9. OUTLOOK

分次 gentle 代数和斜温和代数的几何模型，有助于全面理解它们的导出范畴，并凸显了在表示论中考虑分次代数的重要性。类型为 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{D}$ 的导出驯（分次）遗传代数，通过粘合多边形或轨形多边形（实现为微分分次范畴的同伦余极限）产生（分次）gentle 代数和斜温和代数；这一构造涵盖了大多数已知的导出驯代数。一个例外是类型为 $\mathbb{E}$的代数。它们是遗传且表示有限的，因此是导出离散的；据我们所知，目前尚不存在相应的辛曲面模型。

此外，例如，要确保导出驯代数的同伦余极限仍然是导出驯的，还需要满足哪些条件，目前尚不清楚。（余）层论技术在微分分次范畴和 A_∞-范畴 [101, 150, 153] 以及 ∞-范畴 [118], 的同伦论中具有坚实基础，但它们对于表示论的重要性才刚刚开始得到认识。不断增加的证据（如 [21, 22, 63, 72, 90] ）以及簇理论[62, 102] 近期取得的进展，展示了这些技术的重要性。

虽然“多数”导出温和代数都具有辛曲面模型，并通过同调镜像对称性对应于 [47, 114], 所述导出温和性意义下的节点曲线，但在高维几何中未必能找到这样的模型；在高维几何中，预期大多数代数都是导出野性的，这一预期是合理的。然而，这并不妨碍辛几何方法在表示论中的有效应用。

结合代数尤其源自三角范畴中的形式生成元，因此其表示论及 A_∞-变形也可望出现在各种不同的背景中。结合代数导出范畴的几何模型实例，例如见于 [71], : 该文证明，带有停止点的圆盘对称幂的（导出）部分包裹 Fukaya 范畴，与 $\mathbb{A}$ 型高阶 Auslander 代数的完美导出范畴等价。这将高维辛流形的辛几何与表示论中的高维奥斯兰德–雷滕理论联系起来 [94]。另一个高维实例是扩展的霍瓦诺夫弧代数，其由箭图和关系给出的表示见于 [23], ，另见 [41]。 [119] 证明，这些分次代数的完美导出范畴与米尔诺纤维 Hilbert概形的导出 Fukaya–Seidel 范畴等价。

我们可以期待，表示论与辛几何之间的相互作用能够加深我们对高维几何的理解，同时也能加深我们对野代数及其导出范畴的表示论的理解。

References

[1] Aihara, T., and Iyama, O.三角范畴中的 silting 突变。 *J. Lond. Math. Soc. (2) 85*，3（2012年），633–668。

[2] Amiot, C. 曲面代数的导出范畴：单边界分支环面的情形。 *Algebr. Represent. Theory 19* 5 2016 1059 1080 ，（），–。

[3] Amiot, C. 利用轨形研究斜温和代数导出范畴中的不可分解对象。载于 *Representations of algebras and related structures* 2023, 1 24 。柏林：欧洲数学学会，第–页。[4] Amiot, C., and Brüstle *Doc. Math.*, T. 利用轨形研究斜温和代数之间的导出等价。（），–。[5] Amiot, C., and Grimeland, Y. 曲面代数的导出不变量。 *J. Pure Appl. Algebra 220*，9（2016年），3133–3155。[6] Amiot, C., and Plamondon, P.-G. 作为轨形 Fukaya 范畴的斜群 A_∞-范畴。[7] Amiot, C., Plamondon, P.-G., and Schroll, S. 通过绕数和 Arf不变量构造温和代数的完备导出不变量。 *Selecta Math. (N.S.) 29*，2（2023年）。第30号。

