arXiv:2601.14462v1 [math.CV] 20 Jan 2026

准视觉近似

MARIO BONK、MIKHAIL HLUSHCHANKA 和 DANIEL MEYER

Abstract. 我们奠定了有界度量空间拟视觉逼近理论的基础。粗略地说，这类逼近是给定空间的一系列覆盖，其中覆盖内集合的直径趋于零，且相对度量量（例如直径与距离之比）受到一致控制。该框架可用于研究拟共形几何中的问题。特别是，拟视觉逼近可用于判定给定的两个有界度量空间之间的同胚是否为拟对称映射。

我们还借助与拟视觉逼近相关联的瓦片图，探讨其与格罗莫夫双曲空间理论之间的联系。作为一项应用，我们将这些思想与半双曲有理映射的动力学联系起来。更具体地说，我们证明，有理映射的朱利亚集存在动力学的拟视觉逼近，当且仅当该映射是半双曲的。

Contents

1. 引言 2 2. 背景 7 3. 视觉近似 10 4. 拟视觉逼近 16 5. 距离与组合 21 6. 动力学准视觉逼近 23 7. 拟视觉逼近与拟对称映射 25 8. 拟视觉近似的组合学 29 9. 瓦片图 34 10. 将无穷远边界与空间等同起来 38 11. 从格罗莫夫双曲性到拟视觉逼近 45 12. 朱利亚集的动力学准视觉逼近 52 13. 附录 65 参考文献 72

日期：2026年1月22日。2020年 数学主题分类。主要分类 30L10；次要分类 51F99。关键词与短语。视觉近似、拟视觉逼近、组合视觉近似、视觉度量、拟对称映射、瓦片图、格罗莫夫双曲空间、半双曲有理映射。M.B. 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-2054987 号资助。M.H. 部分获得了欧盟“地平线欧洲”计划资助的 Marie Skłodowska-Curie 博士后奖学金（资助编号：101068362）。

1. Introduction

本文关注度量空间几何的若干方面。为方便起见，我们规定所讨论的度量空间是有界的；不过，只需处理一些技术细节，也可以将本文所发展的类似理论推广到更一般的情形。

众所周知，度量空间 S 的拓扑学与几何性质（若该空间有界）通常可以用一列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 通常为有限的覆盖$\mathbf{X}^n$ 来描述；这些覆盖会随着 $n \to \infty$ 而变得越来越细。在这种情况下，与每个$\mathbf{X}^n$相关联的有限数据集——例如$\mathbf{X}^n$ 中各集合之间的关联关系及其度量性质（如直径和相互距离）——为给定空间提供了一个粗略的“快照”。随着 n 增加，我们便可以期待这些快照具有越来越高的“分辨率”。这种方法的一个显而易见的优势是，相关信息变成了有限的：每个覆盖$\mathbf{X}^n$ 都由一个有限数据集编码，而整个序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 则对应于一个可数数据集。

这一思想广为人知，并已被证明在许多情境中都很有用。根据具体情形，我们可以尝试寻找关于覆盖$\mathbf{X}^n$ 中各集合之间的关联关系及其度量性质的条件，从而忠实地捕捉 S 的相关特征。

本文聚焦于有界度量空间的拟共形几何。粗略地说，这一术语指的是具有稳健尺度不变性的几何性质。这些性质由一些条件刻画，这些条件不涉及绝对距离，而涉及相对距离，也就是距离之比。在研究自相似空间的几何时，这些性质自然会出现，尤其是在某些动力系统情境中产生的分形，例如克莱因群的极限集、有理映射的朱利亚集，或迭代函数系统的吸引子。

人们往往希望在一种自然等价关系下描述并刻画这些空间；这种等价关系由对相对距离具有良好几何控制的同胚给出。在这一语境中，相关映射是拟对称映射，它们能够提供这种畸变控制（定义见第 2.4 节；关于拟对称映射及相关概念的一般背景，参见 [He01]）。

因此，更准确地说，度量空间的拟共形几何由那些在拟对称映射下保持不变的几何性质所描述。特别地，若存在一个从 S 到 T的拟对称同胚，我们就称两个度量空间 S 和 T 拟对称等价。显然，这种等价关系强于拓扑等价，但弱于例如要求 S 和 T等距。

现在的问题是，应对一列 $\{\mathbf{X}^n\}$的有限覆盖施加哪些条件，才能忠实地表示 S 的拟共形几何。我们希望让读者相信，相关性质都凝聚在有界度量空间 S 的拟视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 这一概念中（见定义 4.1）。

在本引言接下来的几个小节中，我们将以非正式的方式介绍本文的主要主题、概念和结果，并试图阐释其背后的思想，而不深入技术细节。我们还将指出，本文正文中何处可以找到定理的精确定义和表述。

1.1. 视觉近似。 度量空间S 的拟视觉逼近这一概念源自一个更强的概念，即视觉逼近。为了以直观的方式描述这一概念，我们先约定一些术语。

设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是（有界）度量空间 S的一个覆盖序列。我们称覆盖$\mathbf{X}^n$ 中的一个元素X 为层级 n 的瓦片，或简称为 n-瓦片。瓦片 X 表示给定度量空间 S 中的一个位置，其直径 diam(X) 可以看作 X所表示的局部尺度。

一种体现覆盖 $\mathbf{X}^n$ 随着 $n \to \infty$ 变得越来越细这一思想的自然条件，是要求瓦片的大小随其层级 n一致指数衰减；换言之，要求

$$\operatorname{diam}(X) \asymp \Lambda^{-n} \tag{1.1}$$

对于 $X \in \mathbf{X}^n$，取某个固定参数 $\Lambda > 1$（关于此处使用的符号 $\asymp$ 以及本引言后文使用的符号 $\lesssim$和 $\gtrsim$ 的确切含义，请参见第 2.1 节）。类似地，可以要求同一层级 n上瓦片 X 与 Y 的组合分离转化为度量分离

$$\operatorname{dist}(X, Y) \gtrsim \Lambda^{-n}. \tag{1.2}$$

在本引言中，读者只需将组合分离理解为条件 $X \cap Y = \emptyset$。不过，事实证明，对组合分离采用更强的条件，可以得到更加令人满意且完备的理论。这一更强的分离性质涉及一个<样式 id='2'>宽度 参数 $w \in \mathbb{N}_0$（参见定义 3.1）。它使相应的要求 (1.2) 更弱且更灵活。

如果我们对序列 $\{\mathbf{X}^n\}$施加条件 (1.1) 和 (1.2)，便会引出度量空间 S 的视觉逼近 这一概念（基于更强的分离条件的精确定义见定义 3.1）。若度量空间 S 上存在这样的视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$，则称 S 上的（有界）度量 d为视觉度量 。

我们在第 3 节中发展这一理论。这里的主要结果之一是：有界度量空间 S 存在视觉逼近，当且仅当它是一致完美的（见命题 3.4）。从拟共形几何的角度来看，对 S的要求——即它是一致完美的（见第 2.2 节）——十分自然，因为这一条件在拟对称映射下保持不变，并且在许多有趣的情形中都成立。

1.2. 拟视觉近似。 视觉逼近这一概念及其相关的视觉度量概念，已被证明在动力系统研究中很有用（例如，在扩张 Thurston 映射理论中；见 [BM17]）。然而，它并不完全符合拟共形几何的精神，因为瓦片的局部尺度和度量分离由绝对 距离控制。

为了发展一种适用于度量空间拟共形几何的逼近概念，应放宽条件，使其仅涉及相对距离。这正是定义 4.1 中引入的有界度量空间 S 的拟视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的构想。

它由四个条件组成，具体如下。其中两个条件（定义 4.1 中的 (i) 和 (iii)）实质上表示，由一个 n-瓦片 X 表示的局部尺度 diam(X) 大致是良定义的。也就是说，如果一个 k-瓦片 Y 与 X 位于同一位置（即 $X \cap Y \neq \emptyset$），且层级大致相同（即 $|k-n| \lesssim 1$），那么 diam(X) $\asymp$ diam(Y)。

我们还要求位于同一位置的 k 瓦片 Y的直径相对于局部尺度一致指数衰减 X，即

$$\operatorname{diam}(Y) \lesssim \rho^{k-n} \operatorname{diam}(X)$$

对于 $k \geq n$，存在一个一致的参数 $\rho \in (0,1)$（在定义 4.1 的 (iv) 中，这一条件以另一种但等价的方式表述；见引理 4.3）。最后，同一层级上的两个瓦片X 与 Y 之间的组合分离意味着度量分离，但同样是相对于局部尺度而言：

$$\operatorname{dist}(X,Y) \gtrsim \operatorname{diam}(X)$$

（定义 4.1 中的条件（ii）再次表达了这一要求的一个较弱版本，其中也涉及一个宽度参数）。

我们认为拟视觉近似是忠实刻画度量空间拟共形几何的恰当概念，一个主要原因是这类近似在拟对称映射下保持不变，并且实际上能够判定一个同胚是否为拟对称映射。

为准确表述这一点，设 $\varphi\colon S \to T$ 是有界度量空间S 与 T之间的一个双射，序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 S的一个拟视觉逼近，而 $\{\mathbf{Y}^n\}$ 是 $\{\mathbf{X}^n\}$ 在 φ下的像，也就是说，

$$\mathbf{Y}^n := \{\varphi(X) : X \in \mathbf{X}^n\} \text{ for } n \in \mathbb{N}_0.$$

那么 φ 是拟对称映射，当且仅当 $\{\mathbf{Y}^n\}$ 是 T 的一个拟视觉逼近（见推论 7.4）。

1.3. 从度量到组合学，再回到度量。一旦有了度量空间（S,d）的一个拟视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$，其度量信息便完全编码在局部尺度（即瓦片的直径）以及瓦片之间的组合关联关系之中。为准确表述这一点，我们引入一个邻近函数 m，用于量化 S中两个不同点 x 和 y 之间的组合分离。粗略地说，$m = m(x,y)$是满足以下条件的最大层级：x 和 y 位于“同一位置”，也就是说，存在分别包含 x 和 y的 m-瓦片 X 和 Y，它们尚未发生组合分离（$X \cap Y \neq \emptyset$）；详见定义 5.1。为简化起见，此处同样忽略其中涉及的宽度参数。在这一临界层级 $m = m(x,y)$，距离 $d(x,y)$与任意满足 $x \in X$ 的 m-瓦片 X 的局部尺度 $\operatorname{diam}(X)$可比（见引理 5.4）。

邻近函数 m 可针对集合 S 的任意覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 定义。如果 S 是一个有界度量空间，且 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 S 的拟视觉逼近，那么 m 具有某些特征性质。我们反过来将具有这些性质的邻近函数 m 所对应的集合 S 的覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 称为 S 的组合视觉逼近（见定义 8.1）。令人欣慰的是，对于这样的逼近，总能在 S 上找到一个度量 d，使得 $\{\mathbf{X}^n\}$ 成为 (S,d) 的拟视觉逼近。事实上，只要恰当地选择 d，序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 甚至是 (S,d) 的视觉逼近（精确表述见定理 8.2）。

1.4. 瓦片图与 Gromov 双曲几何。专家们不会惊讶于我们在此发展的理论也与格罗莫夫双曲空间理论相关（关于格罗莫夫双曲空间的一般背景，参见 [Gr87、GH90、BH99、BS07]）。我们将在第9–11节探讨这一点。出发点是与给定集合 S 的覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 相关联的瓦片图 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$。根据定义，$\Gamma$ 的顶点集由所有层级上的瓦片组成；每当 $X \cap Y \neq \emptyset$ 和 $|n-k| \leq 1$时，我们便连接两个顶点，它们分别对应于瓦片 $X \in \mathbf{X}^n$ 和 $Y \in \mathbf{X}^k$。

我们将证明，如果 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是集合 S的组合视觉逼近，那么相应的瓦片图 Γ 是格罗莫夫双曲的（见定理 9.1）。证明基于

瓦片图上的格罗莫夫积 （见（9.2））与前面讨论的邻近函数m（见（9.3）和命题 9.3）之间的密切关系。特别地，当 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是度量空间（S， d）的拟视觉逼近时， Γ 是格罗莫夫双曲的。在这种情况下，在附加假设（S， d）完备的条件下，可以从相应的瓦片图 Γ 恢复（S， d）。事实上，我们将证明，此时（S， d）通过自然识别映射 $\Phi\colon S \to \partial_\infty\Gamma$ （见（10.3）和命题 10.8）与 Γ 的无穷远边界 $\partial_\infty\Gamma$ 拟对称等价，其中该无穷远边界配备任意视觉度量（按照格罗莫夫双曲空间的意义）。

最后，我们可以探讨在此背景下反向的蕴含。具体而言，设 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$ 是与度量空间 (S, d) 的覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 相关联的瓦片图，并假设 Γ 是格罗莫夫双曲的。那么，我们能否据此得出结论： $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S, d) 的拟视觉逼近，甚至是视觉逼近?

单凭 Γ 的格罗莫夫双曲性，还不足以在此得出任何结论。不过，如果我们进一步假设自然识别映射 $\Phi\colon (S, d) \to (\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 足够良好（具体而言，它是拟对称性或雪花等价），那么就可以得到所需结论的一个版本：结论并不适用于原始覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ ，而适用于通过对 $\{\mathbf{X}^n\}$ 中的原始瓦片取适当的邻域簇 而得到的某个相关覆盖序列 $\{\mathbf{V}^n\}$ （见 (11.1) 和定理 11.1 ）。

1.5. 朱利亚集的拟视觉逼近。在各种情境中出现的分形空间，往往可以自然地按不同尺度分解，从而生成一个覆盖序列。于是，一个关键问题是：这些覆盖是否确实构成了给定分形空间的（拟）视觉逼近。对于某些递归构造的标准分形，例如三分康托集、科赫雪花，或谢尔宾斯基地毯和谢尔宾斯基地毯，这些所需条件很容易验证。然而，在其他情境中，事情可能并非如此直接。为了在本文中说明这一点，我们选择聚焦于一种特定的动力系统情境：半双曲有理映射的朱利亚集。

由于有理映射 g 的朱利亚集 $\mathcal{J}(g)$ 总是一致完美的（见 [Hi93] 和[MdR92]），根据我们的一般性结果之一（见命题 3.4），保证存在 $\mathcal{J}(g)$ 的（拟）视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 。然而，显然，在存在动力学的情况下，人们希望施加更强的条件，将映射的迭代与序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 联系起来。因此，自然的要求是，拟视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 具有动力学的 性质，即映射 g 将瓦片映射到瓦片，并使层级发生适当的偏移（一般情境下的相关定义见第 6 节）。

我们将看到，有理映射 g 的朱利亚集 $\mathcal{J}(g)$ 存在动力学准视觉逼近，当且仅当 g 是半双曲的（见推论 12.5）；这一结论来自定理 12.3 和 12.4（它们分别处理这一等价关系的两个蕴含）。

我们的结果与 Haïssinsky 和 Pilgrim [HP09, 定理 4.2.3], 的工作密切相关。他们在度量 *CXC* 系统的框架下，给出了半双曲有理映射的刻画。我们将在注 12.12 中进一步讨论与他们工作的关系。

1.6. 进一步讨论。 本文的主要目的是为我们的研究领域奠定基础。因此，我们没有纳入更多应用，但未来打算将拟视觉逼近的框架应用于分形空间、动力系统及其他领域的几何研究。为了让读者初步了解这类研究可能涉及的内容，我们探讨了半双曲有理映射的朱利亚集中的拟视觉逼近；不过，我们预计拟视觉逼近还会

自然地出现在许多其他情境中，例如几何群论、自相似群、迭代函数系统，以及由图替换规则生成的空间。

虽然我们在此不作进一步探讨，但我们预期，拟视觉逼近的框架在研究度量空间 (S, d) 的共形维数 时会特别有用（关于这一概念的定义及一般背景，见 [MT10]）。在这一领域，问题在于构造新的度量 ϱ，使其定义在 S 上，与 d 拟对称等价，并且使 (S, ϱ) 在所有此类度量中具有接近最小的豪斯多夫维数。在适当的条件下，可以通过恰当地重新定义局部尺度来获得这样的度量。此时，拟视觉逼近这一概念使得验证 d 与 ϱ 之间的拟对称等价在概念上变得简单明了：只需证明，给定的 (S, d) 的拟视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 对于 (S, ϱ) 仍然是拟视觉逼近即可。

1.7.先前工作。视觉近似和拟视觉逼近最初以这些名称在 [BM22], 中引入，但其中使用的是不带宽度参数的分离条件。 [BM22]中的定义与我们的定义相对应，其中宽度为 $w = 0$。引入宽度参数虽是一个小小的进步，却至关重要，并由此带来了更加完善的理论。例如，尽管证明每个一致完美度量空间都具有宽度为 $w = 1$ 的视觉逼近相当容易（见命题 3.4 和注 3.5），但证明宽度为 $w = 0$ 的相应结论则困难得多，并且需要对该空间附加条件（见推论 3.7）。

视觉度量（同样带有 $w = 0$）是在扩张 *Thurston* 映射 的背景下于 [BM17 第 8]章中引入的。 [BM17 命题 8.4] 中表述的视觉度量的独特性质促成了本文所采用定义的形成。通过拟视觉逼近刻画拟对称映射（对于宽度 $w = 0$）的结果，早已出现在 [BM22 命题 2.7]中。这一结果源于将先前工作中出现的论证形式化的愿望（见 [Me02 定理 5.1], [BM17 定理 18.1 (ii)], 以及 [BM20 定理 1.2]）。

正如我们之前提到的，将一个（有界）度量空间 S 的几何信息编码到其覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 中，这一想法并不新颖，过去已多次采用。在此背景下，将序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 整合为一个单独的对象 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$——即第 1.4 节提到的瓦片图——是很自然的做法。在文献中， Γ 的各种形式通常被称为 S 的双曲填充 。我们将简要介绍这一主题的一些重要研究成果，但不打算进行全面综述。

Bourdon 和 Pajot 的研究 [BP03] 对这一领域产生了深远影响。他们证明（尽管使用了不同的术语），（倍增且一致完美的）有界度量空间 S 的双曲填充 Γ 总是格罗莫夫双曲的；他们还利用 Γ 与 S 之间的相互作用，证明了度量空间分析中的深刻结果。更具体地说，他们将 Γ 的 ℓ^p-上同调与 S 上的 Besov 空间对应起来，并运用这一对应关系获得了关于 S 的共形维数的信息。

Carrasco [Ca13]运用双曲填充的概念和格罗莫夫双曲空间的几何，研究（倍增且一致完美的）有界度量空间的共形维数。他从环带离散模数的渐近行为出发，得到了共形维数的一种刻画。他构造相关双曲填充时涉及一些数值参数，因此验证其条件颇为繁琐。

这或许是 Kigami 用自己的术语重新表述整个理论的动机[Ki20]。在他的工作中，基本思路是用一列划分来近似给定的度量空间，从而形成一种树状结构。通过为这些划分中的元素赋予权重，便可构造新的度量，并证明与[Ca13]中风格相同的定理。

受克莱因群和有理映射的动力学（特别是共形电梯原理）的启发，Haïssinsky 和 Pilgrim 在 [HP09]中引入了*粗扩张动力系统（CXC 系统）*。在这一框架下，他们以与我们在第 9 节中定义瓦片图基本相同的方式，将一个图与底层空间的（动力学）覆盖序列关联起来。他们证明该图是格罗莫夫双曲的，并利用相应无穷远边界上的视觉度量（格罗莫夫双曲空间意义下的视觉度量）来研究相应的动力系统。正如我们上文提到的，我们对半双曲有理映射的刻画，受到他们在 CXC 系统框架下对这些映射所作类似刻画的启发。

1.8. **论文结构**。本文安排如下。第 2 节中，我们介绍记号，并回顾本文中通篇使用的一些基本定义。第 3 节引入并研究视觉近似，第 4 节则介绍准视觉近似。随后，我们在第 5 节引入邻近函数，并在第 6 节简要讨论动力学准视觉逼近

拟对称映射与拟视觉逼近之间的关键关系（见定理 7.1）是第 7 节的主题。在第 8 节中，我们进一步探讨邻近函数的性质与拟视觉逼近之间的联系：我们引入组合视觉逼近，并证明定理 8.2，阐明本文研究的不同逼近概念之间的关系。在第9–11节中，我们考察拟视觉逼近与格罗莫夫双曲空间理论之间的密切联系。

在第 12 节中，我们证明，有理映射 g 的朱利亚集具有动力学拟视觉逼近，当且仅当 g 是半双曲的（见推论 12.5，该推论由定理 12.3 和 12.4 得出）。论证基于一些辅助结果，即一个技术性的畸变估计（引理 12.6）以及关于正规族的一些事实（引理 12.9 和 12.10）。为避免打断第 12 节的主要叙述，我们将这些事实的证明放在附录中。

致谢。本研究始于作者于2022年春季学期驻留加利福尼亚州伯克利数学科学研究所期间。作者还要感谢李志强提出了一个问题，该问题引出了定理 8.2。

2. Background

2.1. **记号**。我们用 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 表示自然数集，用 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$表示包含 0 的自然数集。我们用 $\mathbb{C}$ 表示复数集，并采用记号 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 表示 $\mathbb{C}$中的开单位圆盘，采用 $\mathbb{C} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 表示黎曼球面。

集合 X 的基数记为 $\#X$ ，而 X 上的恒等映射记为 id_X。若$f : X \to Y$是两个集合之间的映射，且 $W \subset X$，那么 $f|_W$表示 f在 W上的限制。

我们经常考虑相差一个乘法常数的量。在大多数情况下，我们并不关心它们的精确值。因此，我们常在记号中省略这类常数。更准确地说，如果存在一个常数 $C \geq 1$ （可能依赖于某些环境参数 α、 β、.....），使得两个非负量 a 和b （乘法）可比，那么我们称它们

$$\frac{1}{C}a \leq b \leq Ca.$$

在此情形下，我们记作

$$a \asymp b.$$

常数 C 称为可比常数，记作 $C(\asymp)$；若要强调其对某些环境参数 α、 β、.....的依赖关系，则记作 $C(\asymp) = C(\alpha, \beta, ...)$。类似地，我们记作

$$a \lesssim b, \quad \text{or} \quad b \gtrsim a$$

若存在常数 $C > 0$ 使得 $a \leq Cb$ ，则分别将 C 和 C称为 $\lesssim$或 $C(\gtrsim)$。设 (S, d) 为一个度量空间。对于 $x \in S$ 和 $r > 0$，我们用以下符号表示

$$B_d(x, r) \coloneqq \{y \in S : d(x, y) < r\} \text{ and } \overline{B}_d(x, r) \coloneqq \{y \in S : d(x, y) \leq r\}$$

分别表示以 x 为中心、半径为 r 的开球和闭球。若 X， $Y \subset S$，则用 $\operatorname{diam}_d(X)$ 表示 X 的直径，并且

$$\operatorname{dist}_d(X, Y) \coloneqq \inf\{d(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

表示 X 与 Y 之间的距离。如果度量由上下文明确，我们会在记号 $B_d(x, r)$ 等中省略下标 d。

2.2. **度量空间的性质**。设 (S, d) 为一个度量空间。若存在一个常数 $0 < \lambda < 1$ （称为 (S, d) 的一致完美常数），使得以下陈述成立，则称 (S, d) 一致完美：对于所有 $x \in S$ 和 $0 < r \leq \operatorname{diam}(S)$，我们有

$$B(x, r) \setminus \overline{B(x, \lambda r)} \neq \emptyset.$$

注意，在这种情况下， $\lambda r \leq \operatorname{diam}(B(x, r)) \leq 2r$ 。每个连通度量空间都是一致完美的。

如果存在一个常数 $N \in \mathbb{N}$ （称为 (S, d) 的倍增常数），使得每个半径为 $r > 0$ 的开球 $B \subset S$ 都可以由 N 个（或更少）半径为 $r/2$ 的开球覆盖，则称空间 (S, d) 具有倍增性 。由归纳法可知，对于所有 $k \in \mathbb{N}_0$， B 都可以由 N^k 个半径为 $2^{-k}r$ 的开球覆盖。

我们称集合 $V \subset S$ 对 $\delta > 0$ 是 δ-分离的 ，如果对于所有不同的 $x, y \in V$， $d(x, y) \geq \delta$。佐恩引理蕴含，每个度量空间都包含一个极大 δ-分离子集（对于任意固定的 $\delta > 0$）。

如下这个众所周知的引理表明，倍增性质可以用分离集的大小来表述。

引理 2.1. 度量空间 (S, d) 是倍增的，当且仅当对于每个 $0 < \lambda < 1$ ，存在一个常数 $K = K(\lambda)$ ，使得每个半径为 $r > 0$ 的开球 $B \subset S$ 至多包含 K 个两两间距至少为 λr 的点。

这是　这是一个标准事实，但为方便读者，我们仍给出证明。

证明。 首先假设 (S, d) 是倍增的，倍增常数为 $N \in \mathbb{N}$。设 $B \subset S$ 是半径为 $r > 0$ 的开球，且 $V \subset B$ 是一个 λr-分离集。根据假设，存在常数 $n = n(N, \lambda)$，使得 B 可由 n 个直径为 $< \lambda r$ 的开球 $B_1, \ldots, B_n$ 覆盖。由于每个 B_j 至多包含 V 中的一个点，我们得出 $\#V \leq n$。因此，(S, d) 满足陈述中的条件，其中 $K = n$。

现在我们证明逆命题。假设 (S, d) 满足引理陈述中的条件。设 $B \subset S$ 是半径为 $r > 0$ 的开球，$V \subset B$ 是 B 的一个极大 $r/2$-分离子集。根据假设，我们有 $\#V \leq K = K(1/2)$。与此同时，V 的极大性意味着球 $B(x, r/2)$，$x \in V$ 覆盖 B。因此，(S, d) 是倍增的，其倍增常数为 $N = K$。□

2.3. **拟度量**。 构造集合 S 上的度量时，通常先定义一个性质较弱的距离函数会更容易，然后再将其提升为度量。

定义 2.2。 设 S 是一个集合。若存在常数 $K \geq 1$，使得对所有 x、y、$z \in S$，以下条件均成立，则称函数 $q\colon S \times S \to [0, \infty)$ 是 S 上的一个拟度量：

(i) $q(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；
(ii) $q(x, y) = q(y, x)$；(iii) $q(x, y) \leq K \max\{q(x, z)\, q(z, y)\}$。

在这种情况下，q 称为 S 上的 K-拟度量，而有序对 (S, q) 称为 K-拟度量空间，或简称拟度量空间。

显然，集合 S 上的每个度量都是满足 $K = 2$的 K-拟度量。反过来，若 q 是满足 $K \leq 2$ 的 K-拟度量，定义在 S 上，则可以在 S 上找到一个与 q 可比的度量 d。

定理 2.3 ([Sch06，定理1。2])。 设 q 是集合 S 上满足 $1 \leq K \leq 2$ 的 K-拟度量。则存在定义在 S 上的度量 d，满足

$$\frac{1}{2K} q \leq d \leq q.$$

2.4. **度量空间之间的映射类**。 设 (S_1, d_1) 和 (S_2, d_2) 是两个度量空间，且 $\phi\colon S_1 \to S_2$ 是一个双射。若存在常数 $L \geq 1$ 使得，则称 ϕ 为一个双 *Lipschitz* 映射

$$\frac{1}{L} d_1(x, y) \leq d_2(\phi(x), \phi(y)) \leq L d_1(x, y)$$

对所有 x，$y \in S_1$。如果存在 $\alpha > 0$ 和 $C \geq 1$，使得 ϕ 是一种雪花等价，则称之为

$$\frac{1}{C} d_1(x, y)^\alpha \leq d_2(\phi(x), \phi(y)) \leq C d_1(x, y)^\alpha$$

对所有 x，$y \in S_1$。如果存在一个同胚$\eta\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$（其作用类似于“畸变函数”），使得 ϕ 是一种拟对称性，则称该映射为

$$\frac{d_2(\phi(x), \phi(y))}{d_2(\phi(x), \phi(z))} \leq \eta\left(\frac{d_1(x, y)}{d_1(x, z)}\right)$$

对于所有 x，y，$z \in S_1$，满足 $x \neq z$。当我们想强调畸变函数 η 时，就称之为 η-拟对称性。

这三类映射在复合或取逆映射下均保持不变。例如，两个双 Lipschitz 映射的复合仍是双 Lipschitz 映射，而拟对称映射的逆映射也仍是拟对称映射。

显然，每个双 Lipschitz 映射都是一种雪花等价，而每种雪花等价都是一种拟对称性。也很容易看出，每个拟对称映射（因此也包括每种雪花等价和每个双 Lipschitz 映射）都是同胚。

这类映射还引出了给定集合 S上的度量之间的等价概念。例如，若恒等映射 $\mathrm{id}_S\colon (S, d_1) \to (S, d_2)$ 是一个拟对称映射，我们就称度量 d_1 和 d_2 在 S 拟对称等价。S 上的度量的双 Lipschitz 等价和雪花等价也以类似方式定义。

我们记录一 些关于拟对称映射的众所周知的事实，这些事实将在下文中 l.

引理 2.4 ([He01，命题 10.8 和 10.10，以及习题 11。2]). 设 $\phi\colon (S_1, d_1) \to (S_2, d_2)$ 是一个拟对称映射。则以下陈述成立：

(i) 若(S_1, d_1) 有界，则(S_2, d_2) 有界。(ii) 若(S_1, d_1) 完备，则(S_2, d_2) 完备。(iii) 若 (S_1, d_1) 一致完美，则 (S_2, d_2) 一致完美。

引理 *2.5*（[*He01*，命题 *10.*8], 另见 [*BM22*，引理 *2.*8]）。假设 $\mathrm{id}_S\colon (S, d_1) \to (S, d_2)$ 是一个 η-拟对称映射。设 $X \subset S$ 是 S 的子集，且 $x, y \in X$ 是满足 $d_1(x, y) \asymp \text{直径}_1(X)$ 的点，其中常数为 $C_1 = C(\asymp)$。那么

$$\mathrm{diam}_2(X) \asymp d_2(x, y),$$

其中 $C(\asymp) = C(C_1, \eta)$。

推论2.6。每个拟度量空间(S, q) 都与某个度量空间(S, d)雪花等价。

证明。设 (S, q) 是一个 K-拟度量空间。注意，对于 x，y，$z \in S$ 和 $\alpha > 0$，我们有

$$q^\alpha(x, y) \le K^\alpha \max\{q^\alpha(x, z), q^\alpha(z, y)\}.$$

选择 $\alpha > 0$ 足够小，使得 $K^\alpha \le 2$，由定理 2.3 可知，$q^\alpha \asymp d$，其中 d 是 S 上的某个度量。□

3. Visual approximations

许多经典分形集（例如标准康托集、科赫雪花以及谢尔宾斯基地毯和垫片）都具有关于 $n \in \mathbb{N}_0$ 的“标准分解”，分解成大小为 Λ^{-n} 的集合，其中 $\Lambda > 1$ 是一个适当的参数。在本节中，我们将这类分解的性质抽象为视觉逼近的概念。除了控制这些逼近中元素的大小之外，我们还将施加度量分离条件（如引言中所述）。

设 S 是一个集合，且 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是 S 的覆盖序列。为简便起见，我们通常只写 $\{\mathbf{X}^n\}$，而不写带有索引集 $\mathbb{N}_0$ 且针对 n 的 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$。覆盖$\mathbf{X}^n$、$n \in \mathbb{N}_0$ 可以是任意覆盖，我们也允许使用无限覆盖。

每个集合 $X \in \mathbf{X}^n$（对于 $n \in \mathbb{N}_0$）都称为一个层级为 n的瓦片 n，或称为一个 n-瓦片；如果其层级无关紧要，则称 X 为瓦片。注意，即使 S 赋有度量，瓦片也没有任何拓扑要求，不过在应用中，瓦片通常要么全部是紧的，要么全部是开的。

给定 $n \in \mathbb{N}_0$ 和两个 n-瓦片 X，$Y \in \mathbf{X}^n$，从 X 到 Y的一条 n-瓦片链是一个有限序列$X_0 = X$，X_1，.....，$X_k = Y$，其中每一项都是 n-瓦片，并且对所有 $j = 0$，.....，$k - 1$都有 $X_j \cap X_{j+1} \neq \emptyset$。我们称 k 为该链的长度（因此它由 $k+1$ n-瓦片组成）。

瓦片的邻域 $X \in \mathbf{X}^n$ 宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$，记作 $U_w(X)$，定义为集合

$$U_w(X) \coloneqq \bigcup \{Y \in \mathbf{X}^n : \text{there exists a chain of } n\text{-tiles from } X \text{ to } Y \text{ of length} \leq w\}. \tag{3.1}$$

显然，我们有

$$X = U_0(X) \subset U_1(X) \subset \dots \tag{3.2}$$

对每个 $X \in \mathbf{X}^n$ 都成立。此外，如果 $U_w(X) \cap U_w(Y) \neq \emptyset$ 对于 X，$Y \in \mathbf{X}^n$，那么我们可以找到一条链

$$X_0 = X, X_1, \dots, X_w, Y_w, \dots, Y_1, Y_0 = Y \tag{3.3}$$

由 n 个瓦片组成，从 X 到 Y，长度为 $2w+1$（注意，此处可以通过将某个瓦片重复列出多次，使长度等于 $2w+1$）。

定义 3.1（视觉近似）。设 (S, d) 是一个有界度量空间，$\Lambda > 1$，且$w \in \mathbb{N}_0$。对于 (S, d)，宽度为 w、（视觉）参数为 Λ 的视觉逼近 由序列$\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 组成，这些序列是对 S 的覆盖，每个覆盖都由其中的一些子集构成，其中 $\mathbf{X}^0 = \{S\}$，并满足以下条件：对于所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 X，$Y \in \mathbf{X}^n$，我们有

(i) 直径$(X) \asymp \Lambda^{-n}$,

(ii) dist$(X, Y) \gtrsim \Lambda^{-n}$ 当 $U_w(X) \cap U_w(Y) = \emptyset$时。

这里要求隐含常数 $C(\asymp)$ 和 $C(\gtrsim)$ 与 n、X 和 Y 无关。

为简洁起见，提及视觉近似时，我们通常省略对宽度 w 或视觉参数Λ的说明。对于宽度 $w = 0$，上面的第二个条件可简化为：

(ii') $\operatorname{dist}(X, Y) \gtrsim \Lambda^{-n}$ whenever $X \cap Y = \emptyset$ for $X, Y \in \mathbf{X}^n$.

