arXiv:2601.14397v1 [math.FA] 20 Jan 2026

双圆盘上的对称舒尔类函数与对称化双圆盘上的舒尔类函数

Radomi-l Baran 和 Hugo J. Woerdeman

In Memory of Rien Kaashoek

摘要。 我们探讨双圆盘上的对称舒尔类函数与对称化双圆盘上的舒尔类函数之间的关系。除其他结果外，利用这一关系可得到对称化双圆盘上舒尔类中的有理矩阵函数的有限维实现结果，以及对称化双圆盘上无零点多项式的行列式表示结果。

数学主题分类（2020）。 主要分类：47A48；次要分类：47A13、30E05、15A15、32Q02。
关键词。 对称二变量函数，对称化双圆盘，舒尔类，Nevanlinna-Pick 插值，行列式表示。

1. 引言

这个对称化双圆盘是以下区域

$$\mathbb{G} = \left\{(s,p) \in \mathbb{C}^2 : \exists\, z,\zeta \in \mathbb{D},\ s = z+\zeta,\ p = z\zeta\right\},$$

双圆盘 $\mathbb{D}^2 = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |\zeta| < 1\}$ 在对称化映射 $(z,\zeta) \mapsto (z+\zeta, z\zeta)$下的像。尽管它具有非凸性且缺乏乘积结构，$\mathbb{G}$仍支持丰富的函数理论。尤其值得关注的是 $\mathbb{G}$上的舒尔类，即模不超过 1 的解析函数集合；该函数类已通过算子论方法得到广泛研究。

Agler 和 Young 的一项基本结果 [5] 表明，$\mathbb{G}$ 上的任意 Schur 类函数都可以实现为某个酉算子耦合的修正传递函数。Bhattacharyya 和 Sau [8] 也通过不同的方法得出了这一实现结果。这些实现反映了

ThHJW 的研究得到了美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS 2348720。

$\mathbb{G}$ 的几何结构，并将单变量中的经典线性分式模型推广到多变量情形。实现理论是插值中的一种有效工具： $\mathbb{G}$上的 Nevanlinna-Pick 问题可以用核正性来表述，这与经典理论的思路相似，但需要采用适用于对称化结构的工具；参见 [5, 8, 9]。

这些结果还与对 Γ-压缩算子的研究有关，即研究希尔伯特空间上使对称化双圆盘成为谱集的交换算子对，并且对控制理论和多变量算子理论具有启示意义。有关更多细节，请参见 [6, 7]。

在本文中，我们通过首先为双圆盘 $\mathbb{G}$ 上舒尔类中的对称函数（即 $f(z, \zeta) = f(\zeta, z)$）建立一个实现结果，得到了对称化双圆盘上舒尔类函数的实现。我们的方法的优势在于，还可以为对称化双圆盘上的有理舒尔类函数建立有限维实现。对于有理函数为内函数的情形，有限维实现在 [9, 定理 3.4] 中已经建立。此外，我们还研究了对称函数的 Nevanlinna-Pick 插值和行列式表示（见第 2 节），以及 $\mathbb{D}^2$ 上的函数的相应问题（见第 3 节）。

2. 对称函数

如果对于定义域中的所有 (z, ζ)，(ζ, z) 也属于其定义域，且 $f(z, \zeta) = f(\zeta, z)$，那么我们称函数 $f(z, \zeta)$ 是对称的 。

我们用花体大写字母表示希尔伯特空间，例如 $\mathcal{H}$，$\mathcal{U}$，$\mathcal{Y}$，并用$\mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ 表示作用于 $\mathcal{U} \to \mathcal{Y}$的有界线性算子所构成的巴拿赫空间。我们用 $\mathcal{S}_{\mathbb{D}^2}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ 表示 $\mathbb{D}^2$ 上取值于 $\mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ 的函数的舒尔类；也就是说，$f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ 是解析的，且其上确界范数 $\|f\|_\infty$ 小于或等于 1。