[8] Angeleri Hügel Happel and Krause *Handbook of tilting theory* 332 *London*, L., D., *Mathematical Society Lecture Note Series* 2007 H.，编者，[9] Anno, R.卷。剑桥大学出版社，剑桥， and Logvinenko。 T., *J. Algebra 647*无界扭复形。[10] Antipov（2024年），794–822。 M. A., and Generalov, A. I., *Algebra i Analiz 17*对称特殊双串代数的 Yoneda代数的有限生成性。[11] Armenta, 3（2005年），1–23。 M. A., and Keller *C. R.*, B., *Math. Acad. Sci. Paris 357* 3 2019 236 240

[12] Arnesen代数的 Tamarkin-Tsygan演算的导出不变性。，（），–。 K. K., Laking, R., and Pauksztello, D., *J. Algebra 467*温和代数有界导出范畴中不可分解复形之间的态射。[13] Assem（2016年），1–46。 I., Brüstle, T., Charbonneau-Jodoin, G., and Plamondon, P.-G. 由曲面三角剖分产生的温和代数。 *Algebra Number Theory 4*，2（2010年），201–229。[14] Assem, I., and Happel, D. 型为 A_n的广义倾斜代数。 *Comm. Algebra 9*，20（1981年），2101–2125。[15] Assem, I., and Skowroński, A. 型为 $\tilde{\mathbb{A}}_n$的迭代倾斜代数。 *Math. Z. 195*，2（1987年），269–290。[16] Auroux, D. Fukaya 范畴与带边Heegaard–Floer同调。载于 *Proc. ICM (Hyderabad 2010), Vol. II*（2010年），印度斯坦图书公司，新德里，第917–941页。[17] Auroux, D. 对称积的 Fukaya 范畴与带边Heegaard–Floer同调。 *J. Gökova Geom. Topol. GGT 4* 2010 1 54 （），–。

[18] Avella-Alaminos and Geiss *J. Pure Appl.*, D., C. 温和代数的组合导出不变量。， （），–。[19] Baer, D. 代数表示论中的倾斜层。 *Manuscripta Math. 60*，3（1988年），323–347。[20] Bardzell, M. J. 单项式代数的交替上同调核行为。 *J. Algebra 188*，1（1997年），69–89。[21] Barmeier, S., Schroll, S., and Wang, Z. 曲面部分包裹 Fukaya 范畴的变形。[22] Barmeier, S., Schroll, S., and Wang, Z. 轨形曲面的部分包裹 Fukaya 范畴。[23] Barmeier, S., and Wang, Z. 扩展霍瓦诺夫弧代数的 $\mathbb{A}_\infty$ 变形与 Stroppel 猜想。[24] Barmeier, S., and Wang, Z. 表示论中的轨形曲面 Fukaya 范畴，2025年。

