arXiv:2601.14486v1 [math.CV] 20 Jan 2026

H双奥利茨–索博列夫空间中的同胚延拓 s

Yizhe Zhu

摘要

我们完整刻画了单位圆上的自同胚：它们能够延拓为属于双奥利茨–索博列夫空间、从而映入单位圆盘的同胚，当且仅当满足相应条件。我们的结果将 Sobolev 框架中的经典判据推广到了更灵活的奥利茨框架。

1 引言

根据 Rad´o [Rad26], Kneser [Kne26] 和 Choquet [Cho45], 的经典理论（另见 [Dur04],），每个边界同胚 $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \xrightarrow{\text{onto}} \partial\mathbb{D}$ 都存在一个光滑的调和微分同胚延拓，将单位圆盘映 onto 其自身。此外，由于 φ 的调和延拓在所有延拓中具有最小的狄利克雷能量，因此，同胚 $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \xrightarrow{\text{onto}} \partial\mathbb{D}$ 存在一个同胚延拓 $h\colon \mathbb{D} \xrightarrow{\text{onto}} \mathbb{D}$，且该延拓属于 $W^{1,2}(\mathbb{D},\mathbb{C})$，当且仅当 φ 满足道格拉斯条件：

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\int_{\partial\mathbb{D}} \left|\frac{\varphi(\xi)-\varphi(\eta)}{\xi-\eta}\right|^2 |d\xi||d\eta| < \infty\,. \tag{1.1}$$

另请参见 [KO21, KO23b] ，了解这一刻画。更一般地，对于 $p>1$，Rad´o-Kneser-Choquet 定理的 p调和变体 [AS01] 表明，若同胚 $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \xrightarrow{到} \partial\mathbb{D}$满足 p道格拉斯条件

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\int_{\partial\mathbb{D}} \left|\frac{\varphi(\xi)-\varphi(\eta)}{\xi-\eta}\right|^p |d\xi||d\eta| < \infty\,, \tag{1.2}$$

那么它实际上存在同胚延拓 $h\colon \mathbb{D} \xrightarrow{到} \mathbb{D}$ 于 $W^{1,\,p}(\mathbb{D},\ \mathbb{C})$ 中；另请参见 [IO19, KO18, IO14] 了解这一刻画。有趣的是，也可以通过标准调和延拓算子 [KO23a]得到这一延拓。另已知，任意同胚 $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \xrightarrow{到} \partial\mathbb{D}$ 的调和延拓对每个 $p\in[1,2$ 都属于 $W^{1,\,p}(\mathbb{D},\ \mathbb{C})$；参见 [Ver07]。

尽管调和延拓算子具有稳健性，但它难以同时控制映射及其逆映射的索博列夫正则性。事实上，存在一个同胚

本研究得到芬兰科学院项目第 334014 号的资助。电子邮件：yizhu@jyu.fi**关键词与短语：**奥利茨–索博列夫同胚，双奥利茨–索博列夫延拓， Φ-道格拉斯条件。**2020 年 MSC：**46E35

$\varphi\colon \partial\mathbb{D} \xrightarrow{\text{onto}} \partial\mathbb{D}$ 满足双重 Douglas 条件，也就是说，φ 和 φ^{-1} 均满足 (1.1)，但其调和延拓的逆映射不属于 $W^{1,2}(\mathbb{D},\mathbb{C})$；参见 [KO23a]。

在 Onninen 和 Koski 的近期工作 [KO23a]中，他们发展了新的灵活技术，用于控制映射及其逆映射的 Sobolev 范数。具体而言，如果 $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \xrightarrow{到} \partial\mathbb{D}$满足 p-道格拉斯条件，且其逆映射 φ^{-1} 满足 q-道格拉斯条件，那么存在一个同胚延拓 $h\colon \mathbb{D} \xrightarrow{到} \mathbb{D}$，使得 $h \in W^{1,\,p}(\mathbb{D},\ \mathbb{D})$ 以及 $h^{-1} \in W^{1,\,q}(\mathbb{D},\ \mathbb{D})$。在本文中，我们将这一框架推广到如下形式的 Orlicz-Sobolev 空间

$$W^{1,\Phi}(\mathbb{D},\mathbb{C}) := \left\{ f \in W^{1,1}(\mathbb{D},\mathbb{C}) : \int_{\mathbb{D}} \Phi(|Df(x)|)\,dx < \infty \right\},$$