定理 2.1。 $f(z,\zeta) \in \mathcal{S}_{\mathbb{D}^2}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ 是对称的，当且仅当存在一个压缩共联矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & B \\ A_2 & A_1 & B \\ C & C & D \end{pmatrix} : \begin{matrix} \mathcal{H} & \mathcal{H} \\ \oplus & \oplus \\ \mathcal{H} & \mathcal{H} \\ \oplus & \oplus \\ \mathcal{U} & \mathcal{Y} \end{matrix} \tag{2.1}$$

使得

$$f(z,\zeta) = D + \begin{pmatrix} C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI & 0 \\ 0 & \zeta I \end{pmatrix} \left(I - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI & 0 \\ 0 & \zeta I \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

此外，如果 f 是有理矩阵函数，则可以选择共联矩阵使其作用于有限维空间。

证明。 只需性显然成立，因为（2.2）中给出的 f 属于$\mathcal{S}_{\mathbb{D}^2}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$，并且显然 $f(z, \zeta) = f(\zeta, z)$。

对于充分性方向，由于 $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{D}^2}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$，根据 [1], ，我们可以写成

$$f(z,\zeta) = D + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI & 0 \\ 0 & \zeta I \end{pmatrix} \left(I - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI & 0 \\ 0 & \zeta I \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

对于某个压缩共联矩阵

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{pmatrix}.$$

现在注意到

$$f(z,\zeta) = \frac{1}{2}(f(z,\zeta) + f(\zeta,z)),$$

容易看出， f 可以写成式 (2.2) 的形式，其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

还需注意

$$M = V^* \begin{pmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & \hat{M} \end{pmatrix} V,$$

with

$$V = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{pmatrix},$$

因此， M 是一个压缩算子。最后，有理矩阵情形下的有限维性由内函数情形中的 [11] 以及其他情形中的 [12,定理 1.3] 得出。□

接下来，我们考虑在（闭）双圆盘中没有根的对称多项式的行列式表示。对于不要求对称性的二元多项式，这一问题可追溯至 [13]；另见 [10]。

定理 2.2。 一个次数为(n,n)的标量值对称多项式 $p(z,\zeta)$ 在 $\mathbb{D}^2$ 中没有根，当且仅当 p 具有行列式表示

$$p(z,\zeta) = p(0,0) \det \left(I - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI & 0 \\ 0 & \zeta I \end{pmatrix} \right) \tag{2.4}$$

with

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

一个压缩算子。此外， p（z、ζ）在 $\mathbb{D}^2$ 中没有根，当且仅当 p 具有行列式表示 （2.4），其中 （2.5）是一个严格压缩算子。在这两种情况下，矩阵 A_1 和 A_2 均可选取为至多 $2n \times 2n$ 阶。

我们将在下一节给出这一结果的证明。 [13] 和 [10] 中的结果表明，也许可以将 A_1 和 A_2 选取为大小为 $n \times n$，但这是否确实成立仍是一个悬而未决的问题。我们注意到， [10,例 2.4] 说明了上述结果。

让我们考虑以下具有对称数据的 Nevanlinna-Pick 插值问题：

(NP$\mathbb{D}^2$-对称) 已知 $(z_i, \zeta_i) \in \mathbb{D}^2$ 和 $w_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots\ldots, n$。求（若可能）$f \in \mathcal{S}_{\mathbb{D}^2}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$，使得 $f(z_i, \zeta_i) = w_i$ 以及 $f(\zeta_i, z_i) = w_i \; i = 1, \ldots\ldots, n$。

命题 2.3。 存在 *(NP-*$\mathbb{D}^2$-对称) 的解，当且仅当存在 (NP-$\mathbb{D}^2$-对称) 的对称解。

证明。 “仅当”部分是显然的。对于“如果”部分，注意到如果 f 是 (NP$\mathbb{D}^2$-对称) 的解，那么对称函数 $\hat{} \; f(z, \zeta) = \frac{1}{2}(f(z, \zeta) + f(\zeta, z))$ 也是其解。□

