arXiv:2601.14482v1 [math.CO] 20 Jan 2026

通过模划分计数线性扩张与有向团

Daniela Egas Santander[1], Matteo Santoro[2], 和 Jason P. Smith[3]

[1]马克斯·普朗克分子细胞生物学与遗传学研究所和系统生物学中心，德累斯顿，德国[2]SISSA，的里雅斯特，意大利[3]诺丁汉特伦特大学，诺丁汉，英国

摘要

计数偏序集的线性扩张是偏序集理论中的一个基本问题。已知该问题是 #P-完全的，但在某些特殊情形下存在多项式时间公式。本文针对模划分具有特定结构的偏序集，提出了用于计数其线性扩张的新递归公式。具体而言，我们关注不可比图具有模划分，且其骨架为树、团的项链或二者组合的偏序集。这些证明具有构造性，并可用于显式生成所有线性扩张。我们还讨论了该问题以排列和有向图表述时的等价形式。有向图视角与对有向图的有向旗复形中有向单形的计数相关，并可应用于理解神经回路中的高阶结构。

1 引言

偏序集的一个线性扩张，是该偏序集元素的一个全序，且与其偏序相容。计算偏序集的线性扩张数量，是偏序集研究中最基本的问题之一；已知该问题是 #P-完全的 [BW91b]。对于某些特定类型的图，存在多项式时间公式，包括树 [Atk90], 、串并联偏序集 [VTL79], 、d-完全偏序集 [Pro14], 和移动偏序集 [GGMM21], 。全面综述请参见 [CP25, Section 12.1] 。然而，这些类别在所有偏序集中所占比例微乎其微。另一方面，关于线性扩张数量已有许多松紧程度和复杂度各异的界，参见 [CP25]。将偏序集分解为更简单的部分，可以使偏序集理论中的许多计算困难问题变得易于处理。特别是，对于树宽有界 [EGKO19] 和模宽有界 [HM87, DP23]的偏序集，存在多项式时间算法。

图的模划分是将图分解为若干个模，其中每个模内的所有顶点在该模之外具有相同的邻点。偏序集的可比图的模划分可用于分解该偏序集，其中可比图的顶点是偏序集的元素，任意一对可比较元素之间都有一条边。模划分的模宽是最大模的大小。在 [HM87] 中证明了，给定偏序集 $\mathcal{P}$的模划分后， $\mathcal{P}$ 的线性扩张数可通过计算每个模的线性扩张数，以及将每个模替换为同等大小的全序集后得到的偏序集的线性扩张数来确定。由此可证明，线性扩张数可在多项式时间内计算；因此，线性扩张数的计算复杂度可通过计算每个模的线性扩张数来界定。

我们证明了在模划分具有特定结构时，线性扩张数的新递归公式。若进一步限定每个模始终为团或独立集，则可得到闭式公式。本文考虑的偏序集具有可比图的模划分，其骨架图 是树或团的项链的补图（或二者的某种组合）；模划分的骨架是通过将每个模替换为一个顶点而得到的。我们的公式证明是构造性的，因此可用于显式列出所有线性扩张。主要结果的示例见图 3。

计数线性扩张在数学的其他领域也有等价表述。它们与排列密切相关，因为线性扩张可以看作偏序集元素的一个排列。计数线性扩张等价于计数其逆序集是偏序集中不可比对集合的子集的排列。这种等价的重新表述带来了若干应用：估计计数线性扩张的复杂度 [BW91b, DP20],；开发均匀抽样线性扩张的方法 [PR94, Hub25] ；以及估计线性扩张的数量 [BGHP10]。此外，从另一个方向看，线性扩张也被用于理解排列统计量 [BW91a]，并计数排列模式及相关概念 [EN12, Yak15, CK16]。另一方面，计数线性扩张等价于在一张添加了互反边的无环竞赛图中，计数由边诱导的无环竞赛图的数量。这一视角进而为拓扑学中的一个问题建立了模型：在定向有向图中添加互惠连接时，有向单形的数量如何变化。

对这一计数问题的不同解读，使其能够探讨科学领域中的多种应用。在决策过程中，这些方法可用于根据偏序估算排名概率 [LS03] ，并确定排序算法的成本 [Sch76]。它们也应用于计算机科学：计算线性扩张可用于为并行任务或受约束任务确定高效的调度方案 [CR95, Cra04]。最后，有向图的解读在科学领域也有应用，尤其是在神经科学中。研究发现，神经网络中单纯形和互惠连接的表达量都偏高，而这两者都会影响网络功能 [SGK+18, TAM19, SPCGB19, ATM20, SCS+21, EESBP+24, SPE+25]。计算线性扩张能够揭示此类网络中互惠连接与有向单形之间的相互作用。

本文结构如下。第 2 节介绍线性扩张和模划分的必要背景知识。第 3 节给出将主要结果应用于特定情形后得到的三个公式。第 4 节给出最一般的结果及其证明，并探讨可比图的模划分何时并非其对应偏序集的模划分。最后，我们在第 5 节介绍一些应用。

2 预备知识

2.1 基本定义、记号与约定

我们先确立记号，并回顾一些标准的图论术语。对于本文未给出的图论定义，请参阅 [Die12] ，其中提供了详细的背景介绍。除非另有说明，我们考虑的所有图都是有向图，且不含自环或重边（即从 i到 j至多有一条边），但允许存在双向连接，也就是说，从 i 到 j 和从 j 到 i 的边可以同时存在。

记号 2.1。 我们用 $[n]$ 表示集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$。对于图 G，我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示 G 的顶点集和边集。我们用 $i \to j$ 表示 G 中从 i 到 j 的一条边。如果 G 是无向的，我们用 $i - j$ 表示 G 中连接 i 和 j 的一条边。顶点 v 的邻点 是 $V(G)$ 中通过一条边与 v 相连的顶点。如果 G 是有向的，这些顶点还可以进一步

分为入邻点 和出邻点，具体取决于它们分别通过一条边连接到 v 或从 v 连接出去。

定义 *2.2*（子图）。从 G 中取一个集合 G，并令 H 为 X 中所有端点所构成的集合，即可得到 G 的边诱导子图 H。从 G 中取一个集合 G，并令 H 为 E 中两个端点都属于 X 的边，即可得到 G 的顶点诱导子图 H，记作 $G|_X$。

定义 2.3（传递图）。若对于图 G 中的任意两条边 $i \to j$ 和 $j \to k$，G 中都有边 $i \to k$，则称图 G 为传递的。图 G 的传递闭包是包含 G 的最小传递图，这里的"最小"指边数最少。等价地，G 的传递闭包是一个与 G 具有相同顶点集的图；当且仅当 G 中存在一条从 i 到 j 的有向路径时，该图包含边 $i \to j$。无向图 G 的传递序是 V 的一个全序 $\prec$（(G)），使得若按照 $\prec$ 的方向为每条边定向，所得的有向图就是传递图。

定义 2.4。图 G 的补图 $\bar{G}$ 可通过 $V(\bar{G}) = V(G)$ 以及 $E(\bar{G}) = K \setminus E(G)$得到，其中 K 是 $V(G)$ 的所有二元子集构成的集合（若 G 是无向图），而 K 是 $V(G)$ 的所有二元有序对构成的集合（若 G 是有向图）。

接下来，我们回顾偏序集的定义及相关术语。对于本文未给出的偏序集定义，详细背景可参见 [Sta11,Chapter 3] foradetailed background。

定义 2.5。偏序集（或偏序集）是一个二元组$(\mathcal{P}, \leq_{\mathcal{P}})$，其中 $\mathcal{P}$是一个集合，$\leq_{\mathcal{P}}$是一个自反、反对称且传递的二元关系。若不会造成混淆，我们将 $\leq_{\mathcal{P}}$简记为 $\leq$，并将二元组$(\mathcal{P}, \leq_{\mathcal{P}})$ 简记为 $\mathcal{P}$。设 $s,t \in \mathcal{P}$，若 $s \leq t$ 且 $s \neq t$，则记作 $s < t$。若 $s < t$ 且 $[s,t] := \{u \in P \mid s \leq u \leq t\} = \{s,t\}$，则称 t覆盖 s。给定子集 $S \subseteq \mathcal{P}$，我们用 $\mathcal{P}_{|S}$ 表示 S 上的偏序集，其序关系与 $\mathcal{P}$相同。若 $s \leq t$ 或 $t \leq s$，则称 s和 t 是可比较的；否则称为不可比。

如果偏序集中的每一对元素都可比较，我们就称该偏序集是全序的或具有全序，此时称它为链。反之，反链是指每一对元素都不可比的偏序集。

例 2.6。我们用$\mathbf{n}$ 表示底层集合为 $[n]$ 且采用通常顺序的链偏序集。请注意，在$\mathbf{n}$中，对于任意 $1 \leq i < n$，$i+1$ 是覆盖 i的唯一元素。

我们可以构造若干个图来表示偏序集的结构，图1展示了下列各类图的示例。

定义 2.7（与偏序集相关的图）。任意偏序集 $\mathcal{P}$ 都对应一个传递无环图，记作 $G_{\mathcal{P}}$；其顶点为 $\mathcal{P}$ 中的元素，且当 $s < t$时，边为 $s \to t$。事实上，这一构造在集合 $\mathcal{P}$ 上的偏序结构与顶点集为 $\mathcal{P}$的传递无环图之间建立了一个双射。

$\mathcal{P}$的可比图记为$\mathrm{CG}_{\mathcal{P}}$，它是一个无向图，顶点为 $\mathcal{P}$ 的元素；当 s 与 t 可比较时，二者之间有一条边 $s - t$。特别地，$\mathcal{P}$的可比图可以通过忽略 $G_{\mathcal{P}}$ 中各边的方向得到。

$\mathcal{P}$的不可比图记为$\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}$，它是一个无向图，顶点为 $\mathcal{P}$；当 s 与 t 不可比时，二者之间有一条边 $s - t$。因此，可比图是不可比图的补图。

$\mathcal{P}$ 的哈斯图是一个顶点集为 $\mathcal{P}$、边对应于覆盖关系的无向图。我们绘制 $\mathcal{P}$ 的哈斯图时，若 $s \leq t$，则将 t 画在 s的"上方"。