由于我们要求 $\mathbf{X}^0 = \{S\}$，因此 $n = 0$ 的条件 (i) 仅表示 (S, d) 是有界的且具有正直径（或者等价地，包含多个点），而 $n = 0$ 的条件（ii）则是空泛的。此外，(3.2) 意味着宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的视觉逼近自动也是对所有 $w' \geq w$ 都成立的宽度为 $w' \in \mathbb{N}_0$ 的视觉逼近。

我们也可以反过来考察问题，关注度量而非序列 $\{\mathbf{X}^n\}$。

定义 3.2（视觉度量）。设 S 为一个集合，$\{\mathbf{X}^n\}$ 为 S的一个覆盖序列，且满足 $\mathbf{X}^0 = \{S\}$。如果存在参数 $w \in \mathbb{N}_0$ 和 $\Lambda > 1$，使得 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是关于 (S, ϱ)、宽度为 w 且视觉参数为 Λ 的视觉逼近（如定义 3.1 所述），则称 S 上的度量 ϱ 为关于 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的视觉度量。

注意，在这种情况下，(S, ϱ) 是有界的，且 S 包含不止一个点。我们称 $w \in \mathbb{N}_0$ 为视觉度量 ϱ 的宽度参数，称 $\Lambda > 1$ 为视觉参数。

定义 3.1 中宽度为 $w = 0$ 的条件 (i) 和条件（ii）最初由 [BM17] 在研究扩张 *Thurston* 映射 时提出（参见 [BM17, 命题 8.4]）。当时也使用了视觉度量 这一名称，不过这个术语最初是为格罗莫夫双曲空间无穷远边界上的某些度量创造的。正如我们将要解释的，视觉

定义 3.2 中的度量与格罗莫夫双曲空间的视觉度量密切相关（参见命题 10.7）。这种联系促使我们采用了这一术语。

注 3.3。 在我们关于视觉逼近和拟视觉逼近（将在第 4 节定义）的所有主要结果中，例如推论 3.7、定理 11.1 和定理 12.3，对于宽度参数 w，我们都有$w \in \{0,1\}$ 。我们还将立即看到，如果一个度量空间具有某个宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的视觉逼近，那么它也具有宽度为 1 的视觉逼近（见注 3.5）。因此，目前尚不清楚是否确实有必要考虑宽度 $w \geq 2$。不过，为了在未来潜在的应用中拥有更大的灵活性，我们选择以这种更一般的形式来阐述这一理论。

3.1. 视觉逼近的存在性。 我们首先讨论何时给定的度量空间具有视觉逼近。

命题 3.4. 设(S, d) 是一个有界度量空间。当且仅当(S, d) 一致完美时，(S, d) 存在视觉逼近。

证明。“⇒” 假设 (S, d) 存在视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$。设 $\Lambda > 1$ 是 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的视觉参数。那么存在一个常数 $C \geq 1$ ，使得

$$\frac{1}{C}\Lambda^{-n} \leq \operatorname{diam}(X^n) \leq C\Lambda^{-n}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $X^n \in \mathbf{X}^n$,

现在任取 $x \in S$ 和 $0 < r \leq \operatorname{diam}(S)$，并设 $n = n(r) \in \mathbb{N}_0$ 为满足 $C\Lambda^{-n} < r$ 的最小数。于是 $C\Lambda^{-n+1} \geq r$。我们可以选取 $X^n \in \mathbf{X}^n$ ，使得 $x \in X^n$。于是有 $\operatorname{diam}(X^n) \leq C\Lambda^{-n} < r$ ，因此 $X^n \subset \overline{B}(x, r)$。另一方面，由于 $\operatorname{diam}(X^n) \geq \frac{1}{C}\Lambda^{-n}$，存在一点 $y \in X^n$ ，使得

$$d(x, y) > \frac{1}{3}\operatorname{diam}(X^n) \geq \frac{1}{3C}\Lambda^{-n} \geq \frac{1}{3C^2\Lambda}r.$$

这表明 (S, d) 是一致完美的，其常数为 $\lambda = \frac{1}{3C^2\Lambda}$。 ——

“⇐” 假设 (S, d) 是一致完美的，其常数为 $\lambda \in (0, 1)$。我们固定一个参数$\Lambda > 1$。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $S^n \subset S$ 为一个极大的 Λ^{-n}-分离集。我们设 $\mathbf{X}^0 := \{S\}$ 并且

$$\mathbf{X}^n := \{B(x, 2\Lambda^{-n}) : x \in S^n\}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$。显然，每个 $\mathbf{X}^n$ 都是 S 的一个覆盖。我们要证明，序列 $\{\mathbf{X}^n\}$以参数 Λ 提供了 (S, d) 的一个宽度为 $w = 1$ 的视觉逼近。

对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $X \in \mathbf{X}^n$ ，对于某个 $x \in S^n$，有 $X = B(x, 2\Lambda^{-n})$。我们得出结论：

$$\operatorname{diam}(X) \asymp \Lambda^{-n},$$

其中 $C(\asymp) = C(\lambda)$ 仅取决于一致完美常数 λ。由于 (S, d) 有界，因此定义 3.1 中的条件 (i) 成立。接下来只需证明条件（ii）。

断言。 对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $X, Y \in \mathbf{X}^n$ ，我们都有如下蕴含：

$$U_1(X) \cap U_1(Y) = \emptyset \;\Rightarrow\; \operatorname{dist}(X, Y) \geq \tfrac{1}{2}\Lambda^{-n}.$$

我们用反证法，假设 $U_1(X) \cap U_1(Y) = \emptyset$，但存在点 $x_0 \in X$和 $y_0 \in Y$，使得 $d(x_0, y_0) < \frac{1}{2}\Lambda^{-n}$。根据 S^n 的选取，球 $B(s, \Lambda^{-n})$、 $s \in S^n$ 构成一个

S 的覆盖。因此，我们可以找到 $x' \in S^n$，使得 $x_0 \in B(x', \Lambda^{-n})$。于是 $X' := B(x', 2\Lambda^{-n}) \in \mathbf{X}^n$和 $x_0 \in X \cap X'$。我们得出结论： $X' \subset U_1(X)$。

另一方面，我们有

$$d(x', y_0) \le d(x', x_0) + d(x_0, y_0) < \Lambda^{-n} + \tfrac{1}{2}\Lambda^{-n} < 2\Lambda^{-n}.$$

由此可得 $y_0 \in X' \cap Y$，因此 $X' \subset U_1$（Y）。所以，

$$U_1(X) \cap U_1(Y) \neq \emptyset,$$

这与我们的假设相矛盾。这证明了该断言。

由此可得，定义 3.1 中的条件（ii）也得到满足。因此，$\{\mathbf{X}^n\}$ 是一个宽度为 1、视觉参数为 Λ 的（S， d）视觉逼近。这就完成了“⇐”的证明。□

注 3.5。前面的证明表明，如果一个度量空间（S， d）是有界且一致完美的，那么（S， d）对每个视觉参数$\Lambda > 1$都存在一个宽度为 $w = 1$ 的视觉逼近。由此可得，如果任意度量空间（S， d）具有某个宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$的视觉逼近，那么它也具有一个宽度为 1 的视觉逼近。

3.2. **倍增度量空间的视觉近似**。如果给定的有界度量空间 (S, d) 是一致完美且倍增的，那么总存在一个宽度为 $w = 0$ 的视觉逼近。我们仅记录这一事实以供参考，在本文余下部分不会用到它。我们将从一个更具技术性的陈述中推导出它。

命题 3.6 (由分离集得到的视觉近似)。设 (S, d) 是一个有界、倍增且一致完美的度量空间。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\Lambda > 1$ 和 S^n 是 S 的一个极大 Λ^{-n}-分离子集。

那么存在数 $r_{s,n} \in [1, 2)$，分别对应 $s \in S^n$ 和 $n \in \mathbb{N}$，使得如果我们定义 $\mathbf{X}^0 := \{S\}$，并且

$$\mathbf{X}^n := \{B(s, r_{s,n}\Lambda^{-n}) : s \in S^n\}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是一个宽度为 $w = 0$、参数为 Λ 的视觉近似，适用于 (S, d)。

由于 (S, d) 是有界且倍增的，引理 2.1 表明，前一个命题中的每个集合 S^n, $n \in \mathbb{N}$ 都是有限的。以下事实可直接推出。

推论 3.7。设(S, d) 是一个有界度量空间。假设 S 是倍增且一致完美的。那么对每个 $\Lambda > 1$，都存在一个宽度为 $w = 0$、参数为 Λ 的视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$，逼近(S, d)，其中每个覆盖$\mathbf{X}^n$ 都是有限的。

命题 3.6 的证明基于以下事实。

引理 3.8。设 $\delta > 0$和 V 是倍增度量空间(S, d)中的一个极大 δ-分离集。那么存在数 $r_x \in [1, 2)$，使得对 $x \in V$以下条件成立：

如果我们对 $x \in V$定义 $B_x := B(x, r_x\delta)$，那么对所有 x、$y \in V$，都有

$$either\ B_x \cap B_y \neq \emptyset \quad or\ \operatorname{dist}(B_x, B_y) \ge C\delta, \tag{3.4}$$

其中 $C > 0$ 是一个常数，仅取决于(S, d)的倍增常数。

这本质上就是 [Ma08，引理 3。1], 但为了方便读者，我们还是给出证明。

证明。不失一般性，我们可以假设 $\delta = 1$。

断言。存在一个 $N \in \mathbb{N}$，仅取决于（S, d）的倍增常数，使得我们可以将 V划分为 N 个两两不相交（可能为空）的集合 $A_1, \ldots, A_N$，满足以下条件：

$$\text{if } x, y \in A_i \text{ for some } i \in \{1, \ldots, N\} \text{ and } x \neq y, \text{ then } d(x, y) \geq 10.$$

更直观地说，这意味着我们可以用至多 N种不同的颜色给 V 中的点“着色”，使得同色的不同点之间相距至少 10。

为了证明该断言，首先注意到，由于 V 是一个 1-分离集，我们可以选择一个 $N \in \mathbb{N}$，其取值仅取决于（S, d）的倍增常数，使得每个满足 $v \in V$的球 $B(v,10)$ 至多包含 N 个 V 中的元素（见引理 2.1）。

现在，我们依次在 V中选取一个极大 10-分离集 A_1，在 $V \setminus A_1$中选取一个极大 10-分离集 A_2，在 $V \setminus (A_1 \cup A_2)$中选取一个极大 10-分离集 A_3，依此类推。如此继续，我们得到 V的两两不相交的 10-分离子集 A_1、A_2、A_3、…。

这里 $A_{N+1} = \emptyset$。事实上，若 $A_{N+1} \neq \emptyset$，那么我们可以找到一个元素 $v \in A_{N+1} \subset V$。对于每个 $k = 1$、.....、N，元素 v不属于在.....中极大的 10-分离集 A_k

$$V \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}) \supset \{v\}.$$

由此可知，存在 $a_k \in A_k$ 使得 $d(v, a_k) < 10$。于是，v，a_1、.....、a_N 是 V 中两两不同的元素，且都包含在球 $B(v, 10)$ 中。根据 N 的选取，这不可能。我们得出 $A_{N+1} = \emptyset$，因此 $V = A_1 \cup \cdots \cup A_N$。断言得证。

假设 A_1、.....、$A_N \subset V$ 按照上述断言选取。现在我们证明，对于 $x \in V$，(3.4) 在 $C = 1/(2N)$ 以及适当的数 $r_x \in [1, 2)$ 下成立。

令 $V_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n$，对于 $n = 1, \ldots, N$。于是有 $A_1 = V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_N = V$。现在将归纳地选取数 $r_x \in [1, 2)$，使得对于所有x，$y \in V_n$，(3.4) 都成立。

令 $r_x := 1$，对于 $x \in V_1 = A_1$。如果 x，$y \in V_1 = A_1$互不相同，那么 $d(x, y) \geq 10$，因此

$$\operatorname{dist}(B_x, B_y) \geq 8 > \frac{1}{2N} = C.$$

由此可知，对于所有 x，$y \in V_1$，(3.4) 都成立，从而建立了基例 $n = 1$。

现在假设 $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq N$，并且对于每个 $x \in V_n$，都已选取 $r_x \in [1, 2)$，使得对于所有 x，$y \in V_n$，(3.4) 都成立（其中 $C = 1/(2N)$）。

若 $n = N$，证明便告完备；因此不妨设 $n < N$，并任取 $x \in A_{n+1} = V_{n+1} \setminus V_n$（若 $A_{n+1} = \emptyset$，从而 $V_n = V$，则无需再做任何事）。对于 $y \in V_n$，现在定义

$$d(y) := \inf\{r > 0 : B(x, r) \cap B_y \neq \emptyset\}.$$

于是 $B(x, r) \cap B_y = \emptyset$，对于 $0 < r < d(y)$；而 $B(x, r) \cap B_y \neq \emptyset$，对于 $r > d(y)$（注意，当 $d(y) = 0$ 时，第一种情况不可能发生）。

令 W_x 为所有满足 $d(y) \in [1, 2)$ 的 $y \in V_n$ 构成的集合（可能为空）。于是，对每个 $y \in W_x$，都有 $d(x, y) \leq 2 + r_y < 4$，这意味着对于 $y, y' \in W_x$，有 $d(y, y') < 8$。

因此，W_x 中的点必须全部位于 $A_1, \ldots, A_n$中互不相同的集合内，因此$M := \#W_x \leq n \leq N - 1$。我们将 W_x 中的点标记为 $y_1, \ldots, y_M$（这个列表可能为空），使得

$$1 =: d_0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_M < d_{M+1} := 2,$$

其中 $d_j := d(y_j)$，对 $j = 1, \dots, M$ 均成立。因此存在一个指标 $k \in \{0, \dots, M\}$，使得 $d_{k+1} - d_k \geq 1/N$。

现在我们定义 $r_x := \frac{1}{2}(d_k + d_{k+1}) \in [1, 2)$。注意，

$$r_x - d_k = d_{k+1} - r_x = \frac{1}{2}(d_{k+1} - d_k) \geq \frac{1}{2N} = C.$$

此外，对于每个 $y \in V_n$，我们有：

$$\text{either} \quad d(y) \leq d_k < r_x \quad \text{or} \quad d(y) \geq d_{k+1} > r_x.$$

Then

$$B(x, r_x) \cap B_y \neq \emptyset$$

在前一种情况下，且

$$\operatorname{dist}(B(x, r_x), B_y) \geq d_{k+1} - r_x \geq C$$

在后一种情况下。

对于每个 $x \in A_{n+1}$，采用这样的 $r_x \in [1, 2)$ 选择后，对于所有 $x \in A_{n+1} = V_{n+1} \setminus V_n$ 和 $y \in V_n$，条件 (3.4) 均成立。

根据归纳假设，对于所有 $x,\ y \in V_n$，(3.4) 也成立。接下来只需验证 (3.4) 对不同的点 $x,\ y \in A_{n+1}$ 成立。在这种情况下，$d(x,\ y) \geq 10$，因此

$$\operatorname{dist}(B_x, B_y) \geq 10 - r_x - r_y > 6 > \frac{1}{2N} = C.$$

由此可得，对于所有 $x,\ y \in V_n \cup A_{n+1} = V_{n+1}$，(3.4) 都成立。归纳步骤至此完成，命题也得证。□

命题 3.6 的证明现在是例行的。

命题 *3.6* 的证明。在给定的设定下，不失一般性地假设 $\operatorname{diam}(S) = 1$。

根据引理 3.8，存在数 $r_{s,\ n} \in [1, 2)$，对应于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $s \in S^n$，使得球 $B_s := B(s,\ r_{s,\ n}\Lambda^{-n})$ 对于 $x,\ y \in S^n$ 满足以下条件：

$$\text{either} \quad B_x \cap B_y \neq \emptyset \text{ or } \operatorname{dist}(B_x, B_y) \geq C\Lambda^{-n}.$$

这里 $C > 0$ 是一个仅取决于 S 的倍增常数（而不取决于 n）的常数。

与陈述中一样，令 $\mathbf{X}^0 := \{S\}$ 和

$$\mathbf{X}^n := \{B(s, r_{s,n}\Lambda^{-n}) : s \in S^n\}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$。

显然，每个 $\mathbf{X}^n$ 都是 S 的一个覆盖。此外，每个 $\mathbf{X}^n$ 都满足定义 3.1 中的条件 (ii')，其中 $C(\gtrsim) = C$。最后，由于 $\operatorname{diam}(S) = 1$ 且 (S, d) 是一致完美的，我们有

$$\lambda\Lambda^{-n} \leq \operatorname{diam}(X) \leq 4\Lambda^{-n}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $X \in \mathbf{X}^n$，其中 λ 是一致完美常数。因此，定义 3.1 中的性质 (i) 也成立。于是 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S, d) 的宽度为 0、视觉参数为 Λ 的视觉逼近。□

在命题 3.6 中，每个覆盖 $\mathbf{X}^n$, $n \in \mathbb{N}$ 里的球都是开集，但我们也可以改用相应的闭球，并考虑 $\mathbf{X}^0 := \{S\}$ 和

$$\overline{\mathbf{X}}^n := \{\overline{B}(s, r_{s,n}\Lambda^{-n}) : s \in S^n\}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$。那么，序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 也是（S, $\underline{d}$）的视觉逼近；事实上，定义 3.1 中关于 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的隐含常数与关于 $\{\mathbf{X}^n\}$的相同。

现在我们通过一个具体例子说明，对于非倍增度量空间，也可能存在宽度为 $w = 0$ 的视觉逼近。换言之，倍增并非视觉逼近存在的必要条件。

例 3.9。我们的空间 S 将是一个无限根树的"无穷远边界"，其中第 n 层（满足 $n \in \mathbb{N}_0$）上的每个顶点恰好有 $n+2$ 个"子节点"。为精确定义这一点，我们将 S 定义为由所有满足以下条件的无限序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 构成的集合：

$$x_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

对于 $n \in \mathbb{N}_0$。

给定两个这样的序列 $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，我们定义

$$m(x, y) \coloneqq \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} & \text{if } x \neq y, \\ \infty & \text{if } x = y. \end{cases}$$

然后我们定义

$$d(x, y) \coloneqq 2^{-m(x,y)},$$

其中约定 $d(x,\ x) = 2^{-\infty} = 0$。显然，$d$ 是 S上的一个度量；事实上，它是一个超度量，也就是说

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

对所有 $x,\ y,\ z \in S$，均有。

层级为 $n \in \mathbb{N}_0$ 的柱集是 S 中形如以下形式的子集

$$[x_0x_1 \ldots x_n] \coloneqq \left\{y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \in S : y_0 = x_0,\, y_1 = x_1,\, \ldots,\, y_n = x_n\right\}$$

其中 $x_i \in \{0, 1, \ldots, i\}$ 对于 $i = 0,$ ....., n成立。对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，令$\mathbf{X}^n$ 为所有此类层级为 n的柱集构成的集合；特别地，我们有$\mathbf{X}^0 = \{S\}$。容易验证，$\{\mathbf{X}^n\}$ 构成了一个宽度为 $w = 0$ 、参数为 $\Lambda = 2$ 的视觉逼近，对象为$(S,\ d)$。

然而，空间$(S,\ d)$不是倍增的。事实上，每个层级为$n \in \mathbb{N}_0$的柱集 $[x_0x_1 \ldots x_n]$ 也是 S中的一个半径为 2^{-n} 的开球。另一方面，对于每个 $k = 0,$ ....., $n+1$，这个柱集都包含由以下序列给出的点 y_k

$$x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, k,\, 0,\, 0,\, \ldots\,.$$

由于这些点 $n+2$ $y_0, \ldots, y_{n+1} \in [x_0x_1 \ldots x_n]$ 2^{-n-1}-分离，根据引理 2.1，空间 (S, d) 不可能是倍增的。

4. Quasi-visual approximations

一般而言，视觉近似在拟对称映射下并不保持不变，因为这种近似的概念过于僵化。为了解决这一问题，我们引入更灵活的概念——拟视觉逼近。回顾式 (3.1) 中瓦片 X（宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ ）的邻域 $U_w(X)$ 的定义。

定义 4.1（准视觉近似）。设 (S, d) 是一个包含多个点的有界度量空间。对于 (S, d)，宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近是一个序列 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，其中包含 S 的一些子集构成的覆盖，且满足$\mathbf{X}^0 = \{S\}$；对于所有 $n \in \mathbb{N}_0$，以下条件均成立，其中隐含常数独立于 n，也独立于这些条件中出现的瓦片 X 和 Y：

(i) 对所有满足 $X \cap Y \neq \emptyset$ 的 $X, Y \in \mathbf{X}^n$，$\operatorname{diam}(X) \asymp \operatorname{diam}(Y)$。(ii) 对所有满足 U_w 的 $X, Y \in \mathbf{X}^n$，$\operatorname{dist}(X, Y) \gtrsim \operatorname{diam}(X)$。(iii) 对所有满足 $X \cap Y \neq \emptyset$ 的 $X \in \mathbf{X}^n$, $Y \in \mathbf{X}^{n+1}$，$\operatorname{diam}(X) \asymp \operatorname{diam}(Y)$。(iv) 存在与 n 无关的常数 $k_0 \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda \in (0, 1)$，使得对所有满足 $X \cap Y \neq \emptyset$ 的 $X \in \mathbf{X}^n$ 和 $Y \in \mathbf{X}^{n+k_0}$，$\operatorname{diam}(Y) \leq \lambda \operatorname{diam}(X)$。

对于宽度 $w = 0$，上面的第二个条件可归结为以下内容：

(ii') $\operatorname{dist}(X, Y) \gtrsim \operatorname{diam}(X)$ for all $X, Y \in \mathbf{X}^n$ with $X \cap Y = \emptyset$.

以这种形式，拟视觉逼近首次发表于 [BM22，定义 2.1]；不过请注意，与这项先前工作不同，我们不假设覆盖 $\mathbf{X}^n$ 是有限的。

与视觉逼近类似，我们有时会转换视角，转而关注度量。

定义 4.2（拟视觉度量）。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是集合 S 的覆盖序列。若度量d 在 S 上被称为宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 关于 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的拟视觉度量，当且仅当 $0 <$ 直径$_d(S) < \infty$ 且 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是关于 (S, d) 的宽度为 w 的拟视觉逼近；也就是说，定义 4.1 中的条件对于关于 d 的序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 均得到满足。

下文中，每当我们讨论一个配备拟视觉逼近的度量空间时，均自动假设 S 是有界的，且包含多于一个点。此外，为简洁起见，在讨论拟视觉逼近或度量时，通常会省略对宽度 w 的提及。

以下三个陈述（引理 4.3、引理 4.6 和推论 4.5）在 [BM22] 中都有非常相近的类似结论。为完整起见，我们仍将给出完整的细节。

首先，我们证明定义 4.1 中的条件 (iv) 可以用一种略有不同的形式表示。

引理 4.3。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是一个有界度量空间上的覆盖序列，并满足定义 *4.1* 中的条件 (iii)。则 $\{\mathbf{X}^n\}$ 满足 (iv)，当且仅当存在常数 $C \geq 1$ 和 $\rho \in (0、1)$，使得

$$\operatorname{diam}(Y) \leq C\rho^k \operatorname{diam}(X) \tag{iv'}$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}_0$、$k \in \mathbb{N}$、$X \in \mathbf{X}^n$，以及满足 $X \cap Y \neq \emptyset$ 的 $Y \in \mathbf{X}^{n+k}$。

证明。首先，假设定义 4.1 中的条件 (iv) 对某些 $k_0 \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda \in (0、1)$ 成立。任取 $n \in \mathbb{N}_0$、$k \in \mathbb{N}$、$X \in \mathbf{X}^n$ 以及满足 $X \cap Y \neq \emptyset$ 的 $Y \in \mathbf{X}^{n+k}$。我们选取一个点 $x \in X \cap Y$。对于每个 $i = n, \ldots、n + k$，我们选择一个瓦片 $Y^i \in \mathbf{X}^i$，使得 $x \in Y^i$，从而 $Y^n = X$ 和 $Y^{n+k} = Y$。我们还将 k 写成 $k = jk_0 + \ell$ 的形式，其中 $j \in \mathbb{N}_0$ 且 $\ell \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$。最后，令 $C_1 = C(\asymp) \geq 1$ 表示定义 4.1 中条件 (iii) 的常数。于是，通过反复应用 (iii) 和 (iv)，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(Y) = \operatorname{diam}(Y^{n+k}) = \operatorname{diam}(Y^{n+jk_0+\ell}) &\leq C_1^{\ell} \operatorname{diam}(Y^{n+jk_0}) \\ &\leq C_1^{\ell} \lambda^j \operatorname{diam}(Y^n) \leq C_1^{k_0} (\lambda^{1/k_0})^{jk_0} \operatorname{diam}(X).\end{aligned}$$

如果我们定义 $\rho := \lambda^{1/k_0} \in (0,1)$ 和 $C := C_1^{k_0}/\lambda \geq 1$，那么

$$C_1^{k_0} = C\lambda = C\rho^{k_0} \leq C\rho^{\ell},$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(Y) &\le C_1^{k_0}\rho^{jk_0}\operatorname{diam}(X) \le C\rho^{jk_0+\ell}\operatorname{diam}(X)\\ &= C\rho^{k}\operatorname{diam}(X),\end{aligned}$$

如所需。

为证明反向蕴含，假设常数 $C>0$ 和 $\rho\in$ （0,1）满足 (iv')。于是可以选取充分大的 $k_0\in\mathbb{N}$，使得 $\lambda := C\rho^{k_0}<1$。有了这些选择，定义 4.1 中的条件（iv）显然成立。□

用非常相似的论证可以证明，定义 4.1 中的条件 (iii) 蕴含一个与 (iv') 相反的不等式。也就是说，存在一个常数 $\tau\in$ （0,1），使得

$$\operatorname{diam}(Y)\ge \tau^{k}\operatorname{diam}(X) \tag{4.1}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}_0$、$k\in\mathbb{N}$、$X\in\mathbf{X}^n$ 以及 $Y\in\mathbf{X}^{n+k}$，且满足 $X\cap Y\neq\emptyset$。注意，(iv') (4.1) 和蕴含

$$0<\tau\le\rho<1. \tag{4.2}$$

结合 (iv') 和 (4.1) 中的估计时，考虑 r

$$\nu := \frac{\log(1/\rho)}{\log(1/\tau)} = \frac{\log(\rho)}{\log(\tau)}.$$

我们有 $\nu\in(0,1]$ 由 (4.2) 得到，并且

$$\rho=\tau^{\nu}. \tag{4.3}$$

注 4.4。设 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界度量空间 (S,d) 的一个覆盖序列，且具有正直径。假设对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都满足定义 4.1 中的条件 (i)–(iv)，其中常数选取得当。如果 $\mathbf{X}^1$ 是有限覆盖，且由直径为正的集合组成，那么我们可以将 $\mathbf{X}^0=\{S\}$ 添加到该序列中，此时 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 就成为 (S,d) 的拟视觉逼近（常数作适当调整后）。

事实上，在定义 4.1 中，条件 (i) 此时对 $n=0$ 也（显然）成立，而条件 (ii) 对 $n=0$ 则是空泛成立的。我们的假设意味着，对于所有 $X\in\mathbf{X}^1$，$\operatorname{diam}(X)\asymp\operatorname{diam}(S)$。由此可得，对于所有 $n\in\mathbb{N}_0$，条件 (iii) 在常数 $C(\asymp)$ 作适当调整后成立。

最后，要证明条件（iv）成立，只需验证等价条件 (iv')。根据我们对原序列 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的假设，存在适当的常数 C 和 ρ，使其对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。若将其中的原常数 C 替换为 C/ρ，则条件 (iv') 对所有 $n\in\mathbb{N}_0$ 也成立。

引理 4.3 表明，在拟视觉逼近中，瓦片的直径随其层级增加而一致趋于 0。

推论 4.5。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是有界度量空间 S 的拟视觉逼近。那么

$$\sup\{\operatorname{diam}(X): X\in\mathbf{X}^n\}\to 0 \ \text{as}\ n\to\infty.$$

证明。事实上，由引理 4.3 可知，存在常数 $C>0$ 和 $\rho\in$，其中 (0,1)，使得

$$\operatorname{diam}(X^n)\le C\rho^{n}\operatorname{diam}(X^0)$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $X^n\in\mathbf{X}^n$。这里，$X^0=S$ 是唯一的 0-瓦片。结论得证。 □

现在我们 证明拟视觉逼近推广了视觉逼近。

引理 4.6（视觉逼近是拟视觉的）。 设（S、 d）为一个度量空间。那么，对于（S、 d），每个宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 也是对于（S、 d）的宽度为 w 的拟视觉逼近。

证明。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是度量空间 (S, d) 的宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 、视觉参数为 $\Lambda > 1$ 的视觉逼近，也就是说， $\{\mathbf{X}^n\}$ 满足定义 3.1 中的条件。特别地，空间 (S, d) 是有界的，且包含多于一个点。我们需要验证定义 4.1 中的条件 (i)–(iv)。下文中，所有隐含常数均与所考虑的瓦片及其层级无关。

首先注意到，每个 $\mathbf{X}^n$ 都是 S 的覆盖，且 $\mathbf{X}^0 = \{S\}$。固定 $n \in \mathbb{N}_0$，并考虑任意瓦片 $X, Y \in \mathbf{X}^n$。那么

$$\operatorname{diam}(X) \asymp \Lambda^{-n} \asymp \operatorname{diam}(Y),$$

根据定义 3.1 (i)，因此定义 4.1 中的条件 (i) 得到满足。

若 $U_w(X) \cap U_w(Y) = \emptyset$，则根据定义 3.1 (ii)，我们有

$$\operatorname{dist}(X, Y) \gtrsim \Lambda^{-n} \asymp \operatorname{diam}(X),$$

因此，定义 4.1 中的条件（ii）得以满足。

任取 $Z \in \mathbf{X}^{n+1}$ 。那么

$$\operatorname{diam}(Z) \asymp \Lambda^{-n-1} \asymp \Lambda^{-1} \operatorname{diam}(X),$$

由定义 3.1 (i) 可知。定义 4.1 中的条件 (iii) 立即成立（其中一个常数还取决于 Λ ，以及其他环境参数）。

类似地，若对某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $Z \in \mathbf{X}^{n+k}$ ，则

$$\operatorname{diam}(Z) \asymp \Lambda^{-(n+k)} \asymp \Lambda^{-k} \operatorname{diam}(X),$$

同样由定义 3.1 (i) 可知。这意味着引理 4.3 中的条件 (iv') 成立，因此定义 4.1 中的条件（iv）也成立。

结论得证。 □

下面的引理比较瓦片邻域与度量球。

引理 4.7。 设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是有界度量空间 (S, d) 的宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近。则存在常数 r_0、 $R_0 > 0$ ，使得对每个满足 $n \in \mathbb{N}_0$ 的 $X \in \mathbf{X}^n$ 以及每个 $x \in X$ ，都有

$$B(x, r_0 \operatorname{diam}(X)) \subset U_{2w+1}(X) \subset B(x, R_0 \operatorname{diam}(X)),$$

这里， $U_{2w+1}(X)$ 的定义如同 (3.1) 中所述。注意到

$$U_{2w+1}(X) = \bigcup \{Y \in \mathbf{X}^n : U_w(X) \cap U_w(Y) \neq \emptyset\}.$$

该引理断言，集合 $U_{2w+1}(X)$ 是具有一致常数的准球 （这意味着每个 $U_{2w+1}(X)$ 都介于两个同心球之间，且这两个球的半径之比一致有界）。

证明。 在给定的设置中，设 $Y \in \mathbf{X}^n$ 是一个对并集 $U_{2w+1}(X)$ 有贡献的瓦片。那么存在一条从 X 到 Y 的 n-瓦片链，其长度为 $\leq 2w + 1$。根据定义 4.1 中的条件 (i)，该链中的所有 n-瓦片的直径均为 $\asymp \operatorname{diam}(X)$。这意味着，对于某个一致常数 $R_0 > 0$，有 $U_{2w+1}(X) \subset B(x,\ R_0 \operatorname{diam}(X))$。

现在考虑一个点 $z \in S \setminus U_{2w+1}(X)$，并选取满足 $z \in Z$ 的 $Z \in \mathbf{X}^n$。由此可得 $U_w(X) \cap U_w(Z) = \emptyset$，因此定义 4.1 中的条件（ii）意味着

$$d(x,z) \geq \operatorname{dist}(X,Z) \gtrsim \operatorname{diam}(X).$$

这意味着存在一个一致常数 $r_0 > 0$，使得 $d(x,\ z) \geq r_0$ 直径(X)。由此可得 $B(x,\ r_0$ 直径$(X)) \subset U_{2w+1}(X)$，结论随即成立。□

我们以一个辅助结果结束本节，该结果将在稍后的第 6 节中使用。

引理 4.8。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是有界度量空间 (S,d)的拟视觉逼近。任取 $R > 0$、$n \in \mathbb{N}_0$、X、$Y \in \mathbf{X}^n$和 $x \in X$，并假设

$$Y \cap B(x, R \operatorname{diam}(X)) \neq \emptyset.$$

那么 直径$(X) \asymp$ 直径(Y) 二者可比，且可比性常数为 $C(\asymp) = C(R)$，依赖于 R，但与 n、X、Y 和 x 无关。

证明。设 $w \in \mathbb{N}_0$ 为拟视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的宽度，$r_0 > 0$ 为引理 4.7 中的常数，使得

$$B(x, r_0 \operatorname{diam}(Z)) \subset U_{2w+1}(Z) \tag{4.4}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}_0$、$Z \in \mathbf{X}^n$ 以及 $x \in Z$，由引理 4.3 中的条件 (iv')，我们可以找到依赖于 $R > 0$ 的 $n_0 = n_0(R) \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}_0$、$Z^n \in \mathbf{X}^n$ 以及满足$Z^n \cap Z^{n+n_0} \neq \emptyset$ 的 $Z^{n+n_0} \in \mathbf{X}^{n+n_0}$，都有

$$R \operatorname{diam}(Z^{n+n_0}) < r_0 \operatorname{diam}(Z^n). \tag{4.5}$$

经过上述准备，令 $n \in \mathbb{N}_0$、X，$Y \in \mathbf{X}^n$ 以及 $x \in X$ 如陈述中所述。首先假设 $n < n_0$。则根据定义 4.1 的条件 (iii)，我们有

$$\operatorname{diam}(X) \asymp \operatorname{diam}(S) \asymp \operatorname{diam}(Y)$$

具有可比性 常数，这些常数依赖于 n_0（因而也依赖于 R），但不依赖于 X 和 Y.