3. 对称化双圆盘

如前所述，对称化双圆盘是集合 $\mathbb{G} = \{(s, p) \in \mathbb{C}^2 : s = z + \zeta, p = z\zeta$，其中某个 $z, \zeta \in \mathbb{D}\}$ 存在。我们用 $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ 表示定义在 $\mathbb{G}$ 上、取值于 $\mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ 的解析压缩函数的舒尔类。本节以一个实现结果开篇，该结果的无限维部分此前已在 [5] 和 [8] 中确立。我们的证明依赖于上一节得到的结果，同时也给出有限维版本。

定理 3.1。 **</style>(**$s, p) \in \mathcal{S}_{\mathbb{G}}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ 当且仅当存在一个压缩共联矩阵

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix} : \begin{matrix} \mathcal{H} & \mathcal{H} \\ \oplus & \oplus \\ \mathcal{H} & \mathcal{H} \\ \oplus & \oplus \\ \mathcal{U} & \mathcal{Y} \end{matrix} \tag{3.1}$$

使得

$$g(s, p) = \delta + \frac{1}{2}\gamma(sI - 2p\alpha_2)(I - \frac{s}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + p\alpha_1\alpha_2)^{-1}\beta. \tag{3.2}$$

此外，若 g 是有理矩阵函数，则共联矩阵可以选为作用于有限维空间上的矩阵。

证明。 *</style}*给定 *(*, $p) \in \mathcal{S}_{\mathbb{G}}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$，我们令 $f(z, \zeta) = g(z+\zeta, z\zeta)$。于是 f 满足定理 2.1 的条件，因此我们可以将 f 写成 (2.2) 的形式。现在令

$$\tilde{M} := V^* M V,$$

其中

$$V = U \oplus I, U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I & -\frac{1}{\sqrt{2}} I \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

˜那么 M 等于 (3.1)，其中

$$\alpha_1 = A_1 + A_2, \alpha_2 = A_1 - A_2, \gamma = \sqrt{2}C, \beta = \sqrt{2}B, \delta = D.$$

现在，通过直接计算可得 $g(s,p)$ 等于 (3.2)。事实上，假设 $z \neq 0, \zeta \neq 0$，我们可以将 (2.2) 改写为

$$f(z,\zeta) = D + \begin{pmatrix} C & C \end{pmatrix} U^* \left(U^* \begin{pmatrix} \frac{1}{z} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta} \end{pmatrix} U - U^* \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} U \right)^{-1} U \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} = \tag{3.4}$$

$$\delta + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{s} I & \hat{d} I \\ \hat{d} I & \hat{s} I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\delta + \gamma (\frac{1}{2}\hat{s} - \alpha_1 - \frac{1}{4}\hat{d}^2 (\frac{1}{2}\hat{s} - \alpha_2)^{-1})^{-1} \beta,$$

其中 $\hat{s} = \frac{1}{z} + \frac{1}{\zeta}, \hat{d} = \frac{1}{z} - \frac{1}{\zeta}$。另外，令 $s = z + \zeta, p = z\zeta$，并注意到 $\hat{s} = \frac{s}{p}, \hat{d}^2 = \frac{s^2 - 4p}{p^2}$。利用这些观察，通过简单计算可知，$g(s,p) = f(z_1, z_2)$ 如 (3.2) 所示。当 $z = 0$ 或 $\zeta = 0$ 时（利用连续性），后一个等式同样成立。

上述计算步骤可以反向进行，因此，如果 $g(s,p)$ 由 (3.4) 给出，那么 $g(s,p) = f(z,\zeta)$，其中 f 如 (2.2) 所示。但由于 $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{D}^2}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$，因此可得 $g \in \mathcal{S}_{\mathbb{G}}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$。□