其中 $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个满足 Δ_2-条件的 N-函数，并且对于某个 $p>1$，在 $t \geq t_0$ 上满足 $(\mathrm{aInc})_p$。

若函数 Φ 连续、凸、递增，且满足 $\Phi(0)=0$，则称其为 N-函数，并且

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty. \tag{1.3}$$

一个 N-函数 Φ 可表示为

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)ds, \tag{1.4}$$

其中 $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个递增的右连续函数，且满足 $\phi(0) = 0$ 并且 $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$；关于 N-函数的更多细节，参见 [Mus06、AF03]。我们称 Φ 满足倍增条件（或 Δ_2-条件），如果存在常数 $C_D \geq 2$ 使得

$$\Phi(2t) \leq C_D\Phi(t) \quad \text{for all } t \geq 0. \tag{1.5}$$

此外，如果 $\Phi(t)/t^p$ 满足几乎递增，我们称 Φ 满足 $(\mathrm{aInc})_p$，也就是说，存在常数 $C_A \geq 1$ 使得

$$\frac{\Phi(s)}{s^p} \leq C_A \frac{\Phi(t)}{t^p} \quad \text{whenever } 0 \leq s \leq t. \tag{1.6}$$

我们将同胚 $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 的 Φ-道格拉斯条件 定义为

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\int_{\partial\mathbb{D}} \Phi\left(\left|\frac{\varphi(\xi)-\varphi(\eta)}{\xi-\eta}\right|\right) |d\xi|\,|d\eta| < \infty. \tag{1.7}$$

现在我们可以陈述主要结果了。

定理 *1.1.* 设 $\varphi\colon \partial\mathbb{D}$ 到 $\longrightarrow \partial\mathbb{D}$ 是一个同胚。假设 $\Phi, \Psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是满足倍增条件且在 $t \geq t_0$ 上满足 $(\mathit{aInc})_p$ 的 N-函数，其中 $p>1$ 为某个常数。那么，φ 满足 Φ-道格拉斯条件且 φ^{-1} 满足 Ψ-道格拉斯条件，当且仅当 φ 存在一个同胚延拓 $h\colon \mathbb{D}$ 到 $\longrightarrow \mathbb{D}$，使得 $h \in W^{1,\Phi}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ 且 $h^{-1} \in W^{1,\Psi}(\mathbb{D},\mathbb{D})$。

注 1.2。关于定理 *1.1*，我们指出，证明“仅当”部分并不需要条件$(\mathrm{aInc})_p$。

每个有界同胚 $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \xrightarrow{\text{到}} \partial\mathbb{D}$ 都满足 p-道格拉斯条件，其中 $p \in (1,\ 2)$。事实上，我们证明了一个更强的结论：每个这样的 φ 在 $\int_1^\infty \frac{\Phi(t)}{t^3}\,dt < \infty$ 时也满足 Φ-道格拉斯条件。将这一结果与我们的主定理结合，可得以下推论。

推论 1.3。 设 Φ 是一个满足倍增条件的 N-函数，并且

$$\int_1^\infty \frac{\Phi(t)}{t^3}dt < \infty. \tag{1.8}$$

那么，每个同胚 $\varphi\colon\ \partial\mathbb{D} \xrightarrow{\text{到}} \partial\mathbb{D}$ 都存在同胚延拓 $h\colon\ \mathbb{D} \xrightarrow{\text{到}} \mathbb{D}$，使得 h 和 h^{-1} 均属于 *Orlicz–Sobolev* 空间 $W^{1,\,\Phi}(\mathbb{D},\ \mathbb{C})$。