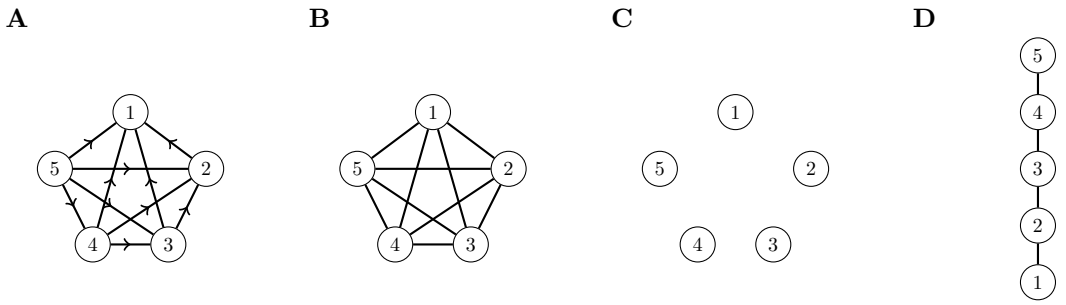

图1：与链偏序集**4**相关的图。**A:** 图 G_4。**B:** 可比图 CG_4。**C:**不可比图 IG_4。**D:** **4**的哈斯图。

2.2 偏序集的线性扩张与模划分

我们回顾偏序集线性扩张的定义。

定义 2.8。给定一个偏序集$(\mathcal{P}, \leq)$，$\mathcal{P}$ 的一个线性扩张 是其元素 $\prec$ 的一个全序，$\mathcal{P}$ 的偏序在该全序下得到保留；也就是说，若 $x \leq y$，则 $x \prec y$。等价地，线性扩张是一个保序双射 $\ell : \mathcal{P} \to \mathbf{n}$，其中 $n = |\mathcal{P}|$，且$\mathbf{n}$ 是含有 n个元素的链。我们用$\mathrm{LE}(\mathcal{P})$表示偏序集 $\mathcal{P}$ 的线性扩张数。

计算偏序集的线性扩张数是偏序集理论中的一个经典问题。已知该问题是 #P-完全的 [BW91b], , 并且在线性扩张计数中可以发现许多有趣的数列。例如，偏序集 $\mathbf{2} \times \mathbf{n}$ 的线性扩张数是卡特兰数 C_n [Sta15，习题 177], , 其中 $\mathbf{2} \times \mathbf{n}$ 是 2 元链与 n元链的笛卡尔积。此外，在 [Bri99] 中，他们构造了偏序集 L_n，其线性扩张数为斐波那契数 F_n。

计算线性扩张数量的主要工具是模分划。

定义 2.9 (模划分**)**。设 G 是一个无向图。G 的一个模 是一个非空集合 $M \subseteq V(G)$，其中 M 的所有顶点在 $V(G) \setminus M$中拥有相同的邻点。G 的一个模划分是将其顶点集划分为若干模。

模分划的定义可以推广到有向图，因此也可以推广到偏序集。

定义 2.10 (有向图与偏序集的模分划**)**。设 G 是一个有向图。G 中的模是一个子集 $M \subseteq V(G)$，其中 M 中的所有顶点在 $V(G) \setminus M$中拥有相同的入邻点和出邻点。G 的模分划是将其顶点划分为若干模。偏序集 $\mathcal{P}$ 的模分划$\mathcal{M} = \{M_i \subseteq V(G)\}_{i=1}^{k}$ 是其对应的有向无环图 $G_{\mathcal{P}}$的模分划。为避免歧义，本文滥用记号，以 M_i 表示 $\mathcal{P}|_{M_i}$。

注意，偏序集的模划分也是不可比图的模划分，但不可比图的模划分不一定能给出偏序集的模划分。这是因为，虽然不可比图的模划分会使所有模具有相同的邻点，但它并不能强制偏序集的有向图表示中邻点之间的边方向保持一致。

例如，考虑一个以三个顶点 i、j、k构成的传递图，其边为 $i \to j$、$j \to k$和 $i \to j$。划分 $M_1 = \{i, k\}$ 和 $M_2 = \{j\}$ 不是该有向图或其对应偏序集的模划分，但却是其（不可）比图的模划分。我们将在第 4.2 节中对此进行更详细的探讨。

给定一个具有模划分的图，我们可以将所有模一并取商，从而得到以下定义。一个简单示例见图 2。

定义 2.11 (模划分的骨架)。 设 $\mathcal{M} = \{M_i \subseteq V(G)\}_{i=1}^{k}$ 是图 G 的一个模划分。 $\mathcal{M}$ 的骨架 是商图 $G/\mathcal{M}$，其中每个模都被视为一个单独的顶点。更确切地说， $G/\mathcal{M}$ 的顶点为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$，若 G 中存在从 M_i 中的顶点到 M_j 中的顶点的边，则 $G/\mathcal{M}$ 中存在一条边 $v_i \to v_j$。

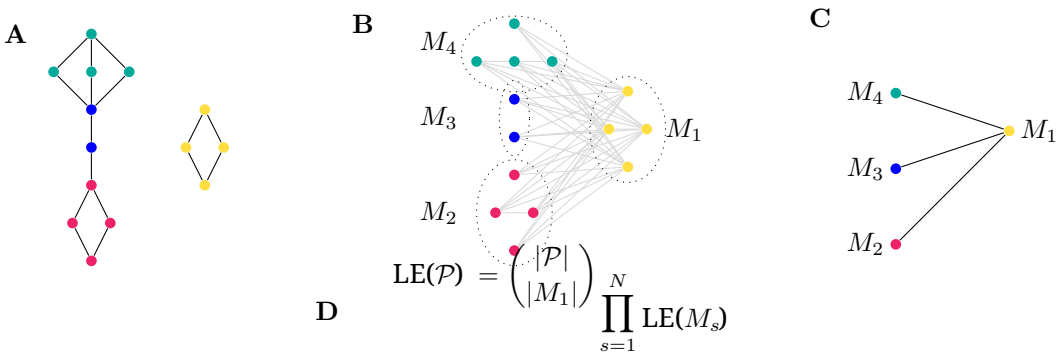

图 2: **模划分及其骨架**。**A:** 偏序集 $\mathcal{P}$ 的哈斯图。**B:** 不可比图 $\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}$ 及其模划分 $\mathcal{M}$。**C:** $\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}/\mathcal{M}$ 的骨架图。**D:** 偏序集 $\mathcal{P}$ 的线性扩张数公式。

取偏序集的骨架图可视为字典序和的逆运算，定义如下:

定义 2.12。 设 $\mathcal{S}$ 为一个偏序集， $\Upsilon = \{\mathcal{P}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ 为由 $\mathcal{S}$中的元素索引的一组偏序集。 Υ在 $\mathcal{S}$上的字典序和，记作 $\oplus_{\mathcal{S}}\Upsilon$，是偏序集 $(\mathcal{P}, \leq_{\mathcal{P}})$，其中集合 $\mathcal{P}$是 Υ中各集合的不交并，即 $\mathcal{P} = \sqcup_{s\in\mathcal{S}}\mathcal{P}_s$; 对于 $x \in \mathcal{P}_s$、$y \in \mathcal{P}_t$，如果以下任一条件成立，则有 $x \leq y$： $s < t$ 属于 $\mathcal{S}$，或者 $s = t$ 属于 $\mathcal{S}$ 且 $x \leq y$ 属于 $\mathcal{P}_s$。

这一构造的两个特殊情形是:

1. 当 $\mathcal{S}$是反链时，这就是不交和，记作 $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \ldots + \mathcal{P}_{|\mathcal{S}|}$； 以及
2. 当 $\mathcal{S}$是链时，这就是序数和，记作 $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_{|\mathcal{S}|}$。

注 2.13. 不交和与序数和有时也称为串行和并行运算，尤其是在计算线性扩张的情境中。

注 2.14. 注意，如果 $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^{k}$ 是偏序集 $\mathcal{P}$ 的一个模划分，那么 $\mathcal{P}$ 可以构造为一个字典序和

$$\mathcal{P} = \oplus_{\mathcal{P}/\mathcal{M}}\Upsilon, \qquad \textit{where} \qquad \Upsilon = \{\mathcal{P}|_{M_i}\}_{v_i\in\mathcal{P}/\mathcal{M}}.$$

任何仅通过不交和与序数和构造的偏序集都称为串并偏序集，它们等价于 N-自由偏序集。利用下面的公式，可以轻松计算串并偏序集的线性扩张数量。

引理 2.15。 *[Sta11，例 3.5。4]* 对于任意两个偏序集 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$， 我们有

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) = \mathrm{LE}(\mathcal{P}) \cdot \mathrm{LE}(\mathcal{Q}) \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{LE}(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) = \binom{|\mathcal{P}| + |\mathcal{Q}|}{|\mathcal{P}|} \cdot \mathrm{LE}(\mathcal{P}) \cdot \mathrm{LE}(\mathcal{Q}).$$

3 三种特殊情形下线性扩张的计数：项链、树和路径

我们的主要结果给出了这样一类偏序集的线性扩张数量的封闭公式：它们具有一个模划分，且其骨架图具有特定结构。首先，我们考虑一个简单的结果，以展示我们的方法。

例 3.1. 设 $\mathcal{P}$ 是一个偏序集，$\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ 是不可比图 $\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}$ 的一个模划分，其骨架是星图（见图 *2*），则

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P}) = \binom{|\mathcal{P}|}{|M_1|} \prod_{s=1}^{n} \mathrm{LE}(M_s).$$

这里的结果由引理 *2.15* 得出，并注意到 $\mathcal{P} = M_1 + (\bigoplus_{i=2}^{n} M_i)$。注意，这是一个串并偏序集的例子。

本节将介绍主要结果定理 4.6 的三个重要推论，采用与上文例 3.1 类似的方法。每种情形分别对应于不可比图的一个模划分的骨架图具有以下结构：路径、由 3-团构成的项链，以及满二叉树。图 3 展示了每种情形的一个例子。

我们先讨论骨架为路径的情形。

定理 3.2。 设 $\mathcal{P}$为一个偏序集，$\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$ 为$\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}$的一个模划分，其中骨架图 $\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}/\mathcal{M}$ 是一条路径，使得 M_i 与 M_{i+1} 相连，$\forall i = 1, \ldots, N-1$，见图 *3A*。那么

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P}) = \prod_{s=1}^{N} \mathrm{LE}(M_s) \sum_{\substack{0 \le i_x \le m_x \\ x=1,\ldots,N-1}} \prod_{d=0}^{N} \binom{m_d - i_d + i_{d+1} - 1}{m_d - i_d}$$

其中 $m_k = |M_k|$ 且 $i_N = m_N$。

接下来讨论骨架为团的项链的情形。首先沿用 [BLMSW10]的术语定义项链。

定义 3.3。 n-团 是一个无向完全图，而项链是通过粘合一列团$(c_1, c_2, ..., c_n)$得到的无向图：对于 $1 \le i < n$，将 c_i 的一个顶点与 c_{i+1} 的一个顶点粘合，其中 c_{i-1} 和 c_{i+1} 粘合到 c_i的不同顶点上。3-项链 是所有团均为3-团的项链。

定理 3.4。 设 $\mathcal{P}$为偏序集，$\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_{2D+1}\}$ 为$\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}$的模划分，其中骨架图$\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}/\mathcal{M}$ 是由 *3*-团组成的项链，见图 *3B*。将各个模编号，使团在奇数编号的模上相连。则

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P}) = \prod_{s=1}^{2D+1} \mathrm{LE}(M_s) \sum_{\substack{0 \le i_x \le m_x \\ x=1,3,\ldots,2D-1}} \prod_{d=1}^{D-1} \binom{m_{2d} + m_{2d-1} + i_{2d+1} - i_{2d-1} - 1}{m_{2d-1} - i_{2d-1}} \binom{m_{2d} + i_{2d+1}}{m_{2d}}$$