注 3.2。请注意，上述结果提供了一种为 $g(s, p)$ 寻找实现的方法，具体如下。令 $f(z, \zeta) = g(z + \zeta, z\zeta)$，并为 f 寻找一个如 (2.3) 所示的实现，例如使用 [12]中介绍的方法。然后令

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}, \delta = D,$$

即可得到 $g(s, p)$ 的一个实现 (3.2)。

接下来，我们将给出一个行列式表示的结果。

定理 3.3。设 $g(s,p)$ 为一个多项式。那么，当且仅当存在一个压缩算子(2.5) 使得 $g(s,p)$ 在 $\mathbb{G}$中没有根，

$$g(s,p) = g(0,0) \det(I - sA_1 + p(A_1 + A_2)(A_1 - A_2)). \tag{3.5}$$

此外，当且仅当存在一个严格压缩算子(2.5) 使得(3.5)成立时，$g(s,p)$ 在 $\mathbb{G}$ 中没有根。

证明。设 $g(s,p)$ 在 $\mathbb{G}$ 中无根。为便于表述，不妨假设 $g(0,0) = 1$（否则，考虑 $\frac{g(s,p)}{g(0,0)}$）。令 $p(z,\zeta) = g(z+\zeta, z\zeta)$。那么 $p(z,\zeta)$ 是对称的，且在闭双圆盘中无根。设 $p(z,\zeta)$ 的次数为 (n,n)。设 $\sigma = \frac{1}{2}(z + \zeta)$ 和 $\delta = \frac{1}{2}(z - \zeta)$。那么 $p(z,\zeta) = p(\sigma + \delta, \sigma - \delta) = q(\sigma, \delta)$，其中 q 是某个多项式。由于 $p(z,\zeta) = p(\zeta, z)$，我们得到 $q(\sigma, \delta) = q(\sigma, -\delta)$。因此，$q$ 关于 δ 是偶函数，所以 q 是关于 σ 和 δ^2 的多项式。此外，q 作为关于 σ 和 δ^2 的多项式，其次数为 (n,m)，其中 $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，

且 q 在 $\mathbb{D}^2$ 中无根。将 [10, 定理 2.1] 应用于 q（视为关于 σ 和 δ^2 的多项式），我们得到存在一个 $(n+m)\times(n+m)$ 压缩算子

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

使得

$$q(\sigma,\delta) = \det\left(I_{n+m} - \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma I_n & 0 \\ 0 & \delta^2 I_m \end{pmatrix} \right).$$

设 $s = z+\zeta$ 和 $p = z\zeta$。则 $\sigma = \frac{s}{2}$ 和 $\delta^2 = -p + \frac{s^2}{4}$，且由于 $g(s,p) = q(\sigma, \delta)$，我们得到

$$g(s,p) = \det\left(I - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}K_{11} & -K_{12} \\ \frac{1}{2}K_{21} & -K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n & 0 \\ 0 & pI_m \end{pmatrix} - \frac{s^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix} \right).$$

利用舒尔补，我们可以将其改写为

$$g(s,p) = \det\left(I - s\begin{pmatrix} \frac{1}{2}K_{11} & 0 & -\frac{1}{2}K_{12} \\ \frac{1}{2}K_{21} & 0 & -\frac{1}{2}K_{22} \\ 0 & -\frac{1}{2}I_m & 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 0 & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

现在设

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}K_{11} & 0 & -\frac{1}{2}K_{12} \\ \frac{1}{2}K_{21} & 0 & -\frac{1}{2}K_{22} \\ 0 & -\frac{1}{2}I_m & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}K_{11} & 0 & -\frac{1}{2}K_{12} \\ \frac{1}{2}K_{21} & 0 & -\frac{1}{2}K_{22} \\ 0 & \frac{1}{2}I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

于是（3.5）成立。还要注意，A_1 和 A_2 的大小均为 $n+2m \le 2n$。最后，容易验证（2.5）是一个压缩算子（因为利用（3.3），（2.5）为压缩算子等价于 $\|A_1 \pm A_2\| \le 1$）。