特别地，我们刻画了具有 Orlicz-Sobolev 同胚延拓的单位圆的有界自同胚。

推论 1.4。 设 $\varphi\colon\ \partial\mathbb{D} \xrightarrow{\text{到}} \partial\mathbb{D}$ 是一个同胚。假设 $\Phi\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个满足倍增条件和 $(\mathrm{aInc})^p$ 的 N-函数，其中 $p > 1$ 和 $t_0 \geq 0$ 满足 $t \geq t_0$。那么，当且仅当 φ 满足 Φ-道格拉斯条件时，它才在 $W^{1,\,\Phi}(\mathbb{D},\ \mathbb{C})$ 中存在同胚延拓。

致谢。 作者感谢其论文导师 Jani Onninen 提出的见解，以及他为改进稿件所提供的所有帮助。作者还感谢本文的审稿人提出的多项改进论文表述的建议。

2 预备知识

本节回顾后续证明中需要用到的一些引理。

2.1 *N*-函数

Le引理 2.1. 对于每个 N-函数 $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 以及 $0 \leq a, b < \infty$，我们有 e

$$\Phi(a) + \Phi(b) \leq \Phi(a+b).$$

证明。 由于 ϕ 是一个递增函数，并且

$$\int_a^{a+b} \phi(s)ds - \int_0^a \phi(s)ds = \int_0^a \phi(s+b) - \phi(s)ds \geq 0.$$

因此我们得到

$$\Phi(a+b) - \Phi(b) = \int_b^{a+b} \phi(s)ds \geq \int_0^a \phi(s)ds = \Phi(a).$$

□

对于每个 N-函数 Φ，我们定义如下形式的 Orlicz-Lebesgue空间

$$L^{\Phi}(\Omega,\mathbb{C}) := \left\{ f : \int_{\Omega} \Phi(|f(x)|)dx < \infty \right\}.$$

如果 Φ 还满足 (aInc)$_p$ 在 $t \geq t_0$ 上，对于某个 $p > 1$，那么极大算子 M 在 $L^{\Phi}(\Omega\ \mathbb{C})$ 上有界，即 $M\colon L^{\Phi}(\Omega\ \mathbb{C}) \hookrightarrow L^{\Phi}(\Omega\ \mathbb{C})$。

引理 2.2。设 $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ 是一个满足倍增条件且$(\mathrm{aInc})_p$ 在 $t \geq t_0$ 上成立（对于某个 $p > 1$）的 N-函数。令 M 表示 ***Hardy-Littlewood***极大算子，并设 Ω 为一个域。那么对于任意 $f \in L^{\Phi}(\Omega\ \mathbb{C})$，有

$$\int_{\Omega} \Phi(Mf(x))dx \leq C \int_{\Omega} \Phi(|f(x)|)dx < \infty + |\Omega|\Phi(t_0),$$

其中 C 仅取决于 p 和 C_A。

证明。在整个证明过程中，形如 $X \lesssim Y$的估计中所有隐含常数仅取决于 p 和 C_A。我们先将估计分解为两部分:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Phi(Mf(x))dx &= \int_{\Omega} \int_0^{Mf(x)} \phi(s)dsdx \\
&= \int_0^{t_0} \phi(s)|\{Mf(x) > s\}|ds + \int_{t_0}^{\infty} \phi(s)|\{Mf(x) > s\}|ds \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

第一个积分 I_1 很容易估计。事实上,

$$I_1 \leq |\Omega|\Phi(t_0). \tag{2.1}$$

根据 Hardy-Littlewood极大算子弱(1,1)估计,

$$|\{Mf(x) > s\}| \lesssim \frac{1}{s} \int_{\{|f|>s\}} |f|dx$$

并通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \int_{t_0}^{\infty} \phi(s)s^{-1} \int_{\{|f|>s\}} |f|dxds \\
&\leq \int_{\Omega} |f| \int_{t_0}^{|f|} s^{-1}\phi(s)dsdx \\
&= \int_{\Omega} |f| \left[\frac{\Phi(|f|)}{|f|} - \frac{\Phi(t_0)}{t_0} + \int_{t_0}^{|f|} s^{-2}\Phi(s)ds \right] dx \\
&\leq \int_{\Omega} \Phi(|f|)dx + \int_{\Omega} |f| \int_{t_0}^{|f|} s^{-2}\Phi(s)dsdx.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