[25] Baur, K. and Coelho Simões R. *Int. Math.*, *Res. Not. IMRN* 15 2021 11357 11392
[26] Baur, 温和代数模范畴的一个几何模型。, （）, –。 K., and Schroll, S., *Bull. Sci. Math. 170* 温和代数的高阶扩张。
[27] Bekkert（2021年）。第103010号。
V. Giraldo H. and Vélez-Marulanda J. A. *Proc. Amer.*,[28] Bekkert, *Math. Soc. 149* 11 2021 4555 4567
V., Marcos, 导出驯中山代数。, （）, –。 E. N., and Merklen, H. A., *Comm. Algebra 31*,[29] Bekkert,
V. and Merklen H. A. *Algebr. Represent.* 斜温和代数导出范 *Theory 6* 3 2003 285 302
畴中的不可分解对象。[30] Bekkert, 6（2003年）, 2615–2654。 V. I., and Drozd, Y. A., 温和代数导出范畴中的不可分解对象。, （）, –。[31] Bian, X., Schroll, S.导出范畴的驯-野二分性。 Solotar, A., Wang, X.-C., and Wen, C.,
[32] Bobiński, G., *J. Pure Appl. Algebra 215*,[33] Bobiński分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调：格斯滕哈伯代数结构与几何解释。 G. Geiss C. and Skowroński A. *Cent. Eur. J.*, *Math. 2* 1 2004 19 49
[34] Bocklandt温和代数上完美复形的几乎分裂三角。 R., 4（2011年）642–654（）, –。 *Trans. Amer. Math. Soc. 368*,
[35] Bocklandt, R.,
and van de Kreeke A_∞ *Providence RI: American*, 离散导出范畴 *Mathematical Society 2024*
的分类。, （）, –。 J.,[36] Bodin带孔曲面的非交换镜像对称。 P., 1（2016年）, 429–469。附录由 Mohammed Abouzaid 撰写。[37] Bondal,
A. I. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*,[38] Bondal, *53* 1 1989 25 44
A. I.温和代数的变形。在 and Kapranov, M. M.。 *Mat. Sb. 181*,[39] Bondal由球形带对象产生的分次温和代数的拼接。
A. I., and Polishchuk结合代数的表示与相干层。, （）, –。 A. E.,*Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 57*,[40] Booth, M.带框架的三角范畴。 Goodbody, 5（1990年）, 669–683。 I., and Opper, S.,[41] Bowman结合代数的同调性质：螺旋方法。 C., 2（1993年）, 3–50。 Visscher, M. D., Hazi, A., and Stroppel, C. 代数与拓扑中的自反微分分次范畴。[42] Broomhead, N., Pauksztello, D., and Ploog, D., *J. Lond. Math. Soc. (2) 93*,[43] BroomheadHecke 范畴与霍瓦诺夫弧代数的箭图表示及同构。 N., Pauksztello, D., and Ploog, D., *Math. Z. 285*离散导出范畴 II：倾斜对 CW 复形与稳定性流形。
[44] Broomhead, 2（2016年）, 273–300。 N. T., *Adv. Math. 336*,[45] Brüstle, T., Douville, G.离散导出范畴 I：同态、自等价与 t-结构。 Mousavand, 1-2（2017年）, 39–89。 K., Thomas离散导出范畴的厚子范畴。 H.（2018年）, 242–298。
and Yildirim, E., *Canad. J. Math. 72*,[46] Brüstle, T.,
and Zhang *Algebra Number*, J.,[47] Burban, *Theory 5* 4 2011 529 566
I., and Drozd温和代数的组合学。 Y., 6（2020年）, 1551–1580。[48] Burban, I., and Drozd, Y. 无穿孔标记曲面的簇范畴。, （）, –。[49] Burban, I., and Drozd, Y. 非交换节点曲线与导出驯代数。 *J. Algebra 272*,[50] Butler, M. C. R., and Ringel 温和代数与斜温和代数的导出范畴：同调代数与矩阵问题。 C. M., *Comm. Algebra 15*,[51] Caldero,
P. Chapoton F. and Schiffler R. A_n *Trans.* 节点代数的导出 *Amer. Math. Soc. 358* 3 2006 1347 1364
范畴。[52] Çanakçi, 1（2004年）, 46–94。 İ., Pauksztello, D., and Schroll中项较少的奥斯兰德-赖滕序列及其在字符串代数中的应用。 S., 1-2（1987年）, 145–179。 *J. Algebra 530*,[53] Çanakçi, İ., Pauksztello, 由簇产生的带关系箭图（ D. 情形）。, （）, –。 and Schroll, S., *Canad. J. Math. 73*,[54] Çanakçi, İ.,
and Schroll S. *Adv.* 温和代数有界导 *Math. 313* 2017 1 49
出范畴中的映射锥。[55] Chang（2019年）, 163–194。 W.,[56] Chang, W., Elagin, A., and Schroll温和代数的扩张。 S., 1（2021年）, 249–292。[57] Chang, W., Haiden标记曲面雅可比代数与簇范畴中的扩张。（）, –。附录由 Claire Amiot 撰写。
F., and Schroll温和代数导出范畴中的代数心的几何模型。 S., *Adv. Math. 472*,[58] Chang, W., Jin, H.带停点曲面的部分包裹 Fukaya 范畴的 Serre 函子熵。 and Schroll, S.,,,,分歧覆盖上的辫群作用与完备例外序列。（2025年）。第110284号。,,,,部分包裹 Fukaya 范畴的拼接与曲面切割。