若 $g(s,p)$ 在 $\mathbb{G}$ 中没有根，则存在 $R>1$，使得 $g(Rs, R^2p)$ 在 $(s,p) \in \mathbb{G}$ 中没有根。这意味着 $g(Rs,R^2p)$ 可表示为 (3.5) 的右端。但由此，$\frac{1}{R}A_1$ 和 $\frac{1}{R}A_2$ 给出了 $g(s,p)$ 在行列式表示 (3.5) 中所需的严格压缩算子。□

定理 2.2 的证明。设 $p(z,\zeta)$ 是一个在 $\mathbb{D}^2$ 中没有根的对称多项式。令 $s = z+\zeta$ 和 $d = z-\zeta$。于是 $p(z,\zeta) = p(\frac{1}{2}(s+d), \frac{1}{2}(s-d)) = q(s,d)$，其中 q 是某个多项式。由于 $p(z,\zeta) = p(\zeta,z)$，我们得到 $q(s,d) = q(s,-d)$。因此，q 关于 d 是偶函数，所以 q 是关于 s 和 d^2 的多项式。由于 $d^2 = s^2 - 4p$，其中 $p = z\zeta$，我们得到 q 实际上是关于 s 和 p 的多项式 $g(s,p)$。因此，$p(z,\zeta) = g(s,p)$，并且由于 p 在 $\mathbb{D}^2$ 中没有根，多项式 $g(s,p)$ 在 $\mathbb{G}$ 中没有根。现在，由定理 3.3 可知，存在大小为 $\ell \le 2n$ 的矩阵 A_1 和 A_2，使得 (2.5) 是一个压缩算子，且 (3.5) 成立。我们断言 (2.4) 的右端等于 (3.5)，并采用与 (3.4) 类似的计算。为方便起见，假设 $g(0,0) = p(0,0) = 1$。

令 $z \ne 0 \ne \zeta$，并设 $\hat{s} = \frac{1}{z} + \frac{1}{\zeta}$，$\hat{d} = \frac{1}{z} - \frac{1}{\zeta}$。则 $\hat{s} = \frac{s}{p}$，$\hat{d}^2 = \frac{s^2-4p}{p^2}$。此外，使用 U，如式（3.3）所示，

$$\det U\left(I - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI_\ell & 0 \\ 0 & \zeta I_\ell \end{pmatrix} \right) U^* =$$

$$z^\ell\zeta^\ell \det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\hat{s}I & \hat{d}I\\ \hat{d}I & \hat{s}I\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}A_1+A_2 & 0\\ 0 & A_1-A_2\end{pmatrix}\right) =$$

$$z^\ell\zeta^\ell \det\left((\frac{\hat{s}}{2}I_\ell - (A_1+A_2))(\frac{\hat{s}}{2}I_\ell - (A_1-A_2)) - \frac{\hat{d}^2}{4}I_\ell\right) =$$

$$p^\ell \det(\frac{1}{p}I_l - \frac{s}{p}A_1 + (A_1+A_2)(A_1-A_2)) = g(s,p).$$

这证明了（2.4）成立（注意，对于 $z=0$ 或 $\zeta=0$，等式由连续性得出）。

当 $p(z,\ \zeta)$ 在 $\mathbb{D}^2$ 中没有根时，可以找到一个 $R>1$，使得 $p(Rz,\ R\zeta)$ 对于 $(z,\ \zeta)\in\mathbb{D}^2$ 没有根。因此，可以将 $p(Rz,\ R\zeta)$ 表示为 (2.4) 的右端。但此时 $\frac{1}{R}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_2 & A_1\end{pmatrix}$ 就是所需的严格压缩算子。 □

考虑以下 Nevanlinna-Pick 插值问题：

(NP$\mathbb{G}$) 已知 $(s_i,\ p_i)\in\mathbb{G}$ 以及 $w_i\in\mathbb{C}, i=1,\ \ldots\ldots,\ n$。求（若可能）$g\in\mathcal{S}_{\mathbb{G}}(\mathcal{U},\ \mathcal{Y})$，使得 $g(s_i,\ p_i)=w_i, i=1,\ \ldots\ldots,\ n$。