由于 Φ 在 $t \geq t_0$ 上满足 (aInc)$_p$，其中某个 $p > 1$，我们得到

$$\int_\Omega |f| \int_{t_0}^{|f|} s^{-2}\Phi(s)dsdx \lesssim \int_\Omega |f|^{1-p}\Phi(|f|) \int_{t_0}^{|f|} s^{p-2}dsdx \leq \int_\Omega \Phi(|f|)dx. \tag{2.3}$$

结合 (2.1)、(2.2) 和 (2.3)，我们得出

$$\int_\Omega \Phi(Mf(x))dx \leq \int_\Omega \Phi(|f|)dx + |\Omega|\Phi(t_0).$$

□

2.2 Φ-道格拉斯条件的替代表述

为证明下一节中将要陈述的结果，我们给出 Φ-道格拉斯条件 (1.7) 的另一种表述。为此，令 $I_{n,k}$ 表示单位圆的二进分解。于是，结果如下。

引理 2.3. 边界同胚 $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \xrightarrow{\text{onto}} \partial\mathbb{D}$ 满足所谓的 Φ-道格拉斯条件，当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} \Phi(|\varphi(I_{n,k})|2^n)2^{-2n} < \infty. \tag{2.4}$$

证明。 我们首先将 $\partial\mathbb{D}$ 上的二重积分分为两部分，

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{D}}\int_{\partial\mathbb{D}} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| &= \int_{\partial\mathbb{D}}\int_{|x-y|\leq 1} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{D}}\int_{|x-y|>1} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy|.\end{aligned}$$

由于上述等式右侧的第二个积分总是有限的，我们用第一个积分有限来替代所谓的 Φ-道格拉斯条件；第一个积分可写为

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\int_{|x-y|\leq 1} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| = \int_{\partial\mathbb{D}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2^{-n}<|x-y|\leq 2^{-(n-1)}} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy|.$$

现在假设 φ 满足所谓的 Φ-道格拉斯条件，根据单调收敛定理，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{D}}\int_{|x-y|\leq 1} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\partial\mathbb{D}}\int_{2^{-n}<|x-y|\leq 2^{-(n-1)}} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\int_{I_{n,k}}\int_{2^{-n}<|x-y|\leq 2^{-(n-1)}} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy|.\end{aligned}$$

设 $I_{n+1、\,2k-1}$ 和 $I_{n+1、\,2k}$ 是 $I_{n、\,k}$ 的两个二进制“子项”。对于每个 $y \in I_{n、\,k}$，将 $\{x\colon 2^{-n} < |x-y| \le 2^{-(n-1)}\}$ 分成两部分，

$$I_{n,+} := \left\{ x : \frac{1}{2^n} < |x-y| \le \frac{1}{2^{n-1}},\ x \text{ in the counterclockwise direction from } y \right\},$$
$$I_{n,-} := \left\{ x : \frac{1}{2^n} < |x-y| \le \frac{1}{2^{n-1}},\ x \text{ in the clockwise direction from } y \right\}.$$

Then

$$\begin{aligned}
&\int_{I_{n,k}} \int_{2^{-n}<|x-y|\le 2^{-(n-1)}} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| \\
&\quad \ge \left(\int_{I_{n+1,2k-1}} \int_{I_{n,+}} + \int_{I_{n+1,2k}} \int_{I_{n,-}} \right) \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| \\
&\quad \ge \left[\Phi\left(|\varphi(I_{n+1,2k-1})|2^{n-1}\right) + \Phi\left(|\varphi(I_{n+1,2k})|2^{n-1}\right) \right] \cdot 2^{-(2n+1)}.
\end{aligned}$$

利用恒等式

$$|\varphi(I_{n+1,2k-1})| + |\varphi(I_{n+1,2k})| = |\varphi(I_{n,k})|,$$

结合 Φ 的凸性以及倍增条件，即

$$\Phi(a) + \Phi(b) \ge 2\Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{2}{C_\Phi}\Phi(a+b),$$

我们得出

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathbb{D}} \int_{|x-y|\le 1} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} \int_{I_{n,k}} \int_{2^{-n}<|x-y|\le 2^{-(n-1)}} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| \qquad (2.5) \\
&\qquad \gtrsim \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} \Phi(|\varphi(I_{n,k})|2^n)2^{-2n}.
\end{aligned}$$