因此我们可以假设 $n \geq n_0$。在此情况下，选取一个瓦片 $X' \in \mathbf{X}^{n-n_0}$，满足 $x \in X'$，由 (4.4) 和 (4.5) 可得

$$B(x, R \operatorname{diam}(X)) \subset B(x, r_0 \operatorname{diam}(X')) \subset U_{2w+1}(X').$$

由于根据我们的假设，Y与球 $B(x,\ R$ 直径$(X))$ 相交，因此我们得出存在一个点 $y \in Y \cap U_{2w+1}(X')$。

现在选取一个瓦片 $Y' \in \mathbf{X}^{n-n_0}$，使得 $y \in Y'$，则有 $Y' \cap U_{2w+1}(X') \neq \emptyset$。根据定义 4.1 中的条件 (i)，这意味着

$$\operatorname{diam}(X') \asymp \operatorname{diam}(Y')$$

其中一致常数为 $C(\asymp)$。同时，利用定义 4.1 中的条件 (iii)，我们得到

$$\operatorname{diam}(X) \asymp \operatorname{diam}(X') \quad \text{and} \quad \operatorname{diam}(Y') \asymp \operatorname{diam}(Y)$$

其可比常数取决于 n_0（因此也取决于 R），但不取决于 X 和 Y。结论得证。□

5. Distances and combinatorics

设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是度量空间 $(S,\ d)$ 的宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近。覆盖 $\mathbf{X}^n$ 给出了 S 的离散近似，并且随着 n 增大而变得更精细。我们引入一个组合量（取决于宽度 w），用来记录该逼近首次能够区分给定两点时所处的层级。

定义 5.1。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是集合 S 的一个覆盖序列。给定 $w \in \mathbb{N}_0$，U_w-邻近函数

$$m_w \colon S \times S \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

（相对于 $\{\mathbf{X}^n\}$）定义如下。对于 $x,\ y \in S$ 我们令

$$m_w(x,\ y) \coloneqq \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \colon \text{存在 } X,\ Y \in \mathbf{X}^n,\ \text{使得 } x \in X, y \in Y,\ \text{and } U_w(X) \cap U_w(Y) \neq \emptyset\}.$$

当然，数值 $m_w(x,\ y)$ 取决于 $\{\mathbf{X}^n\}$ 和 w。如果宽度 w 在上下文中固定，我们通常会在记号中省略下标。显然，

$$m_w(x,y) = m_w(y,x) \text{ for all } x, y \in S,$$

且 $m_w(x,\ y)$ 关于 w 单调不减。此外，对于 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $X^n \in \mathbf{X}^n$，我们有

$$m_w(x,y) \geq n \text{ for all } x, y \in X^n. \tag{5.1}$$

注 5.2。对于集合 S 的覆盖序列$\{\mathbf{X}^n\}$，还存在其他与组合相关的自然量，可用于度量其中点的邻近程度 S。特别地，对于两个点 $x,\ y \in S$，我们可以考虑以下量：

$$m'_w(x,y) \coloneqq \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \text{there exist } X, Y \in \mathbf{X}^n \text{ with } x \in X,\ y \in Y,\ \text{and } U_w(X) \cap U_w(Y) = \emptyset\},$$

如果取下确界所依据的集合恰为空集，则 $m'_w(x,\ y) = \infty$。容易验证，对于所有 $x,\ y \in S$，都有 $m'_w(x,\ y) \leq m_w(x,\ y) + 1$。

U_w-邻近函数 m_w 完全以组合术语定义，且 S 不要求携带度量。在本节其余部分，我们固定宽度 w，并在度量背景下讨论该函数的性质。

引理 5.3。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是有界度量空间 (S, d) 的宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近。则对于 x、$y \in S$，我们有

$$m_w(x,y) = \infty \ \textit{if and only if}\ x = y.$$

证明。显然，对于所有 $x \in S$，$m_w(x,x) = \infty$。为证明反向蕴含，回顾推论 4.5，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{X \in \mathbf{X}^n} \operatorname{diam}(X) = 0.$$

这意味着对于不同的 $x, y \in S$，我们有 $m_w(x,y) \in \mathbb{N}_0$。 □

U_w-邻近函数使我们能够控制距离。

引理 5.4。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是有界度量空间 (S, d) 的宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近。那么存在一个常数 $C(\asymp)$，使得对于所有不同的点 $x, y \in S$，我们有

$$d(x,y) \asymp \operatorname{diam}(X^m),$$

其中 $m = m_w(x, y)$ 且 $X^m \in \mathbf{X}^m$ 是一个包含 x 的任意 m-瓦片。

注意，根据 $m \in \mathbb{N}_0$ 引理 5.3，因此该陈述是有意义的。

证明。设 $x, y \in S$ 互不相同，且 $m = m_w(x, y) \in \mathbb{N}_0$。那么存在 m-瓦片 $X, Y \in \mathbf{X}^m$，满足 $x \in X$、$y \in Y$，并且 $U_w(X) \cap U_w(Y) \neq \emptyset$。后一个结论又意味着存在一条由 m-瓦片组成的链

$$X_0 = X,\, X_1,\, \ldots,\, X_w,\, Y_w,\, \ldots,\, Y_1,\, Y_0 = Y$$

从 X 到 Y，长度为 $2w + 1$。

现在设 $X^m \in \mathbf{X}^m$ 是一个任意的包含 x 的 m-瓦片。那么

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \operatorname{diam}(X_0) + \cdots + \operatorname{diam}(X_w) + \operatorname{diam}(Y_w) + \cdots + \operatorname{diam}(Y_0) \\ &\lesssim \operatorname{diam}(X) \asymp \operatorname{diam}(X^m), \end{aligned}$$

这里我们反复使用了定义 4.1 中的条件 (i)。

另一方面，我们可以找到 $(m+1)$-瓦片 $X^{m+1}, Y^{m+1} \in \mathbf{X}^{m+1}$，满足 $x \in X^{m+1}$ 和 $y \in Y^{m+1}$。现在，根据 $m_w(x, y)$ 的定义可知，$U_w(X^{m+1}) \cap U_w(Y^{m+1}) = \emptyset$。由此得到

$$d(x, y) \geq \operatorname{dist}(X^{m+1}, Y^{m+1}) \gtrsim \operatorname{diam}(X^{m+1}) \asymp \operatorname{diam}(X^m),$$

这里用到了定义 4.1 中的条件 (ii) 和 (iii)。命题得证。 □

以下推论可由前面的引理和定义 3.1 直接得出。

推论 5.5. 设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是一个有界度量空间 (S, d) 的宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$、视觉参数为 $\Lambda > 1$ 的视觉逼近。那么存在一个常数 $C(\asymp)$，使得对于所有不同的点 $x, y \in S$，都有

$$d(x, y) \asymp \Lambda^{-m},$$

其中 $m = m_w(x, y)$。

现在我们证明，雪花等价可由其保持视觉逼近的性质来刻画。

命题 5.6. 设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是有界度量空间 (S, d) 的宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的视觉逼近。假设 d' 是 S 上的另一个度量。那么以下命题成立：

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{X}^n\} \textit{ is a visual approximation of width } w \textit{ for } (S, d') \\ \iff\ &\mathrm{id}_S \colon (S, d) \to (S, d') \textit{ is a snowflake equivalence.} \end{aligned}$$

回忆一下，后一个条件意味着存在某个 $\alpha > 0$，使得 $d'(x, y) \asymp d(x, y)^\alpha$ 对所有 $x, y \in S$ 都成立。证明将表明，视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 关于 (S, d) 和 (S, d') 的视觉参数 $\Lambda, \Lambda' > 1$ 分别满足 $\Lambda' = \Lambda^\alpha$。特别地，恒等映射 $\mathrm{id}_S \colon (S, d) \to (S, d')$ 是双 Lipschitz 的，当且仅当 $\Lambda = \Lambda'$。

证明。令 $\Lambda > 1$ 为视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 关于 (S, d) 的视觉参数。

“⇐”首先假设 $\mathrm{id}_S \colon (S, d) \to (S, d')$ 是雪花等价，这意味着存在 $\alpha > 0$，使得 $d'(x, y) \asymp d(x, y)^\alpha$ 对所有 $x, y \in S$ 都成立。令 $\Lambda' := \Lambda^\alpha > 1$，并任取 $n \in \mathbb{N}_0$。那么对所有 $X^n \in \mathbf{X}^n$，我们有

$$\operatorname{diam}_{d'}(X^n) \asymp (\operatorname{diam}_d(X^n))^\alpha \asymp (\Lambda^{-n})^\alpha = (\Lambda')^{-n},$$

根据定义 3.1 中的条件 (i)。此外，根据条件（ii），对于所有 $X^n, Y^n \in \mathbf{X}^n$ 满足 $U_w(X^n) \cap U_w(Y^n) = \emptyset$ 的情形，我们有

$$\operatorname{dist}_{d'}(X^n, Y^n) \asymp (\operatorname{dist}_d(X^n, Y^n))^\alpha \gtrsim (\Lambda^{-n})^\alpha = (\Lambda')^{-n}.$$

因此，根据定义 3.1，$\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S,d') 的宽度为 w 、视觉参数为 Λ' 的视觉逼近。

“⇒”反过来，假设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是一个宽度为 w 、参数为 $\Lambda'>1$ 的视觉逼近，对于 (S,d')。令

$$\alpha := \log(\Lambda')/\log(\Lambda) > 0.$$

于是 $\Lambda' = \Lambda^\alpha$。

定义 5.1 中的 U_w-邻近函数 $m = m_w$ 仅取决于 $\{\mathbf{X}^n\}$ 和 w，而与度量 d 和 d' 无关。于是推论 5.5 表明，对于任意不同的点 $x, y \in S$，我们有

$$d'(x,y) \asymp (\Lambda')^{-m(x,y)} = (\Lambda^\alpha)^{-m(x,y)} = (\Lambda^{-m(x,y)})^\alpha \asymp d(x,y)^\alpha.$$

因此，$\mathrm{id}_S\colon (S,d) \to (S,d')$ 是一个雪花等价，证毕。 □

6. 动力学拟视觉逼近

在（离散时间）动力系统理论中，人们研究空间 S 上的自映射 $g\colon S \to S$，该空间通常带有度量 d。为了使我们对度量空间 (S,d) 的（准）视觉逼近概念在此类情形下具有实用价值，自然需要求它能够保持所诱导的动力学。我们稍后将给出精确的条件。

以下，设 (S,d) 是一个有界度量空间，并带有自映射 $g\colon S \to S$（我们不假设 g 具有任何正则性）。对于 $n \in \mathbb{N}_0$，我们用 g^n 表示 g 的第 n 次迭代，其中 $g^0 := \mathrm{id}_S$。

如果覆盖 S 的序列 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$g(X^{n+1}) \in \mathbf{X}^n \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \text{ and } X^{n+1} \in \mathbf{X}^{n+1}. \tag{6.1}$$

更直观地说，这意味着映射 g 对所有 $n \geq 2$ 都将 n-瓦片的层级移高 1。这个条件可以直接推广为以下条件：

$$g^k(X^{n+k}) \in \mathbf{X}^n \quad \text{for all } n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}_0, \text{ and } X^{n+k} \in \mathbf{X}^{n+k}. \tag{6.2}$$

特别地，如果（拟）视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ of (S,d) 中的子列 $\{\mathbf{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (6.1)，则称该逼近为动力学的 。根据定义，这些逼近要求 $^0 = \{S\}\mathbf{X}$，因此我们不对 $^0\mathbf{X}$ 施加任何动力学限制。

在第 12 节中，我们将详细讨论这种情形的一个具体实例（即 g 是黎曼球面上的一个有理映射，而 (S,d) 是赋予球面度量的朱利亚集）。不过，在本节中，我们只会在一般情形下推导一些畸变性质。

设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S,d) 的宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的动力学准视觉逼近。根据动力学性质 (6.1)，相交的 n-瓦片在 $n \geq 2$ 的作用下映射为相交的 $(n-1)$-瓦片，对所有 $n \geq 2$ 均成立。因此，

$$g\big(U_w(X)\big) \subset U_w\big(g(X)\big)$$

对于所有瓦片 $X \in \mathbf{X}^n$, $n \in \mathbb{N}$。由此立即可知，关于 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的 U_w-邻近函数 m_w 满足

$$m_w(g(x), g(y)) \geq m_w(x,y) - 1$$

对于所有 $x, y \in S$。对这个不等式进行迭代，可得

$$m_w(g^n(x), g^n(y)) \geq m_w(x,y) - n \tag{6.3}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x,\ y \in S$。

不等式 (6.3) 推出了 g 的迭代的度量畸变性质。为表述该性质，我们固定常数 τ，$\rho \in (0, 1)$，对于 $\{\mathbf{X}^n\}$，分别如 (4.1) 和引理 4.3 的条件 (iv') 中所述。同样，我们令 $\nu = \log(1/\rho)/\log(1/\tau) \in (0, 1]$，从而 $\rho = \tau^\nu$ 如 (4.3) 所示。

引理 6.1. 对每个 $R > 0$，都存在一个常数 $C = C(R) \geq 1$，使得

$$d(g^n(x), g^n(y)) \leq C \cdot \left(\frac{d(x,y)}{\operatorname{diam}(Z^{n+1})} \right)^\nu, \tag{6.4}$$

只要 $n \in \mathbb{N}$, $Z^{n+1} \in \mathbf{X}^{n+1}$, $z_0 \in Z^{n+1}$，且 $x, y \in B(z_0, R \cdot \text{直径}(Z^{n+1}))$.

注意到 (6.4) 特别意味着映射 g 在 S 上连续。

证明。设 n, Z^{n+1}, z_0, x 和 y 如陈述所述，并定义 $m := m_w(x, y)$。不妨假设 $g^n(x) \neq g^n(y)$，这又意味着 $x \neq y$。于是由引理 5.3 得 $m \in \mathbb{N}_0$。我们选取瓦片 $X^{n+1} \in \mathbf{X}^{n+1}$ 和 $X^m \in \mathbf{X}^m$，使得 $x \in X^{n+1} \cap X^m$ (若 $m = n + 1$，则有$X^m = X^{n+1}$)。

首先假设 $m > n + 1$。那么由引理 5.4 和 (4.1)，我们有

$$d(x, y) \asymp \operatorname{diam}(X^m) \geq \tau^{m-n-1} \operatorname{diam}(X^{n+1}). \tag{6.5}$$

现在考虑像点 $g^n(x)$ 和 $g^n(y)$。由 (6.3)，我们有

$$k := m_w(g^n(x), g^n(y)) \geq m - n.$$

We 选择一个瓦片 $Y^k \in \mathbf{X}^k$，使得 $g^n(x) \in Y^k$。引理 5.4 和 (iv') 推出

$$d(g^n(x), g^n(y)) \asymp \operatorname{diam}(Y^k) \lesssim \rho^k \operatorname{diam}(S) \lesssim \rho^{m-n}.$$

结合 (4.3) 和 (6.5)，可得

$$d(g^n(x), g^n(y)) \lesssim \rho^{m-n} = \tau^{\nu(m-n)} \lesssim \left(\frac{d(x,y)}{\operatorname{diam}(X^{n+1})} \right)^\nu. \tag{6.6}$$

现在假设 $m \leq n + 1$。再次使用引理 5.4 和 (iv')，我们得到

$$\frac{d(x,y)}{\operatorname{diam}(X^{n+1})} \asymp \frac{\operatorname{diam}(X^m)}{\operatorname{diam}(X^{n+1})} \gtrsim (1/\rho)^{n+1-m} \geq 1,$$

而

$$d(g^n(x), g^n(y)) \leq \operatorname{diam}(S) \asymp 1.$$

由此可知，在此情形下估计式 (6.6) 仍然成立（必要时可调整一致乘法常数）。

我们已经证明，存在一个一致常数 $C_0 \geq 1$（与证明开头指定的各项无关），使得

$$d(g^n(x), g^n(y)) \leq C_0 \cdot \left(\frac{d(x,y)}{\operatorname{diam}(X^{n+1})} \right)^\nu.$$

接下来，只需在允许乘上一个可能依赖于 R 的常数的前提下，将上述不等式中的 $\operatorname{diam}(X^{n+1})$ 替换为 $\operatorname{diam}(Z^{n+1})$。根据既定假设，我们有

$$x \in X^{n+1} \cap B(z_0, R \operatorname{diam}(Z^{n+1})),$$

也就是说，瓦片 X^{n+1} 与球 $B(z_0, R \cdot \text{直径}(Z^{n+1}))$相交。由引理 4.8 可得直径$(Z^{n+1}) \asymp$ 直径(X^{n+1})，其中 $C(\asymp) = C(R)$。命题得证。□

7. Quasi-visual approximations and quasisymmetries

我们考虑拟视觉逼近的一个主要原因是，它们与拟对称映射密切相关。下面的命题是这方面的主要结果。

定理 7.1. 设(S, d_1) 是一个具有宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近$\{\mathbf{X}^n\}$ 的有界度量空间。假设 d_2 是 S 上的另一种度量，且(S, d_2) 有界。那么$\mathrm{id}_S\colon (S, d_1) \to (S, d_2)$ 是拟对称性的充要条件是 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是(S, d_2)的拟视觉逼近。

类似的论述已见于 [BM22]（其渊源可追溯至[BM17，引理 18.10]以及 [Me02，定理 4.2]的证明）。由于此处拟视觉逼近的定义更为一般，为使论述自成一体，我们给出完整证明。

在本节中，我们从此假设定理 7.1 的条件成立——也就是说，$(S,\ d_1)$ 是一个具有宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的有界度量空间，并且 d_2 是 S 上的另一种度量，使得 $(S,\ d_2)$ 有界。

关于 d_i 的度量概念将以下标 i 标记为 $i = 1,\ 2$。例如，$(S,\ d_1)$中的直径记为 $\mathrm{diam}_1,$，而$(S,\ d_2)$中的直径记为 $\mathrm{diam}_2,$，依此类推。

我们首先证明定理 7.1 中的“⇒”蕴含。

引理 7.2。 设$\mathrm{id}_S\colon (S, d_1) \to (S, d_2)$ 是拟对称性。那么 $\{\mathbf{X}^n\}$ 也是(S, d_2)的宽度为 w 的拟视觉逼近。

证明。 我们需要验证 $\{\mathbf{X}^n\}$ 对于$(S,\ d_2)$满足定义 4.1 中的条件 (i)–(iv)，且宽度仍为 w。

(i) 任取 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $X,\ Y \in \mathbf{X}^n$ 以及 $X \cap Y \neq \emptyset$。那么存在点$z \in X \cap Y$、 $x \in X$和 $y \in Y$，使得 $d_1(x,\ z) \asymp \mathrm{diam}_1(X)$，且 $d_1(y,\ z) \asymp \mathrm{diam}_1(Y)$，其中$C(\asymp) = 3$。由于定义 4.1 的条件 (i) 对于 d_1成立，我们知道

$$d_1(x, z) \asymp \mathrm{diam}_1(X) \asymp \mathrm{diam}_1(Y) \asymp d_1(y, z).$$

d_1 与 d_2 的拟对称等价结合引理 2.5 现在推出

$$\mathrm{diam}_2(X) \asymp d_2(x, z) \asymp d_2(y, z) \asymp \mathrm{diam}_2(Y).$$

因此，$\{\mathbf{X}^n\}$ 满足定义 4.1 中关于（$S,\ d_2$）的 (i)。

(iii) 这一条件的验证与 (i) 的验证非常相似，因此我们略去细节。

(ii) 任取 $n \in \mathbb{N}_0$ 与 $X,\ Y \in \mathbf{X}^n$，使得 $U_w(X) \cap U_w(Y) = \emptyset$，并任取 $x \in X$ 和 $y \in Y$。我们可以选取 $x' \in X$，使得 $d_1(x,\ x') \asymp$ 直径$_1(X)$，其中 $C(\asymp) = 3$。由于 (ii) 对 d_1成立，我们知道

$$d_1(x, x') \leq \mathrm{diam}_1(X) \lesssim \mathrm{dist}_1(X, Y) \leq d_1(x, y).$$

拟　　对称等价结合引理 2.5 现在推出

$$\mathrm{diam}_2(X) \asymp d_2(x, x') \lesssim d_2(x, y).$$

对所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 取下确界，我们得到

$$\mathrm{diam}_2(X) \lesssim \mathrm{dist}_2(X, Y).$$

这是针对 d_2 的条件（ii）。

(iv) 令 $\lambda \in (0,1)$ 和 $k_0 \in \mathbb{N}$ 为定义 4.1 中条件（iv）所述的常数，对于 (S, d_1)。设 $n \in \mathbb{N}_0$, $\ell \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbf{X}^n$ 和 $Y \in \mathbf{X}^{n+\ell k_0}$（其中 $X \cap Y \neq \emptyset$）任意。则我们可以找到点 $x \in X \cap Y$, $x' \in X$，使得 $\operatorname{diam}_1(X) \leq 3d_1(x, x')$，并且找到 $y \in Y$，使得 $\operatorname{diam}_2(Y) \leq 3d_2(x, y)$。

选取包含 x 的层级为 $n + k_0, \ldots, n + (\ell - 1)k_0$ 的中间瓦片，并对 (S, d_1) 反复应用定义 4.1 中的条件（iv），我们得到

$$d_1(x, y) \leq \operatorname{diam}_1(Y) \leq \lambda^\ell \operatorname{diam}_1(X) \leq 3\lambda^\ell d_1(x, x').$$

现在，$\mathrm{id}_S \colon (S, d_1) \to (S, d_2)$ 是某个同胚 $\eta \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ 所对应的 η-拟对称性。由此可得

$$\frac{1}{3} \operatorname{diam}_2(Y) \leq d_2(x, y) \leq \eta(3\lambda^\ell) d_2(x, x') \leq \eta(3\lambda^\ell) \operatorname{diam}_2(X),$$

因此

$$\operatorname{diam}_2(Y) \leq 3\eta(3\lambda^\ell) \operatorname{diam}_2(X).$$

由于 η 是 $[0, \infty)$ 上的同胚，且 $\lambda \in (0, 1)$，存在 $\ell_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\lambda := 2\eta(3\lambda^{\ell_0}) < 1$。取此 $\lambda \in (0,1)$ 和 $k_0 := \ell_0 k_0 \in \mathbb{N}$，可知 (S, d_2) 满足定义 4.1 中的条件（iv）。□

现在我们证明定理 7.1 中“⇐”这一蕴含。

引理 7.3. 假设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S, d_2) 的一个宽度为 $w' \in \mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近。那么恒等映射 $\mathrm{id}_S \colon (S, d_1) \to (S, d_2)$ 是一个拟对称性。

证明。我们的假设蕴含 $\{\mathbf{X}^n\}$ 对 (S, d_1) 和 (S, d_2) 都是宽度为 $\max\{w, w'\}$ 的拟视觉逼近。因此，不失一般性，我们可以假设 $w' = w$。

我们需要找到一个同胚 $\eta \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$，使得对所有 $t > 0$ 和 $x, y, z \in S$，以下蕴含成立：

$$d_1(x, y) \leq t d_1(x, z) \Rightarrow d_2(x, y) \leq \eta(t) d_2(x, z). \tag{7.1}$$

因此，任取 $t > 0$ 和 $x, y, z \in S$，满足 $d_1(x, y) \leq t d_1(x, z)$。我们可以假设 $x \neq y$。于是也有 $x \neq z$。

下文中，对于各种 $k \in \mathbb{N}_0$，我们将包含点 x 的 X^k k-瓦片记为。

根据引理 4.3 中的条件 (iv') 以及 (4.1)，存在常数 $\rho,\ \tau \in (0,\ 1)$ 和 $C \geq 1$，它们与 $t,\ x,\ y,\ z$ 无关，使得

$$\operatorname{diam}_i(X^{k+\ell}) \leq C\rho^\ell \operatorname{diam}_i(X^k) \tag{7.2}$$

and

$$\operatorname{diam}_i(X^{k+\ell}) \geq \tau^\ell \operatorname{diam}_i(X^k) \tag{7.3}$$

对于所有 $k,\ \ell \in \mathbb{N}_0$ 和 $i \in \{1, 2\}$。注意，此处允许 $\ell = 0$，因为在这种情况下，和 (7.3) (7.2) 都是平凡的。

现在令 $m := m_w(x,\ y) \in \mathbb{N}_0$ 以及 $n := m_w(x,\ z) \in \mathbb{N}_0$，其中 m_w 是关于 $\{\mathbf{X}^n\}$ 且宽度为 $w = w'$ 的 U_w-邻近函数，如定义 5.1 所述。根据引理 5.4，存在一个常数 $C(\asymp) > 0$，其与 $x,\ y,\ z$ 无关，使得

$$d_i(x, y) \asymp \operatorname{diam}_i(X^m) \text{ and } d_i(x, z) \asymp \operatorname{diam}_i(X^n) \tag{7.4}$$

对于 $i=1,\ 2$。这意味着，如有必要，我们可以增大（7.2）中的原常数 C（从而避免引入新的常数），于是可以假设

$$\frac{1}{C}d_i(x,y)\le \operatorname{diam}_i(X^m)\le Cd_i(x,y) \tag{7.5}$$

and

$$\frac{1}{C}d_i(x,z)\le \operatorname{diam}_i(X^n)\le Cd_i(x,z) \tag{7.6}$$

对于 $i=1,\ 2$。结合我们的假设 $d_1(x,\ y)\le td_1(x,\ z)$，特别可知

$$\operatorname{diam}_1(X^m)\le tC^2\operatorname{diam}_1(X^n). \tag{7.7}$$

证明的思路是将关于度量 d_1 的前述不等式转化为 m、n 和 t 之间的关系。将其用于度量 d_2，即可得到 $\operatorname{diam}_2(X^m)$ 关于 $\operatorname{diam}_2(X^n)$ 的上界。由 (7.5) 和 (7.6)，这将导出 $d_2(x,\ y)/d_2(x,\ z)$ 所需的估计。我们分两种情形讨论，并将使用常数 $\nu=\log(1/\rho)/\log(1/\tau)\in(0,1]$，其中 $\rho=\tau^\nu$（见 (4.3)）。

情形 *1*：$m\le n$。于是由 (7.7) 和 (7.2) 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}_1(X^m)&\le tC^2\operatorname{diam}_1(X^n)=tC^2\operatorname{diam}_1(X^{m+(n-m)})\\&\le tC^3\rho^{n-m}\operatorname{diam}_1(X^m),\end{aligned}$$

因此 $tC^3\rho^{n-m}\ge 1$。现在 (4.3) 表明

$$\tau^{m-n}=\rho^{(m-n)/\nu}\le (tC^3)^{1/\nu}=C^{3/\nu}\,t^{1/\nu}. \tag{7.8}$$

由此可得

$$\begin{aligned}d_2(x,y)&\le C\operatorname{diam}_2(X^m) && \text{by (7.5)}\\&\le C\tau^{-(n-m)}\operatorname{diam}_2(X^{m+(n-m)}) && \text{by (7.3)}\\&= C\tau^{m-n}\operatorname{diam}_2(X^n)\\&\le C^{1+3/\nu}\,t^{1/\nu}\operatorname{diam}_2(X^n) && \text{by (7.8)}\\&\le C^{2+3/\nu}\,t^{1/\nu}d_2(x,z) && \text{by (7.6)}\\&=\eta_1(t)d_2(x,z),\end{aligned}$$

其中我们令 $\eta_1(t):=C_1\,t^{1/\nu}$，且 $C_1=C^{2+3/\nu}$。显然，$\eta_1:\ [0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个同胚映射。

情形 *2*：$m>n$。然后由 (7.7) 和 (7.3) 可得

$$\begin{aligned}tC^2\operatorname{diam}_1(X^n)&\ge \operatorname{diam}_1(X^m)=\operatorname{diam}_1(X^{n+(m-n)})\\&\ge \tau^{m-n}\operatorname{diam}_1(X^n),\end{aligned}$$

因此 $tC^2\ge\tau^{m-n}$。现在，(4.3) 再次表明

$$\rho^{m-n}=\tau^{(m-n)\nu}\le C^{2\nu}t^\nu. \tag{7.9}$$

由此可得

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &\le C\operatorname{diam}_2(X^m) = C\operatorname{diam}_2(X^{n+(m-n)}) && \text{by (7.5)}\\ &\le C^2\rho^{m-n}\operatorname{diam}_2(X^n) && \text{by (7.2)}\\ &\le C^{2+2\nu}\,t^\nu\operatorname{diam}_2(X^n) && \text{by (7.9)}\\ &\le C^{3+2\nu}t^\nu d_2(x,z) && \text{by (7.6)}\\ &= \eta_2(t)d_2(x,z), \end{aligned}$$

其中我们令 $\eta_2(t) := C_2\,t^\nu$，且 $C_2 = C^{3+2\nu}$。显然，$\eta_2\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个同胚。

现在令

$$\eta(t) := K\max\{t^\nu, t^{1/\nu}\} \ge \max\{\eta_1(t),\eta_2(t)\} \tag{7.10}$$

对 $t \ge 0$，其中 $K = \max\{C_1, C_2\} \ge 1$。那么 $\eta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是满足 (7.1) 的同胚。结论得证。□

畸变函数如 (7.10) 所示的拟对称映射称为幂拟对称映射。我们的证明表明，引理 7.3 中的 $\mathrm{id}_S\colon (S,\ d_1) \to (S,\ d_2)$ 实际上属于这一类型。这并不令人意外，因为一致完美度量空间之间的拟对称映射都是幂拟对称映射（见 [He01，定理 11.3] 以及下文相关的推论 8.3）。

定理 *7.1* 的证明。结论可由引理 7.2 和 7.3 立即推出。 □

为了给后续应用提供参考，我们将定理 7.1 改述为以下更一般但本质上等价的形式。

推论 7.4。设 $\varphi\colon S \to T$ 是有界度量空间 (S,d) 与 (T,ϱ) 之间的双射，序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S,d) 的拟视觉逼近，而 $\{\mathbf{Y}^n\}$ 是 $\{\mathbf{X}^n\}$ 在 φ 下的像，即

$$\mathbf{Y}^n := \{\varphi(X) : X \in \mathbf{X}^n\}\ \textit{for}\ n \in \mathbb{N}_0.$$

那么 φ 是一个拟对称，当且仅当 $\{\mathbf{Y}^n\}$ 是 (T,ϱ) 的拟视觉逼近。

证明。我们在 S 上定义一个新的度量 d'，定义方式如下：

$$d'(x,y) := \varrho(\varphi(x),\varphi(y))$$

对于 $x,\ y \in S$。那么映射 φ 是 $(S,\ d')$ 与 $(T,\ \varrho)$ 之间的等距映射。

由此及定理 7.1 可知，$\varphi\colon (S,\ d) \to (T,\ \varrho)$ 是拟对称性的充要条件是，恒等映射 $\mathrm{id}_S\colon (S,\ d) \to (S,\ d')$ 是拟对称性的充要条件是，$\{\mathbf{X}^n\}$ 是 $(S,\ d')$ 的拟视觉逼近的充要条件是，$\{\mathbf{X}^n\}$ 在 φ（如陈述中所定义）下的像 $\{\mathbf{Y}^n\}$ 是 $(T,\ \varrho)$ 的拟视觉逼近。命题得证。□

定理 7.1 中的映射 $\mathrm{id}_S\colon (S,\ d_1) \to (S,\ d_2)$ 以及推论 7.4 中的映射 $\varphi\colon (S,\ d) \to (T,\ \varrho)$ 再次是幂拟对称映射。

8. Combinatorics of quasi-visual approximations

本节讨论三个密切相关的问题。为表述这些问题，设$\{\mathbf{X}^n\}$是集合 S 的覆盖序列。

(1) 设 S 配备度量 d。假设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S,d) 的宽度为 $w\in\mathbb{N}_0$ 的（拟）视觉逼近，并且 m_w 是相对于 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的邻近函数，如定义 5.1 所述。m_w 具有哪些性质？(2) 能否在 S 上定义一个关于覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的（拟）视觉度量？(3) 设 S 配备度量 d，并假设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S,d) 的拟视觉逼近。是否存在 S 上的另一个度量 ϱ，使得 $\{\mathbf{X}^n\}$ 成为 (S,ϱ) 的视觉逼近？

为回答这些问题，我们引入度量空间的（拟）视觉近似的组合版本。

定义 8.1（组合视觉逼近）。设 $w\in\mathbb{N}_0$ 和 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是集合 S 的覆盖序列，其中 $\mathbf{X}^0=\{S\}$。假设 m_w 是 S 上相对于 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的邻近函数，如定义 5.1 所述。若存在常数 $C\geq 0$，使得以下条件成立，则称 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 S 的宽度为 w 的组合视觉逼近：

(i) $m_w(x,\ y)\in\mathbb{N}_0$ 当 $x,\ y\in S$ 互不相同时。

(ii) 对所有的 $n\in\mathbb{N}_0$ 和 $X^n\in\mathbf{X}^n$，都存在 $x,\ y\in X^n$ 使得

$$m_w(x,y)\leq n+C.$$

(iii) 设 $n\in\mathbb{N}_0$, $X^n,\ Y^n\in\mathbf{X}^n$，并假设

$$U_w(X^n)\cap U_w(Y^n)=\emptyset$$

（见 (3.1)）。那么

$$m_w(x,y)\leq n+C \text{ for all } x\in X^n,\, y\in Y^n.$$

(iv) 对所有的 $x,\ y,\ z\in S$，我们有

$$m_w(x,y)\geq \min\{m_w(x,z),m_w(z,y)\}-C.$$

注意，根据 (5.1)，在条件 (ii) 中，只要 $x,\ y\in X^n$，我们总有 $m_w(x,\ y)\geq n$。条件 (ii) 与定义 3.1 中的 (i) 密切相关，而上文的条件 (iii) 对应于定义 3.1 中的 (ii)。量 $m_w(x,\ y)$ 在许多方面都可以视为点 $x,\ y\in S$的格罗莫夫积。如果空间 S 满足条件（iv），且以格罗莫夫积替代 U_w-邻近函数 m_w，则称其为格罗莫夫双曲；参见[BS07、GH90] 以及下文第 9 节。

以下定理回答了本节开头提出的问题 .