[59] Chang, W. and Schroll S. *Selecta Math.* , , 温 *(N.S.) 29* 3 2023 33
和代数导出范畴中的例外序列。 , ( ). No. .[60] Chaparro, C., Schroll, S., Solotar, A., and Suárez-Álvarez, M. 温和代数的霍赫希尔德上同调与 Tamarkin–Tsygan 微积分。[61] Cho, C.-H., and Kim, K. 标记弧的拓扑 Fukaya 范畴。[62] Christ, M. 拓扑 Fukaya 范畴的簇理论。第二部分：高阶 Teichmüller 理论。[63] Christ, M., Haiden, F., and Qiu, Y. 反常 schober、稳定性条件与二次微分 II：相对分次 Brauer 图代数。[64] Coelho Simões, R., and Parsons, M. J. 一类负 Calabi-Yau 范畴的自同态代数。 *J. Algebra 491* (2017年), 32–57.

[65] Crawley-Boevey *Representations of algebras (Ot-* , W. 箭图表 *tawa, ON, 1992)* 14 *CMS Conf. Proc.* 1993, 117 124
示的例外序列。载于 , 美国数学会第 卷，罗得岛州普罗维登斯，页码 – 。[66] Crawley-Boevey, W. W. 零关系代数表示之间的映射。 *J. Algebra 126*, 2 (1989年), 259–263.[67] David-Roesler, L., and Schiffler, R. 无穿孔曲面上的代数。 *J. Algebra 350* (2012年), 218–244.[68] Dimitrov, G.,

Haiden Katzarkov and Kontsevich *The* , F., , L., , M. 动 *influence of Solomon Lefschetz in geometry and topology* 2014
力系统与范畴。载于 . 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，.[69] Drozd, Y. A. 导出温和代数与导出野代数。
Algebra Discrete Math. 2004, 1 (2004年), 57–74. [70] Dyckerhoff, T. $\mathbb{A}^1$曲面拓扑 Fukaya 范畴的 -同伦不变量。
Compos. Math. 153, 8 (2017年), 1673–1705. [71] Dyckerhoff, T., Jasso, G., and Lekili, Y. 高阶 Auslander 代数的辛几何：圆盘的对称积。 *Forum Math. Sigma 9* (2021年). No. e10. [72] Dyckerhoff,

T. and Kapranov M. *J. Eur. Math. Soc.* , , 三角范畴中的三 *(JEMS) 20* 6 2018 1473 1524
角剖分曲面。 , ( ), – . [73] Elagin, A. 计算三角范畴的维数：路径代数、它们的张量幂及轨形射影直线。 *J. Algebra 592* (2022年), 357–401. [74] Elagin,

A. Xu J. and Zhang S. *Eur.* , , , , 曲面上线丛的 *J. Math. 7* 1 2021 69 115
循环强例外集。 , ( ), – . [75] Fomin, S., Shapiro, M., and Thurston, D. 簇代数与三角剖分曲面。I. 簇复形。 *Acta Math. 201*, 1 (2008), 83–146. [76] Fonseca, M. P. 导出温和二次字符串代数。 *Comm. Algebra 50*, 4 (2022年), 1662–1684. [77] Fukaya, K., Oh, Y.-G., Ohta, H., and Ono, K. 拉格朗日手术与全纯圆盘，2007年。[78] Fukaya,

K. Oh Y.-G. Ohta H. and Ono K. *Lagrangian intersection Floer theory: Anomaly and obstruc-* , , , , , , . 美国数学 *tion. Part I and II* 2009
会，罗得岛州普罗维登斯，.[79] Ganatra, S., Pardon, J., and Shende, V. Liouville 扇区上的协变函子性包裹 Floer 理论。
Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 131 (2020年), 73–200. [80] Ganatra,