其中 $m_k = |M_k|$ 和 $i_{2D+1} = m_{2D+1}$。

注 3.5。 注意，如果一个不可比图存在一种模划分，其骨架是项链且每个团的大小至少为3，那么它也存在一种模划分，其骨架是3-项链。事实上，给定一个团的项链$(c_1, \ldots, c_k)$，对于任意一个团 c_i，我们可以将 $|c_i| - 2$

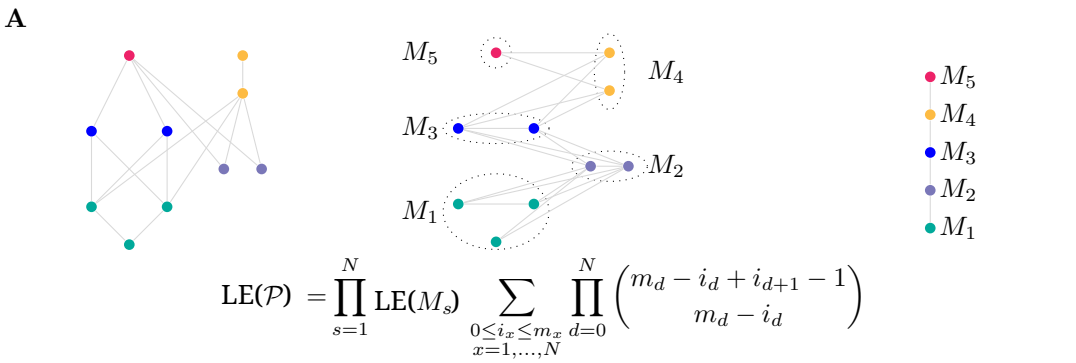

图 3：**主要结果的示例**。**A：**路径，**B：**项链和**C：**二叉树。对每个示例：左侧：偏序集 $\mathcal{P}$，中间：带有模划分的不可比图 $\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}$，右侧：模划分的骨架图，下方：线性扩张数量的公式。

将模合并，对应于项链上的“非粘合顶点”。由此得到一个更粗的划分，其骨架图是一个3项链。根据引理 *4.2*，以原始模来计数这些粗化模的模划分很直接，因为它们对应于可比图中的独立集。因此，将团的大小限制为三并非实质性限制。

最后，我们考虑骨架为满二叉树的情形。

定义 3.6。 满二叉树是一种有根树，其中每个节点要么有2 个子节点，要么没有子节点。从根到某个节点的路径距离称为该节点的深度，所有节点中的最大深度称为树的总深度。

定理 3.7。 设 $\mathcal{P}$是一个偏序集， $\mathcal{M}=\{M_1,M_2,\ldots,M_{2D+1}\}$是IG$_{\mathcal{P}}$的一个模划分，其中骨架图IG$_{\mathcal{P}}/\mathcal{M}$ 是一棵总深度为 D的满二叉树，见图 *3C*。对各个模编号，使得偶数编号的模为叶节点，最后一个模 M_{2D+1} 也为叶节点，并且模 M_{2d} 和 M_{2d+1} 在树中的深度为 d 。那么

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P})=\prod_{s=1}^{2D+1}\mathrm{LE}(M_s)\sum_{\substack{0\le i_x\le m_x\\ x=1,3,\ldots,2D-1}}\prod_{d=1}^{D-1}\binom{m_{2d}+m_{2d-1}+i_{2d+1}-i_{2d-1}-1}{m_{2d-1}-i_{2d-1}}$$

其中 $m_k=|M_k|$ 和 $i_{2D+1}=m_{2D+1}$。

注 3.8。 在 *[HM87]* 中， $\mathcal{P}$ 的分解直径 定义为素模划分中最大模的大小，这也称为模宽。以上偏序集的分解直径均有界，因此存在多项式时间算法，可用于计算线性扩张的数量 *[HM87，命题 3.4]*。我们扩展了 *[HM87]* 的工作，为作为字典序和 $\oplus_{\mathcal{S}}\Upsilon$的偏序集提供线性扩张数量的闭式公式，其中 Υ 是路径、*3*-项链或树；或者，如下一节所示，当 Υ 局部呈路径、*3*-项链或树的结构时也是如此。

4 通过不可比图的模划分计数线性扩张

4.1 主要结果与证明

本节基于不可比图骨架的结构证明主要结果。直观地说，这种结构可以看作局部呈现为由 3-团构成的项链、树或路径。因此，第 3 节的所有结果均可由此结果推出。我们通过将问题化约为计算各个模的线性扩张数量及其相互作用来实现这一点。以下定义和引理将引入使这一点精确化所需的要素。

定义 4.1。 设 $\mathcal{P}$ 是偏序集 $\mathcal{P}$ 的一个模划分。定义 $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ 为将 $\mathcal{P}$ 的每个模替换为一条链后得到的偏序集。也就是说

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}}:=\oplus_{\mathcal{P}/\mathcal{M}}\Upsilon\qquad where\qquad \Upsilon=\{\mathbf{m_i}\}_{v_i\in\mathcal{P}/\mathcal{M}}\qquad and\qquad m_i=|M_i|.$$

一个 $\mathcal{M}$-线性扩张 $\mathcal{P}$ 是一个保序双射 $\ell_{\mathcal{M}}:\mathcal{P}\to\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$，对于所有 i ，它都将模 M_i 映射到全序模 $\mathbf{m_i}$。特别注意，如果 $\mathcal{M}$ 是由所有 $\mathcal{P}$ 构成的平凡划分，那么这就回归到 $\mathcal{P}$ 的线性扩张定义。

以下引理使我们能够利用模划分分解线性扩张数量的计算。这类似于 [HM87，命题 3.4] 证明中的一个公式。

引理 4.2。 如果 $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^k$ 是偏序集 $\mathcal{P}$的一个模划分，那么

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P}) = \mathrm{LE}(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}) \cdot \prod_{i=1}^{k} \mathrm{LE}(M_i).$$

证明。 注意，任意线性扩张 $\ell : \mathcal{P} \to \mathbf{n}$都可以分解为一个 $\mathcal{M}$-线性扩张，后接 $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ 的一个线性扩张。公式中的每个因子都对应于划分各阶段所作的独立选择。 □

由于我们的结果基于不可比图的结构，我们回顾以下已知结果：

引理 4.3。 *[EHS89]* 如果两个偏序集 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 具有相同的不可比图，那么 $\mathrm{LE}(\mathcal{P})$ =$\mathrm{LE}(\mathcal{Q})$。

注意，上述结果最初是用可比图来表述的；但由于可比图和不可比图互为图补，因此可以用其中任一种图来表述。

此外，回顾一下，可比图的模划分不一定是偏序集的模划分，见第 4.2 节。然而，如果该模划分的商图是某个偏序集的可比图，那么根据引理 4.3，总可以构造一个具有相同可比图、因而线性扩张数量也相同的新偏序集。下面的引理将对此给出明确说明。

引理 4.4。 设（$\mathcal{P}, \leq$）是一个偏序集，且 $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_k\}$ 是$\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}$ 的一个模划分。若$\mathrm{CG}_{\mathcal{P}}/\mathcal{M}$可传递定向，则存在一个偏序集（$\mathcal{P}, \sqsubseteq$），其不可比图与（$\mathcal{P}, \leq$）相同，并且 $\mathcal{M}$ 是一个偏序集划分，且各模的顺序是（$\mathcal{P}/\mathcal{M}, \sqsubseteq$）的一个线性扩张；也就是说，若 $i < j$，则 $M_i \sqsubseteq M_j$。

证明。 设 $\mathcal{Q} = \mathsf{CG}_{\mathcal{P}}/\mathcal{M}$，我们可以对 $\mathcal{Q}$ 中的边定向，使得 $M_i \to M_j$ 当且仅当 $i < j$。由于 $\mathcal{M}$ 是一个传递定向， $\mathcal{Q}$ 是一个偏序集。令 $(\mathcal{P},\ \sqsubseteq) = \oplus_{\mathcal{Q}}\{(M_i,\ \leq)\}_{M_i \in \mathcal{M}}$。注意，由构造可知，各模的顺序是 $\mathcal{Q}$ 的一个线性扩张，因此，根据字典序和的定义，每个 M_i 都是一个偏序集模。 □

我们主要证明的底层论证与 [HM87, 命题 3.4], 中使用的方法类似，该文证明了可以在多项式时间内计算分解直径有界的偏序集的线性扩张数量。我们采用这一方法为某些偏序集给出公式。由于我们的证明是构造性的，因此我们可以得到所有线性扩张的集合，而不仅仅是其数量。直观地说，给定一个偏序集和一个线性扩张 ℓ: $\mathcal{P} \to [n]$，可以将 $[n]$ 细分为连续区间。为了计算 LE($\mathcal{P}$)，我们首先确定所有与 $\mathcal{P}$的结构相容的 $[n]$ 容许分划，然后针对每一种可能的划分，计算所得子区间上的局部线性扩张数量。我们通过枢轴的概念将这一过程形式化，并在下文给出定义。

定义 4.5 (枢轴定义**)**。 设 $\mathcal{P}$ 是一个偏序集， $\mathcal{M} = \{M_r\}_{r=1}^k$ 是 $\mathcal{P}$的一个模划分，其中各个模的编号构成 $\mathcal{P}/\mathcal{M}$的一个线性扩张；也就是说，若 $\mathcal{M}_s > \mathcal{M}_r$，则 $s > r$。设 $\ell : \mathcal{P}_{\mathcal{M}} \to [n]$ 是一个线性扩张。对于每个 $1 \leq r \leq k$，我们定义 r 阶枢轴元素，记作 e_r，它是 M_r中的最大元素，并满足对于所有 $s > r$， $\ell(e_r) < \ell(M_s)$ 在 $[n]$ 中。若不存在这样的元素 $e_r = \emptyset$。我们称 M_r^{first} 为 M_r 中在 M_r里小于或等于枢轴的元素，并称 M_r^{last}为大于枢轴的元素，即

$$M_r^{first} = \{x \in M_r \,|\, x \leq e_r\} \qquad and \qquad M_r^{last} = \{x \in M_r \,|\, x > e_r\}.$$

现在，我们已具备陈述主要结果所需的全部要素。

定理 4.6. 设 $\mathcal{P}$ 为一个偏序集，$\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_{2D+1}\}$ 为不可比图 $\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}$ 的一个模划分。分解中可能不存在某些偶模；为简化划分结构的索引，稍作滥用记号，将这类模视为空模。若骨架图 $\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}/\mathcal{M}$ 满足以下条件：

- 在 M_{2k-1} 和 M_{2k+1} 之间有一条边；
- 如果 M_{2k} 非空，则在 M_{2k-1} 和 M_{2k} 之间有一条边；
- M_{2k} 和 M_{2k+1} 之间可能有边，也可能没有边；
- 没有其他边。

Then

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P}) = \prod_{s=1}^{2D+1} \mathrm{LE}(M_s) \sum_{(i_1, i_3, \ldots, i_{2D-1})} \prod_{d=1}^{D-1} \binom{m_{2d} + m_{2d-1} + i_{2d+1} - i_{2d-1} - 1}{m_{2d-1} - i_{2d-1}} \Phi_{2d}$$