定理 8.2. 设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是集合 S 的一个覆盖序列，且 $w\in\mathbb{N}_0$。那么，以下条件等价：

(i) 存在一个度量 ϱ，定义在 S 上，使得 (S,ϱ) 有界，并且 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S,ϱ) 的宽度为 w 的视觉逼近。

(ii) 存在一个度量 d，定义在 S 上，使得 (S,d) 有界，并且 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S,d) 的宽度为 w 的拟视觉逼近。

(iii) $\{\mathbf{X}^n\}$ 是如定义 *8.1* 所述、宽度为 w 的 S 的组合视觉逼近。

蕴含 (i)$\Rightarrow$(ii) 已在引理 4.6 中证明。我们将在第 8.1 和 8.2 节分别证明蕴含 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 和 (iii) $\Rightarrow$(i)。我们还注意到，(i) 和 (ii) 中 S 上的度量 ϱ 和 d 是拟对称等价的（这可由定理 7.1 和引理 4.6 得出）。在开始证明之前，我们先记录以下推论；请比较命题 3.4。

推论 8.3。有界度量空间$(S,\ d)$ 存在拟视觉逼近，当且仅当它是一致完美的。

证明。必要性可直接由命题 3.4 和引理 4.6 得出。为证明充分性，设 (S,d) 存在拟视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$。由定理 8.2，存在 S 上的度量 ϱ，使得 (S,ϱ) 有界，且 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S,ϱ) 的视觉逼近。但根据引理 4.6，$\{\mathbf{X}^n\}$ 也是 (S,ϱ) 的拟视觉逼近，因此由定理 7.1，$\mathrm{id}_S\colon (S,\varrho)\to(S,d)$ 是一个拟对称映射。由于根据命题 3.4，(S,ϱ) 是一致完美的，且一致完美性在拟对称映射下保持不变（见引理 2.4），我们得出结论：(S,d) 也一致完美。□

8.1. **从拟视觉到组合视觉**。这里我们将证明定理 8.2 的蕴含 (ii) $\Rightarrow$(iii)。首先，我们需要做一些准备。在本小节中，$\{\mathbf{X}^n\}$ 始终是有界度量空间 (S,d) 的一个固定宽度为 $w\in\mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近。

Lemm引理 8.4。设 $k,n\in\mathbb{N}_0$，$X^k\in\mathbf{X}^k$，$X^n\in\mathbf{X}^n$ 和 $X^k\cap X^n\neq\emptyset$。假设 *tha* t

$$\operatorname{diam}(X^n)\lesssim\operatorname{diam}(X^k).$$

那么存在一个常数 $C\geq 0$，它取决于 $C(\lesssim)$ 以及定义 *4.1* 中的常数，使得

$$n\geq k-C.$$

证明。若 $n\geq k$，则无需证明；因此我们可以假设 $n<k$，并令 $\ell:=k-n\in\mathbb{N}$。设 $\rho\in(0,1)$ 和 C_1 为引理 4.3 中的常数，并设 $C_2=C(\lesssim)$ 为引理假设中的常数（即 $\operatorname{diam}(X^n)\leq C_2\operatorname{diam}(X^k)$）。那么

$$\operatorname{diam}(X^k)=\operatorname{diam}(X^{n+\ell})\leq C_1\rho^\ell\operatorname{diam}(X^n)\leq C_1C_2\rho^\ell\operatorname{diam}(X^k).$$

由此可得 $C_1C_2\rho^\ell\geq 1$，或者等价地

$$\ell\leq C:=\frac{\log(C_1C_2)}{\log(1/\rho)}\in[0,\infty).$$

因此 $n\geq k-C$，结论得证。□

命题 8.5。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是有界度量空间 (S,d)的宽度为 $w\in\mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近。那么 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 S 的宽度为 w 的组合视觉逼近。

这意味着，相对于序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 定义的 U_w-邻近函数 m 满足定义 8.1 中的条件。

证明。 首先注意，根据定义 4.1 中的假设，$\mathbf{X}^0 = \{S\}$ 。现在我们将验证函数 m 满足定义 8.1 中的四个条件 (i)–(iv)。

(i) 这已在引理 5.3 中证明。

(ii) 为了说明这一点，任取 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $X^n \in \mathbf{X}^n$ 。我们可以选取 $x, y \in X^n$ ，使得$d(x, y) \geq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(X^n)$。于是 $x \neq y$，因此 $m := m(x, y) \in \mathbb{N}_0$，由 (i) 可知。我们可以找到一个瓦片$X^m \in \mathbf{X}^m$，使得 $x \in X^m$。接着由引理 5.4 可得

$$\operatorname{diam}(X^m) \asymp d(x, y) \geq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(X^n),$$

因此，引理 8.4 表明存在一个一致常数 $C_1 \geq 0$ ，使得

$$m = m(x, y) \leq n + C_1.$$

条件（ii）得证。

(iii) 设 $n \in \mathbb{N}_0$, $X^n, Y^n \in \mathbf{X}^n$ 为满足 $U_w(X^n) \cap U_w(Y^n) = \emptyset$，且 $x \in X^n$,$y \in Y^n$的瓦片。于是 $x \neq y$，因此同样有 $m := m(x, y) \in \mathbb{N}_0$。我们选取一个瓦片 $X^m \in \mathbf{X}^m$，使得$x \in X^m$。然后利用引理 5.4 以及定义 4.1 中的条件（ii），可知

$$\operatorname{diam}(X^m) \asymp d(x, y) \geq \operatorname{dist}(X^n, Y^n) \gtrsim \operatorname{diam}(X^n).$$

因此，由引理 8.4 可得

$$m = m(x, y) \leq n + C_2$$

其中 $C_2 \geq 0$ 是一致常数，从而证明了 (iii)。

(iv) 任取 $x,\ y,\ z \in S$。若这些点并非两两不同，则由引理 5.3 可知，所需的不等式对 $C = 0$ 成立。因此，不妨设点 x、 y、z 两两不同。于是， $m := m(x,\ y)$、 $n := m(x,\ z)$ 和 $k := m(y,\ z)$ 都属于 $\mathbb{N}_0$。因此，我们可以找到瓦片 $X^n \in \mathbf{X}^n$ 和 $Y^k \in \mathbf{X}^k$，使得 $x \in X^n$ 且 $y \in Y^k$。

不失一般性，我们可以假设

$$\operatorname{diam}(X^n) \geq \operatorname{diam}(Y^k).$$

We 现在选取一个瓦片 $X^m \in \mathbf{X}^m$ ，使得 $x \in X^m$。由引理 5.4 可知

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(X^m) \asymp d(x, y) &\leq d(x, z) + d(y, z)\\ &\lesssim \operatorname{diam}(X^n) + \operatorname{diam}(Y^k) \leq 2\operatorname{diam}(X^n).\end{aligned}$$

由引理 8.4 可知，存在一致常数 $C_3 \geq 0$ ，使得

$$\begin{aligned}m(x, y) = m &\geq n - C_3 = m(x, z) - C_3\\ &\geq \min\{m(x, z), m(z, y)\} - C_3.\end{aligned}$$

条件（iv）随之成立。

前面的讨论表明，对于 U_w-邻近函数 m ，定义 8.1 中要求的条件同时满足，且常数为 $C := \max\{C_1, C_2, C_3\}$。 □

8.2. 从组合视觉到视觉。 现在我们证明定理 8.2 中的蕴含 (iii) ⇒(i)。

在本小节中，$\{\mathbf{X}^n\}$ 是集合 S的宽度为$w \in \mathbb{N}_0$ 的组合视觉逼近。在 S 上构造视觉度量，采用的是格罗莫夫双曲空间理论中的标准方法。具体来说，我们固定 $\Lambda > 1$ ，并定义函数q: $S \times S \to [0, \infty)$，其定义方式如下:

$$q(x, y) := \Lambda^{-m(x,y)}$$

对于 $x, y \in S$，其中 m 表示 S 上关于 $\{\mathbf{X}^n\}$的 U_w-邻近函数。这里我们采用约定 $\Lambda^{-\infty} = 0$。特别地，如果 $x = y$，则 $q(x, y) = 0$ 。虽然一般而言， q 不是 S 上的度量，但当 $\Lambda > 1$ 充分接近 1 时，它与某个度量双 Lipschitz 等价。

引理 8.6。 如上所定义的函数 q 是集合 S 上的拟度量（见定义 *2.2*）。如果 $\Lambda > 1$ 充分小，则 q 与 S上的一个度量 ϱ双 ***Lipschitz*** 等价。

证明。 任取 $x, y, z \in S$。根据定义 8.1 中的条件 (i)，可知 $q(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$。显然，我们还有 $q(x, y) = q(y, x)$，因为 U_w-邻近函数 m 是对称的。最后，利用定义 8.1 中条件（iv）及其对应的常数 $C \geq 0$，可得

$$\begin{aligned} q(x, y) = \Lambda^{-m(x,y)} &\leq \Lambda^C \max\{\Lambda^{-m(x,z)}, \Lambda^{-m(z,y)}\} \\ &= \Lambda^C \max\{q(x, z), q(z, y)\}. \end{aligned}$$

因此， q 是 S上的一个 Λ^C-拟度量。

为证明第二个结论，取充分小的 $\Lambda > 1$ ，使得 $\Lambda^C \leq 2$。现在由定理 2.3 可知，存在 S 上的一个度量 ϱ ，它与 q双 Lipschitz 等价。证明完毕。□

命题 8.7。 设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是集合 S的一个宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的组合视觉逼近。设 ϱ 是引理 *8.6* 为某个 $\Lambda > 1$给出的 S 上的一个度量。那么， $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S, ϱ) 的一个宽度为 w 、视觉参数为 Λ的视觉逼近。

证明。 令 ϱ 为引理 8.6 给出的 S 上的一个度量，其中 $\Lambda > 1$满足某个条件。于是，对所有 $x, y \in S$，都有 $\varrho(x, y) \asymp \Lambda^{-m(x,y)}$ ，其中 m 是相对于序列$\{\mathbf{X}^n\}$的 U_w-邻近函数。以下证明中的度量概念均指此度量 ϱ。

首先注意，根据定义 8.1 中的假设，$\mathbf{X}^0 = \{S\}$ 。现在任取 $n \in \mathbb{N}_0$ 和$X^n \in \mathbf{X}^n$ 。利用（5.1），可得

$$\varrho(x, y) \asymp \Lambda^{-m(x,y)} \leq \Lambda^{-n}$$

对所有 $x, y \in X^n$均成立。对所有 $x, y \in X^n$取上确界，得

$$\operatorname{diam}(X^n) \lesssim \Lambda^{-n}.$$

根据定义 8.1 中的条件（ii），存在 $x, y \in X^n$ 使得

$$\varrho(x, y) \asymp \Lambda^{-m(x,y)} \geq \Lambda^{-C}\Lambda^{-n}.$$

这表明

$$\operatorname{diam}(X^n) \gtrsim \Lambda^{-n},$$

由此可得 $\operatorname{diam}(X^n) \asymp \Lambda^{-n}$，其中 $C(\asymp)$ 是一个与$n \in \mathbb{N}_0$ 和 $X^n \in \mathbf{X}^n$ 无关的一致常数。这证明了定义 3.1 中的条件 (i)。

为考察视觉近似的第二个条件，设 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $X^n,\ Y^n \in \mathbf{X}^n$ 是n-瓦片，且满足 $U_w(X^n) \cap U_w(Y^n) = \emptyset$。那么，定义 8.1 中的条件 (iii) 意味着对所有 $x \in X^n$ 和 $y \in Y^n$，我们都有

$$\varrho(x, y) \asymp \Lambda^{-m(x,y)} \geq \Lambda^{-C}\Lambda^{-n}.$$

对所有 $x \in X^n$ 和 $y \in Y^n$ 取下确界，得到

$$\operatorname{dist}(X^n, Y^n) \gtrsim \Lambda^{-n},$$

因此，定义 3.1 中的条件（ii）成立。

由此完成了证明：$\{\mathbf{X}^n\}$ 是 $(S,\ \varrho)$ 的宽度为 w 、视觉参数为 Λ 的视觉近似。□

定理 8.2 立即由引理 4.6 以及命题 8.5 和命题 8.7 得出。

8.3. **从拟视觉到视觉**。 我们以拟视觉度量的若干个关于视觉度量的自然应用结束本节。第一个应用给出了一个判据，用于判断有界度量空间上一给定覆盖序列的拟视觉度量是否实际上是视觉度量。

引理 8.8。 设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是有界度量空间 (S, d)上宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的拟视觉逼近。那么，对于 (S, d)，$\{\mathbf{X}^n\}$ 是宽度为 w、视觉参数为 $\Lambda > 1$ 的视觉逼近，当且仅当

$$d(x, y) \asymp \Lambda^{-m(x,y)}$$

对所有 $x, y \in S$，其中 m 是关于 $\{\mathbf{X}^n\}$的 S 上的 U_w-邻近函数。

证明。 蕴含“⇒”直接由推论 5.5 得出。

反过来，假设对于所有 $x, y \in S$，$\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S, d) 上宽度为 w 的拟视觉逼近，并且$d(x, y) \asymp \Lambda^{-m(x,y)}$，其中常数为 $\Lambda > 1$。由定理 8.2 可知，$\{\mathbf{X}^n\}$ 也是 S上宽度为 w 的组合视觉逼近。我们将定义 8.1 中针对 m的 U_w-邻近函数所对应的一致常数记为 $C \geq 0$。

令 $n \in \mathbb{N}_0$和 $X^n \in \mathbf{X}^n$ 任意。由 (5.1) 可知，对于所有 $x, y \in X^n$，都有 $m(x, y) \geq n$。同时，由定义 8.1 中的条件（ii）可知，存在某个 $x, y \in X^n$，使得 $m(x, y) \leq n + C$。由此可得

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(X^n) &= \sup\{d(x, y) : x, y \in X^n\} \\ &\asymp \sup\{\Lambda^{-m(x,y)} : x, y \in X^n\} = \Lambda^{-\inf\{m(x,y):\, x,y\in X^n\}} \\ &\asymp \Lambda^{-n},\end{aligned}$$

这意味着定义 3.1 中的条件 (i) 得到满足。

现在令 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $X, Y \in \mathbf{X}^n$ 为满足 $U_w(X^n) \cap U_w(Y^n) = \emptyset$ 的瓦片。然后利用定义 8.1 中的条件 (iii)，可得

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(X, Y) &= \inf\{d(x, y) : x \in X,\, y \in Y\} \\ &\asymp \inf\{\Lambda^{-m(x,y)} : x \in X,\, y \in Y\} \gtrsim \Lambda^{-n},\end{aligned}$$

这意味着定义 3.1 中的条件（ii）得到满足。由于根据定义 4.1 的假设，$\mathbf{X}^0 = \{S\}$，我们得出结论：$\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S, d) 的宽度为 w、视觉参数为 Λ 的视觉逼近。这证明了第二个蕴含，引理的证明至此完成。□

我们的第二个应用是对视觉近似（以及度量）的刻画，它展示了 [BM17] 中使用的视觉度量定义与本文所用定义之间的联系。

推论 8.9。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是有界度量空间 (S,d)的一个覆盖序列，其中$\mathbf{X}^0 = \{S\}$。那么，当且仅当 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是一个宽度为 w、针对 S 的组合视觉逼近，且

$$d(x,y) \asymp \Lambda^{-m(x,y)}$$

对所有 $x, y \in S$，其中 m 是关于 $\{\mathbf{X}^n\}$在 S 上的 U_w-邻近函数 .

证明。蕴含“⇒”由定理 8.2 和推论 5.5 立即得到。另一个蕴含的证明方式与引理 8.8 中必要性部分的证明相同。□

9. The tile graph

在此，我们将前几节的框架与格罗莫夫双曲空间理论联系起来；关于这一主题的一般背景知识，参见 [Gr87、GH90、BS07]。

设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是集合 S 的一个覆盖序列，使得 $\mathbf{X}^0 = \{S\}$。于是令

$$\mathbf{X} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{X}^n$$

为所有$\mathbf{X}^n$的形式不交并。这意味着，对于 $n \neq k$，两个集合 $X^n \in \mathbf{X}^n$ 和 $X^k \in \mathbf{X}^k$是$\mathbf{X}$中的不同元素，尽管它们作为 S的子集可能相同。我们称每个元素 $X \in \mathbf{X}$ 为一个瓦片，并用 $|X|$ 表示其层级，也就是说，当 X表示$\mathbf{X}^n$中的一个集合时， $|X| = n$ 。

我们如下定义与 $\{\mathbf{X}^n\}$ 关联的瓦片图 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$。 Γ的顶点由$\mathbf{X}$中的元素给出。若Γ中的两个不同顶点分别由瓦片 $X, Y \in \mathbf{X}$表示，则当且仅当

$$X \cap Y \neq \emptyset \text{ and } \big||X| - |Y|\big| \leq 1. \tag{9.1}$$

换言之，两个不同的瓦片相交且其层级之差至多为1，当且仅当它们之间有一条边相连。

我们用 $|X - Y|$ 表示 Γ中两个顶点 $X, Y \in \mathbf{X}$ 之间的组合距离。这在$\mathbf{X}$上定义了一个度量。下文中提到瓦片图 Γ时，我们通常将其视为以$\mathbf{X}$为底集、以组合距离为度量的度量空间；但有时也会利用（9.1）中给出的瓦片关联关系，将 Γ视为图并使用其图结构。

在 Γ 上的格罗莫夫积定义如下

$$(X \cdot Y) := \frac{1}{2}\big(|X| + |Y| - |X - Y|\big) \tag{9.2}$$

对 $X, Y \in \mathbf{X}$。更准确地说，这是相对于基点 S 的格罗莫夫积，也就是说，是$\mathbf{X}$中唯一的 0 级瓦片（参见 [BS00，第 3]节以及 [Gr87，推论 1.1.B]）。

本节的主要结果如下。

定理 9.1。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是某个集合 S 的组合视觉逼近。那么瓦片图 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$ 是格罗莫夫双曲的，也就是说，存在一个常数 $C \geq 0$，使得

$$(X \cdot Y) \geq \min\{(X \cdot Z), (Z \cdot Y)\} - C$$

对于所有 X、Y、$Z \in \mathbf{X} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{X}^n$。

为进行证明，我们需要做一些准备。在本节余下部分，我们假设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是给定集合 S 的宽度为 $w \in \mathbb{N}_0$ 的组合视觉逼近，并按照定义 8.1 将相应的常数记为 C_{cv}。

将定义 5.1 中给出的邻近函数 $m = m_w$ 扩展到$\mathbf{X}$会很方便。为此，我们定义

$$m(X,Y) \coloneqq \min\{m(x,y) : x \in X,\, y \in Y\} \tag{9.3}$$

对于 X，$Y \in \mathbf{X}$。由于 $m(x,\ y) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，最小值确实可以取得 .

这个新量满足一个类似于定义 8.1 中不等式 (iv) 的不等式。

引理 9.2。对于所有 X、Y、$Z \in \mathbf{X}$，我们有

$$m(X,Y) \geq \min\{m(X,Z), m(Z,Y)\} - C_{\mathsf{cv}}.$$

证明。任取 $X, Y, Z \in \mathbf{X}$。于是，根据定义 8.1 的 (iv)，我们看到，对所有$z \in Z$，

$$\begin{aligned} m(X,Y) &= \min\{m(x,y) : x \in X,\, y \in Y\} \\ &\geq \min\{\min\{m(x,z),\, m(z,y)\} - C_{\mathsf{cv}} : x \in X,\, y \in Y\} \\ &= \min\{\min_{x\in X} m(x,z),\, \min_{y\in Y} m(z,y)\} - C_{\mathsf{cv}}. \end{aligned}$$

对上述表达式关于 $z \in Z$ 取最小值，可得

$$m(X,Y) \geq \min\{m(X,Z), m(Z,Y)\} - C_{\mathsf{cv}}. \qquad \square$$

我们将证明，量 $m(X,Y)$ 与格罗莫夫积 $(X \cdot Y)$ 仅相差一个一致有界的加性误差项。

命题 9.3。存在一个常数 $C \geq 0$，使得

$$m(X,Y) - C \leq (X \cdot Y) \leq m(X,Y) + C$$

对所有 $X, Y \in \mathbf{X}$。

由此命题可立即得到定理 9.1 的证明。

定理 *9.1* 的证明。令 $C_1 \geq 0$为命题 9.3 中的常数。那么，根据引理 9.2，我们得到

$$\begin{aligned} (X \cdot Y) &\geq m(X,Y) - C_1 \geq \min\{m(X,Z),\, m(Z,Y)\} - C_1 - C_{\mathsf{cv}} \\ &\geq \min\{(X \cdot Z) - C_1,\, (Z \cdot Y) - C_1\} - C_1 - C_{\mathsf{cv}} \\ &= \min\{(X \cdot Z),\, (Z \cdot Y)\} - 2C_1 - C_{\mathsf{cv}} \end{aligned}$$

对所有 X，Y，$Z \in \mathbf{X}$均成立。这表明该结论中的常数可取为 $C = 2C_1 + C_{\mathsf{cv}}$。 $\square$

接下来证明命题 9.3。

命题 *9.3* 的证明。展开定义可知，要证明该结论，只需找到一个常数 $C \geq 0$，使得

$$\begin{aligned} |X| + |Y| - 2m(X,Y) - C \leq |X - Y| \\ \leq |X| + |Y| - 2m(X,Y) + C \end{aligned} \tag{9.4}$$

对于 X，$Y \in \mathbf{X}$。

现在令 X，$Y \in \mathbf{X}$ 为任意对象，并定义

$$n \coloneqq |X|,\ k \coloneqq |Y|,\ \text{and } m \coloneqq m(X,Y).$$

不失一般性，我们可以假设 $n \le k$。使 $m(X,\ Y)$ 取到最小值的是 $x_0 \in X$ 和 $y_0 \in Y$，即

$$m(x_0, y_0) = m(X, Y).$$

于是存在 m-瓦片 X^m 和 Y^m，满足 $x_0 \in X^m$ 和 $y_0 \in Y^m$，使得 $U_w(X^m) \cap U_w(Y^m) \neq \emptyset$，其中 w 是组合视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的宽度。这又意味着存在一条由 m- 瓦片组成的链

$$Z_0 = X^m,\, Z_1, \ldots, Z_w,\, Z'_w, \ldots, Z'_1,\, Z'_0 = Y^m \tag{9.5}$$

从 X^m 到 Y^m 的长度为 $2w+1$。

现在，以下关于 m 的上界成立。

断言。我们有 $m \le n + 3C_{\mathsf{cv}}$。

事实上，由定义 8.1 中的 (ii) 可知，存在点 x'，$x'' \in X$ 使得 $m(x',\ x'') \le n + C_{\mathsf{cv}}$。因此，利用 (iv) 可得

$$n + C_{\mathsf{cv}} \ge m(x', x'') \ge \min\{m(x', x_0), m(x_0, x'')\} - C_{\mathsf{cv}}.$$

这里不妨假设最后一个最小值在 $m(x',\ x_0)$ 处取得。于是 $m(x',\ x_0) \le n + 2C_{\mathsf{cv}}$。现在，根据 x_0 和 y_0 的选取，我们有 $m(x',\ y_0) \ge m(x_0,\ y_0) = m$。因此再次应用定义 8.1 中的 (iv)，可知

$$\begin{aligned} n + 2C_{\mathsf{cv}} &\ge m(x_0, x') \\ &\ge \min\{m(x_0, y_0), m(y_0, x')\} - C_{\mathsf{cv}} = m - C_{\mathsf{cv}}. \end{aligned}$$

断言得证。

为了证明 (9.4)，现在根据 $m \in \mathbb{N}_0$ 与 n 的关系分两种情形讨论：$n \le m$ 和 $m \le n$。

情形 *1*：$n \le m$。

回想一下，我们还有 $|X| = n \le k = |Y|$。那么，对于 (9.4) 中的下界，我们注意到

$$\begin{aligned} |X - Y| &\ge k - n = n + k - 2n \ge n + k - 2m \\ &= |X| + |Y| - 2m(X, Y). \end{aligned}$$

为证明另一个不等式，暂设 $m \le k$。于是，在Γ中存在一条连接 X 和 Y 的路径，该路径由以下三条路径连接而成：

$$\begin{aligned} &X = X^n, X^{n+1}, \ldots, X^{n+(m-n)} = X^m; \\ &\text{the } m\text{-chain from } X^m \text{ to } Y^m \text{ in } (9.5); \\ &Y^m, Y^{m+1}, \ldots, Y^{m+(k-m)} = Y^k = Y. \end{aligned}$$

这里，每个 X^j 都是一个带有 $x_0 \in X^j$ 的 j-瓦片，而 Y^j 是一个带有 $y_0 \in Y^j$ 的 j-瓦片。如果 $k \le m$ 我们将第三条路径替换为一条形如.....的相似路径

$$Y^m, Y^{m-1}, \ldots, Y^{m-(m-k)} = Y^k = Y.$$

在这两种情况下，这条拼接后的路径长度为

$$\begin{aligned} N &= m - n + 2w + 1 + |k - m| \\ &\le m - n + 2w + 1 + |k - n| + |n - m| \\ &\le 3C_{\mathsf{cv}} + 2w + 1 + k - n + 3C_{\mathsf{cv}} && \text{(by the Claim)} \\ &= n + k - 2n + 6C_{\mathsf{cv}} + 2w + 1 \\ &\le n + k - 2m + 12C_{\mathsf{cv}} + 2w + 1 && \text{（根据断言）。} \end{aligned}$$

由此可得

$$|X - Y| \le N \le |X| + |Y| - 2m(X, Y) + 12C_{\mathsf{cv}} + 2w + 1.$$

这些考虑表明，情形 1 中的不等式 (9.4) 在一致常数$C = 12C_{\mathsf{cv}} + 2w + 1$下成立。

情形 *2*： $m \le n$。

这种情形更为复杂。首先注意，在 Γ 中存在一条连接 X 和 Y 的路径，它由以下三条路径首尾相接而成：

$$\begin{aligned} &X = X^n, X^{n-1}, \dots, X^{n-(n-m)} = X^m; \\ &\text{the } m\text{-chain from } X^m \text{ to } Y^m \text{ in } (9.5); \\ &Y^m, Y^{m+1}, \dots, Y^{m+(k-m)} = Y^k = Y. \end{aligned}$$

Her再次，每个 X^j 都是一个 j-瓦片，满足 $x_0 \in X^j$；而 Y^j 是一个 j-瓦片，满足 $y_0 \in Y^j$.

连接后的路径长度为

$$\widetilde{N} = n - m + 2w + 1 + k - m = n + k - 2m + 2w + 1,$$

因此

$$|X - Y| \le \widetilde{N} = |X| + |Y| - 2m(X, Y) + 2w + 1.$$

这给出了一个上界，与 (9.4) 中的界类似，其中一致常数为 $C = 2w + 1$。

为证明另一个不等式，我们首先注意到，根据定理 8.2，我们可以在 S 上赋予一个视觉度量 ϱ，对应于 $\{\mathbf{X}^n\}$。令 $\Lambda > 1$ 为 ϱ的视觉参数。于是，对于每个 $Z \in \mathbf{X}$，都有 $\mathbf{diam}(Z) \asymp \Lambda^{-|Z|}$（见定义 3.1 (i)）。这里以及下文中，直径均相对于度量 ϱ而言。

现在设 $X = X_0, X_1, \dots, X_N = Y$ 是 Γ 中连接 X 和 Y、且长度最小为 $N = |X - Y|$ 的路径。由于路径中相邻瓦片的层级之差至多为 1，因此我们有

$$|X_j| \ge |X| - j = n - j \text{ and } |X_{N-j}| \ge |Y| - j = k - j,$$

因此

$$\operatorname{diam}(X_j) \lesssim \Lambda^{-n+j} \text{ and } \operatorname{diam}(X_{N-j}) \lesssim \Lambda^{-k+j}$$

对 $j = 0, \ldots, N$。此外，根据引理 8.8，我们有 $\varrho(x_0, y_0) \asymp \Lambda^{-m}$。由此可知，对于任意 $N' \in \{0, \ldots, N\}$，我们有

$$\begin{aligned}\Lambda^{-m} \asymp \varrho(x_0, y_0) &\le \operatorname{diam}(X_0 \cup \cdots \cup X_N) \\ &\le \operatorname{diam}(X_0 \cup \cdots \cup X_{N'}) + \operatorname{diam}(X_{N'+1} \cup \cdots \cup X_N) \\ &\le \sum_{j=0}^{N'} \operatorname{diam}(X_j) + \sum_{j=0}^{N-N'-1} \operatorname{diam}(X_{N-j}) \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{N'} \Lambda^{-n+j} + \sum_{j=0}^{N-N'-1} \Lambda^{-k+j} \lesssim \Lambda^{-n+N'} + \Lambda^{-k+N-N'}.\end{aligned}$$

为了在此得到本质上最优的不等式，我们选择 $N' = \lfloor N_0/2 \rfloor$，其中 $N_0 = N - (k-n)$。作此选择后，由 N' 可得

$$\Lambda^{-m} \lesssim \Lambda^{-n+N'} + \Lambda^{-k+N-N'} \asymp \Lambda^{-n+N_0/2}.$$

这意味着存在一致常数 $C' \ge 0$，使得

$$m \ge n - \tfrac{1}{2}N_0 - C' = n - \tfrac{1}{2}(N - (k-n)) - C',$$

因此

$$\begin{aligned}|X - Y| = N &\ge n + k - 2m - 2C' \\ &= |X| + |Y| - 2m(X, Y) - 2C'.\end{aligned}$$

This 这就是 (9.4) 中所需的下界，并完成了情形 2 的论证 .

由于这两种情形涵盖了所有可能性，命题 9.3 的证明至此完备。 □

定理 9.1 现在就得证了。

10. Identifying the boundary at infinity with the space

本节中，我们考察有界度量空间 (S, d) 的一个拟视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$。由定理 8.2 可知，$\{\mathbf{X}^n\}$ 还为 S 提供了一个组合视觉逼近。根据定理 9.1，这又意味着相应的瓦片图$\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$ 是格罗莫夫双曲的。因此，Γ 具有一个无穷远边界 $\partial_\infty\Gamma$，可在其上赋予视觉度量 d_∞（我们稍后会回顾相关定义）。于是问题就变成了 $(\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 与 (S, d) 有何关系。正如本节将要说明的，在假设 (S, d) 完备的情况下，我们可以通过一个拟对称同胚自然地识别 (S, d) 和 $(\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$。显然，$(S, d)$ 的完备性是这种识别的必要条件，因为 $(\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 总是完备的（见 [BS00，命题 6.2]）。

目前我们假设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是集合 S 的一个覆盖序列，其中 $\mathbf{X}^0 = \{S\}$。与第 9 节一样，我们可以定义相应的瓦片图 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$。同样，我们将 Γ视为一个度量空间，其底层集合为 $\mathbf{X} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{X}^n$，度量则为$\mathbf{X}$上的组合距离。特别地，我们所说的 Γ中的序列，是指$\mathbf{X}$ 中 Γ的顶点集中的序列，或者等价地说，是瓦片序列。

现在假设 Γ 是格罗莫夫双曲的。为了定义 Γ的无穷远边界$\partial_\infty\Gamma$，我们称 Γ 中的序列 $\{X_i\}$ 在无穷远处收敛[1]（按照格罗莫夫双曲空间的意义）

[1]在文献中，这通常称为“收敛到无穷远”。

双曲空间）如果

$$\lim_{i,j\to\infty}(X_i\cdot X_j)=\infty. \tag{10.1}$$

注意，在这种情况下，$|X_i|\to\infty$ 当 $i\to\infty$时。

如果 $\{X_i\}$ 和 $\{Y_i\}$ 是 Γ 中在无穷远处收敛的两个序列，那么如果它们满足以下条件，我们称它们等价，记作 $\{X_i\}\sim\{Y_i\}$:

$$\lim_{i\to\infty}(X_i\cdot Y_i)=\infty. \tag{10.2}$$

由 Γ的格罗莫夫双曲性很容易推出，$\sim$在 Γ 中所有在无穷远处收敛的序列 $\{X_i\}$ 构成的集合上定义了一个等价关系。我们用 $[\{X_i\}]$表示此类序列 $\{X_i\}$ 在关系 $\sim$ 下的等价类。于是，根据定义，Γ的无穷远边界是所有此类等价类构成的集合，即:

$$\partial_\infty\Gamma:=\{[\{X_i\}]:\{X_i\}\text{ is a sequence in }\Gamma\text{ converging at infinity}\}.$$

我们希望定义一个从 S 到 $\partial_\infty\Gamma$ 的映射，从而在这两个集合之间建立自然识别。为此，任取 $x\in S$。由于$\mathbf{X}^n$ 是 S的一个覆盖，我们可以找到$X^n\in\mathbf{X}^n$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}_0$都有 $x\in X^n$。容易看出，$\{X^n\}$ 是瓦片图 Γ中的一条测地射线。我们称 $\{X^n\}$ 为 x的一条自然测地线。注意，与前面考虑的 Γ 中的序列不同，自然测地线 $\{X^n\}$ 中瓦片的运行指标 $n\in\mathbb{N}_0$ 也表示瓦片 X^n的层级 n。

引理 10.1 (自然测地线**)**。对于 S 中点的自然测地线，以下陈述成立:

(i) 设 $x\in S$ 和 $\{X^n\}$ 是 x 的一条自然测地线。那么 $\{X^n\}$ 按照 (10.1) 在无穷远处收敛。(ii) 如果 $\{X^n\}$ 和 $\{Y^n\}$ 是点 $x\in S$ 的两条自然测地线，那么这两个序列按照 (10.2) 等价。

证明。**(i)** 设 $\{X^n\}$ 是点 $x\in S$ 的一条自然测地线。那么对于所有 $n,\ k\in\mathbb{N}_0$，我们有 $|X^n|=n$、$|X^k|=k$ 和 $|X^n-X^k|=|n-k|$。因此

$$(X^n\cdot X^k)=\tfrac{1}{2}(n+k-|n-k|)=\min\{n,k\}\to\infty$$

由于 $n,\ k\to\infty$。由此可知，$\{X^n\}$ 在无穷远处收敛。

(ii) 设 $\{X^n\}$ 和 $\{Y^n\}$ 如陈述所述。那么对于所有 $n\in\mathbb{N}_0$，我们有 $|X^n|=|Y^n|=n$，并且 $|X^n-Y^n|\le 1$，因为这些瓦片在 x 相交。因此

$$(X^n\cdot Y^n)\ge n-1/2\to\infty\text{ as }n\to\infty,$$

因此 $\{X^n\}\sim\{Y^n\}$。 □

现在我们可以定义一个从 S 到 $\partial_\infty\Gamma$的映射如下。若 $x\in S$ 任意，则根据前面的结论，我们可以在 Γ中找到 x 的自然测地线 $\{X^n\}$。由引理 **10.1 (i)**，序列$\{X^n\}$ 收敛于无穷远，因此确定了 $\partial_\infty\Gamma$中的一个点 $[\{X^n\}]$。由引理 **10.1 (ii)**，等价类 $[\{X^n\}]$ 仅取决于 x，而与自然测地线$\{X^n\}$ 的选择无关（其中 x）。由此，我们得到一个良定义的映射

$$\Phi\colon S\to\partial_\infty\Gamma,\quad x\mapsto[\{X^n\}]. \tag{10.3}$$

从现在起直到本节结束，我们假设序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是一个有界度量空间 (S,d) 的拟视觉逼近；特别地，与之相关的瓦片图

$\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$ 根据定理 8.2 和 9.1 是格罗莫夫双曲的。在这种情形下，我们将 (10.3) 中的映射 Φ 称为 S 与 $\partial_\infty\Gamma$之间的自然识别，因为正如我们将在命题 10.6 中看到的，当 (S, d) 完备时，映射 Φ 是一个双射。本节稍后还将证明，如果为 $\partial_\infty\Gamma$ 赋予合适的视觉度量（按格罗莫夫双曲空间的意义），那么 Φ 实际上是一个拟对称映射。

在转向这些陈述的证明之前，我们先展示一些辅助事实，说明 S 上的度量概念与 Γ 的格罗莫夫双曲几何之间的关系。这里，首先通过改变 S 上的原度量 d，将给定的拟视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 提升为视觉逼近，会很有帮助。事实上，由定理 8.2 可知，我们可以在 S 上找到一个度量 ϱ，使得 (S, ϱ) 仍是一个有界度量空间，并且 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 (S, ϱ) 的视觉逼近（宽度相同），如定义 3.1 所述。我们将此定义中相应的视觉参数记为 $\Lambda > 1$。