另一方面，假设双重求和有限。与上述证明类似，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathbb{D}} \int_{|x-y|\le 1} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} \int_{I_{n,k}} \int_{2^{-n}<|x-y|\le 2^{-(n-1)}} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy|.
\end{aligned}$$

注意，若 $y \in I_{n,k}$ 且 $|x-y| \le 2^{-(n-1)}$，则 $|\varphi(x)-\varphi(y)| \le \sum_{j=k-2}^{k+2} |\varphi(I_{n,j})|$。因此，

$$\int_{I_{n,k}} \int_{2^{-n}<|x-y|\le 2^{-(n-1)}} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| \le \Phi\left(\sum_{j=k-2}^{k+2} |\varphi(I_{n,j})|2^n\right) 2^{-2n+1}.$$

注意到 $I_{n,j} = I_{n,2^n+j}$ 对 $j = -1, 0, ..., 3$ 成立，并利用 Φ 的倍增条件，可得

$$\sum_{k=1}^{2n} \Phi\left(\sum_{j=k-2}^{k+2} |\varphi(I_{n,j})|\right) \lesssim \sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=k-2}^{k+2} \Phi\left(|\varphi(I_{n,j})|\right) = 5\Phi\left(|\varphi(I_{n,k})|\right),$$

其中最后一步用到了每个区间$I_{n,\ k}$ 在双重求和中至多出现五次。因此，

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\int_{|x-y|\le 1} \Phi\left(\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}\right)|dx||dy| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} \Phi\left(|\varphi(I_{n,k})|\right) 2^{-2n},$$

这就证明了引理。 □

3 定理 1.1 的证明及推论

定理 1.1 的证明。为便于表述，我们将单位圆盘的边界视为局部平坦，因此假设 φ 定义为从实数轴上的区间 $I := [0, 1]$到其自身的映射。我们沿用 [KO23a 中定理 1.5], 的证明思路，并将在上半平面中构造扩展 h。为方便读者，我们在此给出详细证明。

步骤 1：对于 $n = 1, \cdots$我们令 $I^n := I \times \{2^{-n}\}$和 $J^n := I \times \{2^{-n}\}$分别表示将区间 I 在定义域侧和目标侧提升到高 2^{-n} 后得到的单位长度线段。对于每个 n ，我们还将边界映射 φ 提升为映射 φ^n ，它将 I^n 映射到 J^n。我们先将 I^n 按二进制方式分解为长度为 2^{-n}的线段 I_k^n、 $k = 1, \cdots, 2^n$，并将目标侧对应的线段 J_k^n定义为 $J_k^n := \varphi^n(I_k^n)$。

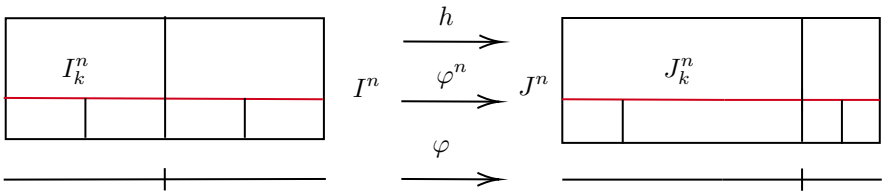

图 1： h的构造

步骤 2：我们按如下方式递归地定义一组新的线段 S_j^n。首先选择k_1作为最小的正整数，使得并集 $J_1^n \cup \cdots \cup J_{k_1}^n$的长度至少为 2^{-n}，并将 S_1^n， T_1^n定义为这些并集

$$S_1^n = I_1^n \cup \cdots \cup I_{k_1}^n \quad \text{and} \quad T_1^n = J_1^n \cup \cdots \cup J_{k_1}^n,$$

分别。然后，我们通过定义 k_j 为使并集 $J_{k_{j-1}+1}^n \cup \cdots \cup J_{k_j}^n$的长度至少为 2^{-n}的最小正整数，继续这一过程，并定义

$$S_j^n = I_{k_{j-1}+1}^n \cup \cdots \cup I_{k_j}^n \quad \text{and} \quad T_j^n = J_{k_{j-1}+1}^n \cup \cdots \cup J_{k_j}^n.$$