S. Pardon J. and Shende V. *J. Am. Math.* , , , , 包裹 *Soc. 37* 2 2024 499 635
Fukaya 范畴的扇区下降。 , ( ), – . [81] Geiss, C., and de la Peña, J. A. clan 的 Auslander-Reiten 分支。
Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 5, 2 (1999), 307–326. [82] Geiss, C., and Krause, H. 论导出温和性的概念。 *J. Algebra Appl. 1*, 2 (2002), 133–157. [83] Gel′fand, I. M., Daletskiĭ, Y. L., and Tsygan, B. L. 论非交换微分几何的一种变体。
Dokl. Akad. Nauk SSSR 308, 6 (1989年), 1293–1297. [84] Gel′fand,

I. M. and Ponomarev V. A. *Uspehi Mat.* , , 洛伦兹群的不可 *Nauk 23* 2 140 1968 3 60
分解表示。 , ( ) ( ), – . [85] Gorodentsev,

A. L. and Rudakov A. N. *Duke Math. J.* , , 射影空间上的例 *54* 1 1987 115 130
外向量丛。 , ( ), – . [86] Green,

E. L. and Schroll S. *Bull.* , , Brauer 构形代 *Sci. Math. 141* 6 2017 539 572
数：Brauer图代数的推广。 , ( ), – . [87] Green,

E. L. and Schroll S. *Proc. Edinb. Math. Soc.* , , 几乎温和代数及 *(2) 62* 2 2019 489 504
其平凡扩张。 , ( ), – . [88] Green,

E. L. Schroll S. and Snashall N. *Glasg.* , , , , Brauer图代 *Math. J. 56* 2 2014 439 464
数的群作用与覆盖。 , ( ), – . [89] Green, E. L., and Zacharia, D. 单项式代数的上同调环。 *Manuscripta Math. 85*, 1 (1994), 11–23.[90] Haiden, F., Katzarkov, L., and Kontsevich, M.平坦曲面与稳定性结构。 *Publ. Math. Inst.Hautes Études Sci. 126* (2017年), 247–318.