下文中，除非另有说明，S 中的度量概念（如直径）均指相对于 ϱ 而言。此外，与第 9 节一样，我们令 $\mathbf{X} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbf{X}^n$。

引理 10.2. 任取 $X, Y \in \mathbf{X}$。则

$$\operatorname{diam}(X \cup Y) \asymp \Lambda^{-m(X,Y)} \asymp \Lambda^{-(X\cdot Y)}.$$

这里的常数 $C(\asymp)$ 与瓦片 X 和 Y无关。

证明。我们需要以下初等事实。

断言。$\operatorname{diam}(X \cup Y) \asymp \sup\{\varrho(x, y) : x \in X, y \in Y\}$。

确实，将右侧记为 $D(X, Y)$。那么显然

$$\operatorname{diam}(X \cup Y) = \max\{D(X, Y), \operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\}.$$

注意，对于 $x, x' \in X$ 和 $y \in Y$，我们有

$$\varrho(x, x') \le \varrho(x, y) + \varrho(x', y),$$

这意味着

$$\operatorname{diam}(X) = \sup\{\varrho(x, x') : x, x' \in X\} \le 2D(X, Y).$$

同理，$\operatorname{diam}(Y) \le 2D(X, Y)$，由此可得

$$D(X, Y) \le \operatorname{diam}(X \cup Y) \le 2D(X, Y),$$

从而用 $C(\asymp) = 2$ 证明了该断言。

现在我们得到以下估计：

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(X \cup Y) &\asymp \sup\{\varrho(x, y) : x \in X, y \in Y\} && \text{by the Claim}\\
&\asymp \sup\{\Lambda^{-m(x,y)} : x \in X, y \in Y\} && \text{by Corollary 5.5}\\
&= \Lambda^{-m(X,Y)} && \text{by (9.3)}\\
&\asymp \Lambda^{-(X\cdot Y)} && \text{by Proposition 9.3.}
\end{aligned}$$

结论得证。 □

由前一个引理可立即得出，$\{X_i\}$ 在 Γ 中的序列在无穷远处收敛（如式（10.1）所示）当且仅当

$$\operatorname{diam}(X_i \cup X_j) \to 0 \text{ as } i, j \to \infty. \tag{10.4}$$

在这种情况下，

$$\operatorname{diam}(X_i) \to 0 \text{ as } i \to \infty. \tag{10.5}$$

本节余下部分，我们还将假设有界度量空间 $(S,\ d)$ 是完备的。根据引理 7.3，恒等映射 $\mathrm{id}_S\colon (S,\ \varrho) \to (S,\ d)$ 是拟对称性的，因此根据引理 2.4，空间 $(S,\ \varrho)$ 也是有界且完备的。

引理 10.3。设 $\{X_i\}$ 是 Γ 中的一个序列。那么有以下等价关系：

$$\begin{aligned} &\{X_i\} \text{ 在无穷远处收敛} \\ \iff\ &\text{存在一点 } x \in S\text{，使得 直径}(\{x\} \cup X_i) \to 0 \text{ 当 } i \to \infty. \end{aligned}$$

此外，具有此性质的点 x 是唯一的。

条件 $\operatorname{diam}(\{x\} \cup X_i) \to 0$ as $i \to \infty$ 等价于说，我们有关于集合的豪斯多夫距离收敛 $X_i \to \{x\}$ as $i \to \infty$ （有关这一概念的定义，见 [BBI01，第 7.3 节。1] ）。

证明。“⇒” 假设 $\{X_i\}$ 在无穷远处收敛。我们为每个 $i \in \mathbb{N}_0$选取一个点 $x_i \in X_i$。于是由 (10.4) 可得

$$\varrho(x_i, x_j) \le \operatorname{diam}(X_i \cup X_j) \to 0$$

当 $i, j \to \infty$ 时。因此 $\{x_i\}$ 是一个柯西序列。由于 (S, ϱ) 是完备的，该序列有一个极限 $x \in S$。

现在 (10.5) 蕴含

$$\operatorname{diam}(\{x\} \cup X_i) \le \varrho(x, x_i) + \operatorname{diam}(X_i) \to 0 \text{ as } i \to \infty.$$

“⇐” 设 x 如陈述所述。那么我们有

$$\operatorname{diam}(X_i \cup X_j) \le \operatorname{diam}(\{x\} \cup X_i) + \operatorname{diam}(\{x\} \cup X_j) \to 0,$$

当 $i, j \to \infty$ 时。因此，根据引理 10.2 证明后的讨论（见 (10.4)），$\{X_i\}$ 在无穷远处收敛。

为证明唯一性结论，设 $x' \in S$ 是另一个点，满足 $\operatorname{diam}(\{x'\} \cup X_i) \to 0$ 如 $i \to \infty$。那么

$$\varrho(x, x') \le \operatorname{diam}(\{x\} \cup X_i) + \operatorname{diam}(\{x'\} \cup X_i) \to 0 \text{ as } i \to \infty.$$

因此 $\varrho(x,\ x') = 0$，所以 $x = x'$。 □

引理 10.4. 设 $\{X_i\}$ 和 $\{Y_i\}$ 是 Γ 中在无穷远处收敛的两个序列。设 x 和 y 分别是引理 *10.3* 中与 $\{X_i\}$ 和 $\{Y_i\}$ 对应的 S 中的关联点。那么以下结论成立：

(i) $\varrho(x,\ y) = \lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(X_i \cup Y_i)$,
(ii) $\{X_i\} \sim \{Y_i\}$ 当且仅当 $x = y$。

证明。(i) 显然，对每个 $i \in \mathbb{N}_0$ 都有

$$\begin{aligned} \varrho(x, y) &\le \operatorname{diam}(\{x\} \cup X_i) + \operatorname{diam}(X_i \cup Y_i) + \operatorname{diam}(\{y\} \cup Y_i), \\ \operatorname{diam}(X_i \cup Y_i) &\le \operatorname{diam}(\{x\} \cup X_i) + \varrho(x, y) + \operatorname{diam}(\{y\} \cup Y_i). \end{aligned}$$

令 $i \to \infty$，并利用

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(\{x\} \cup X_i) = \lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(\{y\} \cup Y_i) = 0$$

根据 x 和 y 的选取，我们可得

$$\varrho(x,y) \le \liminf_{i\to\infty} \operatorname{diam}(X_i \cup Y_i) \le \limsup_{i\to\infty} \operatorname{diam}(X_i \cup Y_i) \le \varrho(x,y).$$

该结论得证。

(ii) 根据定义，$\{X_i\} \sim \{Y_i\}$ 当且仅当 $(X_i \cdot Y_i) \to \infty$ 作为 $i \to \infty$。由引理 10.2，这等价于

$$\operatorname{diam}(X_i \cup Y_i) \to 0 \text{ as } i \to \infty.$$

根据 (i)，这又等价于 $\varrho(x, y) = 0$，结论得证。 □

推论 10.5。设 $x \in S$, $\{Y_i\}$ 是复数域中的一个序列，在无穷远处收敛，并且 $\Phi\colon\ S \to \partial_\infty\Gamma$ 是如 (10.3) 中所述的映射。则有以下等价关系：

$$[\{Y_i\}] = \Phi(x) \ \textit{ if and only if } \ \operatorname{diam}(\{x\} \cup Y_i) \to 0 \ \textit{ as } i \to \infty.$$

换言之，若 $x \in S$，则 $\{Y_i\}$ 是等价类 $\Phi(x)$ 中的一个序列（例如，x的一条自然测地线），当且仅当 x 是如引理 10.3 所述与该序列相关联的唯一点。

证明。首先，假设 $\{X^n\}$ 是 $x \in X$ 的一条自然测地线。由引理 10.1 (i)，$\{X^n\}$ 在无穷远处收敛，因此由 (10.5) 可得，当 $n \to \infty$ 时，$\operatorname{diam}(X^n) \to 0$。由于对每个 $n \in \mathbb{N}_0$ 都有 $x \in X^n$，我们得出

$$\operatorname{diam}(\{x\} \cup X^n) = \operatorname{diam}(X^n) \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

特别地，x 是与 $\{X^n\}$ 相关联的 S 中的唯一点，如引理 10.3 所述。

现在，设 $\{Y_i\}$ 是 Γ 中任意一个在无穷远处收敛的序列，$y \in S$ 是如引理 10.3 所述与 $\{Y_i\}$ 相关联的点，即当 $i \to \infty$ 时，$\operatorname{diam}(\{y\} \cup Y_i) \to 0$。由引理 10.4 (ii) 和 (10.3)，我们有

$$x = y \ \Leftrightarrow\ \{X^n\} \sim \{Y_i\} \ \Leftrightarrow\ [\{Y_i\}] = [\{X^n\}] = \Phi(x).$$

同时，由引理 10.3 的唯一性部分，我们有

$$x = y \ \Leftrightarrow\ \lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(\{x\} \cup Y_i) = 0.$$

命题得证。 □

经过这些准备，我们现在可以证明 Φ 是一个双射。

命题 10.6. 设(S, d) 是一个完备有界度量空间。那么，由(10.3) 给出的映射$\Phi\colon\ S \to \partial_\infty\Gamma$ 是一个双射。

证明. 为证明单射性，设 $x, y \in S$ 且 $\Phi(x) = \Phi(y)$。根据 Φ的定义，这意味着若 $\{X^n\}$ 和 $\{Y^n\}$ 分别是 x 和 y的自然测地线，则 $\{X^n\} \sim\{Y^n\}$。同时，推论 10.5 表明，x 和 y 分别是引理 10.3 中与$\{X^n\}$ 和 $\{Y^n\}$ 相关联的点。因此，根据引理 10.4 (ii)，有 $x = y$，从而可得 Φ 的单射性。

为了证明满射性，考虑 $\partial_\infty\Gamma$ 中任意一个点，它由 Γ 中在无穷远处收敛的序列 $\{X_i\}$ 的等价类$[\{X_i\}]$ 给出。令 $x \in S$ 为引理 10.3 中与 $\{X_i\}$ 相关联的点，并令 $\{Y^n\}$ 为 x 的一条自然测地线。于是，推论 10.5 表明，与序列 $\{Y^n\}$ 相关联的点也由 x 给出。根据引理 10.4 (ii)，我们有 $\{X_i\} \sim \{Y^n\}$；因此，由 Φ 的定义可得

$$\Phi(x) = [\{Y^n\}] = [\{X_i\}].$$

Φ 的满射性得证。 □

最后一个命题说明了为什么在我们的语境中，我们将映射 $\Phi\colon\ S \to \partial_\infty\Gamma$ 称为 S 与 $\partial_\infty\Gamma$的自然识别。我们还希望从度量的角度研究这一识别。为此，我们需要回顾 $\partial_\infty\Gamma$上的视觉度量这一概念。这个概念有所不同，但正如我们将在命题 10.7 中看到的，它与定义 3.2 中的视觉度量概念密切相关。

对于两个点 $X^\infty,\ Y^\infty \in \partial_\infty\Gamma$，我们将它们的格罗莫夫积定义为

$$(X^\infty \cdot Y^\infty) := \sup\big\{ \liminf_{i\to\infty}(X_i \cdot Y_i) : \{X_i\} \in X^\infty,\, \{Y_i\} \in Y^\infty \big\} \in [0,\infty]. \tag{10.6}$$

回忆一下，$\partial_\infty\Gamma$ 中的一个点是 Γ 中在无穷远处收敛的序列的一个等价类。在（10.6）中，我们对所有序列 $\{X_i\}$ 和 $\{Y_i\}$ 取上确界，这些序列分别包含于（或者更直观地说，表示）$\partial_\infty\Gamma$ 中的给定点 X^∞ 和 Y^∞。Γ的格罗莫夫双曲性意味着，除一个固定的加性常数外，这些序列的具体选择在此处并不重要。更准确地说（参见 [BH99，《备注》III.3.17（5），第 433] 页），存在一个与 $X^\infty,\ Y^\infty \in \partial_\infty\Gamma$ 无关的常数 $c_0 \geq 0$，使得对于所有 $\{X_i\} \in X^\infty$ 和 $\{Y_i\} \in Y^\infty$，我们都有

$$(X^\infty \cdot Y^\infty) - c_0 \leq \liminf_{i\to\infty}(X_i \cdot Y_i) \leq (X^\infty \cdot Y^\infty). \tag{10.7}$$

特别地，这意味着 $(X^\infty \cdot Y^\infty) = \infty$ 当且仅当 $X^\infty = Y^\infty$。

度量空间 $\partial_\infty\Gamma$ 上的度量 d_∞ 称为视觉度量（在格罗莫夫双曲空间的意义下），如果存在一个常数 $\Lambda_\infty > 1$ 使得

$$d_\infty(X^\infty, Y^\infty) \asymp \Lambda_\infty^{-(X^\infty \cdot Y^\infty)} \tag{10.8}$$

对所有 $X^\infty, Y^\infty \in \partial_\infty\Gamma$，其中 $C(\asymp)$ 与 X^∞ 和 Y^∞无关。这里采用我们先前的约定，即 $\Lambda_\infty^{-\infty} = 0$。我们称常数 Λ_∞ 为 d_∞的视觉参数。

下一个命题表明，在自然识别 $\Phi\colon\ S \to \partial_\infty\Gamma$下，$S$ 和 $\partial_\infty\Gamma$ 上的视觉度量完全对应。

命题 10.7。设(S, ϱ) 是一个完备有界度量空间，且 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是(S, ϱ)的视觉逼近。那么，对于相应的瓦片图 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$，以下陈述成立：

(i) 自然识别 $\Phi\colon (S, \varrho) \to (\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 是每个在 $\partial_\infty\Gamma$ 上具有视觉性质（按格罗莫夫双曲空间的意义）的度量 d_∞ 的雪花等价（见第 *2.4* 节）。

(ii) 令

$$d_\infty(X^\infty, Y^\infty) := \varrho(\Phi^{-1}(X^\infty), \Phi^{-1}(Y^\infty))$$

对 $X^\infty, Y^\infty \in \partial_\infty\Gamma$，定义了 $\partial_\infty\Gamma$ 上的视觉度量。

(iii)反过来，设 d_∞ 是 $\partial_\infty\Gamma$ 上的视觉度量（按格罗莫夫双曲空间的意义）。那么令

$$\widetilde{\varrho}(x, y) := d_\infty(\Phi(x), \Phi(y)),$$

对于 $x, y \in S$，在 S 上定义一个度量，使其对 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是视觉的（含义见定义 *3.2*）。

我们将看到，(ii) 中 d_∞ 的视觉参数 Λ_∞ 与 ϱ的视觉参数 Λ 相同，即 $\Lambda_\infty = \Lambda$。类似地，在 (iii) 中，$\widetilde{\varrho}$ 的宽度等于 ϱ的宽度，并且对于分别与 $\widetilde{\varrho}$ 和 d_∞相关联的视觉参数 Λ 和 Λ_∞，我们同样有$\sim$ $\sim\Lambda_\infty = \Lambda$。

命题 *10.7* 的证明。(i) 设 d_∞ 是 $\partial_\infty\Gamma$ 上视觉参数为 $\Lambda_\infty > 1$ 的视觉度量，并且如前所述，设 $\Lambda > 1$ 为定义 3.1 中 (S, ϱ) 的视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的视觉参数。令

$$\alpha := \log(\Lambda)/\log(\Lambda_\infty) > 0.$$

于是 $\Lambda = \Lambda_\infty^\alpha$。

现在任取 $x, y \in S$，并定义 $X^\infty := \Phi(x)$ 和 $Y^\infty := \Phi(y)$。取$\{X_i\} \in X^\infty$ 和 $\{Y_i\} \in Y^\infty$，可得

$$\operatorname{diam}(\{x\} \cup X_i) \to 0 \text{ and } \operatorname{diam}(\{y\} \cup Y_i) \text{ as } i \to \infty \tag{10.9}$$

由推论 10.5 可知。因此

$$\begin{aligned}
\varrho(x,y) &= \lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(X_i \cup Y_i) && \text{由引理 10.4 (i)}\\
&\asymp \limsup_{i\to\infty} \Lambda^{-(X_i\cdot Y_i)} && \text{由引理 10.2}\\
&\asymp \Lambda^{-(X^\infty\cdot Y^\infty)} && \text{by (10.7)}\\
&= \Lambda_\infty^{-\alpha(X^\infty\cdot Y^\infty)}\\
&\asymp d_\infty(X^\infty, Y^\infty)^\alpha\\
&= d_\infty(\Phi(x), \Phi(y))^\alpha.
\end{aligned} \tag{10.10}$$

因此，$\Phi\colon (S, \varrho) \to (\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 是一个雪花等价。

(ii) 由于 $\Phi\colon S \to \partial_\infty\Gamma$ 是一个双射（命题 10.6），Φ^{-1} 定义良好，因此我们可以按陈述中的方式定义 d_∞。显然，d_∞ 是 $\partial_\infty\Gamma$ 上的一个度量，并且对于 $X^\infty, Y^\infty \in \partial_\infty\Gamma$，有

$$d_\infty(X^\infty, Y^\infty) = \varrho(x, y),$$

其中 $x := \Phi^{-1}(X^\infty)$ $y := \Phi^{-1}(Y^\infty) \in S$。现在，利用 (10.10) 中的估计，我们得到

$$d_\infty(X^\infty, Y^\infty) = \varrho(x, y) \asymp \Lambda^{-(X^\infty\cdot Y^\infty)}.$$

Th这表明 d_∞ 是 $\partial_\infty\Gamma$ 上的一个视觉度量，其视觉参数为 $\Lambda_\infty = \Lambda$.

(iii) 设 d_∞ 是 $\partial_\infty\Gamma$ 上的一个视觉度量，其视觉参数为 $\Lambda_\infty > 1$，并假设 (S, ϱ) 的视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$ 如定义 3.1 所述具有宽度 w （视觉参数为 $\Lambda > 1$）。令 $\widetilde{\varrho}(x, y) := d_\infty(\Phi(x)\ \Phi(y))$，其中 $x, y \in S$。那么，$\widetilde{\varrho}$ 是 S 上的一个度量，并且利用 (10.10) 中的估计，我们有

$$\widetilde{\varrho}(x, y) = d_\infty(\Phi(x), \Phi(y)) \asymp \varrho(x, y)^{1/\alpha}$$

对于 $x, y \in S$，有 $\alpha = \log(\Lambda)/\log(\Lambda_\infty)$。这意味着 $\mathrm{id}_S\colon (S, \varrho) \to (S, \widetilde{\varrho})$ 是雪花等价。命题 5.6 表明，$\{\mathbf{X}^n\}$ 是 $(S, \widetilde{\varrho})$ 的视觉逼近，其视觉参数为 $\widetilde{\Lambda} = \Lambda^{1/\alpha} = \Lambda_\infty$，宽度为 $\widetilde{w} = w$。结论得证。□

现在我们可以证明，自然识别是拟对称的。

命题 10.8. 设(S, d) 是一个完备有界度量空间，$\{\mathbf{X}^n\}$ 是(S, d)的一个拟视觉逼近，且 d_∞ 是 $\partial_\infty\Gamma$上的视觉度量，其中 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$。那么，自然识别 $\Phi\colon (S, d) \to (\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 是一个拟对称性。

特别地，由此可知 Φ 是同胚。

证明。由定理 8.2 可知，存在一个度量 ϱ，定义在 S 上，使得 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是视觉的。于是，根据定理 7.1，映射

$$\mathrm{id}_S\colon (S,d)\to(S,\varrho)$$

是拟对称的；根据命题 10.7 (i)，映射

$$\Phi\colon (S,\varrho)\to(\partial_\infty\Gamma,d_\infty)$$

是雪花等价，因此也是拟对称的。因此，$\Phi\colon (S,\ d)\to(\partial_\infty\Gamma,\ d_\infty)$ 是拟对称的，因为它是前两个映射的复合。命题得证。□

11. From Gromov-hyperbolicity to quasi-visual approximations

在上一节中，我们讨论了如何将给定的有界度量空间自然地识别为与该空间的拟视觉近似相关联的（格罗莫夫双曲）瓦片图的无穷远边界。本节讨论反向过程。具体而言，我们考虑有界度量空间 $(S,\ d)$ 的覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$，其中 $\mathbf{X}^0=\{S\}$，并按照第 9 节中的定义构造瓦片图 $\Gamma=\Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$。我们假设 Γ 是格罗莫夫双曲的。一般来说，这并不意味着 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 $(S,\ d)$ 的拟视觉近似。然而，利用瓦片图 Γ 中瓦片的适当组合邻域，可以构造出形成拟视觉近似的集合（还需对空间 S作出一些自然的附加假设）。

更准确地说，由于假设 Γ 是格罗莫夫双曲的，Γ 的无穷远边界 $\partial_\infty\Gamma$ 是良定义的。我们假设该边界配备了格罗莫夫双曲空间意义下的视觉度量，并从现在起固定 $\partial_\infty\Gamma$ 上的这样一个度量 d_∞。与上一节一样，我们考虑映射 $\Phi\colon S\to\partial_\infty\Gamma$，如 (10.3) 所示，它将每个 $x\in S$ 映射到 Γ 中 x 的一条自然测地线 $\{X^n\}$（即，对于每个 $n\in\mathbb{N}_0$，X^n 都满足 $\mathbf{X}^n\ x\in X^n\in$）。注意，根据引理 10.1，映射 Φ 是良定义的（所给出的证明适用于 S 的任意覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$）。

我们将考察映射 Φ 的两种不同正则性条件：

(1) $\Phi\colon (S,d)\to(\partial_\infty\Gamma,d_\infty)$ 是拟对称性；(2) $\Phi\colon (S,d)\to(\partial_\infty\Gamma,d_\infty)$ 是雪花等价。

现在，$(\partial_\infty\Gamma,\ d_\infty)$ 总是完备的，见 [BS00，命题 6.2]。因此，根据引理 2.4，要使 Φ 满足任一条件，$(S,\ d)$ 也必须完备。同时，根据推论 8.3，$(S,\ d)$ 存在准视觉逼近的必要（且充分）条件是一致完美。基于这些原因，我们将要求有界度量空间 $(S,\ d)$ 完备且一致完美。

一般而言，在上述假设下，覆盖的原始序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 不一定是 $(S,\ d)$ 的准视觉逼近（参见第 11.2 节中的讨论）。为解决这一问题，我们需要用瓦片图 Γ 中恰当的邻域替换 $\mathbf{X}^n$ 中的瓦片。

Let $r\in\mathbb{N}_0$。瓦片 $X\in\mathbf{X}$ 的半径为 r 的邻域簇定义如下

$$V_r(X):=\bigcup\{Y\in\mathbf{X}:|X-Y|\le r\}. \tag{11.1}$$

此处及下文均使用第 9 节中的记号；也就是说，$\mathbf{X}$ 表示集合$\mathbf{X}^n$的形式不交并，而 $|X-Y|$ 表示 $X, Y \in \mathbf{X}$ 在Γ中的组合距离。请注意，与式 (3.1) 中定义的邻域 $U_w(X)$不同， $V_r(X)$ 中的瓦片不一定与 X处于同一层级。现在，对每个 $n \in \mathbb{N}_0$ ，我们定义

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{V}^n_r(\{\mathbf{X}^n\}) := \{V_r(X^n) : X^n \in \mathbf{X}^n\}. \tag{11.2}$$

我们用$\mathbf{V}_r$表示，或者当 r 固定时简称为$\mathbf{V}$ ，即上述所有集合$\mathbf{V}^n$ 的形式不交并。由构造可立即得出，每个$\mathbf{V}^n$ 都是 S 的一个覆盖，且$\mathbf{V}^0 = \{S\}$。

定理 11.1. 设(S, d) 是一个完备且一致完美的有界度量空间，设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 S 的一个覆盖序列，满足$\mathbf{X}^0 = \{S\}$ ，且瓦片图 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$是格罗莫夫双曲的；再设 $\{\mathbf{V}^n\}$是由(11.2) 对某个固定半径 $r \in \mathbb{N}_0$定义的 S 覆盖序列。

那么，对每个充分大的 r ，映射 $\Phi\colon S \to \partial_\infty\Gamma$（如(10.3)所示）满足以下结论：

(i) 若 Φ 是拟对称性，则 $\{\mathbf{V}^n\}$ 是(S, d)的宽度为 $w = 1$的拟视觉逼近。(ii) 若 Φ 是雪花等价，则 $\{\mathbf{V}^n\}$ 是(S, d)的宽度为 $w = 1$的视觉逼近。

从现在起直到本节结束，我们假设定理 11.1 的假设成立。由于 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$ 是格罗莫夫双曲的，因此存在一个常数 $C_\Gamma \geq 0$ ，使得

$$(X \cdot Y) \geq \min\{(X \cdot Z), (Z \cdot Y)\} - C_\Gamma \tag{11.3}$$

对所有 $X, Y, Z \in \mathbf{X}$ 均成立。此外，令 $\Lambda > 1$ 为 $\partial_\infty\Gamma$上固定的视觉度量d_∞ 的视觉参数。我们定义

$$\varrho(x, y) := d_\infty(\Phi(x), \Phi(y))$$

对于 $x, y \in S$，这显然是 S上的一个度量。于是

$$\varrho(x, y) \asymp \Lambda^{-(X^\infty \cdot Y^\infty)},$$

其中 $X^\infty := \Phi(x) \in \partial_\infty\Gamma$ 且 $Y^\infty := \Phi(y) \in \partial_\infty\Gamma$。特别地，$(S, \varrho)$ 是有界的。此外，由于 $\Phi\colon (S, \varrho) \to (\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 是等距映射，且假设 $\Phi\colon (S, d) \to (\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 至少是一个拟对称映射，因此根据引理 2.4，空间 (S, ϱ) 是完备且一致完美的。

现在，以下陈述成立。

命题 11.2. 对于每个充分大的半径 $r \in \mathbb{N}_0$，序列 $\{\mathbf{V}^n\}$ 构成宽度为 $w = 1$ 的视觉逼近，适用于(S, ϱ)。

注意，这里 S 配备的是度量 ϱ，而不是原度量 d。

在转向该命题的证明之前，我们先指出它如何推出定理 11.1。

定理 11.1 的证明。 令半径 $r \in \mathbb{N}_0$ 充分大，使得 $\{\mathbf{V}^n\}$ 如命题 11.2 所述，构成宽度为 $w = 1$ 的视觉逼近，适用于(S, ϱ)。还要注意，根据度量 ϱ的定义， $\Phi\colon (S, \varrho) \to (\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 是一个等距映射。

首先假设 $\Phi\colon (S, d) \to (\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 是拟对称性的。那么

$$\mathrm{id}_S\colon (S, d) \xrightarrow{\Phi} (\partial_\infty\Gamma, d_\infty) \xrightarrow{\Phi^{-1}} (S, \varrho) \tag{11.4}$$

它也是拟对称性的。由于根据引理 4.6, $\{\mathbf{V}^n\}$ 是 (S,ϱ) 的宽度为 $w=1$ 的拟视觉逼近, 因此由定理 7.1 可知, $\{\mathbf{V}^n\}$ 也是 (S,d) 的宽度为 $w=1$ 的拟视觉逼近。这证明了 (i)。

现在假设 $\Phi\colon (S,d)\to(\partial_\infty\Gamma,d_\infty)$ 是雪花等价。那么 (11.4) 中的映射也是雪花等价。所需的结论 (ii) 现在直接由命题 5.6 得出，命题的证明也就完毕。□

剩下的工作是证明命题 11.2。为此，我们将在接下来的两个引理中验证定义 3.1 中的两个条件，其中 S 中所有关于度量的概念均相对于度量 ϱ 而言。

引理 11.3。对于每个充分大的（固定的） $r\in\mathbb{N}_0$，我们有

$$\operatorname{diam}(V^n)\asymp\Lambda^{-n}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}_0$ 以及 $V^n\in\mathbf{V}^n=\mathbf{V}^n_r(\{\mathbf{X}^n\})$。

这意味着 $\{\mathbf{V}^n\}$ 满足定义 3.1 中关于 (S,ϱ) 的条件 (i)。

证明。任取 $n\in\mathbb{N}_0$ 和 $V^n=V_r(X^n)\in\mathbf{V}^n$，其中 $X^n\in\mathbf{X}^n$，半径$r\in\mathbb{N}_0$ 稍后确定。

我们选取 $x\in X^n$。由于 S 是一致完美的，存在 $y\in S$ 使得

$$\varrho(x,y)\asymp\Lambda^{-n},$$

其中 $C(\asymp)$取决于 (S,ϱ)的一致完美常数及其（有限）直径。另一方面，我们有

$$\varrho(x,y)\asymp\Lambda^{-(X^\infty\cdot Y^\infty)},$$

其中 $X^\infty:=\Phi(x)\in\partial_\infty\Gamma$ 且 $Y^\infty:=\Phi(y)\in\partial_\infty\Gamma$。分别令 $\{X^i\}$ 和 $\{Y^i\}$ 为 Γ中连接 x 和 y 的自然测地线。由 (10.7) 可知

$$\Lambda^{-(X^\infty\cdot Y^\infty)}\asymp\limsup_{i\to\infty}\Lambda^{-(X^i\cdot Y^i)}.$$

由此可得

$$(X^i\cdot Y^i)\geq n-C_1 \tag{11.5}$$

对所有充分大的 $i\in\mathbb{N}_0$ 以及某个一致常数 $C_1\geq 0$,

不失一般性，我们可以假设 X^n 是所选的 x 的自然测地线 $\{X^i\}$ 中的 n-瓦片。我们想证明 $|X^n-Y^n|$ 从上方是一致有界的，其中 Y^n 是所选的 y 的自然测地线 $\{Y^i\}$ 中的 n-瓦片。

事实上，利用（11.3），对于每个 $k\in\mathbb{N}_0$，我们看到

$$(X^n\cdot Y^n)\geq\min\{(X^n\cdot X^{n+k}),(X^{n+k}\cdot Y^{n+k}),(Y^{n+k}\cdot Y^n)\}-2C_\Gamma.$$

注意到（$X^n\cdot X^{n+k}$）$=$（$Y^n\cdot Y^{n+k}$）$=n$。将其代入前一个不等式，并利用（11.5），我们得到

$$(X^n\cdot Y^n)\geq n-C$$

对于一致常数 $C:=C_1+2C_\Gamma>0$。由于

$$(X^n\cdot Y^n)=\frac{1}{2}(|X^n|+|Y^n|-|X^n-Y^n|)=n-\frac{1}{2}|X^n-Y^n|,$$

我们得出结论:

$$|X^n-Y^n|\leq 2C.$$

由此可知，只要半径 r 满足 $r \geq \lceil 2C \rceil$，就有 $y \in Y^n \subset V^n = V_r(X^n)$，因此

$$\operatorname{diam}(V^n) \geq \varrho(x,y) \gtrsim \Lambda^{-n}.$$

我们已经证明了 $\operatorname{diam}(V^n)$ 所需的下界。

为了证明相应的上界，任取 $z \in V^n = V_r(X^n)$。那么存在$Z \in \mathbf{X}$，使得 $z \in Z$ 满足 $|X^n - Z| \leq r$，因此 $n - r \leq |Z| \leq n + r$。

设 $\{Z^i\}$ 为 z 的一条自然测地线，并令 $Z^\infty := \Phi(z) = [\{Z^i\}]$。不妨假设瓦片 Z 是这条自然测地线的一部分，或者等价地，假设对于 $i = |Z|$，$Z^i = Z$。那么对每个 $k \in \mathbb{N}_0$，我们有

$$|Z - Z^{n+k}| = \big||Z| - |Z^{n+k}|\big| \leq \big||Z| - n\big| + k \leq r + k,$$

因此

$$|X^{n+k} - Z^{n+k}| \leq |X^{n+k} - X^n| + |X^n - Z| + |Z - Z^{n+k}| \leq k + r + r + k.$$

由此可得

$$\begin{aligned}(X^{n+k} \cdot Z^{n+k}) &= \frac{1}{2}(|X^{n+k}| + |Z^{n+k}| - |X^{n+k} - Z^{n+k}|) \\ &\geq \frac{1}{2}(n + k + n + k - 2k - 2r) = n - r,\end{aligned}$$

这蕴含

$$\varrho(x,z) \asymp \Lambda^{-(X^\infty \cdot Z^\infty)} \asymp \limsup_{k\to\infty} \Lambda^{-(X^{n+k} \cdot Z^{n+k})} \lesssim \Lambda^{-n}.$$

由于 $z \in V^n$ 是任意的，我们得出 $\operatorname{diam}(V^n) \lesssim \Lambda^{-n}$，从而完成引理的证明。□

引理 11.4. 对于每个充分大的（固定的）$r \in \mathbb{N}_0$，蕴含式

$$U_1(V) \cap U_1(V') = \emptyset \;\Rightarrow\; \operatorname{dist}(V, V') \gtrsim \Lambda^{-n}.$$

对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 V，$V' \in \mathbf{V}^n = \mathbf{V}^n_r(\{\mathbf{X}^n\})$ 均成立。

这意味着 $\{\mathbf{V}^n\}$ 满足定义 3.1 中宽度为 $w = 1$ 的条件（ii）。证明将表明，$r > 2C_\Gamma$ 足以使该蕴含式成立。

证明。任取 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $V, V' \in \mathbf{V}^n = \mathbf{V}^n_r(\{\mathbf{X}^n\})$，其中半径 $r \in \mathbb{N}_0$ 将在后文确定。

于是，对于某个 $X^n \in$**复数域**^{n}，有 $V = V_r(X^n)$。现在令 $x \in V$ 为任意元素。于是存在 $\widetilde{X} \in$**复数域**，满足 $x \in \widetilde{X}$ 和 $|X^n - \widetilde{X}| \leq r$，因此 $\widetilde{X}$ 满足

$$n - r \leq |\widetilde{X}| \leq n + r.$$

令 $\{\widetilde{X}^i\}$ 为 x 的一条自然测地线。我们可以假设它包含 $\widetilde{X}$，这意味着 $\widetilde{X}^\ell = \widetilde{X}$、$\widetilde{}$ $\widetilde{}$，其中 $\ell := |\widetilde{X}|$ 是 $\widetilde{X}$ 的层级。

现在考虑 $\widetilde{V} := V_r(\widetilde{X}^n)$。由于 $|X^n - \widetilde{X}| = |n - \ell| \leq r$，我们有 $\widetilde{X} \subset V$，因此 $x \in V \cap \widetilde{V} \neq \emptyset$。由此可得

$$\widetilde{V} \subset U_1(V).$$

同样，令 $y \in V'$ 任意。通过与 x 类似的推理，存在一条自然测地线 $\{\widetilde{Y}^i\}$，其属于 y，且满足 $\widetilde{V}' := V_r(\widetilde{Y}^n)$

$$\widetilde{V}' \subset U_1(V').$$

经过这些准备，现在假设给定的集合 V，$V' \in \mathbf{V}^n$ 满足条件 $\widetilde{\ } \quad \widetilde{\ } U_1(V) \cap U_1(V') = \emptyset$。由上述讨论可知 $V \cap V' = \emptyset$，因此 $\widetilde{\ } \quad \widetilde{\ } |X^n - Y^n| \geq 2r$。由此可得

$$(\widetilde{X}^n \cdot \widetilde{Y}^n) = \frac{1}{2}(|\widetilde{X}^n| + |\widetilde{Y}^n| - |\widetilde{X}^n - \widetilde{Y}^n|) \leq \frac{1}{2}(n + n - 2r) = n - r.$$