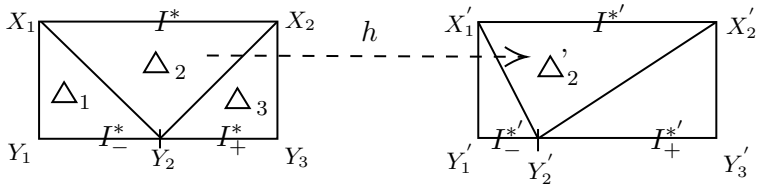

图 2： h的分段线性构造

我们省略 [KO23a, 定理 1 的证明。5], 中展示的技术细节，该证明保证I^n 可以分解为若干条长度至少为 $2^{-n}/2$的线段 S_j^n，且每条线段的“像”线段 T_j^n的长度至少为 2^{-n}。现在，映射 h 最终定义在 I^n 上，使其将每个 S_j^n线性映射到 T_j^n。

步骤 3：接着，对于每个 n，我们将 h延伸到 I^n 与 I^{n+1} 之间的条带。设 I^* 是 I^n 中的一条线段 I_k^n，并设 I_-^* 和 I_+^* 为 I^{n+1} 中位于其正下方、长度为I^* 一半的两个区间。设 X_1和 X_2 分别为 I^* 的左、右端点， Y_1、 Y_2、 Y_3从左至右分别为 I_-^* 和 I_+^* 的端点，其中 Y_2 为两者的公共端点。现在，我们通过线段 X_1Y_1、 X_1Y_2、 X_2Y_2 和 X_2Y_3将四边形 $X_1Y_1Y_3X_2$ 进行三角剖分，得到三个三角形 $\triangle_i$、 $i = 1$、2、3，并在每个三角形上定义映射 h，将其线性映射到相应的像三角形 $\triangle_i'$。

我们先证明“若”部分。注意，像三角形 $\triangle_i'$ 的高为 2^{-n}，有一条长度为 $h(I')$ 的水平边，其中 I' 表示区间 I^*, I_-^* 或 I_+^* 之一，具体取决于 i的选择。由于映射 h是从 $\triangle_i$ 到相应像三角形 $\triangle_i'$的线性映射，我们可以估计两个对应三角形之间的线性映射的微分和畸变：一个底边长度约为 2^{-n} 、高为 2^{-n}，另一个底边长度为$h(I')$、高为 2^{-n}。于是

$$\int_{\triangle_i} \Phi(|Dh|)dz \lesssim \Phi(|h(I')|2^n)2^{-2n} + \Phi(1)2^{-2n} \quad \text{and}$$
$$\int_{\triangle_i'} \Psi(|Dh^{-1}|)dz \lesssim \Psi\left(\frac{2^{-n}}{|h(I')|}\right)|h(I')|2^{-n} + \Psi(1)|h(I')|2^{-n}.$$

这里省略常数 C，它仅取决于 C_Φ 和 C_Ψ。

我们先对 $\int_{\mathbb{D}} \Phi(|Dh|)dz$进行估计。注意，只有当 $|h(I')|$ 远大于 2^{-n}时，项 $\Phi(|h(I')|)2^n$ 才相关。在这种情况下，区间 $h(I')$是在构造过程中由 $\varphi(I')$得到的，方法要么是不作任何改变，要么是删去一小段。无论哪种情况，$|h(I')| \le |\varphi(I')|$。现在

$$\int_{\mathbb{D}} \Phi(|Dh|) \lesssim \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} \Phi(|\varphi(I_{n,k})|2^n)2^{-2n} + \Phi(1) < \infty,$$