[91] Haiden, F., and Wu, D. 可极化半正交分解不满足 Jordan–Hölder 性质的反例。[92] He, P. Zhou Y. and Zhu B. *Math. Z.* , , , , *304* 1 2023 18 斜温和代数模范畴的一个几何模型。 , ( ). No. . [93] Ikeda, A. and Qiu Y. *q* *q* 𝕏 *Mem.* , , 通 *Amer. Math. Soc. 308* 1557 2025 +92 过 Calabi-Yau-范畴的 -二次微分构造的 -稳定性条件。 , ( ), v . [94] Iyama, O. Auslander对应。 *Adv. Math. 210*, 1 (2007), 51–82. [95] Jasso, G., Krause, H., and Schroll, S. Rickard导出Morita理论：回顾与展望。[96] Jin, H. Cohen-Macaulay微分分次模与负Calabi-Yau构型。 *Adv. Math. 374* (2020年), 107338, 59. [97] Jin, H., Schroll, S., and Wang, Z. 分次温和代数的完备导出不变量与 silting 理论。[98] Keller, B. 导出 DG 范畴。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 27*, 1 (1994), 63–102. [99] Keller, B. 论三角等价的构造。载于 *Derived equivalences for group rings*, *Lecture Notes in Math.* Springer，柏林，1998年，页码 155–176。 [100] Keller, B. Hochschild复形上高阶结构的导出不变性，2003年。[101] Keller, B. 论微分分次范畴。载于 *Proc. ICM (Madrid 2006), Vol. II*. 苏黎世：欧洲数学会，2006年，页码 151–190。[102] Keller, B., and Liu, M. 三重旗簇簇的 Higgs范畴。[103] Keller, B., and Vossieck, D. 导出范畴中的 aisle。 *Bull. Soc. Math. Belg. 40*, 2 (1988), 239–253. [104] Kim, K. 标记弧系统的拓扑 Fukaya 范畴与导出温和代数，博士论文，首尔国立大学，2024年。 [105] Kontsevich, M. 镜像对称的同调代数。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vol. 1* 1995 ¨ 120 139 , , *2 (Zürich, 1994)* ( ), Birkhauser，巴塞尔，页码 – . [106] Kontsevich, M. 同调代数的辛几何。 *MPIM Preprint Series 40a* (2009年). [107] Kopřiva, J., and Šťovíček, J. 温和代数有界导出范畴的半正交分解。 [108] Krause, H. 树模与带模之间的映射。 *J. Algebra 137*, 1 (1991), 186–194. [109] Krause, H. 表示的同调理论，剑桥大学出版社，2021年。[110] Kussin, D., and Meltzer, H. 例外曲线的辫群作用。 *Arch. Math. 79*, 5 (2002), 335–344. [111] Kuznetsov, A. 代数几何中的半正交分解。载于 *Proc. ICM (Seoul 2014), Vol. II* (2014)，Kyung Moon Sa，首尔，页码 635–660。[112] Labardini-Fragoso, D. *Proc. Lond. Math. Soc.* 与三 *(3) 98* 3 2009 797 839 角剖分曲面相关的带势箭图。 , ( ), – . [113] Labardini-Fragoso, D., Schroll, S., and Valdivieso, Y. 斜温和代数与轨形的导出范畴。 *Glasg. Math. J. 64*, 3 (2022), 649–674. [114] Lekili, Y. and Polishchuk A. *Math. Ann.* , , 通 *376* 1 2 2020 187 225 过 Fukaya 范畴得到的温和代数导出等价。 , - ( ), – . [115] Li, Z., Qiu, Y., and Zhou, Y. 分次温和代数中 Koszul对偶的几何实现。[116] Liu, Y.-Z., and Zhou, Y. 关于预silting复形补问题的否定回答。 *J. Algebra 667* (2025年), 282–304. [117] Lowen, W., and Van den Bergh, M. 阿贝尔范畴的变形理论。 *Trans. Amer. Math. Soc. 358*, 12 2006 5441 5483 ( ), – . [118] Lurie, J. *Higher topos theory*. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。 [119] Mak, C. Y. and Smith I. *O J. Eur.* , , *Math. Soc. (JEMS) 24* 9 2022 3215 3332 Hilbert概形的 Fukaya–Seidel范畴与抛物范畴。 , ( ), – . [120] Marsh, R. J., and Schroll, S. Brauer图代数的几何与簇变换。 *J. Algebra 419* (2014年), 141–166. [121] Meltzer, H. 加权射影直线上的例外向量丛、倾斜层与倾斜复形。 *Mem. Amer. Math. Soc. 171*, 808 (2004), viii+139. [122] Nakago, A., and Takahashi, A. 辫群作用在完整例外序列上非传递性的一个简单代数证明，2025年。[123] Opper, S. 分次温和代数的霍赫希尔德上同调与内在形式性。 [124] Opper, S. 论温和代数的自等价与完备导出不变量。[125] Opper, S., Plamondon, P.-G., and Schroll, S. 温和代数导出范畴的几何模型。[126] Opper, S., and Zvonareva, A. Brauer图代数的导出等价分类。 *Adv. Math. 402* (2022年). No. 108341. [127] Page, C. 温和代数导出范畴的厚子范畴。