利用 (11.3)，我们得出，对于所有 $k \in \mathbb{N}_0$，

$$\begin{aligned} n - r &\geq (\widetilde{X}^n \cdot \widetilde{Y}^n) \\ &\geq \min\{(\widetilde{X}^n \cdot \widetilde{X}^{n+k}), (\widetilde{X}^{n+k} \cdot \widetilde{Y}^{n+k}), (\widetilde{Y}^{n+k} \cdot \widetilde{Y}^n)\} - 2C_\Gamma \\ &= \min\{n, (\widetilde{X}^{n+k} \cdot \widetilde{Y}^{n+k}), n\} - 2C_\Gamma, \end{aligned}$$

因此

$$n - r + 2C_\Gamma \geq \min\{n, (\widetilde{X}^{n+k} \cdot \widetilde{Y}^{n+k})\}. \tag{11.6}$$

现在假设 $r > 2C_\Gamma$。那么，对于 (11.6) 左侧的表达式，我们有 $n - r + 2C_\Gamma < n$。因此，右侧的最小值在 $(\widetilde{X}^{n+k} \cdot \widetilde{Y}^{n+k})$ 处取得，这意味着

$$n \geq (\widetilde{X}^{n+k} \cdot \widetilde{Y}^{n+k}).$$

由 (10.7)，我们进而有

$$\varrho(x, y) \asymp \Lambda^{-(X^\infty \cdot Y^\infty)} \asymp \limsup_{k \to \infty} \Lambda^{-(\widetilde{X}^{n+k} \cdot \widetilde{Y}^{n+k})} \geq \Lambda^{-n},$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$其中 $X^\infty := \Phi(x) = [\{X^i\}] \in \partial_\infty \Gamma$ 以及 $Y^\infty := \Phi(y) = [\{Y^i\}] \in \partial_\infty \Gamma$。

由于点 $x \in V$ 和 $y \in V'$ 是任意选取的，我们得出 $\mathrm{dist}(V, V') \gtrsim \Lambda^{-n}$，从而完成了该引理的证明。□

命题 11.2 现在可由引理 11.3 和 11.4 直接推出。

11.1. 比较 $\{\mathbf{X}^n\}$ 和 $\{\mathbf{V}^n\}$的瓦片图。本节的出发点是有界度量空间 (S, d) 的覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$，我们由此构造了一个新的覆盖序列 $\{\mathbf{V}^n\}$。由此产生的问题是，相关的瓦片图 $\Gamma_{\mathbf{X}} := \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$ 和 $\Gamma_{\mathbf{V}} := \Gamma(\{\mathbf{V}^n\})$（作为度量空间）之间有何关系。我们分别用 $|X - Y|_{\mathbf{X}}$ 和 $|V - V'|_{\mathbf{V}}$ 表示对应的组合距离（对于 $X, Y \in \mathbf{X}$ 和 $V, V' \in \mathbf{V}$）。这里 $r \in \mathbb{N}_0$ 是固定的，为简化记号，以下记 $V(X) = V_r(X)$。

我们有一个自然的满射

$$\Psi \colon \Gamma_{\mathbf{X}} \to \Gamma_{\mathbf{V}}, \quad X \in \mathbf{X} \mapsto V(X) \in \mathbf{V}. \tag{11.7}$$

我们断言，这个映射实际上是一个拟等距（事实上是一个粗相似），下一条引理将证明这一点（关于这些概念的讨论，参见 [BS00，第 2] 节）。

引理 11.5. </style}： $\Psi\ \Gamma_{\mathbf{X}} \to \Gamma_{\mathbf{V}}$ 中给出的满射(11.7) 满足不等式

$$\frac{1}{2r+1}|X - Y|_{\mathbf{X}} \leq |V(X) - V(Y)|_{\mathbf{V}} \leq \frac{1}{2r+1}|X - Y|_{\mathbf{X}} + 1$$

对所有 $X, Y \in \mathbf{X}$。

证明。 任取 $X, Y \in \mathbf{X}$ 。我们先证明左侧的不等式。为此，取一条长度为 N 的路径 $V_0 = V(X)$ $V_1, \ldots, V_N = V(Y)$: $= |V(X) - V(Y)|_{\mathbf{V}} \geq 0$ 属于 $\Gamma_{\mathbf{V}}$。根据构造，对每个 i ，都存在 $X_i \in \mathbf{X}$ ，使得 $V_i = V(X_i) \in \mathbf{V}$，其中 $X_0 = X$且 $X_N = Y$。此外，对每个 $i = 1, \ldots, N$，都有 $|X_{i-1} - X_i|_{\mathbf{X}} \leq 2r + 1$，因为$V_{i-1} \cap V_i \neq \emptyset$。由此可得

$$|X - Y|_{\mathbf{X}} \leq \sum_{i=1}^{N} |X_{i-1} - X_i|_{\mathbf{X}} = (2r + 1)N.$$

所需的不等式得证。

现在我们证明右侧的不等式。为此，设 $X_0 = X, X_1, \ldots, X_N = Y$ 是 $\Gamma_{\mathbf{X}}$ 中一条长度为 N: $= |X - Y|_{\mathbf{X}} \geq 0$ 的路径。对所有 $i > N$，令 $X_i := Y$。注意到

$$X_r \subset V(X_0), \ X_{r+1} \subset V(X_{2r+1}), \text{ and } X_r \cap X_{r+1} \neq \emptyset,$$

这意味着 $V(X_0) \cap V(X_{2r+1}) \neq \emptyset$。类似地，令 $V_k := V(X_{(2r+1)k})$，便得到对所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 都有 $V_k \cap V_{k+1} \neq \emptyset$。由于根据构造，对于 $k := \left\lceil \frac{N}{2r+1} \right\rceil$， $V_k = V(Y)$，我们构造出子一条路径 $V_0 = V(X)$、 V_1、 …、 $V_k = V(Y)$，其在 $\Gamma_{\mathbf{V}}$ 中的长度为 k。这意味着

$$|V(X) - V(Y)|_{\mathbf{V}} \leq k = \left\lceil \frac{N}{2r+1} \right\rceil \leq \frac{1}{2r+1} |X - Y|_{\mathbf{X}} + 1.$$

这就得到了所需的不等式，并完成了证明。 □

我们得到如下推论。

推论 11.6. 瓦片图 $\Gamma_{\mathbf{X}}$ 是格罗莫夫双曲的，当且仅当 $\Gamma_{\mathbf{V}}$ 是格罗莫夫双曲的。此外，在这种情况下，映射 Ψ: $\Gamma_{\mathbf{X}} \to \Gamma_{\mathbf{V}}$由 $X \mapsto V(X)$给出，并诱导出一个双射 Ψ_∞: $\partial_\infty \Gamma_{\mathbf{X}} \to \partial_\infty \Gamma_{\mathbf{V}}$，由 $[\{X_i\}] \mapsto [\{V(X_i)\}]$给出。进一步地，若 $d_{\infty,\mathbf{X}}$ 和$d_{\infty,\mathbf{V}}$ 分别表示 $\partial_\infty \Gamma_{\mathbf{X}}$ 和 $\partial_\infty \Gamma_{\mathbf{V}}$ 上的视觉度量（按格罗莫夫双曲空间的意义），则映射

$$\Psi_\infty \colon (\partial_\infty \Gamma_{\mathbf{X}}, d_{\infty,\mathbf{X}}) \to (\partial_\infty \Gamma_{\mathbf{V}}, d_{\infty,\mathbf{V}})$$

是一个雪花等价。

证明。 第一个断言源于如下事实：测地度量空间之间的拟等距保持格罗莫夫双曲性（见 [GH90, 第 ´eor`ème 5.12, 第 88] 页）。严格来说，为了应用这一结果，我们必须在两个空间$\Gamma_{\mathbf{X}}$ 和 $\Gamma_{\mathbf{V}}$ 中相邻的顶点之间添加边（长度为 1），使它们成为测地空间。

其余两个断言由 [BS00、命题 6.3 和定理 6.5] 得出。 □

11.2. 示例：定理 11.1 中邻域簇的必要性。 本小节给出一个有界度量空间 (S, d) 的覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 的示例，其中 $\mathbf{X}^0 = \{S\}$，并具有以下性质：

(1) 相应的瓦片图 $\Gamma = \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$ 是格罗莫夫双曲的。

(2) 按照 (10.3) 的定义，映射 Φ: $(S, d) \to (\partial_\infty \Gamma, d_\infty)$ 对每个视觉度量 d_∞ 都是拟对称的（就格罗莫夫双曲空间而言）。

(3) $\{\mathbf{X}^n\}$ 不是(S, d)的拟视觉逼近。

这表明，在定理 11.1 中，确实有必要像 (11.1) 那样取邻域簇，才能得到(S, d)的（拟）视觉逼近（宽度为 $w = 1$）。

讨论一个具有这些性质的例子，令 $S = [0, 1]$ 为闭单位区间。我们赋予它由 $d(x,\ y) := |x - y|$ 定义的标准欧几里得度量，其中 $x,\ y \in S$。我们用 $\mathbf{I}^n$ 表示所有层级为 $n \in \mathbb{N}_0$ 的闭二进区间的集合，也就是说，所有形如 $[(j-1)/2^n,\ j/2^n]$ 的集合，其中 $j = 1, \ldots,\ 2^n$。显然，$\{\mathbf{I}^n\}$ 是 $(S,\ d)$ 的一个宽度为 $w = 0$ 的视觉逼近。

现在，我们通过在 $\{\mathbf{I}^n\}$ 中每两个连续元素之间插入一个足够精细的覆盖，来定义一个新的覆盖序列 $\{\mathbf{X}^n\}$，其覆盖对象为 S。更确切地说，我们定义

$$\mathbf{X}^{2k} := \mathbf{I}^k \quad \text{and} \quad \mathbf{X}^{2k+1} := \mathbf{I}^{2k},$$

其中 $k \in \mathbb{N}_0$。注意，$\mathbf{X}^0 = \mathbf{I}^0 = \{S\}$。

断言 *1*：$\{\mathbf{X}^n\}$ 不是 S 的拟视觉逼近。

根据构造，每个集合 $Y \in \mathbf{X}^{2k+1} = \mathbf{I}^{2k}$ 对于 $k \in \mathbb{N}_0$ 都包含在一个（单一的）集合 $X \in \mathbf{X}^{2k} = \mathbf{I}^k$ 中。由于

$$\operatorname{diam}(X)/\operatorname{diam}(Y) = 2^{-k}/2^{-2k} = 2^k,$$

我们得出结论，$\{\mathbf{X}^n\}$ 不满足定义 4.1 中的条件 (iii)，因此不是 S 的拟视觉近似。

与第 9 节一样，我们考虑瓦片图 $\Gamma_{\mathbf{I}} := \Gamma(\{\mathbf{I}^n\})$ 和 $\Gamma_{\mathbf{X}} := \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$，其顶点集分别为 $\mathbf{I} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{I}^n$ 和 $\mathbf{X} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{X}^n$。对于 $I, I' \in \mathbf{I}$，我们用 $|I - I'|_{\mathbf{I}}$ 表示 $\Gamma_{\mathbf{I}}$ 中的组合距离；对于 $X, X' \in \mathbf{X}$，则用 $|X - X'|_{\mathbf{X}}$ 表示 $\Gamma_{\mathbf{X}}$ 中的组合距离。现在一个相当标准的事实是（由定理 9.1 和定理 8.2 也可推出），瓦片图 $\Gamma_{\mathbf{I}}$ 是格罗莫夫双曲的。

断言 *2*：$\Gamma_{\mathbf{X}}$ 是格罗莫夫双曲的。

为此，注意到由于对每个 $k \in \mathbb{N}_0$ 都有 $\mathbf{I}^k = \mathbf{X}^{2k}$，我们有一个典范嵌入

$$f\colon \Gamma_{\mathbf{I}} \to \Gamma_{\mathbf{X}},\quad I \in \mathbf{I}^k \mapsto I \in \mathbf{X}^{2k}.$$

显然，像 $f(\mathbf{I}) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbf{X}^{2k}$ 在 $\mathbf{X}$ 中是余有界的：也就是说，对每个 $X \in \mathbf{X}$，都存在 $I = \iota(X) \in \mathbf{I}$ 使得

$$|f(I) - X|_{\mathbf{X}} \le 1. \tag{11.8}$$

事实上，若对某个 $k \in \mathbb{N}_0$ 有 $X \in \mathbf{X}^{2k} = \mathbf{I}^k$，则令 $\iota(X) := X \in \mathbf{I}^k$。否则，对某个 $k \in \mathbb{N}_0$ 有 $X \in \mathbf{X}^{2k+1}$，且 X 包含在（单个）集合 $\iota(X) \in \mathbf{I}^k = \mathbf{X}^{2k}$ 中。于是，在这两种情况下，取所选的 $I = \iota(X)$，不等式 (11.8) 均成立。

接下来，我们断言 f 满足

$$|I - I'|_{\mathbf{I}} \le |f(I) - f(I')|_{\mathbf{X}} \le 2|I - I'|_{\mathbf{I}} \tag{11.9}$$

对所有 $I,\ I' \in \mathbf{I}$。为证明下界，令

$$X_0 = f(I), X_1, \ldots, X_N = f(I')$$

be a 长度为 $N := |f(I) - f(I')|_{\mathbf{X}} \ge 0$ 的路径，位于 $\Gamma_{\mathbf{X}}$ 中。容易看出，此时

$$I = \iota(X_0), \iota(X_1), \ldots, I' = \iota(X_N)$$

是 $\Gamma_{\mathbf{I}}$ 中的一条路径，这就得到了所需的不等式。

为证明上界，注意到我们有如下蕴含

$$|I - I'|_{\mathbf{I}} = 1 \quad \Rightarrow \quad |f(I) - f(I')|_{\mathbf{X}} \le 2.$$

事实上，当 I，I'处于同一层级时，$|f(I)-f(I')|_{\mathbf{X}}=1$，否则 $|f(I)-f(I')|_{\mathbf{X}}=2$。由三角不等式即可轻松得到所需的估计。

由于嵌入 $f\colon \Gamma_{\mathbf{I}}\to\Gamma_{\mathbf{X}}$ 满足 (11.8) 和 (11.9)，因此它是拟等距。由于测地度量空间之间的拟等距会保留格罗莫夫双曲性（参见 [GH90, Th´eor`eme 5.12, p. 88]），我们再次得出结论：瓦片图 $\Gamma_{\mathbf{X}}$ 也是格罗莫夫双曲的。

现在令 $\Phi_{\mathbf{X}}\colon S\to\partial_\infty\Gamma_{\mathbf{X}}$ 为 (10.3) 中的映射。回想一下，引理 10.1 仅使用了 $\Gamma_{\mathbf{X}}$ 的格罗莫夫双曲性，因此 $\Phi_{\mathbf{X}}$ 是良定义的。

断言 *3*：映射 $\Phi_{\mathbf{X}}\colon (S,d)\to(\partial_\infty\Gamma_{\mathbf{X}},d_{\infty,\mathbf{X}})$ 对每个定义在 $\partial_\infty\Gamma_X$ 上的视觉度量 $d_{\infty,\mathbf{X}}$ 都是拟对称性（按格罗莫夫双曲空间的意义）。

为此，首先注意到，断言 2 的证明中的拟等距映射 $f\colon \Gamma_{\mathbf{I}}\to\Gamma_{\mathbf{X}}$ 诱导出一个双射

$$f_\infty\colon \partial_\infty\Gamma_{\mathbf{I}}\to\partial_\infty\Gamma_{\mathbf{X}},\quad [\{I_i\}]\mapsto[\{f(I_i)\}]$$

（参见 [BS00，命题 6.3]）。此外，若 $d_{\infty,\,\mathbf{I}}$ 和 $d_{\infty,\,\mathbf{X}}$ 分别表示 $\partial_\infty\Gamma_{\mathbf{I}}$ 和 $\partial_\infty\Gamma_{\mathbf{X}}$ 上的视觉度量，则映射 $f_\infty\colon (\partial_\infty\Gamma_{\mathbf{I}},\ d_{\infty,\,\mathbf{I}})\to(\partial_\infty\Gamma_{\mathbf{X}},\ d_{\infty,\,\mathbf{X}})$ 是一个拟对称映射（参见 [BS00，定理 6.5]）。

现在，任取 $x\in S$，并设 $\{X^n\}$ 是 x 在 $\Gamma_{\mathbf{X}}$ 中的一条自然测地线，即对所有 $n\in\mathbb{N}_0$，都有 $x\in X^n\in\mathbf{X}^n$。那么 $\{X^n\}$ 收敛于无穷远处（由引理 10.1），因此其子列 $\{X^{2n}\}$ 也收敛于无穷远处，且与 $\{X^n\}$ 等价。此外，设序列 $\{I^n\}$ 满足：对 $n\in\mathbb{N}_0$，有 $I^n:=X^{2n}\in\mathbf{I}^n=\mathbf{X}^{2n}$，则它是 x 在 $\Gamma_{\mathbf{I}}$ 中的一条自然测地线。由此可得

$$\Phi_{\mathbf{X}}(x)=[\{X^n\}]=[\{X^{2n}\}]=[\{f(I^n)\}]=f_\infty([\{I^n\}])=(f_\infty\circ\Phi_{\mathbf{I}})(x),$$

其中，$\Phi_{\mathbf{I}}\colon S\to\partial_\infty\Gamma_{\mathbf{I}}$ 表示 S 与 $\partial_\infty\Gamma_{\mathbf{I}}$之间的自然识别。由于 x 是任意的，我们得出 $\Phi_{\mathbf{X}}=f_\infty\circ\Phi_{\mathbf{I}}$。现在由命题 10.8 可得该断言，

上述三个断言表明，序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 具备本小节开头所列出的所有期望性质。特别地，该例不满足定义 4.1 中的条件 (iii)。如果我们修改这一构造，还可以通过插入适当的层 $\mathbf{X}^{2k+1}$，使其违反定义 4.1 中的条件 (i) 和 (ii)。

在所介绍的例子中，不难看出，定理 11.1 中 $r=1$已经足够。然而，通过在每个$\mathbf{I}^n$与$\mathbf{I}^{n+1}$之间插入多个层，我们可以安排使r 必须任意大。最后，在更一般的情形下，插入小集合的层也可采用类似的构造（即从给定有界度量空间的某个拟视觉逼近出发时）。

12. Dynamical quasi-visual approximations of Julia sets

本节我们考虑$\widehat{\ }$黎曼球面 $\mathbb{C}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$上有理映射的朱利亚集的拟视觉逼近。这些集合总是一致完美的（见 [Hi93]和 [MdR92]），因此根据推论 8.3，它们具有拟视觉逼近。然而，一般而言，这种拟视觉逼近与底层动力学无关。因此，问题在于如何以自然的动力学方式构造朱利亚集的拟视觉逼近。我们将看到，某一类有理映射与此相关，即半双曲有理映射。更具体地说，我们将证明，有理映射 g 的朱利亚集具有第 6 节所定义的动力学的拟视觉逼近，当且仅当它是半双曲的（有关这里涉及的两个蕴含的精确表述，见推论 12.5 以及定理 12.3 和 12.4。

为讨论这一问题，我们首先需要回顾一些一般背景知识。

12.1. 有理映射与朱利亚集的动力生成覆盖。 以下，黎曼球面将配备球面度量。这是 $\mathbb{C}$ 上的长度˜度量，其在 $\mathbb{C}$ 上的限制由长度元给出

$$ds = \frac{2|dz|}{1+|z|^2},$$

其中， z 是 $\mathbb{C}$中的一个变量。我们使用下标 σ 表示度量概念是相对于此度量而言的。

区域 $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 是一个开且连通的集合。两个区域 U之间的全纯映射 $f\colon U \to V, V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 称为真映射，若 $K \subset V$是紧集，则 $f^{-1}(K) \subset U$是紧集。若 f 是紧集，则 V 中的每个值都恰好被取到相同的有限次（计重数）（见 [Fo91，定理 4.24]）。我们称此数为 f的次数(在 U 中)，记作 $\deg(f) \in \mathbb{N}$。因此，若将f, z的局部度 f在$z \in U$处记为 $\deg(f, z)$，则有

$$\sum_{z \in f^{-1}(w)} \deg(f, z) = \deg(f)$$

对每个 $w \in V$ 都成立。特别地，当 f 是一个非常数有理映射且 $U = V = \mathbb{C}$ 时，这一结论适用；在这种情况下，$\deg(f)$ 与 f 的拓扑度一致。

在本小节的其余部分，我们令 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为一个满足 $\deg(g) \geq 2$ 的有理映射。如第 6 节中一样，我们记 g^n 为 $n \in \mathbb{N}_0$ 时 g 的 n 次迭代，其中 $g^0 := \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$。我们将 $\mathcal{J}(g)$ 记作 g 的朱利亚集（关于定义，见 [Mi06, 定义 4.2]；关于复动力系统的一般背景，见 [Mi06, 第 4] 节）。一个标准事实是，$\mathcal{J}(g) \subset \mathbb{C}$ 是一个非空紧集，不含孤立点 [Mi06, 引理 4.8 和推论 4.14]。正如我们先前所指出的，$\mathcal{J}(g)$ 实际上一致完美（见 [Hi93] 和 [MdR92]）。它还是完全不变的，即

$$g^{-1}(\mathcal{J}(g)) = \mathcal{J}(g) = g(\mathcal{J}(g)) \tag{12.1}$$

（参见 [Mi06，引理 4.3]）。

如果 $W \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 是一个区域，且 $\widetilde{W}$ 是 $g^{-1}(W)$ 的一个连通分支，那么 $\widetilde{W}$ 也是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的一个子区域，并且映射 $g|_{\widetilde{W}}\colon W \to W$ 是正规的。特别地，$g(W) = W$（参见 [BM17，引理 A.8]，该文以更一般的形式表述了这一结论）。

现在假设$\mathbf{V}^1$ 是由子区域构成的有限族，且这些子区域覆盖 $\widehat{\mathbb{C}}$，即 g 的朱利亚集 $\mathcal{J}(g)$。我们希望利用 g 在迭代下的动力学，定义与之关联的 $\mathcal{J}(g)$ 的有限覆盖序列。这里，$\mathbf{V}^1$ 中不与 $\mathcal{J}(g)$ 相交的集合无关紧要。因此，如果某个覆盖 $\mathbf{V}^1$ 满足

$$V^1 \cap \mathcal{J}(g) \neq \emptyset \text{ for all } V^1 \in \mathbf{V}^1.$$

给定 $\mathcal{J}(g)$ 的一个容许覆盖$\mathbf{V}^1$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，我们将$\mathbf{V}^n$ 记为$\mathbf{V}^1$在 g^{n-1}下的拉回，也就是说，

$$\mathbf{V}^n := \{\text{components } V^n \text{ of } g^{-(n-1)}(V^1) : V^1 \in \mathbf{V}^1\}. \tag{12.2}$$

如果 V^n 是这样的连通分支，那么根据上文所述，$g^{n-1}(V^n) = V^1 \in \mathbf{V}^1$。
s

由于 $\mathcal{J}(g)$ 是完全不变的，因此很容易得出：若 $\mathbf{V}^1$ 是 $\mathcal{J}(g)$ 的一个容许有限覆盖，那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$，族 $\mathbf{V}^n$ 也是 $\mathcal{J}(g)$ 的一个容许有限覆盖，由 $\mathbb{C}$ 的子区域 $\widehat{}$ 构成。

现在，以下事实成立。

断言。我们有

$$g^k(V^{n+k}) \in \mathbf{V}^n \text{ for all } n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}_0, \text{ and } V^{n+k} \in \mathbf{V}^{n+k}. \tag{12.3}$$

事实上，如果 $V^{n+k} \in \mathbf{V}^{n+k}$，那么对于某个 $V^1 \in \mathbf{V}^1$，V^{n+k} 是 $g^{-(n+k-1)}(V^1)$ 的一个连通分支。特别地，$g^k(V^{n+k})$ 是一个连通集，它在 g^{n-1} 的作用下被映入 V^1。因此，对于某个 $V^n \in \mathbf{V}^n$，有 $g^k(V^{n+k}) \subset V^n$。这又意味着区域 V^{n+k} 包含在 $g^{-k}(V^n)$ 的一个连通分支$\sim$ $\sim$ $\sim$ V^{n+k} 中。于是，$g^k(V^{n+k}) = V^n$，因此 $g^{n+k-1}(V^{n+k}) = g^{n-1}(V^n) = V^1$。由于$V^{n+k} \subset \widetilde{V}^{n+k}$ 且 V^{n+k} 是 $g^{-(n+k-1)}(V^1)$ 的一个完整连通分支，这只有在$\sim$ $\sim V^{n+k} = V^{n+k}$时才可能。因此，正如所声称的，$g^k(V^{n+k}) = g^k(V^{n+k}) = V^n \in \mathbf{V}^n$。

现在我们定义

$$\mathbf{X}^n := \{V^n \cap \mathcal{J}(g) : V^n \in \mathbf{V}^n\} \tag{12.4}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$。根据此定义，如果 $X^n \in \mathbf{X}^n$，那么我们可以选择一个元素$V^n \in \mathbf{V}^n$，使得 $X^n = V^n \cap \mathcal{J}(g)$。我们将每个这样的集合 V^n 称为 X^n 的环境集。最后，我们令 $\mathbf{X}^0 := \{\mathcal{J}(g)\}$。

注意，$\{\mathbf{X}^n\}$ 是由非空相对开子集组成的、对 $\mathcal{J}(g)$ 的有限覆盖序列，这些子集取自 $\mathcal{J}(g)$。我们将 $\{\mathbf{X}^n\}$ 称为由 g 生成的 $\mathcal{J}(g)$ 的覆盖序列，以及$\mathbf{V}^1$。由 (12.3) 以及 $\mathcal{J}(g)$ 的完全不变性可立即推出，序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是动力学的（见第 6 节），即

$$g^k(X^{n+k}) \in \mathbf{X}^n \text{ for all } n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}_0, \text{ and } X^{n+k} \in \mathbf{X}^{n+k}. \tag{12.5}$$

现在自然会产生这样一个问题：这个 $\{\mathbf{X}^n\}$，即对 $\mathcal{J}(g)$ 的覆盖序列，是否是赋予球面度量 σ 的朱利亚集 $\mathcal{J}(g)$ 的视觉逼近。我们将在下一小节给出答案。

12.2. **半双曲有理映射与朱利亚集的动力学准视觉逼近。**

$\widehat{}$ $\widehat{}$我们首先需要介绍复动力学中的一些更标准的术语。设 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$再次表示一个有理映射，$\widehat{}$且 $\deg(g) \geq 2$。

一个点 $c \in \mathbb{C}$ 称为 g 的**临界点**，如果 g 在 c附近不是局部同胚。若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $g^n(p) = p$，则点 $p \in \mathbb{C}$ 称为（在 g作用下）周期的。在这种情况下，使得 $g^n(p) = p$ 的最小数 $n \in \mathbb{N}$ 称为 p 的周期，而（g^n）′(p)称为周期环 $\{p, g（p）\ldots\ldots, g^{n-1}(p)\}$的乘子。只有当点 ∞ 不属于该周期环时，乘子的这一定义才有意义；如果属于，则必须对定义进行调整（参见 [Mi06，第 45]页）。如果存在一个 g 的周期环，且其乘子是单位根，则称 g 具有抛物周期环。

最后，一个点 $p \in \widehat{\mathbb{C}}$ 称为 **非回归的**，如果

$$p \notin \overline{\{g^n(p) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

现在我们可以定义一类特殊的有理映射，它们将在本节中发挥关键作用。

定义 12.1（半双曲有理映射）。若有理映射 $g\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 满足 $\deg(g)\geq 2$，则称其为半双曲的，当且仅当 g 没有抛物周期，且 g 在 $\mathcal{J}(g)$ 中的每个临界点都是非回归的。

这些映射有多种刻画方式。

命题 12.2. 设 $g\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个有理映射，且 $\deg(g)\geq 2$。则以下条件等价：

(i) g 是半双曲的。

(ii) 存在常数 $r_0>0$ 和 $p\in\mathbb{N}$，使得对所有 $w_0\in\mathcal{J}(g)$ 和 $n\in\mathbb{N}$，对于 $g^{-n}(B_\sigma(w_0,r_0))$ 的每个连通分支 U^n，都有 $\deg(g^n|_{U^n})\leq p$。

(iii) 存在常数 $r_0>0$、$p\in\mathbb{N}$、$C\geq 1$和 $\lambda\in(0,1)$，使得对所有 $w_0\in\mathcal{J}(g)$和 $n\in\mathbb{N}$，都有

$$\deg(g^n|_{U^n})\leq p \ \textit{and}\ \operatorname{diam}_\sigma(U^n)<C\lambda^n$$

对于 $g^{-n}(B_\sigma(w_0,r_0))$ 的每个连通分支 U^n。

从本质上说，这是众所周知的结果，最早可追溯到 [Ma93]。那里的论证相当复杂。[CJY94] 针对多项式给出了一个较短的证明（不过读起来有些困难），稍作修改后，那里的论证也适用于一般的有理映射。

我们将证明以下结论。

定理 12.3. 设 $g\colon \widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 是一个半双曲有理映射，$\mathbf{V}^1$ 是 $\mathcal{J}(g)$ 的一个由 $\mathbb{C}$ 的子区域构成的容许有限覆盖，且 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是由 g 和$\mathbf{V}^1$生成的 $\mathcal{J}(g)$ 的关联覆盖序列。

那么，如果$\mathbf{V}^1$ 足够细，序列 $\{\mathbf{X}^n\}$ 就是 $(\mathcal{J}(g)\ \sigma)$ 的宽度为 $w=1$ 的动力学准视觉逼近。

条件$\mathbf{V}^1$ 足够细的意思很简单：对于给定的映射 g，存在$\delta_0>0$，使得只要对所有 $V^1\in\mathbf{V}^1$都有 $\operatorname{diam}_\sigma(V^1)<\delta_0$，定理的结论就成立。

定理 12.3 的证明将在第 12.4 节给出。我们不知道这个一般形式的定理对于宽度 $w=0$ 是否也成立。至少对于后临界有限有理映射，可以利用 [CGZ22] 中合适的马尔可夫分割，建立带有 $w=0$ 的结果。

对于一般的（半双曲）有理映射 g，例如当 $\mathcal{J}(g)$ 完全不连通时，如何从给定的覆盖 $\mathbf{X}^1$ 出发，自然地定义覆盖$\mathcal{J}(g)$的动力学序列 $\{\mathbf{X}^n\}$，以获得拟视觉逼近，并不显而易见。这就是我们使用环境集的集合$\mathbf{V}^n$ 的原因。

如果我们对朱利亚集施加一个温和的拓扑假设，情况就会有所改善；具体而言，假设 $\mathcal{J}(g)$ 是局部连通的。对于多类有理映射，这一假设都成立，例如，对于具有连通朱利亚集 [Mi11] 的半双曲有理映射 g。

在这种情况下，可以先用连通且相对开（非空）的 $\mathcal{J}(g)$ 子集对 $\mathbf{X}^1$ of $\mathcal{J}(g)$ 进行有限覆盖。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，随后可以直接定义 拉回 $\mathbf{X}^n of\ \mathbf{X}^1\ under\ g^{n-1}$ 为

$$\mathbf{X}^n:=\{\text{components } X^n \text{ of } g^{-(n-1)}(X^1):\ X^1\in\mathbf{X}^1\}.$$

这样，当初始覆盖 $\mathbf{X}^1$ 足够精细时，可以证明 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 $(\mathcal{J}(g)\ \sigma)$ 的准视觉逼近，并具有动力学性质 (12.5)，但我们不在此处展开这一论证的细节。

定理 12.3 中一个适当的逆向蕴含也成立。实际上，我们将证明以下陈述。

定理 12.4. 设 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个满足 $\deg(g) \geq 2$ 的有理映射。若存在一个动力学准视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$，逼近对象为 $(\mathcal{J}(g)\ \sigma)$，则 g 是半双曲的。

该定理的证明将在第 12.5 节给出。

结合定理 12.3 和 12.4，可立即得到以下推论。

推论 12.5. 设 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个满足 $\deg(g) \geq 2$ 的有理映射。则 g 是半双曲的，当且仅当 $(\mathcal{J}(g)\ \sigma)$ 存在一个动力学准视觉逼近 $\{\mathbf{X}^n\}$。

12.3. **辅助引理**。为了证明定理 12.3，我们需要一些辅助事实，尤其是一个关于在次数一致有界的真全纯映射作用下集合畸变控制的引理（见引理 12.6）。这一论述的证明相当技术性，我们将在附录中给出详细内容。

为了陈述该引理，我们使用术语畸变函数 来表示递增函数$\eta\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$，满足 $\eta(t) \to 0$ 当 $t \to 0^+$时成立。我们通过令 $\eta(0) = 0$ 且 $\eta(\infty) = \infty$，将这类函数的定义扩展到 0 和 ∞。这样，在陈述估计时便可以纳入一些平凡情形。

现在，以下事实成立。

引理 12.6。对于每个 $\epsilon > 0$ 和 $p \in \mathbb{N}$，都存在一个畸变函数 $\eta = \eta_{\epsilon,p}$，具有以下性质：设 $W \subset \mathbb{C}$ 是一个单连通区域，且 直径$_\sigma(W) < \pi/2$，$\widetilde{W} := B_\sigma(w_0, r)$，其中 $w_0 \in \mathbb{C}$ 和 $0 < r < \pi/4$，并且 $f\colon W \to W$ 是一个真全纯$\widetilde{\text{映射}}$，且 $\deg(f) \leq p$。假设 $z_0 \in W$ 满足 $w_0 = f(z_0)$，且 A、$A' \subset W$ 是集合，使得：

(i) $z_0 \in A \cap A'$ *and* $f(A) \cup f(A') \subset B_\sigma(w_0, r/2)$,

(ii) A 是连通的，且直径$_\sigma(f(A')) \geq \epsilon r$。

于是我们有

$$\frac{\operatorname{diam}_\sigma(A)}{\operatorname{diam}_\sigma(A')} \leq \eta(\operatorname{diam}_\sigma(f(A))/r).$$

如前所述，我们将在附录中证明这个引理，但可以指出一些对我们后续工作很重要的直接推论。在引理的条件下，我们有直径$_\sigma(f(A)) \leq r$，因此

$$\frac{\operatorname{diam}_\sigma(A)}{\operatorname{diam}_\sigma(A')} \leq \eta(1) =: C(\epsilon, p).$$

