arXiv:2601.14502v1 [math.GR] 20 Jan 2026

# 关于拓扑　　广义双循环半群的组织结构

奥列格·古蒂克、玛格丽塔·佐洛塔尔、亚历山德拉·利塞茨卡

摘要. 在扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上构造了非离散的半群 $T_1$拓扑。给出了拓扑条件，满足这些条件时， $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的半群（平移连续）$T_1$拓扑是离散的。

奥列格·古蒂克、玛格丽塔·佐洛塔尔、亚历山德拉·利塞茨卡，扩展双循环半群的拓扑化。

在扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上构造了非离散的半群 $T_1$拓扑。此外，我们给出了拓扑条件，满足这些条件时，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的半群（平移连续） $T_1$拓扑是离散的。关键词和短语。扩展双循环半群、双循环半群、拓扑半群、半拓扑半群、 $T_1$空间、贝尔空间、拟正则、离散

## 1. 引言

本文采用专著中的术语 [9,10,25,28]。下文中，自然数、非负整数和整数集分别记作 $\mathbb{N}$， $\omega$ 和 $\mathbb{Z}$。下文中，若 $X$ 是一个拓扑空间，且 $Y$ 是 $X$的子空间，则用$\mathrm{cl}_Y(A)$ 和$\mathrm{int}_Y(A)$ 分别表示拓扑空间 $Y$中集合 $A \subseteq Y$ 的闭包和内部。

若 $S$ 是半群，则将其幂等元子集记作 $E(S)$。若半群 $S$对其任意元素 $x$ 都存在唯一的元素 $x^{-1} \in S$ ，使得 $xx^{-1}x = x$ 和 $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ [1, 28]成立，则称其为逆拓扑半群。在逆半群 $S$ 中，上述定义的元素 $x^{-1}$称为 $x$的逆元，而将半群$S$ 的每个元素映射到其逆元的映射 $S \to S$称为取逆映射。带 是幂等元构成的半群，而半格 是交换带。

如果 $S$ —半群，则在 $E(S)$ 上定义偏序： $e \preccurlyeq f$ 当且仅当$ef = fe = e$。这样定义的 $E(S)$ 上的偏序称为自然偏序。

在逆半群 $S$ 上定义关系 $\preccurlyeq$ 如下： $s \preccurlyeq t$ 当且仅当 $s = te$，其中某个幂等元为 $e \in S$。这样定义的偏序称为逆半群 $S$ [1] 上的自然偏序 。显然，逆半群 $S$ 上的自然偏序$\preccurlyeq$ 限制在其簇 $E(S)$ 上，是 $E(S)$ 上的自然偏序。

设 $X$、 $Y$ 和 $Z$ 是拓扑空间。映射 $f\colon X \times Y \to Z$，$(x,\ y) \mapsto f(x,\ y)$，称为：

($i$) 右连续 [左连续]，如果 $f$ 对右 [左] 变量连续；也就是说，对于每个固定点 $x_0 \in X$ [$y_0 \in Y$]，映射 $Y \to Z, y \mapsto f(x_0, y)$ [$X \to Z, x \mapsto f(x, y_0)$]连续；($ii$) 分别连续，如果 $f$ 同时右连续和左连续；($iii$) 连续，如果 $f$ 作为从空间的乘积 $X \times Y$到空间 $Z$的映射连续。

**定义 1** ( [6, 31]). 设 $S$ 是一个拓扑空间，其上定义了半群运算 $\mu\colon S \times S \to S, (x, y) \mapsto \mu(x, y) = xy$. 则有序对 $(S, \mu)$ 称为：

日期：2026年1月22日 2020 数学主题分类。22A15，54C08，54D10，54H10。关键词和短语。扩张双循环半群，双循环半群，拓扑半群，半拓扑半群， $T_1$-空间，贝尔空间，拟正则，离散。

(*i*) 右拓扑半群，若映射 $\mu$ 右连续，即所有内在左平移 $\lambda_s\colon S \to S, x \mapsto sx$ 均为连续映射，$s \in S$; (*ii*) 左拓扑半群，若映射 $\mu$左连续，即所有内在右平移 $\rho_s\colon S \to S, x \mapsto xs$ 均为连续映射，$s \in S$; (*iii*) 半拓扑半群，若映射 $\mu$ 分别连续；(*iv*) 拓扑半群，若映射 $\mu$ 连续。

通常我们省略记号 $\mu$ i，直接写作 $S$ 而不是 $(S, \mu)$。显然，每个拓扑半群也是半拓扑半群，而每个半拓扑半群同时也是右拓扑半群和左拓扑半群。

半群 $\tau$ 上的拓扑 $S$ 称为：

- 半群拓扑，如果 $(S, \tau)$ 是拓扑半群；
- 逆拓扑，如果 $(S, \tau)$ 中的逆映射不连续；
- 平移连续，如果 $(S, \tau)$ 是半拓扑半群；
- 左连续，若 $(S, \tau)$ 是左拓扑半群；
- 右连续，若 $(S, \tau)$ 是右拓扑半群。