[128] Palu, Y., Pilaud, V., and Plamondon, P.-G. 局部温和代数的非亲吻与非交叉复形。 *J. Comb. Algebra 3*, 4 (2019年), 401–438. [129] Palu, Y., Pilaud, V., and Plamondon, P.-G. *Non-kissing complexes and tau-tilting for gentle algebras*, *Mem. Am. Math. Soc.* 第 1343 卷，罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，2021年。[130] Perutz, T., and Sheridan, N. 构造相对 Fukaya 范畴。 *J. Symplectic Geom. 21*, 5 (2023), 997–1076. [131] Pogorzały, Z., and Skowroński, A. 自内射双串标准代数。 *J. Algebra 138*, 2 (1991), 491–504. [132] Qiu, Y. 装饰标记曲面：球面扭与辫群扭。 *Math. Ann. 365*, 1-2 (2016年), 595–633. [133] Qiu, Y., Zhang, C., and Zhou, Y. 分次斜温和代数的两个几何模型。[134] Qiu, Y., and Zhou, Y. 标记曲面的簇范畴：带穿孔情形。 *Compos. Math. 153*, 9 (2017年), 1779–1819. [135] Qiu, Y. and Zhou Y. *Trans.* , , 装 *Amer. Math. Soc. 372* 1 2019 635 660 饰标记曲面 II：交数与 Hom 空间维数。 , ( ), – . [136] Rickard, J. 导出范畴的 Morita 理论。 *J. London Math. Soc. (2) 39*, 3 (1989年), 436–456. [137] Ringel, C. M. 二面体 2-群的不可分解表示。 *Math. Ann. 214* (1975), 19–34. [138] Ringel, C. M. 辫群在遗传 Artin 代数例外序列集合上的作用。载于 *Abelian group theory and related topics*. 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1994，页 339–352. [139] Ringel, C. M. 温和代数的重复代数。 *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 3*, 2 (1997), 235–253. [140] Roggenkamp, K. W. 双串代数与图。载于 *Algebras and modules, II (Geiranger, 1996)*, *CMS Conf. Proc.* 第 24 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998，页 481–496. [141] Schiffler, R. 一个 A 型簇范畴的几何模型。 *J. Algebraic Combin. 27*, 1 (2008), 1–21. [142] Schröer, J. 有限维代数图谱。[143] Schröer, J. 关于重复代数的带关系箭图。 *Arch. Math. 72*, 6 (1999), 426–432. [144] Schröer, J., and Zimmermann, A. 特殊双串代数上模的稳定端同态代数。*Math. Z. 244*, 3 (2003), 515–530. [145] Schroll, S. 温和代数与 Brauer 图代数的平凡扩张。 *J. Algebra 444* (2015), 183–200. [146] Schroll, S. Brauer图代数：关于 Brauer 图代数、相关温和代数及其与簇理论联系的综述。CRM 短期课程。Springer，2018，页 177–223. [147] Seidel, P. Fukaya 范畴与变形。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)* 2002 351 360 ( ), 高等教育出版社，北京，页 –。[148] Seidel, P. *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*。欧洲数学会，苏黎世，2008。[149] Sheridan, N. 相对 Fukaya 范畴的通用性。 *Geom. Topol. 24*, 2 (2020年), 747–884. [150] Tabuada, G. 微分分次范畴范畴上的 Quillen 模型结构。 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris 340*, 1 (2005), 15–19. [151] Takeda, A. 曲面 Fukaya 范畴上的相对稳定条件。 *Math. Z. 301*, 3 (2022), 3019–3070. [152] Tamarkin, D., and Tsygan, B. 非交换微分演算、同伦 BV 代数与形式性猜想。 *Methods Funct. Anal. Topology 6*, 2 (2000), 85–100. [153] Toën, B. 微分分次范畴的同伦论与导出 Morita 理论。 *Invent. Math. 167*, 3 (2007), 615–667. [154] Vossieck, D. 具有离散导出范畴的代数。 *J. Algebra 243*, 1 (2001), 168–176. [155] Wald, B., and Waschbüsch, J. 温和双串代数。 *J. Algebra 95*, 2 (1985), 480–500.

Department für Mathematik, Universität zu Köln, Weyertal 86-90, Köln, Germany*Email address*: schroll@math.uni-koeln.de