其中 $m_k = |M_k|$，求和遍历所有可能的枢轴元组，即

$$0 \le i_{2d-1} \le m_{2d-1} \text{ for } 1 \le d < D \qquad \text{and} \qquad i_{2D+1} = m_{2D+1},$$

and

$$\Phi_{2d} = \begin{cases} \binom{m_{2d} + i_{2d+1}}{m_{2d}} & \text{if } M_{2d} \neq \emptyset \text{ and } M_{2d} \text{ and } M_{2d+1} \text{ are incomparable,} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在公式中，我们采用约定 $\binom{-1}{0} = 1$ 和 $\binom{n-1}{n} = 0$ 表示 $n > 0$。

证明。注意，按照各模的顺序对可比图 $\mathrm{CG}_{\mathcal{P}}/\mathcal{M}$ 的骨架定向（即当 $i < j$ 时 $M_i \to M_j$），得到的是一个传递定向。为证明这一点，我们说明，对于 $\mathrm{CG}_{\mathcal{P}}/\mathcal{M}$ 中的任意路径 $M_i \to M_j \to M_k$，必有 $k > i+2$，因此 M_i 与 M_k 可比较，故 $M_i \to M_k$。要看出 $k > i+2$，注意到不可能同时有 $j = i+1$ 和 $k = i+2$，因为 M_{2k-1} 始终与 M_{2k} 不可比（若其存在，即非空）；因此，若 i 为奇数，则不可能有 $j = i+1$；若 i 为偶数，则 $i+1$ 和 $i+2$ 必须不可比；若 M_{2k} 为空，则 $k > i+2$ 显然成立。

因此，根据引理 4.4，若 $\mathcal{M}$ 不是偏序集划分，或者各模的顺序不是 $\mathcal{P}$ 的线性扩张，我们可以构造一个新的偏序集 $(\mathcal{P}, \sqsubseteq)$，使这些条件成立，且其不可比图保持不变，因此根据引理 4.3，其线性扩张数也相同。所以，我们将计算 $(\mathcal{P}, \sqsubseteq)$ 的线性扩张数，以得到所需结果。根据引理 4.2，只需证明 $\mathrm{LE}(\mathcal{P}_{\mathcal{M}})$ 由乘积的第二部分给出。因此，为便于阅读，在证明余下部分中，我们假设 $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = \mathcal{P}$。

证明思路如下。首先，我们证明给定偏序集的结构以及一个线性扩张 ℓ，可以利用奇数模的枢轴将偏序集 $[n]$ 划分为连续区间 $I_0 < I_2 < \cdots < I_{2D}$。为了计算 $\mathrm{LE}(\mathcal{P})$，我们确定每个奇数模的所有可能枢轴。对于一组固定但任意选取的枢轴，我们计算 ℓ 的所有可能局部线性扩张

$$\ell|_{2d} : l^{-1}(I_{2d}) \to I_{2d}$$

，记为 $\mathrm{LE}(\mathcal{P}_{2d})$。于是 $\mathrm{LE}(\mathcal{P})$ 为

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P}) = \sum_{\text{possible pivots}} \prod_{d} \mathrm{LE}(\mathcal{P}_{2d}).$$

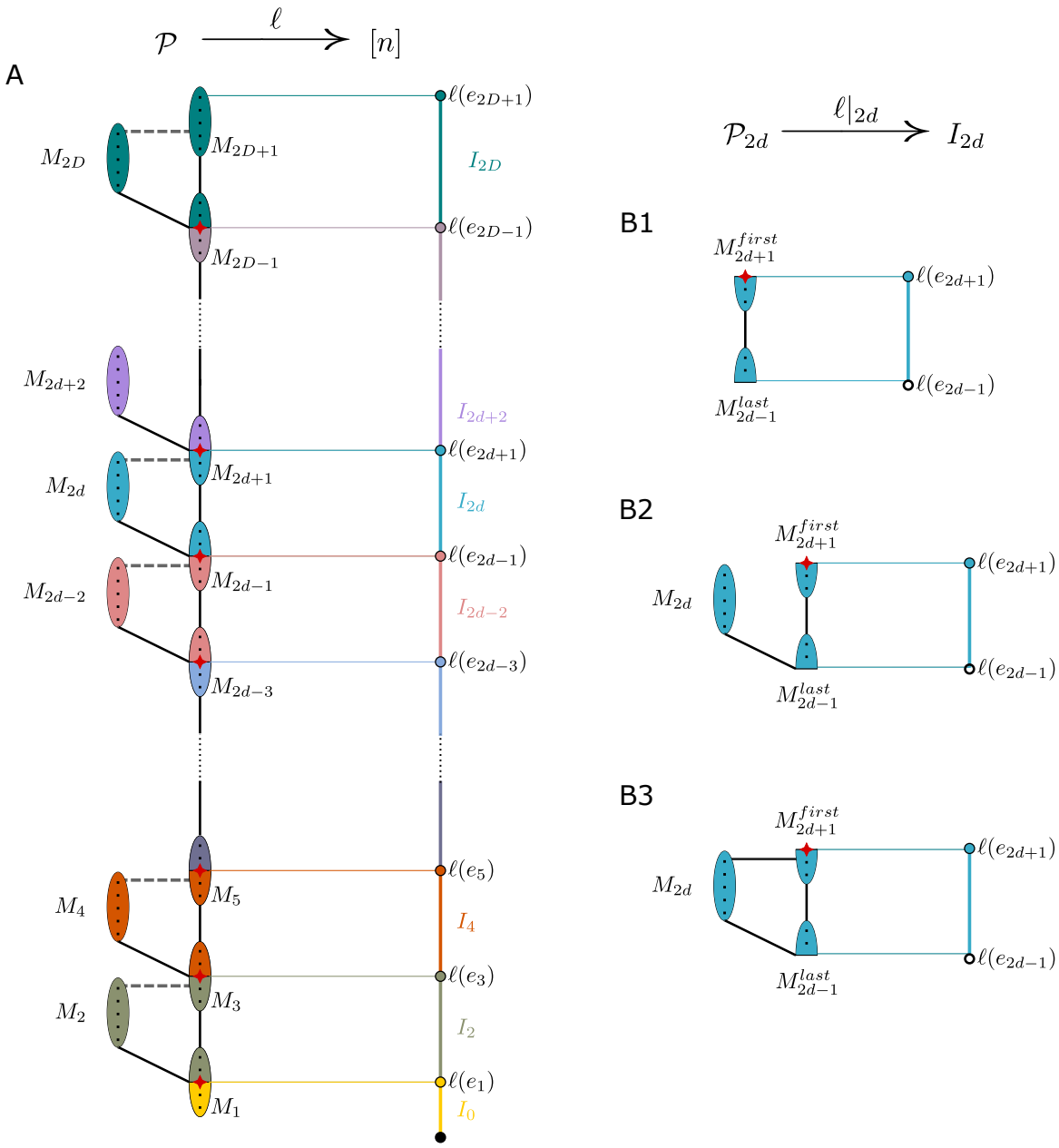

图4：**A：** 偏序集的不可比图及线性扩张。灰色虚线表示可能属于也可能不属于不可比图的边。所有奇数模都非空，而偶模可以为空。奇数模中的红色星号表示枢轴，它们将 $[n]$ 分解为区间。**B：** 偏序集 $\mathcal{P}_{2d}$的可能结构。

我们首先确定 $[n]$ 的子区间划分。令 $\ell\colon \mathcal{P} \to [n]$ 为任意一个线性扩张。根据不可比图的结构、枢轴的定义，以及模的排序是可比图骨架的一个线性扩张这一事实，可得对于所有 $k > 2d-1$, $M_{2d-1}^{first} < M_k$。因此,

$$\ell^{-1}([1, e_{2d+1}]) = M_{2d+1}^{first} \cup \bigcup_{k=1}^{2d} M_k,$$

and

$$\ell(e_{2d+1}) = i_{2d+1} + \sum_{k=1}^{2d} m_k. \tag{1}$$

因此，奇数模的枢轴将偏序集 $[n]$ 划分为连续子区间

$$I_0 = [1, \ell(e1)], \qquad I_2 = (\ell(e_1), \ell(e_3)], \qquad \dots$$
$$I_{2D-2} = (\ell(e_{2D-3}), \ell(e_{2D-1})], \qquad I_{2D} = (\ell(e_{2D-1}), \ell(e_{2D+1})] = (\ell(e_{2D-1}), n],$$

对于哪些

$$\mathcal{P}_0 := \ell^{-1}(I_0) = M_1^{first},$$
$$\mathcal{P}_{2d} := \ell^{-1}(I_{2d}) = M_{2d-1}^{last} \cup M_{2d} \cup M_{2d+1}^{first} \text{ for any } d \geq 1.$$

图4展示了这一分解的示意图。特别要注意，这些区间中的元素数量为

$$|I_{2d}| = \ell(e_{2d+1}) - \ell(e_{2d-1}) = i_{2d+1} + \sum_{k=1}^{2d} m_k - i_{2d-1} + \sum_{k=1}^{2d-2} m_k = i_{2d+1} + m_{2d} + m_{2d-1} - i_{2d-1}. \tag{2}$$

给定一组固定但任意选取的枢轴，我们现在统计局部线性扩张 $l_{2d}\colon \mathcal{P}_{2d} \to I_{2d}$。对于 $d = 1$，我们有

$$\ell_0 : M_1^{first} \to I_0.$$

由于 M_1 是全序的，因此这个偏序集映射只有一种选择。对于 $d > 1$，我们统计 e 可能的 线性扩张

$$\ell|_{I_{2d}} : \mathcal{P}_{2d} = M_{2d-1}^{last} \cup M_{2d} \cup M_{2d+1}^{first} \to I_{2d},$$

分为两种不同的情况。

第一种情况下， M_{2d} 为空，或者 M_{2d} 不为空且 M_{2d} 和 M_{2d+1} 是可比较的，分别对应于链或树的局部结构（见图4 B1和B2）。由于所有模都按线性顺序排列，并且 $M_{2d} < M_{2d+1}$ 如果 $M_{2d} \neq \emptyset$, 那么一旦确定了 M_{2d-1}^{last} 中各元素的像， $\ell|_{2d}$ 就完全确定了。如果 $I_{2d} \neq \emptyset$，那么根据枢轴的定义， M_{2d-1}^{last} 中的元素不能映射到其第一个元素。因此，由(2)可得

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P}_{2d}) = \binom{|I_{2d}| - 1}{|M_{2d-1}^{last}|} = \binom{i_{2d+1} + m_{2d} + m_{2d-1} - i_{2d-1} - 1}{m_{2d-1} - i_{2d-1}}.$$

如果 $I_{2d} = \emptyset$，则其局部线性扩张没有可选项。这与上面的公式一致，因为根据 (2)，在这种情况下我们有： $m_{2d} = 0$、 $m_{2d-1} = i_{2d-1}$ 和 $i_{2d+1} = 0$。因此，得到的系数为 $\binom{-1}{0} = 1$。