如果 A' 也连通，且 A 满足直径$_\sigma(f(A)) \geq \epsilon r$，那么 A 和 A' 的作用是对称的，因此我们可以得出

$$\operatorname{diam}_\sigma(A) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(A')$$

其中 $C(\asymp) = C(\epsilon,\ p)$。

在开始证明定理 12.3 之前，我们还需要一个辅助事实，它以便于我们使用的形式概括了半双曲有理映射的相关性质。

引理 12.7. 设 $g\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 是一个半双曲有理映射。那么存在 $r_0 \in (0, \pi/4)$ 以及 $p \in \mathbb{N}$，具有以下性质：

(i) 若 $n \in \mathbb{N}_0$, $r \in (0, r_0]$，且 $w_0 \in \mathcal{J}(g)$，则 $g^{-n}(B_\sigma(w_0, r))$ 的每个连通分支 U^n 都是一个单连通区域，且 $\operatorname{diam}_\sigma(U^n) < \pi/2$，$\deg(g^n|_{U^n}) \le p$。*(ii)* 对每个 $\epsilon > 0$，存在一个与 w_0 和 r 无关的 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于上述连通分支 U^n，只要 $n \ge n_0$，就有 $\operatorname{diam}_\sigma(U^n) < \epsilon$。此外，若 $r \in (0, r_0]$ 足够小（其取值依赖于 ϵ，但与 w_0 无关），则对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\operatorname{diam}_\sigma(U^n) < \epsilon$。

证明。关于次数和直径的论述很容易由命题 12.2 (ii) 得出，细节从略。为了证明这些连通分支 U^n 是单连通的，可以假设 $r_0 > 0$ 足够小，使得对于所有 $w_0 \in \mathcal{J}(g)$，球 $B_\sigma(w_0, r_0)$ 及其在 g 的任意迭代下的所有原像连通分支，至多包含 g的一个临界值。

现在有一个标准结论：若 $f\colon U \to V$是子区域U 与 $\mathbb{C}$ 中的子区域 V之间的真全纯映射，且 V是单连通的并且至多包含 f的一个临界值，那么 U 也必定是单连通的（例如，这可以很容易地由黎曼–赫尔维茨公式推出；关于该公式，参见 [Hu06，定理 A3.4]）。利用这一结论，再对 n作归纳论证，即可证明对于 $w_0 \in \mathcal{J}(g)$ 和 $r \in (0, r_0]$，$g^{-n}(B_\sigma(w_0, r))$ 的所有连通分支 U^n 确实都是单连通的。细节仍从略。□

12.4. 定理 12.3 的证明。 现在我们可以证明本节的第一个主要结果。

设 $r_0 \in (0, \pi/4)$ 和 $p \in \mathbb{N}$ 是给定半双曲有理映射 g 在引理 12.7 中的常数。那么以下条件成立：若 $n \in \mathbb{N}_0$, $w_0 \in \mathcal{J}(g)$,$\sim W := B_\sigma(w_0, r_0)$，且 W 是 $g^{-n}(W)$ 的一个连通分支，那么 W 是一个单连通区域$\widetilde{\ }$，其直径为 $\operatorname{diam}_\sigma(W) < \pi/2$。

此外，$g^n|_{\widetilde{W}}\colon \widetilde{W} \to W$ 是一个真全纯映射，且 $1 \le \deg(g^n|_{\widetilde{W}}) \le p$。因此，$\widetilde{\ }$引理 12.6 的所有基本假设对于映射 $g^n|_{\widetilde{W}}\colon W \to W$ 均成立；所以我们总能针对适当的集合 A 和 A' 应用该引理给出的畸变估计。

根据引理 12.7，我们可以找到 $0 < \delta_0 \le r_0$，使得如果 $\mathbf{V}^1$ 是由 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的子区域构成的 $\mathcal{J}(g)$ 的有限容许覆盖，且对于所有 $V^1 \in \mathbf{V}^1$,，$\operatorname{diam}_\sigma(V^1) < \delta_0$，那么

$$\operatorname{diam}_\sigma(V) < r_0/4 \text{ for all } V \in \mathbf{V}^n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{12.6}$$

这里，$\mathbf{V}^n$ 表示 $\mathbf{V}^1$ 在 g^{n-1} 下的拉回（见 (12.2)）。注意，这意味着

$$V \subset B_\sigma(w_0, r_0/2) \subset B_\sigma(w_0, r_0) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N},\ V \in \mathbf{V}^n, \text{ and } w_0 \in V. \tag{12.7}$$

在下文中，$\mathbf{V}^1$ 是 $\mathcal{J}(g)$ 的这样一个覆盖。

令 $\{\mathbf{X}^n\}$ 为由 g 和 $\mathbf{V}^1$ 生成的 $\mathcal{J}(g)$ 的覆盖序列（见（12.4））。集合 $\mathbf{X}^1$ 和 $\mathbf{X}^2$ 中各自包含有限个元素，并且它们都具有正直径，因为它们非空，且 $\mathcal{J}(g)$ 没有孤立点（见 [Mi06，推论 4.14]）。因此，我们可以找到 $0 < \epsilon_0 < 1/3$，使得

$$\operatorname{diam}_\sigma(X) \ge \epsilon_0 r_0 \text{ for all } X \in \mathbf{X}^1 \cup \mathbf{X}^2. \tag{12.8}$$

此外，如有必要，通过取更小的 ϵ_0，我们还可以假设 $2\epsilon_0 r_0$ 小于覆盖 $\mathbf{V}^1$ 的勒贝格数（见 [HY98，定理 1-32]）。这意味着

$$\text{for all } w_0 \in \mathcal{J}(g) \text{ there exists } V^1 \in \mathbf{V}^1 \text{ such that } B_\sigma(w_0, \epsilon_0 r_0) \subset V^1. \tag{12.9}$$

断言 1。对于所有 $n \in \mathbb{N}$, $X^n \in \mathbf{X}^n$，我们有 $\operatorname{diam}_\sigma(X^n) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(V^n)$，其中 $V^n \in \mathbf{V}^n$ 是 X^n 的任意环境集，即 $X^n = V^n \cap \mathcal{J}(g)$。

在此断言及其后续证明中，所有可比常数仅依赖于 p 和 ϵ_0。

为证明该断言，任取 $n \in \mathbb{N}$ 和 $X^n \in \mathbf{X}^n$，并令 $V^n \in \mathbf{V}^n$ 为 X^n 的一个环境集。于是 $X^n = V^n \cap \mathcal{J}(g) \subset V^n$，从而 $\operatorname{diam}_\sigma(X^n) \le \operatorname{diam}_\sigma(V^n)$。

为得到反方向的不等式，我们选取一点 $z_0 \in X^n \subset \mathcal{J}(g)$，并定义 $w_0 := g^{n-1}(z_0)$、$X^1 := g^{n-1}(X^n)$ 和 $V^1 := g^{n-1}(V^n)$。于是 $V^1 \in \mathbf{V}^1$, $X^1 = V^1 \cap \mathcal{J}(g) \in \mathbf{X}^1$, 和 $w_0 \in X^1$。

现在令 $W := B_\sigma(w_0, r_0)$，并令 $\widetilde{W}$ 为 $g^{-(n-1)}(W)$ 中包含 z_0 的连通分支。由 (12.7) 可知 $V^1 \subset W$。于是 $z_0 \in X^n \subset V^n \subset \widetilde{W}$，因为集合 $V^n \subset g^{-(n-1)}(V^1) \subset g^{-(n-1)}(W)$ 是连通的，并且包含 z_0。

如前所述，我们可以将引理 12.6 应用于映射

$$f := g^{n-1}|_{\widetilde{W}} \colon \widetilde{W} \to W.$$

~ ~我们希望对集合 $A := V^n \subset W$ 和 $A' := X^n \subset W$ 进行上述操作。注意到

$$\operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(X^n)) = \operatorname{diam}(X^1) \ge \epsilon_0 r_0$$

由 (12.8) 可得，并且

$$g^{n-1}(X^n) \cup g^{n-1}(V^n) = V^1 \subset B_\sigma(w_0, r_0/2)$$

由 (12.7) 可得；因此，对于所选集合 A 和 A'，引理 12.6 中的条件 (i) 和 (ii) 均得到满足。由该引理和 (12.6) 可知

$$\frac{\operatorname{diam}_\sigma(V^n)}{\operatorname{diam}_\sigma(X^n)} \le \eta(\operatorname{diam}_\sigma(V^1)/r_0) \le \eta(1/4).$$

这里的 η 仅取决于 p 和 ϵ_0，而与 n 和 V^n 无关。这说明 $\operatorname{diam}_\sigma(V^n) \lesssim \operatorname{diam}_\sigma(X^n)$，其中一致常数为 $C(\lesssim)$，断言得证。

现在我们检查定义 4.1 中的条件，以验证 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是宽度为 w 的拟视觉逼近：$= 1$ 对于 $(\mathcal{J}(g)\ \sigma)$。由于 $\mathbf{X}^0 = \{\mathcal{J}(g)\}$，且 $\mathbf{X}^1$ 是由正直径集合构成的 $\mathcal{J}(g)$ 的有限覆盖，因此只需对 $n \in \mathbb{N}$ 验证条件 (i)–(iv)，而无需考虑 $n = 0$ （见注 4.4）。

与断言 1 的证明类似，接下来的论证将依赖于引理 12.6 的具体应用。在所有情形中，我们将选取一个点 $z_0 \in \mathcal{J}(g)$，并针对适当的 $n \in \mathbb{N}$ 定义

$$\begin{aligned} &w_0 := g^{n-1}(z_0),\ W := B_\sigma(w_0, r_0), \\ &\widetilde{W} \subset \widehat{\mathbb{C}} \text{ 是包含 } z_0 \text{ 的 } g^{-(n-1)}(W) \text{ 的连通分支}, \\ &f := g^{n-1}|_{\widetilde{W}} \colon \widetilde{W} \to W. \end{aligned} \tag{12.10}$$

和之前一样，η 将是该引理为 p 和 ϵ_0提供的畸变函数，并且所有隐含常数只依赖于这两个参数。

(i) 设给定 $n \in \mathbb{N}$和 $X^n,\ Y^n \in \mathbf{X}^n$，其中 $X^n \cap Y^n \neq \emptyset$，并设 V^n和 $V^n \in \mathbf{V}^n$ 分别是 X^n和 Y^n的环境集。于是，我们可以选取一个点 $z_0 \in X^n \cap Y^n \subset \mathcal{J}\ (g)$，并按照（12.10）定义 w_0、W和 W。

那么 $z_0 \in V^n$ 和 $w_0 \in g^{n-1}(V^n) \in \mathbf{V}^1$。这意味着

$$g^{n-1}(V^n) \subset B_\sigma(w_0, r_0/2) \subset W$$

由 (12.7) 可得，因此 $V^n \subset W$，因为 V^n 是连通的。此外，$g^{n-1}(X^n) \in \mathbf{X}^1$，因此由 (12.8) 可得

$$\operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(V^n)) \geq \operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(X^n)) \geq \epsilon_0 r_0.$$

同理，$\widehat{V}^n \subset \widetilde{W}$、$g^{n-1}(\widehat{V}^n) \subset B_\sigma(w_0, r_0/2)$，且 $\operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(\widehat{V}^n)) \geq \epsilon_0 r_0$。

那么，断言 1、引理 12.6 及其后续评注（应用于 $f = g^{n-1}|_{\widetilde{W}}$、$A = V^n$和 $A' = V^n$）表明

$$\operatorname{diam}_\sigma(X^n) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(V^n) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(\widehat{V}^n) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(Y^n)$$

其中一致常数为 $C(\asymp)$。条件 (i) 得证。

(ii) 为证明宽度为 $w = 1$ 的条件，设 $n \in \mathbb{N}, X^n, Y^n \in \mathbf{X}^n$，且 $U_w(X^n) \cap U_w(Y^n) = \emptyset$。令 $V^n \in \mathbf{V}^n$ 为 X^n 的一个环境集。我们可以找到点 $x \in X^n$ 和 $y \in Y^n$，使得

$$\sigma(x, y) \leq 2 \operatorname{dist}_\sigma(X^n, Y^n).$$

令 $\gamma \subset \mathbb{C}$ 为连接 x 和 y 的一条球面测地线。那么

$$\operatorname{diam}_\sigma(\gamma) = \sigma(x, y) \leq 2 \operatorname{dist}_\sigma(X^n, Y^n).$$

定义 $x' := g^{n-1}(x) \in \mathcal{J}(g)$，$y' := g^{n-1}(y) \in \mathcal{J}(g)$，以及 $\gamma' := g^{n-1}(\gamma)$。注意，$\gamma'$ 是一条路径，从 x' 出发并终止于 y'。

断言 2. γ' 不包含在球 $B_\sigma(x', \epsilon_0 r_0)$ 中。

为证明这一断言，我们采用反证法，假设 $\gamma' \subset B_\sigma(x', \epsilon_0 r_0)$。于是根据 (12.9)，我们可以找到 $\widehat{V}^1 \in \mathbf{V}^1$，使得 $\gamma' \subset \widehat{V}^1 \in \mathbf{V}^1$。现在令 $\widehat{V}^n \in \mathbf{V}^n$ 为 $g^{-(n-1)}(\widehat{V}^1)$ 中包含 x 的连通分支。注意，这样的连通分支确实存在，因为$g^{n-1}(x) = x' \in \widehat{V}^1$。由于 γ 包含 x，且是连通的，并且

$$g^{n-1}(\gamma) = \gamma' \subset B_\sigma(x', \epsilon_0 r_0) \subset \widehat{V}^1,$$

我们有 $\gamma \subset V^n$。因此，若 $X^n := V^n \cap \mathcal{J}(g) \in \mathbf{X}^n$，则 $x,\ y \in X^n$。特别地，$x \in X^n \cap X^n$且 $y \in Y^n \cap X^n$。因此 $X^n \cap X^n \neq \emptyset$且 $Y^n \cap X^n \neq \emptyset$。这与我们的假设 $U_w(X^n) \cap U_w(Y^n) = \emptyset$对 $w = 1$成立相矛盾。断言得证。

根据断言 2，我们可以找到第一个点 $u \in \gamma$，使得从 x 沿着 γ前往 y 时，$u' := g^{n-1}(u) \notin B_\sigma(x', \epsilon_0 r_0)$。那么必然有 $\sigma(u',\ x') = \epsilon_0 r_0$，并且对于 x 与 u 之间的 γ的子弧 α，有 $g^{n-1}(\alpha) \subset B_\sigma(x',\ \epsilon_0 r_0)$。

为了应用引理 12.6，我们令 $z_0 := x \in X^n = V^n \cap \mathcal{J}(g)$，并定义 w_0、W、$\widetilde{W}$ 如 (12.10) 中所示。于是 $w_0 = g^{n-1}(z_0) = x' \in g^{n-1}(V^n) \in \mathbf{V}^1$，因此，$\operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(V^n)) \leq r_0/4$ 根据 (12.6)，且 $g^{n-1}(V^n) \subset B_\sigma(w_0, r_0/2) \subset W$根据 (12.7)。最后一个包含关系意味着 $V^n \subset W$。

此外，根据以上选择，我们有

$$g^{n-1}(\{x, u\}) \subset g^{n-1}(\alpha) \subset \overline{B}_\sigma(w_0, \epsilon_0 r_0) \subset B_\sigma(w_0, r_0/2) \subset W.$$

$\widetilde{\ }$由于 α 是连通的且包含 $z_0 = x$，这意味着 α 包含于 W中。特别地，$\sim u \in W$。还要注意，

$$\operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(\{x,u\})) = \sigma(g^{n-1}(x), g^{n-1}(u)) = \sigma(x',u') = \epsilon_0 r_0.$$

将引理 12.6 应用于 $f = g^{n-1}|_{\widetilde{W}}$、$A = V^n$ 和 $A' = \{x,u\}$，即可得出

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{diam}_\sigma(X^n)}{\operatorname{dist}_\sigma(X^n,Y^n)} &\le 2\frac{\operatorname{diam}_\sigma(V^n)}{\operatorname{diam}_\sigma(\gamma)} \le 2\frac{\operatorname{diam}_\sigma(V^n)}{\sigma(x,u)} \\ &\le 2\eta(\operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(V^n))/r_0) \le 2\eta(1/4).\end{aligned}$$

条件（ii）得证。

（iii）证明与（i）类似。具体而言，设给定 $n \in \mathbb{N}$、$X^n \in \mathbf{X}^n$ 和 $Y^{n+1} \in \mathbf{X}^{n+1}$ with $X^n \cap Y^{n+1} \neq \emptyset$。假设 $V^n \in \mathbf{V}^n$ 和 $\widehat{V}^{n+1} \in \mathbf{V}^{n+1}$ 分别是 X^n 和 $\sim Y^{n+1}$ 的环境集。取一点 $z_0 \in X^n \cap Y^{n+1}$，并按（12.10）定义 w_0、W、W。那么 $w_0 \in g^{n-1}(V^n) \in \mathbf{V}^1$ 且 $w_0 \in g^{n-1}(\widehat{V}^{n+1}) \in \mathbf{V}^2$，因此

$$g^{n-1}(V^n) \cup g^{n-1}(\widehat{V}^{n+1}) \subset B_\sigma(w_0, r_0/2) \subset W$$

由 (12.7) 得。特别地，这意味着 $V^n \cup \widehat{V}^{n+1} \subset \widetilde{W}$。与此同时，我们有$g^{n-1}(X^n) \in \mathbf{X}^1$ 且 $g^{n-1}(Y^{n+1}) \in \mathbf{X}^2$,，因此

$$\operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(V^n)) \ge \epsilon_0 r_0 \text{ and } \operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(\widehat{V}^{n+1})) \ge \epsilon_0 r_0$$

由 (12.8) 得。接着，断言 1、引理 12.6 及其后续说明（应用于 $f = g^{n-1}|_{\widetilde{W}}$、$A = V^n$ 和 $A' = \widehat{V}^{n+1}$）表明

$$\operatorname{diam}_\sigma(X^n) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(V^n) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(\widehat{V}^{n+1}) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(Y^{n+1})$$

其中一致常数为 $C(\asymp)$。条件 (iii) 得证。

(iv) 我们可以找到 $\delta_1 \in (0,\ 1/4)$，使得 $\eta(\delta_1) \le 1/2$。引理 12.7 又表明，我们可以找到 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\operatorname{diam}_\sigma(V^k) \le \delta_1 r_0 < r_0/4 \text{ whenever } k \in \mathbb{N},\ V^k \in \mathbf{V}^k, \text{ and } k \ge k_0.$$

我们将证明 (iv) 对这个常数 k_0 和 $\lambda = 1/2$ 成立。

为说明这一点，令 $n \in \mathbb{N}$, $X^n \in \mathbf{X}^n$ 和 $Y^{n+k_0} \in \mathbf{X}^{n+k_0}$ 连同 $X^n \cap Y^{n+k_0} \neq \emptyset$ 任意给定。$\widetilde{\ }$我们选取一个点 $z_0 \in X^n \cap Y^{n+k_0} \subset \mathcal{J}(g)$，并按 (12.10) 定义 w_0, W, W。令 V^n 为 X^n 的一个环境集，$\widehat{V}^{n+k_0}$ 为 Y^{n+k_0}的一个环境集。于是 $z_0 \in V^n \cap \widehat{V}^{n+k_0}$。

我们还有 $w_0 = g^{n-1}(z_0) \in g^{n-1}(V^n) \in \mathbf{V}^1$，因此

$$g^{n-1}(X^n) \subset g^{n-1}(V^n) \subset B_\sigma(w_0, r_0/2) \subset W$$

根据 (12.7)，$\widetilde{\ }$。这意味着 $X^n \subset V^n \subset W$，因为 V^n 是一个包含 z_0的连通集。同理，$z_0 \in \widehat{V}^{n+k_0}$ 和

$$g^{n-1}(\widehat{V}^{n+k_0}) \subset B_\sigma(w_0, r_0/2) \subset W$$

由 (12.7) 可得 $\widehat{V}^{n+k_0} \subset \widetilde{W}$。此外，$g^{n-1}(X^n) \in \mathbf{X}^1$，因此由 (12.8) 可得

$$\operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(X^n)) \ge \epsilon_0 r_0.$$

最后，$g^{n-1}(\widehat{V}^{n+k_0}) \in \mathbf{V}^{k_0+1}$因此，根据 k_0 的选取，$\operatorname{diam}_\sigma(g^{n-1}(\widehat{V}^{n+k_0})) \le \delta_1 r_0$.

引理 12.6（应用于 $f = g^{n-1}|_{\widetilde{W}}$、$A = \widehat{V}^{n+k_0}$ 和 $A' = X^n$）现在表明

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{diam}_\sigma(Y^{n+k_0})}{\operatorname{diam}_\sigma(X^n)} &\le \frac{\operatorname{diam}_\sigma(\widehat{V}^{n+k_0})}{\operatorname{diam}_\sigma(X^n)}\\ &\le \eta(\operatorname{diam}(g^{n-1}(\widehat{V}^{n+k_0}))/r_0) \le \eta(\delta_1) \le 1/2.\end{aligned}$$

条件（iv）成立。

如上面的论证所示，条件 (i)–(iv) 中各不等式对应的隐式常数和显式常数均与层级 n 以及瓦片 X，Y无关。由此，定理 12.3 的证明完成。

注 12.8。 断言 1 以及对上文证明中 (ii) 的论证稍作调整，可以说明环境集的序列 $\{\mathbf{V}^n\}$ 实际上满足与空间的拟视觉逼近类似的度量条件。

12.5. **定理 12.4 的证明**。 首先，我们简要回顾复平面中亚纯函数的正规族的一些事实（关于这一主题的一般背景，见 [Sch93]）。设 $\{f_n\}$ 为一列亚纯函数 $f_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。我们称该序列在 $\mathbb{C}$ 上局部一致收敛于 极限函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，记作

$$f_n \to f \text{ locally uniformly on } \mathbb{C},$$

若对于所有 $z_0 \in \mathbb{C}$，都存在 $\mathbb{C}$ 中 z_0 的一个邻域 U，使得 $f_n \to f$ 在 U 上一致收敛，其中目标空间采用球面度量；更确切地说，我们要求对于所有 $\epsilon > 0$，都存在 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$\sigma(f_n(z), f(z)) < \epsilon$$

对于所有满足 $n \ge N$ 的 $n \in \mathbb{N}$，以及所有 $z \in U$。

众所周知，$f_n \to f$ 在 $\mathbb{C}$ 上局部一致收敛，等价于 $f_n \to f$ 在 $\mathbb{C}$ 的每个紧子集上一致收敛。此外，由于函数 f_n 是亚纯函数，极限函数 f 也是亚纯函数，且可能等于一个 常数 $c \in \mathbb{C}$。

设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数族。若该函数族中的每个序列都有一个子列在 $\mathbb{C}$ 上局部一致收敛到某个极限函数（不一定属于 $\mathcal{F}$），则称该函数族正规。

我们将需要以下正规性判据。

引理 12.9。 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数族，$K \subset \mathbb{C}$ 是一个至少包含四个点的集合。假设对于所有 $R > 0$，都存在一个畸变函数 η_R，使得

$$\sigma(f(u), f(v)) \le \eta_R(|u - v|)$$

每当 $f \in \mathcal{F}$和 $u, v \in D(0, R) \cap f^{-1}(K)$。则 $\mathcal{F}$是一个正规族。

在此处及下文中，我们用.....表示

$$D(a, r) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \tag{12.11}$$

以 $a \in \mathbb{C}$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的开欧几里得圆盘。我们将在附录的第 13.2 节给出该引理的证明。

顺便指出，要求 K 至少包含四个点是不可放宽的。事实上，由函数 $f_n(z) = e^{nz}$, $n \in \mathbb{N}$ 组成的族 $\mathcal{F}$（显然）满足引理中的条件，其中 $K = \{0, 1, \infty\}$ 对任意畸变函数都成立，但它并非正规族。

我们还需要关于正规族的以下事实。

引理 12.10。设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数正规族，且其中每个函数序列的局部一致极限都不是常数。那么以下陈述成立：

(i)存在一个半径 $r_0 > 0$，具有以下性质：若 $f \in \mathcal{F}$，且 V 是 $f^{-1}(B_\sigma(f(0)\ r_0))$ 中包含 0 的连通分支，则 $V \subset D(0,\ 1)$。

(ii) 对每个 $R > 0$，都存在 $d = d(R) \in \mathbb{N}$，使得

$$\sum_{z \in f^{-1}(w) \cap D(0,R)} \deg(f, z) \leq d \tag{12.12}$$

对所有 $w \in \mathbb{C}$ 和 $f \in \mathcal{F}$。

回顾一下，$\deg(f,\ z)$ 表示 f 在 z处的局部度。同样，我们将在附录的第 13.2 节给出证明。

保持球面度量的 $\mathbb{C}$ 上的双全纯映射 T，恰好是可写成如下形式的 M¨obius 变换

$$T(z) = \frac{az + b}{-\overline{b}z + \overline{a}} \tag{12.13}$$

其中 $a,\ b \in \mathbb{C}$ 且 $|a|^2 + |b|^2 > 0$。这些映射对应于 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的旋转，其中 $\widehat{\mathbb{C}}$ 通过立体投影与 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面相对应。现在，对于每个 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$，我们选取这样一个映射 T，使得 $T(0) = z_0$。更具体地，对于 $z_0 \in \mathbb{C}$，我们定义

$$T_{z_0}(z) := \frac{z + z_0}{1 - \overline{z_0}z},$$

并令 $T_\infty(z) := 1/z$。于是，对每个 $z_0 \in \mathbb{C}$，M¨obius 变换 T_{z_0} 都是 $(\mathbb{C},\ \sigma)$ 上的等距，且 $T_{z_0}(0) = z_0$。

现在令 $g\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ 为一个次数为 $\deg(g) \geq 2$ 的有理映射，并设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是 $(\mathcal{J}(g)\ \sigma)$ 的一个动力学的视觉逼近，因而满足 (12.5)。注意，我们并未假设对于 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{J}(g)$ 的覆盖 $\mathbf{X}^n$ 是有限的。

现在我们使用函数 g 及其迭代来定义一个正规族。

引理 12.11。令 $\mathcal{G}$ 包含所有形如以下形式的亚纯函数 $f\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) = (g^n \circ T_{z_0})(\rho_0 z), \tag{12.14}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$ 和 $z_0 \in X^{n+1} \in \mathbf{X}^{n+1}$ 是任意的，且 ρ_0 ：=直径$_\sigma(X^{n+1})$。那么 $\mathcal{G}$ 是一个正规族。

此外，每一个 $\mathbb{C}$ 上的 $\mathcal{G}$ 中函数序列的局部一致极限是非常数函数 .

当然，(12.14) 中的 n、$z_0 \in X^{n+1} \in \mathbf{X}^{n+1}$ 和 ρ_0 因函数而异。特别是，引理 12.10 适用于族 $\mathcal{G}$。这一点在后文中会很重要。

证明。为证明第一个结论，我们想将引理 12.9 应用于 $K = \mathcal{J}(g)$（这是一个无限集合）。

固定 $R>0$，并令 $f\in\mathcal{G}$ 和 $u,\ v\in D(0,\ R)\cap f^{-1}(K)$ 为任意元素。于是存在 $n\in\mathbb{N}$, $X^{n+1}\in\mathbf{X}^{n+1}$，以及 $z_0\in X^{n+1}$，使得 f 具有 (12.14) 中所示的表示形式。注意，$\rho_0=$ 的直径 $_\sigma(X^{n+1})\leq$ 的直径 $_\sigma(\widehat{\mathbb{C}})=\pi$。由此可知，在 $D(0,\ \rho_0R)$ 上，欧几里得度量与球面度量相差至多一个乘法常数 $C(R)$，该常数 >0 仅依赖于 R。

设 $x:=T_{z_0}(\rho_0u)$ 且 $y:=T_{z_0}(\rho_0v)$。由于 T_{z_0} 关于球面度量是等距的，且 $T_{z_0}(0)=z_0$，因此可得

$$\sigma(z_0,x)=\sigma(0,\rho_0u)\asymp\rho_0|u|<R\rho_0,$$

其中 $C(\asymp)=C(R)$。因此存在一个常数 $R':=R\cdot C(R)>0$，使得 $x\in B_\sigma(z_0,\ R'\rho_0)$。类似地，$y\in B_\sigma(z_0,\ R'\rho_0)$。

引理 6.1 表明，存在一致常数 $\nu>0$ 和 $C'=C'(R')=C'(R)>0$，使得

$$\sigma(f(u),f(v))=\sigma(g^n(x),g^n(y))\leq C'\cdot\left(\frac{\sigma(x,y)}{\rho_0}\right)^\nu. \tag{12.15}$$

此外，再次利用 T_{z_0} 是 $(\mathbb{C},\ \sigma)$ 的等距映射，我们有

$$\sigma(x,y)/\rho_0=\sigma(\rho_0u,\rho_0v)/\rho_0\asymp|\rho_0u-\rho_0v|/\rho_0=|u-v|$$

其中 $C(\asymp)=C(R)$。由此以及 (12.15) 可知，存在一个常数 $C=C(R)>0$（与 f、u 和 v 无关），使得

$$\sigma(f(u),f(v))\leq\widetilde{C}\cdot|u-v|^\nu.$$

现在，引理 12.9 表明 $\mathcal{G}$ 是一个正规族。

为证明第二个陈述，首先注意到，如果 $n\in\mathbb{N}$ 和 $X^{n+1}\in$ {style id='3'>X^{n+1}，则由 (12.5) 有 $g^n(X^{n+1})\in${style id='9'>X^1，因此根据定义 4.1 中的条件 (iii)，由于 $\mathbf{X}^0=\{\widehat{\mathbb{C}}\}$，有 diam$_\sigma(g^n($ $X^{n+1}))\gtrsim$diam$_\sigma(\widehat{\mathbb{C}})$。特别地，如果 $z_0\in X^{n+1}$，我们可以找到一个点 $z_1\in X^{n+1}$，使得

$$\sigma(z_0,z_1)\leq\operatorname{diam}_\sigma(X^{n+1})\text{ and }\sigma(g^n(z_0),g^n(z_1))\geq\frac{1}{3}\operatorname{diam}_\sigma(g^n(X^{n+1}))\geq c_0,$$

其中 $c_0>0$ 是一个一致常数。

因此，对于 (12.14) 中的 f 以及 $w:=T_{z_0}^{-1}(z_1)/$ diam$_\sigma(X^{n+1})$，我们有

$$\sigma(0,w\cdot\operatorname{diam}_\sigma(X^{n+1}))\leq\operatorname{diam}_\sigma(X^{n+1})\ \text{ and }\ \sigma(f(0),f(w))\geq c_0. \tag{12.16}$$

现在设 $\{f_k\}$ 是 $\mathcal{G}$ 中的一个序列，并且在 $\mathbb{C}$ 上 $f_k\to f$ 局部一致，其中 $f\colon\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是某个函数。每个 f_k 都可以写成 (12.14) 的形式。

首先，假设函数 f_k 的相应层级 $n=n_k$ 沿某个子列保持有界。那么，由定义 4.1 中的条件 (iii) 可知，沿着这个子列，相应因子 $\rho_0=\rho_{0,\ k}$ 与 0 保持一致有界的距离。因此不难看出，极限函数 f 的形式为 $f(z)=g^m(T(rz))$，其中 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $m\in\mathbb{N}$、$r>0$，且 T 是 (12.13) 中的一个莫比乌斯变换。因此，f 非常数。

因此，我们可以假设，对于相应的层级 n_k，有 $n_k\to\infty$，当 $k\to\infty$ 时成立。于是，根据引理 4.3，我们还可以假设，在函数 f_k 的定义中涉及的所有瓦片 $X^{n+1}=X^{n_k+1}$ 都足够小，从而在 $B_\sigma(0,$ 直径$_\sigma(X^{n+1}))$ 上，球面度量与欧几里得度量至多相差一个固定的一致因子，例如 <3。于是，对于每个 $z\in B_\sigma(0,$ 直径$_\sigma(X^{n+1}))$，有 $z/$ 直径$_\sigma(X^{n+1})\in D(0,\ 3)$。

现在将 (12.16) 转译为函数 f_k 的表述，这意味着，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在 $w_k \in \mathbb{C}$，使得 $|w_k| < 3$，从而 $\sigma(f_k(0)\ f_k(w_k)) \geq c_0$，其中 $c_0 > 0$ 与 k 无关。如有必要，取子列后，我们可以假设，当 $k \to \infty$ 时，有 $w_k \to w_\infty \in \mathbb{C}$。由于 $f_k \to f$ 在 $\mathbb{C}$ 上局部一致，这意味着 $f_k(0) \to f(0)$，且 $f_k(w_k) \to f(w_\infty)$。于是我们有

$$\sigma(f(0), f(w_\infty)) = \lim_{k\to\infty} \sigma(f_k(0), f_k(w_k)) \geq c_0 > 0.$$

这表明 t hat 极限函数 f 是非常数的，从而完成了该引理的证明 . □

现在我们可以证明本小节的主要结论了。

定理 *12.4* 的证明。设 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是有理映射 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$（其中 $\deg(g) \geq 2$）的 ^ ^($\mathcal{J}(g)$ σ)的动力学准视觉逼近，并设 $\mathcal{G}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数正规族，如引理 12.11 所述。为了证明 g 是半双曲的，只需验证命题 12.2 中的条件（ii）。对于该条件中的 $r_0 > 0$，我们选取引理 12.10 (i) 为函数族 $\mathcal{G}$ 提供的半径。

现在任取 $w_0 \in \mathcal{J}(g)$，并设 U 是某个 $n \in \mathbb{N}$ 对应的 $g^{-n}(B_\sigma(w_0, r_0))$ 的一个连通分支。那么 $g^n(U) = B_\sigma(w_0, r_0)$，因此我们可以找到 $z_0 \in U$，使得 $g^n(z_0) = w_0$。由于 $w_0 \in \mathcal{J}(g)$，根据 (12.1) 我们还有 $z_0 \in \mathcal{J}(g)$，因此存在 $X^{n+1} \in \mathbf{X}^{n+1}$，使得 $z_0 \in X^{n+1}$。

令 $\rho_0 := \operatorname{diam}_\sigma(X^{n+1})$，并令 $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 如 (12.14) 中所定义。于是 $f \in \mathcal{G}$，因此根据 r_0 的选取，我们有 $V \subset D(0,1)$，对于包含 0 的 $f^{-1}(B_\sigma(f(0)\ r_0))$ 的连通分支 V。注意， $f(0) = g^n(z_0) = w_0$，因此 $B_\sigma(f(0)\ r_0) = B_\sigma(w_0, r_0)$。

f 的定义表明 $T_{z_0}(\{\rho_0 u : u \in V\}) = U.$。这又意味着，函数 g^n 在 U 上会取遍 $B_\sigma(w_0, r_0)$ 中的每个值——特别是值 $w_0 = f(0)$——其次数不少于 f 在 $V \subset D(0,1)$ 上取该值的次数（按重数计）。由此可得

$$\begin{aligned}\deg(g^n|_U) &= \sum_{z\in g^{-n}(w_0)\cap U} \deg(g^n, z) \\ &= \sum_{u\in f^{-1}(w_0)\cap V} \deg(f, u) \leq \sum_{u\in f^{-1}(w_0)\cap D(0,1)} \deg(f, u).\end{aligned}$$