已知其有限，因为 φ 满足 Φ-道格拉斯条件，因此也满足离散的Φ-道格拉斯条件。

接下来我们对 $\int_{\mathbb{D}} \Psi(|Dh^{-1}|)dz$进行估计。由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} \Psi(1)h(I')2^{-n} \leq \Psi(1)$，只需估计第一项 $\Psi\left(\frac{2^{-n}}{|h\ I'\ ()|}\right)|h(I')|2^{-n}$。假设线段 I' 是线段$S_j^{(n)}$ 的一部分，并且 $S_j^{(n)}$ 由 N 条长度相同且相邻的线段组成。我们估算所有这些线段贡献的总能量，其值为

$$N \cdot \Psi\left(\frac{2^{-n}}{|h(I')|}\right)|h(I')|2^{-n}. \tag{3.1}$$

注意到映射 h在 S_j^n 上是线性的，因此将每条 N 线段映射为一条长度相同的线段 $|h(I')|$，$2^{-n} \leq |T_j^n| = N|h(I')| \leq 2^{-n+1}$。但由于像线段$T_j^n = h(S_j^n)$的长度选为大于 2^{-n}但小于 2^{-n+1}，$T_j^{(n)}$至多可由三条相邻的二进线段 $J_{(n)l}$覆盖，因此我们有 $|S_j^n| \leq 3\max_l |\varphi^{-1}(J_l^n)|$。于是，由能量 (3.1) 可得

$$\begin{aligned} N \cdot \Psi\left(\frac{2^{-n}}{|h(I')|}\right)2^{-n}|h(I')| &= N \cdot \Psi\left(\frac{|S_j^n|/N}{|T_j^{(n)}|/N}\right)2^{-n}|h(I')| \\ &\leq \Psi\left(2^n \max_l |\varphi^{-1}(J_l^{(n)})|\right)2^{-2n+1}. \end{aligned}$$

考虑到每个二进区间 $J_l^{(n)}$ 在此过程中至多涉及三次，我们对 n 和 l 求和，可得

$$\int_{\mathbb{D}} \Psi(|Dh^{-1}|)dz \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2^n} \Psi\left(|\varphi^{-1}(J_l^{(n)})|2^n\right)2^{-2n},$$

其中，双重求和是有限的，这是由关于 φ^{-1}的离散 Ψ-道格拉斯条件所致。证明至此完成。

接下来证明“仅当”部分。对于每个 $n \geq 1$ 和 $1 \leq k \leq 2^n$，令 $Q_{n,k}$ 表示边长为 2^{-n}的正方形，其底边与 $I_{n,k}$ 经 2^{-n}提升后的像重合。固定这样一个 $\hat{}\hat{}$ 正方形 $Q_{n,k}$ 以及 $I_{n,k}$，记 ξ 为 $I_{n,k}$的中点，并定义 $\gamma_t = \partial B(\xi, t) \cap \mathbb{D}$，其中 $2^{-(n+1)} \leq t \leq 3 \cdot 2^{-(n+1)}$。于是存在一个绝对常数 C，使得

$$\bigcup_{t\in[1/2^{-(n+1)},3\cdot 2^{-(n+1)}]} \gamma_t \subset CQ_{n,k} \cap \mathbb{D}.$$

Since $h \in W^{1,1}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ 是 $\mathbb{D}$ 上的同胚， h 在 $\overline{\mathbb{D}}$中几乎处处可微。现在

$$|\varphi(I_{n,k})| \leq \int_{\gamma_t} |Dh|ds$$

对于 $2^{-(n+1)} \leq t \leq 3 \times 2^{-(n+1)}$。对 t 进行积分，我们得到

$$2^{-n}|\varphi(I_{n,k})| \leq \int_{2^{-(n+1)}}^{3\cdot 2^{-(n+1)}} \int_{\gamma_t} |Dh|dsdt \leq \int_{CQ_{n,k}\cap\mathbb{D}} |Dh(x)|dx. \tag{3.2}$$

注意，$|CQ_{n,\ k}\cap\mathbb{D}|$ 与 $|Q_{n,\ k}|\approx 2^{-2n}$一致可比。由 (3.2) 可得

$$2^n|\varphi(I_{n,k})|\lesssim \fint_{CQ_{n,k}\cap\mathbb{D}}|Dh(y)|dy\le M|Dh(x)|,\quad x\in Q_{n,k},\tag{3.3}$$