在第二种情况下， M_{2d} 非空，且 M_{2d} 和 M_{2d+1} 不可比，在局部上对应于项链结构（见图 4B3）。由于所有模都按线性顺序排列，一旦确定了 M_{2d-1}^{last} 和 M_{2d} 中元素的像， $\ell|_{2d}$ 就完全确定了。和之前一样，第一个元素 I_{2d} 不能是 M_{2d-1}^{last} 中某个元素的映射目标。因此，根据 (2)

$$\begin{aligned}\mathrm{LE}(\mathcal{P}_{2d}) &= \binom{|I_{2d}|-1}{|M_{2d-1}^{last}|}\binom{|I_{2d}|-|M_{2d-1}^{last}|}{|M_{2d}|} \\ &= \binom{i_{2d+1}+m_{2d}+m_{2d-1}-i_{2d-1}-1}{m_{2d-1}-i_{2d-1}}\binom{i_{2d+1}+m_{2d}}{m_{2d}}.\end{aligned}$$

我们通过确定奇数模的枢轴可能取值来完成证明。根据定义，只有最后一个模中的最后一个元素可以作为枢轴；对于任意 $d<D$， M_{2d-1} 中的任何元素都可以作为枢轴，因为 M_{2d-1} 和 M_{2d+1} 不可比较，并且每当 $M_{2d}\neq\emptyset$ 时， M_{2d-1} 和 M_{2d} 也不可比较。因此，所有可能的奇数枢轴指标为

$$0\le i_{2d-1}\le m_{2d-1} \text{ for } 1\le i<D \qquad \text{and} \qquad i_{2D-1}=m_{2D-1}.$$

然而， $m_{2d}=0$ 和 $i_{2d-1}=i_{2d+1}=0$ 不可能同时成立。我们用反证法证明这一点。假设它成立。由于 $i_{2d-1}=0$ 和 $m_{2d}=0$，存在一个 $y\in M_{2d+1}$，使得 $\ell(y)<\ell(M_{2d-1})$。类似地，由于 $i_{2d+1}=0$，存在一个元素 $z\in M_{2d+2}\cup M_{2d+3}$，使得 $\ell(z)<\ell(M_{2d+1})$。因此我们有 $\ell(z)<\ell(y)<\ell(M_{2d-1})$，但这是不可能的，因为 $\ell(M_{2d-1})<\ell(M_{2d+2}\cup M_{2d+3})$。然而请注意，若 $m_{2d}=0$ 和 $i_{2d-1}=i_{2d+1}=0$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{LE}(\mathcal{P}_{2d}) &= \binom{0+0+m_{2d-1}-0-1}{m_{2d-1}} \\ &= \binom{m_{2d-1}-1}{m_{2d-1}}=0,\end{aligned}$$

从求和中消去对枢轴的这一选择。另一方面， $m_{2d}>0$和 $i_{2d-1}=i_{2d+1}=0$也可能成立。

□

定理 3.4、定理 3.7 和定理 3.2 的证明可由定理 4.6 立即推出。项链（定理 3.4）对应于 Φ_{2d} 始终为顶层情形，因为对于所有的 d， M_{2d}和 M_{2d+1} 都是非空且不可比的。树（定理 3.7）对应于 M_{2d} 和 M_{2d+1}始终非空且可比较的情形，因此我们总有 $\Phi_{2d}=1$。对于定理 3.2，我们令所有偶数下标的模都为空（$M_{2d}=\emptyset,\ \forall d$），并将奇数下标的模重新编号为从 $2d-1$ 到 d。事实上，我们可以将定理 4.6 理解为要求骨架图在局部上是项链、树或路径，因此它比第 3 节中的三个结果更一般。

4.2 不可比图的划分何时不是偏序集划分

回顾一下，不可比图的划分也是可比图的划分，反之亦然。此外，偏序集的每个模划分都会导出这两个图各自的模划分；然而，反过来一般并不成立。事实上，当两个模中的元素以“不一致”的方式彼此可比较时，逆命题便不成立。我们将在下文对此作出精确定义。

定义 4.7。考虑一个偏序集 $\mathcal{P}$，以及其可比图 $\mathrm{CG}(\mathcal{P})$ 的一个模划分 $\mathcal{M}=\{M_1,\dots,M_k\}$。如果存在两个不同的模 M_i、 M_j 和 x、 $y\in M_i$、 a、 $b\in M_j$，使得 $x<a$ 和 $y>b$，则划分 $\mathcal{M}$ 不是偏序集划分。注意，$x=y$ 或 $a=b$ 也有可能成立。

我们称这两个模为不可一致比较的，记作 $M_i \leftrightarrow M_j$；并称模 M_i 和 M_j 为不一致的。如果两个模可比较（无论一致还是不一致），我们记作 $M_i - M_j$；如果它们不可比，则记作 $M_i \parallel M_j$。

由于我们的结果是针对不可比图的模划分而非偏序集本身表述的，因此更具一般性。然而，满足定理 4.6 条件的不可比图模划分几乎总是同时也是偏序集的模划分。唯一的例外来自划分中最后两个模的结构。我们将在下面的推论中对此进行详细说明

推论 4.8。设 $\mathcal{P}$ 为一个偏序集，$\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_{2D+1}\}$ 为不可比图 $\mathrm{IG}_{\mathcal{P}}$ 的一个模划分，并且满足定理 *4.6* 的条件。则以下至少有一项成立：

1. $\mathcal{M}$ 是偏序集的模划分，或者
2. $\{M_1, M_2, \ldots, M_{2D-1}, M_{2D} \cup M_{2D+1}\}$ 是偏序集的模划分，或者
3. $D = 2$ 和 $\{M_1 \cup M_2 \cup M_4 \cup M_5, M_3\}$ 是一个偏序集的模划分。

为了证明推论 4.8，我们先证明一个更一般的结果，下面的引理将对此有所帮助。

引理 4.9. 考虑一个偏序集 $\mathcal{P}$，其可比图 $\mathrm{CG}(\mathcal{P})$ 有一个模划分 $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_k\}$，但该划分不是偏序集的模划分。则有以下结论：

1. 如果 $M_1 \leftrightarrow M_2 < M_3$ 或 $M_1 \leftrightarrow M_2 > M_3$，则 $M_1 - M_3$。
2. *If* $M_1 \leftrightarrow M_2 - M_3 - M_4$. *Then either* $M_1 - M_3$ *or* $M_2 - M_4$.

证明. 两个断言都由传递性可得。要看出 (1) 的第一种情形，请注意必定存在 $x \in M_1$和 $a \in M_2$，使得 $x < a$，因此 $x < M_3$。第二种情形的证明类似。

要看出 (2) 成立，请注意，如果 $M_1 \parallel M_3$，那么 $\forall x \in M_2$ 要么

$$M_1 > x < M_3 \qquad \text{or} \qquad M_1 < x > M_3.$$

此外，由于 $M_1 \leftrightarrow M_2$，必然存在 x，$y \in M_2$，使得 $M_1 > x$ 且 $M_1 < y$。因此，存在一个 $a \in M_3$，使得 $x < a < y$。现在令 $b \in M_4$。注意，若 $b < a$，则 $b < y$；若 $a < b$，则 $x < b$。无论哪种情况，$M_2 - M_4$。

□

现在我们用这一点来证明下面这个更一般的命题。

命题 4.10。考虑一个偏序集 $\mathcal{P}$ 及其可比图 $\mathrm{CG}(\mathcal{P})$ 的一个模划分 $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_k\}$，且 $\mathcal{M}$ 不是偏序集划分。那么以下情况之一成立：

1. 存在一个更粗的模划分 $\widehat{\mathcal{M}} = \{M_1, \ldots, M_t\}$，其中 $1 < t < k$，且每个 M_i 都是 $\mathcal{M}$中一个或多个模的并；或者 2. 可比图$\mathrm{CG}(\mathcal{P})/\mathcal{M}$的骨架图中存在一个支配顶点，即存在一个与所有其他模都可比较的模。

证明。由于 $\mathcal{M}$ 不是偏序集的划分，因此存在彼此之间具有不一致可比性的模。证明的思路是将彼此之间具有不一致可比性的模合并为单个模，然后证明这构成偏序集的一个划分。之后，我们将证明，如果条件 2) 不成立，这个粗化划分就有多个模。

令 $\sim$ 为 $\{1,2,\ldots,k\}$ 上由不一致可比性生成的等价关系，即满足下述条件的最小等价关系

$$i \sim j \qquad \text{if} \qquad M_i \leftrightarrow M_j,$$

and 我们将 $K = \{1,\ldots,k\}/\sim$ 记为等价类的集合。我们定义一个粗化划分

$$\widehat{\mathcal{M}} := \{\widehat{M}_{[i]}\}_{[i]\in K}, \qquad \text{where} \qquad \widehat{M}_{[i]} = \bigcup_{x\in[i]} M_x.$$

首先，我们证明 $\mathcal{M}$ 是 CG($\mathcal{P}$) 的模划分。考虑 $x \in [i]$ 和 $y \notin [i]$，使得 $M_x - M_y$ 可比较。由于 x 和 y 不属于同一个等价类，因此 M_x和 M_y 必须是一致可比较的；不妨设 $M_x < M_y$。我们需要证明对所有 $z \in [i]$都有 $M_z - M_y$。根据定义，对于任意这样的 z，必然存在一条由不一致可比较的模组成的链

$$M_z \leftrightarrow M_{z_1} \leftrightarrow M_{z_2} \leftrightarrow M_{z_l} \leftrightarrow M_x < M_y.$$

根据引理 4.9(1)，可得 $M_{z_l} - M_y$；由于它们属于不同的等价类，因此它们$\widehat{\ }$必须是一致可比较的。重复应用这一论证，我们得到 $M_z - M_y$，从而 $M_{[i]}$ 是一个模。

如果 $\sim$ 生成了多个等价类，那么我们处于该断言的第 (1) 部分。另一方面，如果只有一个等价类，我们证明骨架图中存在一个支配顶点。这是以下断言的推论：

断言。 对于每个 $[i]$，都存在一个 $x \in [i]$，使得对于每个 $y \in [i]$，M_x 都与 M_y 可比较。也就是说，$\mathrm{CG}(\mathcal{P})/\mathcal{M}$中与 $[i]$ 对应的顶点所构成的顶点诱导子图，在该子图中有一个支配顶点。

证明。若 $|[i]| \le 2$，结论显然成立。假设该结论对 $|[i]| < k$ 成立，并令 $|[i]| = k$。

为导出矛盾，假设不存在这样的 $x \in [i]$，使得 M_x 与 $M_{[i]}$中的每个其他模$\widehat{\ }$都可比较。考虑可比图 CG($\mathcal{P}$)/$\mathcal{M}$的骨架中由 $[i]$的各个模所诱导的顶点诱导子图，即以 $[i]$中的元素为顶点构成的图。