我们还引入 $\mathbb{D}^2$ 上相应的 Nevanlinna-Pick 插值问题。对于每个 $(s_i,\ p_i)\in\mathbb{G}$，都有一对 $(z_i,\ \zeta_i)\in\mathbb{D}^2$，使得 $s_i=z_i+\zeta_i$ 且 $p_i=z_i\zeta_i$。利用这些数据，我们现在可以考虑 (NP$\mathbb{D}_2$-symm)。以下命题此前已有论述；参见 [5, 8, 9]。

命题3.4. 当且仅当相关的（NP$\mathbb{D}^2$-对称）有解时，（NP$\mathbb{G}$）才有解。

证明。 假设 $g\in\mathcal{S}_{\mathbb{G}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$是（NP$\mathbb{G}$）的解。令 $f(z,\zeta)=g(z+\zeta,z\zeta)$。则$f$ 是（NP$\mathbb{D}^2$-对称）的解。

假设 f是（NP$\mathbb{D}^2$-对称）的解。那么，$\hat{}\ f(z,\zeta)=\frac{1}{2}(f(z,\zeta)+f(\zeta,z))$也同样是其解。后者具有式（2.2）中的表示。令

$$\alpha_1=A_1+A_2, \alpha_2=A_1-A_2, \gamma=\sqrt{2}C, \beta=\sqrt{2}B, \delta=D,$$

并通过（3.4）定义 g。那么 $g\in\mathcal{S}_{\mathbb{G}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$是（NP$\mathbb{G}$）的解。 □

尽管文献 [5, 8]给出了（NP$\mathbb{G}$）有解的充要条件，但正如定理5.1]之前的 [5, 所建议的，将问题拉回到双圆盘上或许更容易。事实上，对于（NP$\mathbb{D}^2$-对称），判据归结为检查是否存在一对满足以下线性约束的半正定矩阵（参见 [2]）：(K_1,K_2)

$$(1-\overline{w_i}w_j)_{i,j=1}^n = K_1\circ(1-\overline{z_i}z_j)_{i,j=1}^n + K_2\circ(1-\overline{\zeta_i}\zeta_j)_{i,j=1}^n,$$

因此可以通过半定规划（半定规划）进行验证。这里，$\circ$ 表示矩阵的 Schur（=逐项）乘积。此外，人们已经开发出用于求解（NP$\mathbb{D}^2$-symm）的算法；例如，参见 [2, 3, 4]。因此，如果将这一点与注 3.2 结合起来，我们就得到了一种求解（NP$\mathbb{G}$）的方法。下面通过一个例子对此加以说明。

例3.5。 接下来 [9] 我们考虑具有以下数据的（NP$\mathbb{G}$）

$$s_1 = 0, p_1 = 0, w_1 = 0, s_2 = 0, p_2 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{2}.$$

那么相应的 (NP$\mathbb{D}^2$-symm) 问题为

$$z_1 = 0, \zeta_1 = 0, w_1 = 0, z_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} = \zeta_3, \zeta_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}} = z_3, w_2 = \frac{1}{2} = w_3.$$

检查 (NP$\mathbb{D}^2$) 的解的条件，我们需要找到半正定矩阵 K_1 和 K_2，使得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = K_1 \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + K_2 \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

容易得到如下选择

$$K_1 = K_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

它是半正定的。要构造一个插值给定数据的函数，需要进行潜伏等距映射（或者实际上是潜伏压缩映射）论证。注意，我们可以将 $K_1 = K_2 = U^*U$ 分解为

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

因此，如果

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

我们要寻找一个压缩算子

$$V : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ z_j u_j \\ \zeta_j u_j \end{pmatrix} \right\rangle \to \left\langle \begin{pmatrix} w_j \\ u_j \\ u_j \end{pmatrix} \right\rangle, \quad j = 1, 2, 3$$