其中 M 是 Hardy-Littlewood 算子。对于每个 $Q_{n,\ k}$，将 (3.3) 两边在 $Q_{n,\ k}$ 上积分，并应用引理 2.2，可得

$$\begin{aligned}2^{-2n}\Phi(2^n|\varphi(I_{n,k})|)&\lesssim\int_{Q_{n,k}}\Phi(M|Dh(x)|)dx\\&\lesssim\int_{Q_{n,k}}\Phi(|Dh(x)|)dx+|Q_{n,k}|\Phi(t_0).\end{aligned}$$

对所有 n 和 k 求和，可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}2^{-2n}\Phi(2^n|\varphi(I_{n,k})|)&\lesssim\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\int_{Q_{n,k}}\Phi(|Dh(x)|)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}|Q_{n,k}|\Phi(t_0)\\&=\int_{\mathbb{D}}\Phi(|Dh(x)|)dx+|\mathbb{D}|\Phi(t_0)<\infty.\end{aligned}$$

因此，由引理 2.3 可知，边界同胚 $\varphi:\partial\mathbb{D}\xrightarrow{到}\partial\mathbb{D}$ 满足 Φ-道格拉斯条件。对 h^{-1} 也可进行类似论证，从而完成证明。□

由于推论 1.4 是定理 1.1 的直接推论，我们仅证明推论 1.3,

推论 *1.3* 的证明。由于 Φ 是满足倍增条件的 N-函数，由引理 2.1 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\Phi(|\varphi(I_{n,k})|2^n)2^{-2n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(2^n)2^{-2n},$$

这里用到了对每个 n，$\sum_{k=1}^{2^n}|\varphi(I_{n,\ k})|=1$ 这一事实。注意，(1.8) 有一个离散对应形式,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(2^n)2^{-2n}\approx\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt=\int_1^{\infty}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt<\infty.$$

因此，φ满足 Φ道格拉斯条件。由定理 1.1 和注 1.2 可知，它存在一个同胚延拓 h: $\mathbb{D}\xrightarrow{到}\mathbb{D}$，使得 h 属于 Orlicz–Sobolev 空间 $\overline{W}^{1,\ \Phi}(\mathbb{D},\ \mathbb{C})$。对 φ^{-1}也可作类似论证，证明至此完成。

□

参考文献

[AF03] R. A. Adams 和 J. J. F. Fournier。《Sobolev 空间》。爱思唯尔，2003 年。[AS01] G. Alessandrini 和 M. Sigalotti。二维中各向异性p-Laplace 方程解的几何性质。《芬兰数学年刊》，26(1):249–266，2001 年。[Cho45] G. Choquet。论一种由调和函数定义、推广保角表示的解析变换类型。《数学科学通报》，69(2):156–165，1945 年。[Dur04] P. Duren。《平面调和映射》。剑桥大学出版社，2004 年。[IO14] T. Iwaniec 和 J. Onninen。Radó-Kneser-Choquet 定理。《伦敦数学会会刊》，46(6):1283–1291，2014 年。[IO19] T. Iwaniec 和 J. Onninen。单连通域的 Radó-Kneser-Choquet 定理（p-调和情形）。《美国数学会汇刊》，371(4):2307–2341，2019 年。[Kne26] H. Kneser。第41题的解答。《德国数学家联合会年报》，35(2):123–124，1926 年。[KO18] A. Koski 和 J. Onninen。 p-调和极小化子的径向对称性。《理性力学与分析档案》，230(1):321–342，2018 年。[KO21] A. Koski 和 J. Onninen。Sobolev 同胚延拓。《欧洲数学会杂志》，23(12):4065–4089，2021 年。[KO23a] A. Koski 和 J. Onninen。双 Sobolev 延拓。《几何分析杂志》，33(9):301，2023 年。[KO23b]A. Koski 和 J. Onninen。Sobolev Jordan-Sch¨onflies 问题。《数学进展》，413:108795，2023 年。[Mus06] J. Musielak。《Orlicz 空间与模空间》。施普林格，2006 年。[Rad26] T. Rad´o。第41题。《德国数学家联合会年报》，49(2):85–86，1926 年。[Ver07] G. C. Verchota。从闭圆盘到其自身的调和同胚必须属于$W^{1,p}$, $p < 2$，但不属于 W^1,2。《美国数学会会刊》，891–894 页，2007 年。