从该子图中任选一个不是割点的顶点，也就是说，移除该顶点后子图仍然连通。将其记为 M_{a_1}。由于该图按构造没有自环且是连通的，这样的顶点存在 [W$^+$01，命题 1.2.29]。根据归纳假设，存在另一个顶点，记作 M_{a_3}，使得 M_{a_3} 与每个其他模都可比较。按构造，$\widehat{\ }$中应至少有一个模与 M_{a_1}的可比关系不一致；它必定不同于 M_{a_3}，否则 M_{a_3} 就与所有元素可比较。将其记为 M_{a_2}。最后，必定存在一个与 M_{a_2}不可比的模；否则 M_{a_2} 就与所有元素可比较。将这个模记为 M_{a_4}。因此，我们构造出了一条路径或一个环

$$M_{a_1} \leftrightarrow M_{a_2} - M_{a_3} - M_{a_4},$$

其中，M_{a_1} 和 M_{a_3} 不可比，M_{a_2} 和 M_{a_4} 不可比。然而，根据引理 4.9(2)，这是不可能的。因此，必定存在一个 $x \in [i]$，使得 M_x 与 $M_{[i]}$中的其他每个模$\widehat{\ }$都可比较。

□

因此，如果 $\sim$ 只有一个等价类，那么 $\mathcal{M}$ 中存在一个模，它与其他所有模都可比较。

□

推论 *4.8* 的证明。 考虑偏序集 $\mathcal{P}$ 以及不可比图的模划分 $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_{2D+1}\}$，因此它也是可比图的模划分。如果 $\mathcal{M}$是偏序集的模划分，那么条件 (1) 得到满足，证毕。

假设 $\mathcal{M}$ 不是偏序集模划分。那么根据引理 4.10，要么存在一个粗化模划分，要么骨架图 CG($\mathcal{P}$) /$\mathcal{M}$中存在一个支配顶点。这个支配顶点对应于不可比图 IG($\mathcal{P}$)/$\mathcal{M}$的骨架中的一个孤立顶点。然而，根据定理 4.6 的条件，骨架图 IG($\mathcal{P}$)/$\mathcal{M}$是连通的，因此不可能有孤立顶点。

因此，根据引理 4.10，如果 $\mathcal{M}$ 不是偏序集模划分，那么偏序集中就存在一个包含多个模的粗化模划分。然而，要得到粗化划分，只能将邻域相同的模合并。否则，粗化划分就不是模划分。如果 $D > 2$ ，那么在定理 4.6 的构造中，唯一满足这一条件的模是 M_{2D} 和 M_{2D+1}，它们都是 M_{2D-1}的邻点。将 M_{2D} 和 M_{2D+1}合并后，我们得到一个划分，它既不能再粗化，也没有孤立顶点位于其骨架的不可比图中，因此根据引理 4.10 的逆否命题，该划分是偏序集划分。如果 $D = 2$，那么 M_3 是 M_1, M_2, M_4, M_5的邻点，因此我们可以将它们合并起来$\widehat{\quad}$，得到 $\mathcal{M} = \{M_1 \cup M_2 \cup M_4 \cup M_5, M_3\}$；同样根据引理 4.10 的逆否命题， $\mathcal{M}$ 是偏序集划分。 □

5 线性扩张的应用

我们的主要结果回答了这样一个问题：一个偏序集有多少个线性扩张？在本节中，我们将以等价形式重新表述这一问题，并讨论视角的转变如何在数学和科学领域带来有趣的应用。

5.1 等价的计数问题

首先回顾一下，计数线性扩张的问题等价于计数满足某些约束的排列。

定义 5.1。 长度为 n （或 n-排列）的排列，是集合 $[n]$ 的一种排序。或者，也可以将一个 n-排列 $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$ 视为一个双射 π： $[n] \to [n]$，其中对于任意 $1 \le i \le n$，都有 $\pi(i) = \pi_i$。对于上面的 n-排列 π，如果 $i < j$，我们称 π_i 位于 π_j 的左侧（而 π_j 位于 π_i 的右侧）。最后，我们用 Σ_n 表示集合 $[n]$ 上的排列集合。

回顾一下， n-排列 π 的逆序是指一对不处于其“自然顺序”中的元素。更准确地说：

定义 5.2. 排列 $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n$ 中的逆序是一对 (π_i, π_j)，其中 $i < j$ 且 $\pi_i > \pi_j$. 逆序集 $I(\pi)$ 是 π中所有逆序组成的集合。

例 5.3. 考虑排列 $\pi = 13425$， π 中的逆序为$(3, 2)$ 和$(4, 2)$，因此 $I(\pi) = \{(3, 2)、(4, 2)\}$。

注 5.4. 偏序集 $\mathcal{P} = ([n], \le)$的一个线性扩张，例如 $\ell : [n] \to \mathbf{n}$，定义了一个排列$\pi_\ell := \ell(1)\ell(2)\ldots\ell(n)$。由于 ℓ 是一个线性扩张，若 (i, j) 是 π_ℓ的一个逆序，那么 i 和 j必定在 $\mathcal{P}$中不可比。因此，计算线性扩张的数量 $\mathrm{LE}(\mathcal{P})$ 等价于计算其逆序集为 $\mathcal{P}$中不可比元素对集合子集的 n-排列的数量，即

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P}) = |\{\pi \in \Sigma_n \,|\, I(\pi) \subseteq \{(i, j) \,|\, i, j \ \textit{incomparable in}\ \mathcal{P}\}\}|.$$

参见图*6AC*中的示例。

这种对计数问题的等价改述催生了多种应用。特别是，它用于估计计数线性扩张的复杂度 [BW91b, DP20]，也推动了算法方法的发展，使人们能够高效地均匀抽样线性扩张[PR94, Hub25]，并估计线性扩张的数量 [BGHP10]。此外，从另一个角度来看，线性扩张已被用于理解排列统计量 [BW91a]，以及计数排列模式及其相关变体 [EN12, Yak15, CK16]。

One 也可以在有向图的框架下重新表述这个计数问题。为此，我们回顾 ll
无环竞赛图 的概念，它是一种特殊的传递图。

定义 5.5 (竞赛图)。 竞赛图是指任意一对顶点之间恰有一条有向边的有向图。具有 n 个顶点的竞赛图称为 n-竞赛图。我们用 T_n 表示边集为 $i \to j$ （当且仅当 $i < j$）的传递的 n-竞赛图。示例见图*5*。

注 5.6。 竞赛图是传递的，当且仅当它是无环的。事实上，有些文献将传递竞赛图定义为无环竞赛图。此外，具有 n 个顶点的无环竞赛图也称为完全定向的 n-团、定向$(n-1)$-单形，或维度为 $n-1$ 的单形。

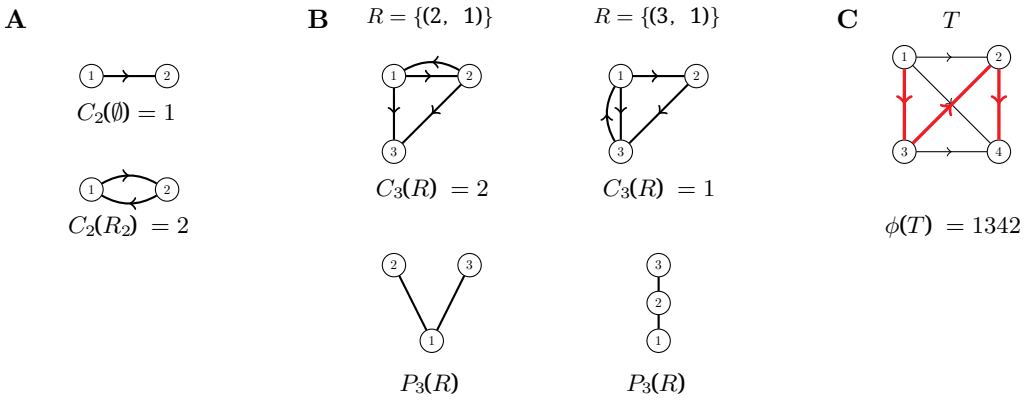

图5：**A：** 加入一条反向边后的传递竞赛图 T_2 和 T_2，以及其中各自的 C_2边诱导传递2-竞赛图数量。**B：** 加入两种不同反向边后的传递竞赛图 T_3，以及下方对应的值 $C_3(R)$和偏序集 $P_3(R)$。**C：** 穿过传递竞赛图 T 的哈密顿路径，以及对应的排列 $\phi(T)$。

竞赛图 T_n 恰好包含一个边诱导传递 n-竞赛图，以及$\binom{n}{k}$ 个边诱导 k-竞赛图，因为 T_n 中的每个边诱导 k-竞赛图都等价于 T_n的一个顶点诱导子图。然而，如果我们取一个具有双向连接的有向图，那么仅查看顶点，甚至仅查看顶点数量及其之间的边数，也不足以解决问题。示例见图5AB。

一个自然的问题是：给定传递竞赛图 T_n，并向其中添加一组 R 反向边 T_n，所得图中包含多少个由边诱导的传递 n 竞赛图？我们证明，这个问题等价于计算 $\mathbf{n}$ 的某个子偏序集的线性扩张数。我们先在有向图的背景下精确表述这个问题。

定义5.7。 我们用 $R_n = \{(i,j) \in [n] \times [n] \mid i > j\}$表示所有可以添加到 T_n 的反向边的集合。给定选定的一组反向边 $R \subseteq R_n$，我们定义 $A_n(R)$ 为顶点集为 $[n]$、边集为 $E(T_n) \cup R$ 的图，也就是说，该图由 T_n 添加这些边而得到

自 R。我们用 $C_n(G)$ 表示图 G 中由边诱导的传递的 n-竞赛图的数量；为方便起见，我们定义 $C_n(R) := C_n(A_n(R))$。

因此，我们要回答的问题可以表述如下：

Q问题 5.8. 给定 $n \in \mathbb{N}$ 和一组反向边 R，我们能否找到 $C_n(R)$ 的公式？

现在，我们定义一个用线性扩张来提出这个问题的偏序集。

定义 5.9. 给定 $n \in \mathbb{N}$ 和一组反向边 R，令 $\mathcal{P}_n(R) = ([n], \leq_{\mathcal{P}})$ 为由下列关系生成的偏序集：

$$i <_{\mathcal{P}} j \text{ if } i < j \text{ and } (j,i) \notin R.$$

示例见图 *5B*。注意，由一个关系生成的偏序集等价于取该关系的传递闭包。

命题 5.10. $\mathcal{P}_n(R)$ 的线性扩张数等于 $A_n(R)$ 中由边诱导的锦标赛数。也就是说

$$\mathrm{LE}(\mathcal{P}_n(R)) = C_n(R).$$

命题 5.10 的示例见图 6AB。为证明这一点，我们简要回顾以下图论结果。

引理/定义 5.11。 *[I^+16，定理 1.5。2]* 图 G 中的一条路径，若恰好经过每个顶点一次，便称为哈密顿路径。G 竞赛图有唯一的哈密顿路径，当且仅当该竞赛图是传递的。这定义了一个双射 ϕ