现在，由引理 12.10 (ii)，最后一个量有一个与 f 无关的上界，例如 $p \in \mathbb{N}$。我们看到，命题 12.2 中的条件（ii）确实成立，结论随之得出。□

注 12.12。利用正规族论证证明有理映射是半双曲的这一想法源于 Ha¨ıssinsky 和 Pilgrim。引理 12.9 和引理 12.10 (ii) 基本上取自他们的工作（见 [HP09，第 96–97], 页；其中使用了类似的陈述，但未明确表述出来）。

一般而言，假设给定的有界度量空间及其自映射具有动力学准视觉逼近，事实上弱于要求该映射是度量 *CXC* 映射这一条件，后者属于 [HP09] 的一般框架。更确切地说，给定一个度量 CXC 系统，其相应的排斥子存在一个宽度为 1 的动力学准视觉逼近。我们将在有理映射的背景下讨论这一点，不过类似的论证也适用于一般情形（此时将朱利亚集替换为相应 CXC 系统的排斥子）。

令 g 是一个有理映射，$\mathbf{V}^1$ 是朱利亚集 $\mathcal{J}(g)$ 的一个容许有限覆盖，由 $\mathbb{C}$ 的子区域 ^ 构成，而 $\{\mathbf{X}^n\}$ 是由 g 和 $\mathbf{V}^1$ 生成的 $\mathcal{J}(g)$ 的相关覆盖动力学序列。假设瓦片图 $\Gamma := \Gamma(\{\mathbf{X}^n\})$ 是格罗莫夫双曲的，并且

自然识别 $\Phi\colon (\mathcal{J}(g)\ \sigma) \to (\partial_\infty\Gamma, d_\infty)$ 对某个 $\partial_\infty\Gamma$ 上的视觉度量 d_∞ 是拟对称的。根据 [HP09, 定理 3.5.1]，只要 g 在其朱利亚集上是度量 CXC，这一结论就成立。

我们的定理 11.1 意味着，由 $\{\mathbf{X}^n\}$ 中瓦片的邻域簇构成的覆盖序列 $\{\mathbf{K}^n\}$，对于某个半径 $r \in \mathbb{N}_0$，是宽度为 $w = 1$ 的拟视觉逼近，适用于 $(\mathcal{J}(g)\ \sigma)$。还可以验证，当 n 足够大时，$\{\mathbf{K}^n\}$ 具有动力学性质 (6.1)。因此，我们的定理 12.4 强于 Haïssinsky–Pilgrim [HP09, 命题 4.2.9] 中确立的相应结论。

此外，允许动力学准视觉逼近的有界度量空间上的自映射类，严格大于度量 CXC 系统所产生的自映射类，因为在我们的设定中允许“折叠”。例如，BM17, 定理 15.1] 中的扩张 Thurston 映射的每条不变 Jordan 曲线 $\mathcal{C}$ 都允许进行动力学准视觉逼近。f 在 $\mathcal{C}$ 上的限制可能发生折叠，因此不一定是开映射。另一方面，CXC 系统假定为底层排斥子上的有限分支覆盖映射，并且始终是开映射（见 HP09, 第 2.2 节和引理 2.1.2]）。

13. Appendix

本附录旨在详细给出第 12 节中所用若干事实的证明。

13.1. 真全纯映射的畸变性质。 本小节将证明引理 12.6。在该引理中，集合以 $\mathbb{C}$上的球面度量 σ 来度量，但直接使用这种度量很难得到所需的畸变估计。因此，我们改用适当区域上的双曲度量。首先回顾一些相关术语和事实。

如果一个单连通区域 $W \subset \mathbb{C}$ 的 $\mathbb{C}$ 补集至少包含两个点，我们就称它是双曲的。根据黎曼映射定理，存在一个双全纯映射

$$\varphi\colon W \to \mathbb{D} := \{u \in \mathbb{C} : |u| < 1\}.$$

$\mathbb{D}$ 上的双曲度量由长度元给出

$$ds = \frac{2|du|}{1-|u|^2},$$

其中 u 是 $\mathbb{D}$中的一个变量。现在，W 上的双曲度量是通过双全纯映射 $\varphi\colon W \to \mathbb{D}$将 $\mathbb{D}$ 上的双曲度量拉回得到的。它的长度元为

$$ds = \frac{2|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}|dz|,$$

其中 z 是 W中的一个变量。这是一个标准事实：它只取决于 W，而与双全纯映射 φ的选择无关：$W \to \mathbb{D}$（参见 [Mi06, §2]）。

下文中，我们用 ρ_W表示单连通双曲区域$W \subset \mathbb{C}$ 上的双曲度量。度量记号中的下标 W 表示该度量是相对于 ρ_W而言的。例如，$B_W(a, r)$表示 W中以$a \in W$为中心、半径为 $r > 0$的双曲球。为强调这一点，我们用 $\mathrm{hdiam}_W(A)$表示集合 $A \subset W$相对于双曲度量 ρ_W 的直径。

在以下引理及其证明的表述中，我们将使用畸变函数这一概念，该概念已在引理 12.6 的陈述之前引入。注意，如果

α：$(0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$ 是任意满足以下条件的函数：α 在每个区间 $(0,\ t_0]$ 上都有界，其中 $t_0 > 0$且 $\alpha(t) \to 0$ 当 $t \to 0^+$时，那么存在一个畸变函数 η，使得对所有 $t > 0$都有 $\alpha(t) \le \eta(t)$。事实上，我们只需定义 $\eta(t) := \sup_{t' \in (0,\ t]} \alpha(t')$，其中 $t > 0$。这一事实对于构造畸变函数很有用，以下我们将反复使用它，而不再明确提及。

引理 13.1。设 $p \in \mathbb{N}$ 和 $h\colon\ \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为次数为 $1 \le \deg(h) \le p$的有限布拉施克乘积。那么存在一个仅依赖于 p 的畸变函数 $\eta = \eta_p$，具有以下性质：若 $A \subset \mathbb{D}$ 是一个满足 $0 \in A$ 且 $h(A) \subset B_{\mathbb{D}}(0, R)$ 的连通集，其中某个 $R > 0$满足上述条件，则$A \subset B_{\mathbb{D}}(0, \eta(R))$。

此处以及随后的证明中，$B_{\mathbb{D}}(\overline{a}, R)$ 按照我们先前的约定，表示以 $a \in \mathbb{D}$ 为中心、半径为 $R > 0$ 的 $\mathbb{D}$ 中的闭双曲球。还需回顾的是，次数为 $d \in \mathbb{N}$ 的有限布拉施克乘积 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的全纯自映射，它由 d 个 $\mathbb{D}$ 的莫比乌斯变换的乘积给出（例如参见 [Mi06，问题 7-b]）。

证明。根据布拉施克乘积的定义，映射 h 具有如下形式

$$h(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{d} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

其中 $1 \le d \le p$, $\theta \in [0, 2\pi)$，且 $a_1,\ \ldots,\ a_d \in \mathbb{D}$。对于 $k \in \{1, \ldots, d\}$，定义

$$\varphi_k(z) := \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

现在设 $z_0 \in \mathbb{D}$ 且 $h(z_0) \in B_{\mathbb{D}}(0, R)$。那么 $|h(z_0)| \le r$，其中 $r = r(R) \in (0, 1)$，且$r(R) \to 0$，当 $R \to 0$ 时成立。由此可知，对于某个 $k_0 \in \{1, \ldots, d\}$，$|\varphi_{k_0}(z_0)| \le r^{1/d} \le r^{1/p} \in (0, 1)$；或者等价地，$\varphi_{k_0}(z_0) \in B_{\mathbb{D}}(0, R')$，其中 $R' = R'(r, p) = R'(R, p) > 0$，且 $R'(R, p) \to 0$，当$R \to 0$ 时成立。我们得出

$$A \subset h^{-1}(h(A)) \subset h^{-1}\big(\overline{B}_{\mathbb{D}}(0, R)\big) \subset \bigcup_{k=1}^{d} \varphi_k^{-1}\big(\overline{B}_{\mathbb{D}}(0, R')\big).$$

现在，$B_{\mathbb{D}}(0,\ R')$ 的双曲直径为 $2R'$。由于每个莫比乌斯变换 φ_k 都是双曲等距变换（见 [Mi06，引理 2.7]），前面的包含关系表明，连通集 A 可以被 $d \le p$ 个双曲直径为 $2R'$的集合覆盖。这意味着 A 的双曲直径为 $\le 2dR' \le 2pR'$。由于 $0 \in A$，我们看到 $A \subset B_{\mathbb{D}}(0,\ 2pR')$，并且因为$R' = R'(R,\ p) \to 0$，所以 $R \to 0$，结论便很容易得出。□

我们将前面的结论转化为单连通双曲区域之间真映射的畸变性质。

引理 13.2。设 $p \in \mathbb{N}$，且 $W, W \subset \mathbb{C}$ 为单连通双曲区域。假设$f\colon W \to W$ 是一个真全纯映射，且 $\deg(f) \le p$。则以下结论成立：

(i) 直径$_W(f(A)) \le$ 直径$_{\widetilde{W}}(A)$ 对每个集合 $A \subset W$。

(ii) 存在一个仅依赖于 p 的畸变函数 $\eta = \eta_p$，使得

$$\operatorname{hdiam}_{\widetilde{W}}(A) \le \eta\big(\operatorname{hdiam}_W(f(A))\big)$$

对每个连通集 $A \subset W$。

证明将表明，在 (ii) 中，我们可以采用与引理 13.1 中相同的畸变函数 $\eta = \eta_p$ 。

证明。 结论 (i) 是施瓦茨–皮克引理（见 [Mi06, 定理 2.11]）的直接推论，并且对所有全纯映射 $f\colon W \to W$ 都成立。

为证明 (ii)，不妨设

$$R := \operatorname{hdiam}_W(f(A)) \in (0, \infty).$$

现在令 $a \in A$ 任意。于是我们可以选取两个双全纯映射

$$\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{W} \to \mathbb{D} \text{ and } \varphi\colon W \to \mathbb{D} \text{ with } \widetilde{\varphi}(a) = \varphi(f(a)) = 0.$$

复合 $h := \varphi \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ 是 $\mathbb{D}$ 的一个（有限）次数为 $1 \le d := \deg(h) \le p$ 的真全纯自映射，因此是一个次数为 d 的布拉施克乘积（见 [Mi06, 问题 15-c]）。

定义 $A' := \widetilde{\varphi}(A) \subset \mathbb{D}$。则 $0 = \widetilde{\varphi}(a) \in A'$，并且 A' 是连通的。此外，我们有 $h(A') = \varphi(f(A)) \subset \mathbb{D}$，因此 $0 = \varphi(f(a)) \in h(A')$。由于 φ 是双曲等距变换，所以可得

$$R = \operatorname{hdiam}_W(f(A)) = \operatorname{hdiam}_{\mathbb{D}}(h(A')),$$

因此 $h(A') \subset \overline{B_{\mathbb{D}}}(0, R)$。由此可得 $A' \subset B_{\mathbb{D}}(0, \overline{\eta(R)})$，其中函数 $\eta = \eta_p$ 如引理 13.1 所示。由于 $\widetilde{\varphi}$也是双曲等距变换，进而可推出

$$A = \widetilde{\varphi}^{-1}(A') \subset \widetilde{\varphi}^{-1}(\overline{B}_{\mathbb{D}}(0, \eta(R))) = \overline{B}_{\widetilde{W}}(a, \eta(R)).$$

Now $a \in A$ 是任意的，因此 $\operatorname{hdiam}_{\widetilde{W}}(A) \le \eta(R)$，得证 . □

下面这个基本上广为人知的引理指出，在单连通双曲区域 $W \subset \mathbb{C}$ 的相对紧子集上，球面度量 σ 与双曲度量 ρ_W 可比。为了在估计中得到一致的可比常数，我们必须假设底层区域不能太大，或者更确切地说，其在 $\mathbb{C}$ 中的补集不能太小。对此，一个合适的假设是 W 包含于某个半球内，也就是说，包含于半径为 $\pi/2$的球面圆盘内。若满足条件 $\operatorname{diam}_\sigma(W) < \pi/2$，则可保证这一点。这解释了引理 12.6 及下述陈述中关于 W 和 W 所作的相应假设。

引理 13.3. *设 $W \subset \mathbb{C}$ 是一个单连通双曲区域，且其直径 $\operatorname{diam}_\sigma(W) < \pi/2$，并且 $B := B_W(w_0, R_0)$，其中 $w_0 \in W$ 且 $R_0 > 0$。则以下陈述成立：*

(i) 对所有集合 $A \subset B$，都有 $\operatorname{diam}^\sigma(A)\ \operatorname{diam}_\sigma(B) \asymp \operatorname{hdiam}_W(A)$，其中常数为 $C(\asymp) = \overline{C(R_0)}$。(ii) 若 $A \subset W$ 是一个满足 $w_0 \in A$ 且 $\operatorname{hdiam}_W(A) \ge \epsilon$ 的集合，则 $\operatorname{diam}_\sigma(A) \gtrsim \operatorname{diam}_\sigma(B)$，其中常数为 $C(\gtrsim) = C(\epsilon, R_0)$。

证明。本质上，这些结论源自球面版科比畸变定理，该定理已在 [BM17, Theorem A.1] 中明确表述。为在我们的情形中应用这一结果，我们选取一个双全纯映射 $\varphi\colon \mathbb{D} \to W$，使得 $\varphi(0) = w_0$。这样便满足了 [BM17, Theorem A.1] 中对像域的假设，因为对于我们的像域 W，有 $\operatorname{diam}_\sigma(W) < \pi/2$，因此 W 包含于 $\mathbb{C}$ 的一个半球中。此外，[BM17, Theorem A.1] 是针对 $\mathbb{C}$上的弦度量表述的，但这对我们的目的并无影响，因为弦度量与球面度量（我们所用的度量）在通用常数意义下可比。

与双曲半径 R_0 相对应，存在一个球面半径 $r_0 = r_0(R_0) > 0$，使得

$$B_\sigma(0, r_0) = B_{\mathbb{D}}(0, R_0) \subset \mathbb{D}.$$

在 $B_{\mathbb{D}}(0, R_0)$ 上，球面度量与双曲度量可比，因此

$$\sigma(u, v) \asymp \rho_{\mathbb{D}}(u, v)$$

对所有 $u, v \in B_{\mathbb{D}}(0, R_0)$ 均成立。这里及下文中，除非另有说明，所有可比常数 $C(\asymp)$ 仅依赖于 r_0，或等价地，仅依赖于 R_0。由于 φ 是双曲等距变换，我们有

$$B = B_W(w_0, R_0) = \varphi(B_{\mathbb{D}}(0, R_0)) = \varphi(B_\sigma(0, r_0)).$$

我们将

$$\varphi^\sharp(z) := \frac{1 + |z|^2}{1 + |\varphi(z)|^2} |\varphi'(z)|$$

φ 在 $z \in \mathbb{D}$ 处的球面导数记为（若 $\varphi(z) = \infty$，则将其理解为适当的极限）。由 [BM17 定理 A.1] 可得，对于所有 $u, v \in B_\sigma(0, r_0) = B_{\mathbb{D}}(0, R_0)$，均有

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi(u), \varphi(v)) &\asymp \varphi^\sharp(0)\sigma(u, v) \\ &\asymp \varphi^\sharp(0)\rho_{\mathbb{D}}(u, v) = \varphi^\sharp(0)\rho_W(\varphi(u), \varphi(v)).\end{aligned}$$

翻译为 p $B = B_W(w_0, R_0)$ 中的点 $= \varphi(B_{\mathbb{D}}(0, R_0))$，前一个关系意味着 t

$$\sigma(z, w) \asymp \varphi^\sharp(0)\rho_W(z, w)$$

对所有 $z, w \in B$。由于 $\operatorname{hdiam}_W(B) = 2R_0$，因此

$$\operatorname{diam}_\sigma(B) \asymp \varphi^\sharp(0),$$

将这些结果综合起来，我们得到

$$\sigma(z, w) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(B)\rho_W(z, w) \tag{13.1}$$

对所有 $z, w \in B$。特别地，若 A 是 B 的任意子集，则

$$\operatorname{diam}_\sigma(A) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(B) \operatorname{hdiam}_W(A).$$

命题 (i) 得证。

为证明 (ii)，考虑一个集合 $A \subset W$，满足 $w_0 \in A$ 且 $\operatorname{hdiam}_W(A) \geq \epsilon$。若 $A \subset B$，则由 (i) 可知

$$\operatorname{diam}_\sigma(A) \gtrsim \epsilon \operatorname{diam}_\sigma(B),$$

因此该命题在此情形下成立。

如果 A 不包含于 B，则我们可以找到一个点 $w_1 \in A \setminus B$。由此可知，存在常数 (13.1) $c_0 = c_0(R_0) > 0$ 使得

$$B' := B_\sigma(w_0, c_0 \operatorname{diam}_\sigma(B)) \subset B.$$

现在我们沿球面测地线 γ 从 $w_0 \in A \cap B$ 行进到 $w_1 \in A \setminus B$。由于 γ 离开 B，它也离开 B'，从而我们得出

$$\operatorname{diam}_\sigma(A) \geq \sigma(w_0, w_1) = \operatorname{diam}_\sigma(\gamma) \geq c_0 \operatorname{diam}_\sigma(B) \gtrsim \operatorname{diam}_\sigma(B).$$

由此可知，该命题在此情形下同样成立（甚至所用常数与ϵ无关）。□

现在我们可以证明畸变引理了。

引理 *12.6* 的证明。 证明的基本思路是，引理 13.2 为映射 f 的定义域和值域中的双曲度量提供了良好的畸变控制，而我们可以根据引理 13.3 将其与球面度量联系起来。

在给定的设定下，存在一个通用常数 $R_0 > 0$ 使得

$$B_\sigma(w_0, r/2) \subset B := B_W(w_0, R_0) \subset W = B_\sigma(w_0, r).$$

那么 $\operatorname{diam}_\sigma(B) \asymp r$，其中 $C(\asymp) = 2$，并且根据假设 (i)，我们有

$$f(A) \cup f(A') \subset B_\sigma(w_0, r/2) \subset B = B_W(w_0, R_0) \subset W = B_\sigma(w_0, r).$$

由于 $\operatorname{diam}_\sigma(W) = 2r < \pi/2$，引理 13.3 (i) 推出

$$\operatorname{hdiam}_W(f(A)) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(f(A))/r \text{ and}$$
$$\operatorname{hdiam}_W(f(A')) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(f(A'))/r$$

使用相同的通用常数 $C(\asymp) = C(R_0) =: C_0 \geq 1$。于是，根据引理13.2 (i)和假设(ii)，我们得出

$$\operatorname{hdiam}_{\widetilde{W}}(A') \geq \operatorname{hdiam}_W(f(A')) \geq c_0 \operatorname{diam}_\sigma(f(A'))/r \geq c_0\epsilon, \tag{13.2}$$

其中 $c_0 := 1/C_0$。另一方面，由于 A 是连通的，根据引理 13.2 (ii)，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{hdiam}_{\widetilde{W}}(A) &\leq \eta(\operatorname{hdiam}_W(f(A))) \\ &\leq \eta(c_0 \operatorname{diam}_\sigma(f(A))/r) \leq \eta(c_0) =: R_1,\end{aligned}$$

其中，η 是仅依赖于 p的畸变函数。特别地，R_1 仅依赖于 p、$\widetilde{\ }$，并且我们有 $A \subset B := B_{\widetilde{W}}(z_0, R_1)$，因为根据假设 (i)，$z_0 \in A$。于是由引理 13.3 (i) 可得

$$\operatorname{hdiam}_{\widetilde{W}}(A) \asymp \operatorname{diam}_\sigma(A)/\operatorname{diam}_\sigma(\widetilde{B})$$

其中 $C(\asymp) = C(R_1) = C(p)$。

此外，由 (13.2) 可知，$z_0 \in A'$ 且 $\operatorname{hdiam}_{\widetilde{W}}(A') \geq c_0\epsilon$。根据引理 13.3 (ii)，这意味着

$$\operatorname{diam}_\sigma(A') \gtrsim \operatorname{diam}_\sigma(\widetilde{B})$$

其中 $C(\gtrsim) = C(c_0\epsilon, R_1) = C(\epsilon, p)$。

综合以上关系可得

$$\frac{\operatorname{diam}_\sigma(A)}{\operatorname{diam}_\sigma(A')} \lesssim \frac{\operatorname{diam}_\sigma(A)}{\operatorname{diam}_\sigma(\widetilde{B})} \asymp \operatorname{hdiam}_{\widetilde{W}}(A) \leq \eta(c_0 \operatorname{diam}_\sigma(f(A))/r).$$

由于此处的隐含常数仅依赖于 ϵ 和 p，因此常数 c_0 是通用的，而畸变函数 η 仅依赖于 p，结论得证。□

13.2. 关于正规族的一些事实。 下述命题是著名的 Hurwitz 定理的一个版本。

引理 13.4。 设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 且 $f_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，对 $n \in \mathbb{N}$ 均为亚纯函数。假设 f 非常数，且 $f_n \to f$ 在 $\mathbb{C}$上局部一致。则以下陈述成立：

(i) 设 $w_0 \in \mathbb{C}$，并假设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个开欧几里得圆盘，使得对所有 $z \in \partial D$ 均有 $f(z) \neq w_0$。则存在 $\delta > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$\sum_{z \in f_n^{-1}(w) \cap D} \deg(f_n, z) = \sum_{z \in f^{-1}(w_0) \cap D} \deg(f, z) < \infty$$

对所有 $w \in B_\sigma(w_0, \delta)$ 以及满足 $n \geq N$ 的 $n \in \mathbb{N}$。

(ii) 若 $a_0 \in \mathbb{C}$，则存在 $N \in \mathbb{N}$ 和点 $a_n \in \mathbb{C}$，它们在 $n \in \mathbb{N}$ 上定义，且满足 $n \geq N$，使得 $f_n(a_n) = f(a_0)$ 并且当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to a_0$。

由于我们未能在文献中找到完全采用这种形式的陈述，因此我们将略述证明。回顾一下，$D(a, r)$ 表示以 $a \in \mathbb{C}$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的开欧几里得圆盘。

证明。(i) 不妨假设 $w_0 = 0$。令 $z_1, \ldots, z_k$ 为 D 中使 f 取得值 $w_0 = 0$ 的所有点（注意，这样的点只有有限个，否则根据唯一性原理（参见 [Ga01，第 156] 页），f 将是一个常数函数）。我们可以找到以 $z_1, \ldots, z_k$ 为中心的小开欧几里得圆盘 $D_1, \ldots, D_k \subset D$，使它们两两不相交，并且 $|f|$ 在每个集合 $D_j \setminus \{z_j\}$, $j = 1, \ldots, k$ 上都很小但不为零。我们还可以假设 f 在集合 $D_1 \cup \cdots \cup D_k$ 中没有极点。根据假设，对 $z \in \partial D$ 有 $f(z) \neq 0$，因此我们可以将 $\delta > 0$ 取得足够小，使得对于 $z \in E := D \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_k)$，$|f(z)| > 10\delta$。

现在，对于充分大的 n，比如 $n \geq N$，我们可以假设 f_n 与 f 如此接近，以至于 f_n 在 $D_1 \cup \cdots \cup D_k$ 中没有极点，并且对于 $z \in D_1 \cup \cdots \cup D_k$，有 $|f_n(z) - f(z)| < \delta$，而对于 $z \in E$，有 $|f_n(z)| > 9\delta$。

特别地，f_n 在 E 上不取得任何 $w \in B_\sigma(0, \delta) \subset D(0, 2\delta)$ 中的值。另一方面，如果 $w \in B_\sigma(0, \delta) \subset D(0, 2\delta)$ 且 $z \in \partial D_j$，那么我们有

$$|f_n(z) - f(z) - w| \leq |f_n(z) - f(z)| + |w| \leq 3\delta < |f(z)|.$$

根据 Rouch´e 定理（见 [Ga01，第 229] 页），函数 f 和 $f + (f_n - f - w) = f_n - w$ 在 D_j 中具有相同数量的零点，按重数计。换句话说，f 在 D_j 上取得值 $w_0 = 0$ 的次数，与 f_n 在那里取得值 w 的次数相同。

由此可得，对于 $n \geq N$，

$$\begin{aligned}\sum_{z \in f_n^{-1}(w) \cap D} \deg(f_n, z) &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{z \in f_n^{-1}(w) \cap D_j} \deg(f_n, z) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{z \in f^{-1}(w_0) \cap D_j} \deg(f, z) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \deg(f, z_k) = \sum_{z \in f^{-1}(w_0) \cap D} \deg(f, z).\end{aligned}$$

结论得证。

(ii) 设 $w_0 := f(a_0)$。由于 f 非常数，我们可以找到一个半径序列 $r_k > 0$，使其具有以下性质：当 $k \to \infty$ 时，$r_k \to 0$；并且如果 $D_k := D(a_0, r_k)$，那么对于 $z \in \partial D_k$ 和 $k \in \mathbb{N}$，$f(z) \neq w_0$。现在由 (i) 可知，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，以及每个充分大的 $n \in \mathbb{N}$，函数 f_n 在 D_k 中取到值 $w_0 = f(a_0)$。结论很容易得出。□

现在我们可以证明第 12.5 节中的引理12.9和12.10。

引理 *12.9* 的证明。我们用反证法，假设 $\mathcal{F}$ 不是正规族。那么根据 Zalcman引理（参见 [Sch93，第 100–101] 页，以及 [Ga01，第 320]页），对于每个 $n \in \mathbb{N}$

存在一个点 $z_n \in \mathbb{C}$、一个数 $r_n > 0$和一个函数 $f_n \in \mathcal{F}$，使得当 $n \to \infty$时，有 $z_n \to z_\infty \in \mathbb{C}$、$r_n \to 0$，并且

$$h_n(z) := f_n(z_n + r_n z) \to h(z)$$

在 $z \in \mathbb{C}$ 上局部一致收敛（相对于映射值域中的球面度量）。这里，h 是 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数。

由皮卡定理（参见 [Sch93，第 57] 页），函数 h 至多可以漏掉 $\mathbb{C}$ 中的两个值 ⌢。由于 K 至少包含四个点，h 必须取到两个不同的值 w，$w' \in K$。因此，存在点 a，$a' \in \mathbb{C}$，使得 $h(a) = w$ 且 $h(a') = w'$。于是，根据引理 13.4 (ii)，对于每个充分大的 n，函数 h_n 也将在分别靠近 a 和 a' 的点处取到值 w 和 w'。因此，如有必要，取 $\{h_n\}$ 的一个子列后，我们可以假设存在 $\mathbb{C}$ 中的序列 $\{a_n\}$ 和 $\{a'_n\}$，使得当 $n \to \infty$ 时，$a_n \to a$ 且 $a'_n \to a'$，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$h_n(a_n) = w$ 且 $h_n(a'_n) = w'$。

定义 $u_n := z_n + r_n a_n$ 以及 $v_n := z_n + r_n a'_n$。则 $f_n(u_n) = h_n(a_n) = w \in K$，且$f_n(v_n) = h_n(a'_n) = w' \in K$。此外，$u_n \to z_\infty$ 和 $v_n \to z_\infty$ 如 $n \to \infty$所示。因此，只要我们选择足够大的$R > 0$，就有 u_n，$v_n \in D(0, R) \cap f_n^{-1}(K)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$成立。

我们的假设意味着存在一个畸变函数 η_R，使得

$$0 < \sigma(w, w') = \sigma(f_n(u_n), f_n(v_n)) \le \eta_R(|u_n - v_n|)$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。由于 $u_n \to z_\infty$ 和 $v_n \to z_\infty$，最后一个不等式的右端在 $n \to \infty$时趋于 0。这是矛盾，因此命题得证。□

引理 *12.10* 的证明。(i) 我们采用反证法，假设该命题不成立。那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个函数 $f_n \in \mathcal{F}$ 和一个点 $z_n \in \mathbb{C}$，满足 $|z_n| \ge 1$，使得 z_n属于 V_n连通分支，该连通分支是包含 0 的 $f_n^{-1}(B_\sigma(f_n(0)\ 1/n))$。

通过取一个子列，我们可以假设 $f_n \to f$ 在 $\mathbb{C}$ 上局部一致收敛，其中 f 是 $\mathbb{C}$ 上的非恒定亚纯函数。为导出矛盾，只需证明对每个 $r \in \in (0, 1)$，都存在一点 $u \in \mathbb{C}$ 满足 $|u| = r$ 且 $f(u) = f(0)$，因为这样一来，根据唯一性原理，f 就是常数。

为找到这样一点，回想一下，每个连通分支 V_n 都是连通的，并且包含 0 和 z_n，其中 $|z_n| \ge 1$。因此，对每个固定的 $r \in \in (0,1)$，每个 V_n 也必定包含一点 u_n，满足$|u_n| = r$。取一个子列后，我们可以假设当 $n \to \infty$ 趋于$|u| = r$ 时，$u_n \to u \in \mathbb{C}$。于是$|u| = r$。

由于 $f_n \to f$ 在 $\mathbb{C}$上局部一致收敛，我们有当 $n \to \infty$ 趋于 f_n时，$f_n(u_n) \to f(u)$。另一方面，我们还有 $f_n(u_n) \in f_n(V_n) = B_\sigma(f_n(0)\ 1/n)$。由于 $f_n(0) \to f(0)$，这意味着当 $n \to \infty$ 趋于 f 时，$f_n(u_n) \to f(0)$。这表明 $f(u) = \lim_{n\to\infty} f_n(u_n) = f(0)$，从而得到所需的矛盾。

（ii）我们再次采用反证法，假设存在 $R > 0$，使得（12.12）中的量并非一致有界。那么，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个函数⌢$f_n \in \mathcal{F}$ 和一个值 $w_n \in \mathbb{C}$，使得

$$\sum_{z \in f_n^{-1}(w_n) \cap D(0,R)} \deg(f_n, z) \ge n.$$

我们的假设表明，经过选取适当的子列，我们可以假设当 $n \to \infty$ 时，$w_n \to w_0$ 和 $f_n \to f$ 在 $\mathbb{C}$上局部一致收敛，其中 f 是一个非常数亚纯函数。于是，根据引理13.4（i）中的陈述，我们很容易得到矛盾。□

References

[BM17] M. Bonk 和 D. Meyer，《扩张 Thurston 映射》，《数学调查与专著》第225卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2017年。[BM20] M. Bonk 和 D. Meyer，拟共形树与测地树，《数学基础》250（2020年），253–299。[BM22] M. Bonk 和 D. Meyer，一致分支树，《美国数学会汇刊》375（2022年），3841–3897。[BS00] M. Bonk 和 O. Schramm，格罗莫夫双曲空间的嵌入，《几何与泛函分析》10（2000年），266–306。[BP03] M. Bourdon 和 H. Pajot，贝索夫上同调与空间，《纯粹与应用数学杂志》558（2003年），85–108。[BH99] M.R. Bridson 和 A. Haefliger，《非正曲率度量空间》，《数学基础》319，施普林格，柏林，1999年。[BBI01] D. Burago、Dmitri、Y. Burago 和 S. Ivanov，《度量几何课程》，《数学研究生教材》33，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2001年。[BS07] S. Buyalo 和 V. Schroeder，《渐近几何学要素》，欧洲数学会，苏黎世，2007年。[Ca13] M. Carrasco Piaggio，紧度量空间的共形规范，《芬兰科学院数学年刊》46（2013年），495–548。[CJY94] L. Carleson、P.W. Jones、J.-C. Yoccoz，Julia和John，《巴西数学会公报》（新系列）25（1994年），1–30。[CGZ22] G. Cui、Y. Gao 和 J. Zeng，有理映射的不变图，《数学进展》404（2022年），论文编号108454。[Fo91] O. Forster，《黎曼曲面讲义》，《数学研究生教材》81，施普林格，纽约，1991年。[Ga01] T.W. Gamelin，《复分析》，施普林格，2001年。[GH90] E. Ghys 和 P. de la Harpe 编，《关于Mikhael Gromov的双曲群》，《数学进展》83，Birkhäuser，波士顿，1990年。[Gr87] M. Gromov，《双曲群》，载于《群论论文集》（S. Gersten 编），《MSRI出版物》8，施普林格，纽约，1987年，75–265。[HP09] P. Haïssinsky 和 K.M. Pilgrim，《粗扩张共形动力学》，《Astérisque》325，2009年。[He01] J. Heinonen，《度量空间分析讲义》，施普林格，纽约，2001年。[Hi93] A. Hinkkanen，有理函数的朱利亚集是一致完美的，《剑桥哲学会数学会刊》113（1993年），第3期，543–559。[HY98] J.G Hocking 和 G.S. Young，《拓扑学》，第2版，多佛出版公司，纽约，1988年。[Hu06] J.H. Hubbard，《Teichmüller理论及其在几何、拓扑学和动力学中的应用》第1卷：《Teichmüller理论》，Matrix Editions，纽约州伊萨卡，2006年。[Ki20] J. Kigami，通过加权划分研究度量空间的几何与分析，《数学讲义》2265，施普林格，查姆，2020年。[Ma08] J.M. Mackay，拟弧的存在性，《美国数学会会刊》136（2008年），3975–3981。[MT10] J.M. Mackay 和 J.T. Tyson，《共形维数：理论与应用》，《大学讲义系列》54，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2010年。[Ma93] R. Mañe，关于法图定理，《巴西数学会公报》（新系列）24（1993年），1–11。[MdR92] R. Mañe 和 L.F. da Rocha，朱利亚集是一致完美的，《美国数学会会刊》，1992年，251–257。[Me02] D. Meyer，有理映射中的自相似曲面与折纸的拟对称嵌入，《芬兰科学院数学年刊》27（2002年），461–484。[Mi11] N. Mihalache，重访Julia和John，《数学基础》215（2011年），67–86。[Mi06] J. Milnor，《单复变量动力学》，第3版，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2006年。[Sch93] J.L. Schiff，《正规族》，《大学教材》，施普林格，纽约，1993年。[Sch06] V. Schroeder，拟度量空间与度量空间，《共形几何与动力系统》10（2006年），355–360。

Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, CA 90095, USA电子邮箱地址: mbonk@math.ucla.edu

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam, 1090 GEAmsterdam, The Netherlands电子邮箱地址: mikhail.hlushchanka@gmail.com

Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool, Mathematical Sciences Building, Liverpool L69 7ZL, United Kingdom电子邮箱地址: dmeyermail@gmail.com