作用于 $\mathbb{C}^5$。这就得到

$$V \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & \frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{i}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

一种可能的选择是

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

利用注 3.2，可得到

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \delta = 0,$$

而公式 (3.2) 给出 $g(s,\ p) = p$ 作为 (NP$\mathbb{G}$) 的一个解。

V 的另一个选择是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

这将导出解 $g(s,\ p) = p - \frac{s^2}{2}$。 —

注意，在 [9, 定理 3.5] 中已经证明，如果 (NP$\mathbb{G}$) 有解，那么它实际上有一个有理内解（上述例子中的 $g(s,\ p) = p$ 是内解）。

致谢
R. Baran 衷心感谢 ID.UJ“卓越计划——研究型大学”的支持。

数据可用性声明。 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

利益冲突声明。 作者声明，与本文内容相关的利益冲突不存在。

参考文献

[1] Jim Agler. 多圆盘上定义的某些全纯函数的表示。载于 *Topics in operator theory: Ernst D. Hellinger memorial volume*, *Oper. Theory Adv. Appl.* 第 48 卷，第 47–66 页。Birkh¨auser，巴塞尔，1990 年。[2] Jim Agler 和 John E. McCarthy。双圆盘上的 Nevanlinna-Pick 插值。*J. Reine Angew. Math.*，506：191–204，1999 年。[3] Jim Agler 和 John E. McCarthy。双圆盘上的三点 Pick 问题。*New York J. Math.*，6：227–236，2000 年。[4] Jim Agler 和 John E. McCarthy。*Pick interpolation and Hilbert function spaces* 44 *Graduate Studies in Mathematics* ，第 卷，。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002 年。

[5] Jim Agler 和 N. J. Young。对称双圆盘上函数的实现。*J. Math. Anal. Appl.*，453(1)：227–240，2017 年。[6] Jim Agler 和 Nicholas J. Young。

Γ *Journal* -压缩算子的模型理论。， （）：–。*of Operator Theory* 49 1 45 60, 2004

[7] Tirthankar Bhattacharyya、Sourav Pal 和 Subrata Shyam Roy。通过求解算子方程对 Γ-压缩算子进行膨胀。 *Advances in Mathematics*，230 2 577 606，2012（）：–。[8] Tirthankar Bhattacharyya 和 Haripada Sau。对称双圆盘上的全纯函数——实现、插值与扩张。 *J. Funct. Anal.*，274 2 504 524，2018（）：–。[9] B. Krishna Das、Poornendu Kumar 和 Haripada Sau。对称双圆盘上的特征簇与 Nevanlinna-Pick 问题。 *Math. Z.*，310 3( )：论文编号 40，29，2025 年。[10] Anatolii Grinshpan、Dmitry S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi、Victor Vinnikov 和 Hugo J. Woerdeman。二元稳定多项式与实零点多项式。 *Mul-*

tidimens. Syst. Signal Process. 27 1 1 26, 2016 ，（）：–。

[11] Greg Knese。多圆盘的 Schur-Agler 类中的有理内函数。*Publ. Mat.*，55(2)：343–357，2011 年。[12] Greg Knese。Kummert 方法在双圆盘上的实现。

Indiana Univ. ，（）：–。*Math. J.* 70 6 2369 2403, 2021

[13] Anton Kummert。具有指定散射矩阵的二维无损 m端口的综合。 *Circuits Systems Signal Process.*，8(1)：97–119，1989 年。

Radomi-l Baran 数学系 雅盖隆大学 波兰克拉´科夫。电子邮件：
radomil.baran@doctoral.uj.edu.pl

Hugo J. Woerdeman 数学系
德雷塞尔大学 美国宾夕法尼亚州费城 Chestnut 街 3141 号，
邮编 PA19104。电子邮件：
hugo@math.drexel.edu