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Transitive tournaments} \\ \textit{with vertex set } [n] \end{array} \right\} & \to & \Sigma_n: \\ & T & \mapsto & \pi_T : [n] \to [n] \end{array}$$

其中 $\pi_T(1) \to \pi_T(2) \to \cdots \to \pi_T(n)$ 是 T的唯一哈密顿路径。示例见图 *5C*。

注意，ϕ 确实是一个双射，其逆映射 $\phi^{-1}(\pi)$ 是由边 (i, j) 构成的竞赛图，其中 π_i位于 π_j左侧。因此，传递竞赛图也可以等价地视为集合 $[n]$上的 n-排列或全序偏序集。此外，请注意，在这种等价关系下，T_n 分别对应于恒等排列 $\pi = 12\ldots n$ 和偏序集 $\mathbf{n}$。

命题 *5.10* 的证明。我们通过定义一个双射来证明这一点 ξ

$$\begin{array}{rccc} \xi: & \left\{ \begin{array}{c} T \subseteq A_n(R) \\ T \text{ is an edge induced transitive tournament} \end{array} \right\} & \to & \left\{ \begin{array}{c} \ell : \mathcal{P}_n(R) \to [n] \\ \ell \text{ is a linear extension} \end{array} \right\}: \\ & T & \mapsto & \xi(T) = \pi_T, \end{array}$$

其中，π_T 是引理 5.11 中定义的排列。

我们首先证明 π_T 是一个线性扩张：若 $i <_{\mathcal{P}} j$，则 T 中存在一条边 $i \to j$，因此 $\mathbf{n}$ 中有 $\pi_T(i) < \pi_T(j)$。为此，首先注意，若 $A_n(R)$ 中的两个顶点由一条单向边相连，则该边也必定属于 T。接着注意，若 $i <_{\mathcal{P}} j$，则有以下两种情况：$i < j$ 属于 $[n]$，且 $(j, i) \notin R$；或者 $i <_{\mathcal{P}} j$ 是由传递性生成的。第一种情况下，i 和 j 由单向边相连，因此 $i \to j$ 必定是 T 中的一条边。第二种情况下，$A_n(R)$ 中必定存在一条单向边链

$$i \to x_1 \to \ldots \to x_k \to j.$$

接着， $j \to i$ 不能属于 T，因为那会形成一个环，而 T 是无环的。因此， $i \to j$ 必须属于 T。这说明 $\xi(T)$ 是一个线性扩张。

为了证明 ξ 是双射，考虑这样一个函数：它将线性扩张 ℓ 映射到具有哈密顿路径 $\ell(1) \to \ell(2) \to \cdots \to \ell(n)$ 的竞赛图 T_ℓ。注意，如果 $i \to j$ 属于 T_ℓ，那么在 $\mathcal{P}_n(R)$ 中， $i <_{\mathcal{P}} j$ 或 i 与 j 不可比。无论哪种情况， $i \to j$ 都必须是 $A_n(R)$ 中的一条边。因此， $T_\ell \subseteq A_n(R)$，而这个函数定义了 ξ 的逆映射。□

注 5.12。请注意，等价地， $C_n(R)$ 可以计为逆序集包含于 R 的 n-排列的数量。此外， $C_n(R)$ 也可以通过计算由 $A_n(R)$ 的补图的传递闭包所定义的偏序集的线性扩张数量来求得，因为该偏序集是 $\mathcal{P}_n(R)$ 的对偶，因此具有相同的不可比图。

注 5.13。在 *[Sid91]* 中，他们引入了网络上流的概念（后来称为西德连科流 *[CP25]*），并证明偏序集 P 的哈斯图上的总流等于 P 的线性扩张数量。他们还引入了一个函数 μ，该函数在无向图的团上递归定义，使得不可比图 P 的 μ 等于 P 上的线性扩张数量。这是图的某种性质等价于计算偏序集线性扩张数量的另一个例子，但不同于此处探讨的性质。

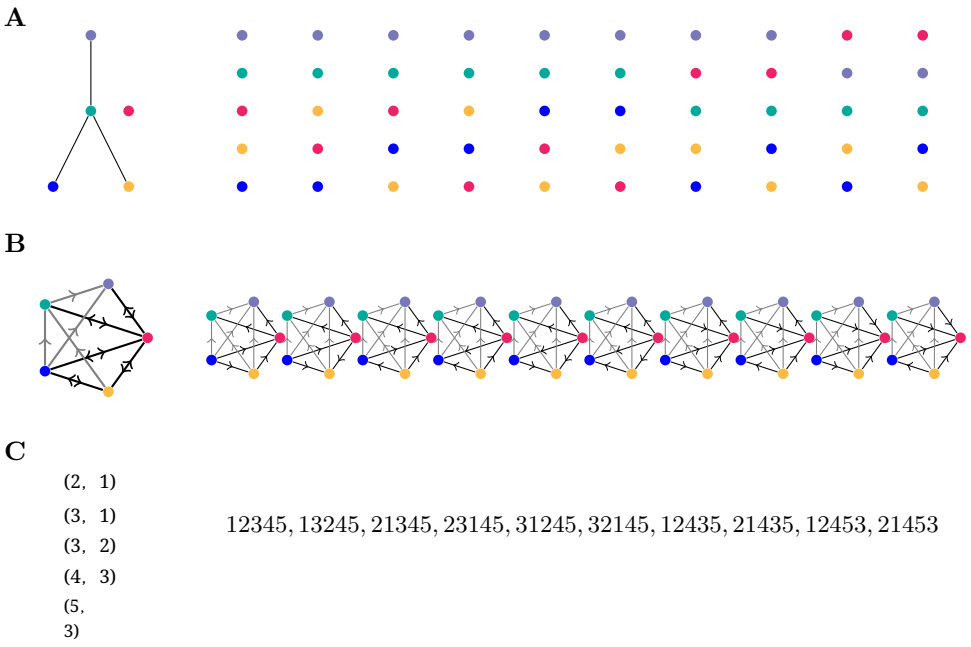

图6：令 $R = \{(2,\ 1)、(3,\ 1)、(3,\ 2)、(4,\ 3)、(5,\ 3)\}$。**A**：偏序集 $P_5(R)$ 及其所有线性扩张。**B**：有向图 $A_5(R)$ 以及其中包含的所有边诱导的传递性5-竞赛。**C**：集合 R 以及所有逆序集合为 R 子集的排列。各列表示顶行与中行之间的双射 ϕ，以及中行与底行之间的双射 ψ。

5.2 科学领域的应用

我们已经证明，对偏序集 $\mathbf{n}$ 的线性扩张进行计数，等价于对满足其逆序集具有特定限制的 n-排列进行计数，或者对传递的 n-竞赛图（或

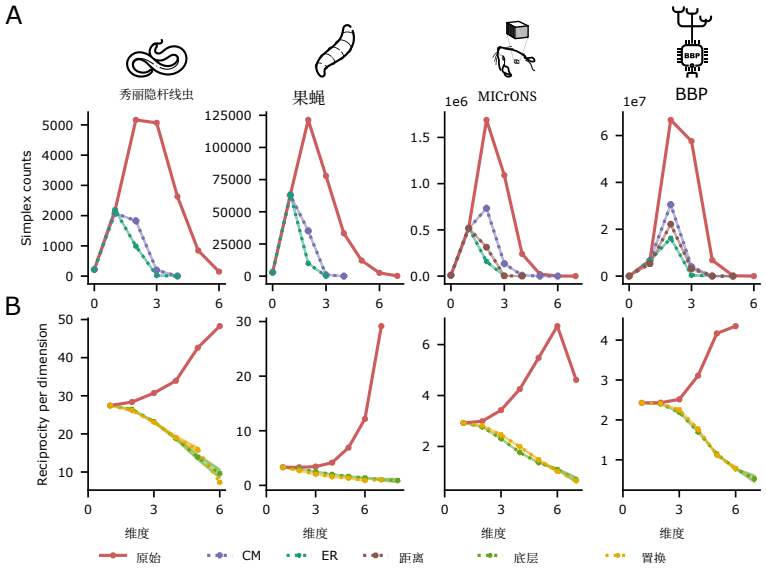

图7：**有向模体的过度表达 A：**细胞分辨率下多个网络各维度的单纯形计数：成熟的秀丽隐杆线虫、果蝇幼虫、小体积小鼠皮层连接的电子显微镜重建（MICrONS），以及小体积大鼠皮层连接的形态学细节计算机模拟模型。将这些计数与不同类型的相应随机对照进行比较：Erd˝os–R´enyi 模型、配置模型和距离依赖图；这些模型按照设计，在维度 0 和 1 上与原始网络的计数相匹配（即顶点数和边数相同）。**B：**各维度单纯形子图中的互惠连接百分比，并与仅改变连接方向性的对照组所呈现的同一曲线进行比较。对于两个面板，在各种对照组中，圆点表示该维度的均值，阴影区域表示均值标准误。经作者许可，转载自 [SPE+25]。

有向 n-单形）进行计数；这些有向图由在单个传递竞赛图（或有向 n-单形）中添加互反边构成。后者是科学领域中的一个关键问题，尤其是在神经科学中，因为网络的结构会塑造其功能。前者可以通过有向 n-单形的表达不足或过度来刻画。具体而言，在不同物种和不同尺度上，神经回路都具有高度组织性，而这种组织性可以通过（有向）单纯形计数来量化 [SGK+18、TAM19、SPCGB19、ATM20、SCS+21]。

更确切地说，在细胞尺度上，考虑由神经回路构建的有向图，其中顶点表示神经元；若神经元 a 到神经元 b 之间至少存在一条从 a到 b的突触连接，则两者之间有一条边。研究表明，这些网络是稀疏的，具有长尾度分布，并且互惠连接和有向单形的数量都显著偏多，尤其是在较高维度中 [TVA+13、SPCGB19、RBPC+24、SPE+25]。不同物种的示例见图7A。此外， [SPE+25] 表明，网络中互惠连接的位置并非随机，而是更倾向于位于单形内部，并且这种倾向会随单形维度的增加而增强，见图7B。此外， [BZESK+26]表明，互惠连接的位置在很大程度上促成了人类与啮齿动物网络连接性之间的结构差异。

How不过，鉴于添加互惠连接对有向.....数量的影响 d
n-单纯 .....，人们可能会怀疑，这种偏好是否仅仅是一种组合伪影。在 [SPE+25]

以及 [San21], 随机对照中，通过置换网络中互惠连接的位置，实证表明事实并非如此。然而，如何提供理论保证仍是一个问题。因此，一个自然的问题是：生物神经网络的高维结构有多大程度是由互惠连接及其位置所驱动的？ [UK24], 中探讨了一个相关问题：他们试图从具有相同底层无向网络的有向网络集合中，随机抽样出有向单形计数近似固定的网络。他们确实发现，对于某些架构而言，结构很大一部分可能源自互惠连接的位置。问题 5.8 探讨了这一问题最简单的版本：将底层图简化至最基本的形式，并将其设定为一个有向 n-单形，而非任意的有向无环图。

将这个问题转化到偏序集领域后可以看出，要通过解析方法回答该问题是 #P-完全的。然而，这种转化为均匀抽样这些结构提供了工具，从而有望更准确地数值近似各种预期及非预期行为。此外，我们的公式及相关研究成果可作为构造性方法或工程方法的构件，通过控制骨架和模块化组件的结构，生成具有特定全局结构和指定局部有向团计数的偏序集，进而生成网络。例如，假设我们需要一个由四个模块组成的有向图，这些模块按 4-环排列（见图8），且每个模块的大小和有向团数量均已指定。我们可以结合我们的公式与现有结果，生成每个模块中具有所需大小和线性扩张数量的偏序集，再利用这些偏序集对应的有向图来构造所需的图。

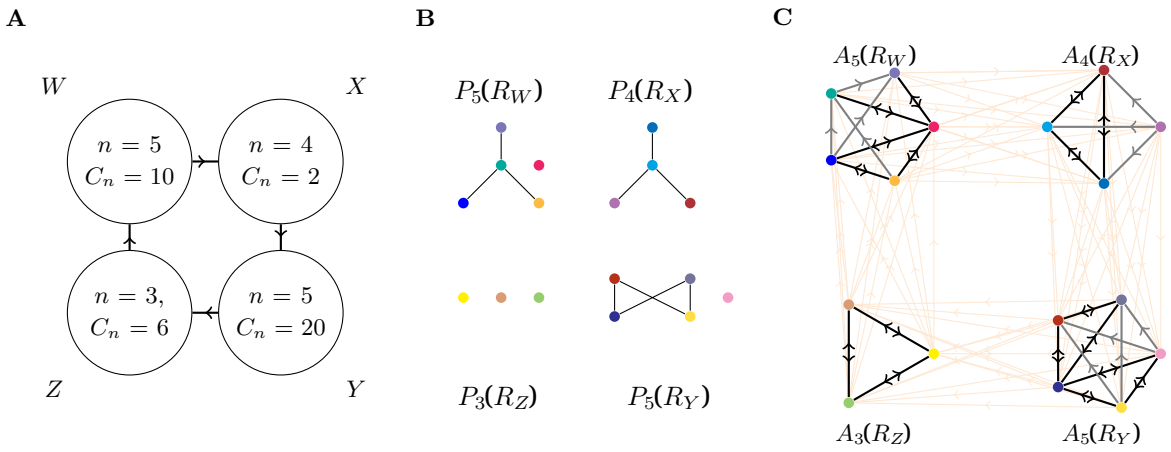

图8：如何构造一个有向图，使每个模内都有指定数量的有向团的示例。**A**：四个以环相连的模，其中顶点数为指定值（n），有向团数也为指定值（C_n）。**B**：四个偏序集，其线性扩张数等于**A**中相应模所需的有向团数。**C**：一个每个模内都有所需数量有向团的有向图；该图通过将每个模替换为**B**中相应偏序集对应的有向图构造而成。

致谢

作者感谢 Kathryn Hess 和 J¯anis Lazovskis 富有洞见的讨论。

参考文献

[Atk90] Mike D Atkinson。关于计算一棵树的线性扩张数量。Order，7(1)：23–25，1990。[ATM20] Miroslav Andjelkovi´c、Bosiljka Tadi´c 和 Roderick Melnik。人类连接组中与脑枢纽相关的高阶复形的拓扑学。《科学报告》，10(1)：17320，2020。[BGHP10] Jacqueline Banks、Scott Garrabrant、Mark L Huber 和 Anne Perizzolo。使用 TPA 计算线性扩张。arXiv 预印本 arXiv:1010.4981，2010。[BLMSW10] Francesco Belardo、Enzo M Li Marzi、Slobodan K Simi´c 和 Jianfeng Wang。关于项链的指标。《图与组合》，26(2)：163–172，2010。[Bri99] Graham Brightwell。偏序中的平衡对。《离散数学》，201(1- 3)：25–52，1999。[BW91a] Anders Bj¨orner 和 Michelle L Wachs。偏序集的排列统计量与线性扩张。《组合理论杂志A辑》，58(1)：85–114，1991。[BW91b] Graham Brightwell 和 Peter Winkler。计算线性扩张的数量。Order，8：225–242，1991。[BZESK+26] Natal´ı Barros-Zulaica、Daniela Egas Santander、Lida Kanari、Ying Shi、Rodrigo Perin、Maurizio Pezzoli、Ruth Benavides-Piccione、Javier DeFelipe、Christiaan de Kock、Idan Segev、Henry Markram 和 Michael W. Reimann。揭示人类连接组复杂性的基础：神经元形态的作用。准备中的手稿，2026。[CK16] Joshua Cooper 和 Anna Kirkpatrick。计算偏序集模式与排列模式的复杂性。《澳大拉西亚组合学杂志》，64(1)：154–165，2016。[CP25] Swee Hong Chan 和 Igor Pak。有限偏序集的线性扩张。《EMS数学科学综述》，2025。[CR95] Gavin R Cato 和 Douglas S Reeves。使用序图方法进行并行任务调度。载于《国际菲尼克斯计算机与通信会议论文集》，第 69–75 页。IEEE，1995。[Cra04] Jason Crampton。分析受约束工作流系统的代数方法。载于《第三届计算机安全基础研讨会论文集》，第 61–74 页，2004。[Die12] Reinhard Diestel。《图论》，第 4 版，《数学研究生教材》第 173 卷。施普林格，2012。[DP20] Sam Dittmer 和 Igor Pak。计算受限偏序集的线性扩张。《电子组合学杂志》，第 P4–48 页，2020。[DP23] Matthieu Dien 和 Frederic Peschanski。计算模偏序的线性扩张。载于《2023 年第 25 届国际科学计算符号与数值算法研讨会（SYNASC）》，第 60–67 页。IEEE，2023。

[EESBP+24] Andr´as Ecker、Daniela Egas Santander、Sirio Bola˜nos-Puchet、James B Isbister 和 Michael W Reimann。《皮层细胞集群及其底层连接性：一项计算机模拟研究》。PLOS Computational Biology，20(3):e1011891，2024。[EGKO19] Eduard Eiben、Robert Ganian、Kustaa Kangas 和 Sebastian Ordyniak。《计数线性扩张：基于树宽的参数化》。Algorithmica，81:1657–1683，2019。[EHS89] Paul Edelman、Takayuki Hibi 和 Richard P Stanley。《线性扩张的递推关系》。Order，6(1):15–18，1989。[EN12] Sergi Elizalde 和 Marc Noy。《排列中连续模式的簇、生成函数与渐近行为》。Advances in Applied Mathematics，49(3-5):351–374，2012。[GGMM21] Alexander Garver、Stefan Grosser、Jacob P Matherne 和 Alejandro Morales。《利用钩长行列式计数偏序集的线性扩张》。SIAM Journal on Discrete Mathematics，35(1):205–233，2021。[HM87] Michel Habib 和 Rolf H M¨ohring。《N-自由偏序集及分解直径有界偏序集的一些复杂性性质》。Discrete Mathematics，63(2-3):157–182，1987。[Hub25]Mark Huber。《用少量随机比特生成均匀线性扩张》。arXiv 预印本 arXiv:2506.14725，2025。[I+16] Tejas Iyer 等。《随机竞赛图》。荣誉学位论文，澳大利亚国立大学，2016。DOI：10.25911/5d9efbe9a04bc。[LS03] Dorte Lerche 和 Peter B Sørensen。《基于随机线性扩张评估偏序的排名概率》。Chemosphere，53(8):981–992，2003。[PR94] Gara Pruesse 和 Frank Ruskey。《快速生成线性扩张》。SIAM Journal on Computing，23(2):373–386，1994。[Pro14] Robert A Proctor。《d-完全偏序集将杨图推广至钩积公式：证明的部分陈述》。RIMS，1913:120–140，2014。[RBPC+24] Michael W Reimann、Sirio Bolan˜os-Puchet、Jean-Denis Courcol、Daniela Egas San- tander、Alexis Arnaudon、Benoˆıt Coste、Fabien Delalondre、Thomas Delemontex、Adrien Devresse、Hugo Dictus 等。《新皮层微观与中观回路的建模与模拟。第一部分：解剖结构》。eLife，13，2024。[San21] Matteo Santoro。《研究连接组模型中的基元》。硕士论文，洛桑联邦理工学院，2021。可从 https://raw.githubusercontent.com/matsantoro/counting_motifs/ main/master_thesis.pdf 获取。[Sch76] Arnold Sch¨onhage。《偏序的生成》。Ast´erisque，38(39):229–246，1976。[SCS+21] Dinghua Shi、Zhifeng Chen、Xiang Sun、Qinghua Chen、Chuang Ma、Yang Lou 和 Guanrong Chen。《计算网络中的团与空腔》。Commun. Phys.，4(1):249，2021。[SGK+18] Ann E Sizemore、Chad Giusti、Ari Kahn、Jean M Vettel、Richard F Betzel 和 Danielle S Bassett。《人类连接组中的团与空腔》。J. Comput. Neurosci.，44:115–145，2018。

[Sid91] Alexander Sidorenko。《线性扩张数量的不等式》。*Order*，8:331–340，1991。[SPCGB19] Ann E Sizemore、Jennifer E Phillips-Cremins、Robert Ghrist 和 Danielle S Bassett。《整体的重要性：面向网络神经科学家的网络拓扑数据分析》。*Netw. Neurosci.*，3(3):656–673，2019。[SPE+25] Daniela Egas Santander、Christoph Pokorny、Andr´as Ecker、J¯anis Lazovskis、Matteo Santoro、Jason P Smith、Kathryn Hess、Ran Levi 和 Michael W Reimann。《异质且高阶的皮层连接性支撑高效、稳健、可靠的神经编码》。*iScience*，28(1)，2025。[Sta11] Richard P. Stanley。《枚举组合学：第 *1* 卷》。剑桥大学出版社，第 2 版，2011。[Sta15] Richard P Stanley。《卡特兰数》。剑桥大学出版社，2015。[TAM19] Bosiljka Tadi´c、Miroslav Andjelkovi´c 和 Roderick Melnik。《人类连接组的函数几何》。《科学报告》，9(1):12060，2019。[TVA+13] Emma K Towlson、Petra E V´ertes、Sebastian E Ahnert、William R Schafer 和 Edward T Bullmore。《秀丽隐杆线虫神经元连接组的富俱乐部》。*Journal ofNeuroscience*，33(15):6380–6387，2013。[UK24] Florian Unger 和 Jonathan Krebs。《在固定无向图上对有向旗复形进行 MCMC 采样》。*J. Appl. Comput. Topol.*，第 1–36 页，2024。[VTL79] Jacobo Valdes、Robert E Tarjan 和 Eugene L Lawler。《串并有向图的识别》。载于第十一届 *ACM* 计算理论年度研讨会论文集，第 1–12 页，1979。[W+01] Douglas Brent West 等。《图论导论》，第 2 卷。Prentice Hall，上萨德尔河，2001。[Yak15] Sophia Yakoubov。《梳状偏序集扩张中的模式避免》。*Journal ofCombinatorics*，6(1):249–272，2015。