回顾一下（参见 [9, §1.12],，双循环半群（或双循环幺半群） $\mathscr{C}(p, q)$ 是指由二元集合 $\{p, q\}$ 生成、含有单位元且由唯一关系式 $pq = 1$确定的半群。双循环半群 $\mathscr{C}(p, q)$ 中的每个元素都能唯一表示为 $b^i a^j$, $i, j \in \omega$，而 $\mathscr{C}(p, q)$ 上的半群运算定义如下

$$b^i a^j \cdot b^k a^l = \begin{cases} b^{i-j+k}a^l, & \text{якщо } j < k; \\ b^i a^l, & \text{якщо } j = k; \\ b^i a^{j-k+l}, & \text{якщо } j > k, \end{cases}$$

$i, j, k, l \in \omega$。

双循环半群在半群理论中发挥着重要作用。例如，经典的 O. Andersen 定理 [3] 指出，含有（非零）0-）幂等元的简单半群是完全（0-）简单的，当且仅当它不含与双循环幺半群同构的副本。不同作者此前提出了双循环幺半群的各种扩张和推广 [2, 15–17,23, 35]。其中包括布鲁克构造和布鲁克–雷利将半群嵌入简单半群的构造，以及对逆双简单和 0-双简单 $\omega$-半群的描述 [5, 19, 30, 34]。

**注 1.** 容易看出，双循环幺半群 $\mathscr{C}(p, q)$ 与定义在集合 $\boldsymbol{B}_\omega = \omega \times \omega$ 上、运算具有半群拓扑的半群同构

$$(i_1, j_1) \cdot (i_2, j_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2, \end{cases} \tag{1}$$

关于映射 $\mathfrak{I}\colon \mathscr{C}(p, q) \to \boldsymbol{B}_\omega, b^i a^j \mapsto (i, j)$, $i, j \in \omega$。

众所周知，拓扑代数研究对象的拓扑性质对其代数性质的影响，以及对象的代数性质对其拓扑性质的影响。拓扑代数有两个主要问题：非离散拓扑化问题，以及将对象嵌入具有某些拓扑代数性质的对象中的问题。

在数学文献中，关于非离散（豪斯多夫）拓扑化的问题由 Марков 提出 [26]。Понтрягин 给出了群单位元处的基满足的、使群具有非离散拓扑化的著名条件（见 [29] 中的定理 3.9）。不同作者进一步 уточнили Марков 的问题：能否将给定的无限群同构嵌入 $G$一个赋予了非离散群拓扑的紧拓扑群中？同样，对于任意阿贝尔群 $G$，答案是肯定的；但存在一个非阿贝尔拓扑群，无法将其同构嵌入任何紧拓扑群（见 [11] 中的第 9 章）。

此外，奥尔尚斯基 [27] 构造了一个无限可数群 $G$，使得其上的每一种群豪斯多夫拓扑都是 $G$ 离散的。泰曼诺夫于1973年构造了一个交换半群 $\mathfrak{T}$,

它只允许离散的半群豪斯多夫拓扑 [32], ，并在 [33] 中给出了交换半群存在非离散豪斯多夫半群拓扑的充分条件。在 [18] 中证明了， $\mathfrak{T}$上每一种具有连续平移的 $T_1$-拓扑都是离散的。然而，首次发表关于每一种豪斯多夫半群拓扑均为离散的半群的，是 Eberhart 和 Selden 的论文 [12], ；该半群是双循环半群 $\mathscr{C}(p,q)$。Bertman 和 West 在 [4] 中证明， $\mathscr{C}(p,q)$上的每一种豪斯多夫平移连续拓扑都是离散的。在 [7] 中，构造了双循环幺半群 $\mathscr{C}(p,q)$上的非离散逆半群拓扑和非离散平移连续 $T_1$-拓扑的例子，并给出了使 $\mathscr{C}(p,q)$上的半群（平移连续） $T_1$-拓扑为离散拓扑的条件。双循环幺半群的子半群的非离散拓扑化曾在论文 [8]中研究。在 [20] 中证明，双循环幺半群的上子半群 $\mathscr{C}_+(p,q)$上的每一种左连续（右连续）豪斯多夫拓扑，以及下子半群 $\mathscr{C}_-(p,q)$上的每一种右连续（左连续）豪斯多夫拓扑都是离散的；此外，还在 $\mathscr{C}_+(p,q)$（$\mathscr{C}_-(p,q)$）上构造了右连续（左连续）豪斯多夫拓扑。此外，[21] 中证明，半群 $\mathscr{C}_+(p,q)$（$\mathscr{C}_-(p,q)$）包含连续统多个互不同构的子半群 $S_\alpha$ ($\alpha \in \mathfrak{c}$)，它们具有以下性质：$(i)$ $S_\alpha$ 上的每一种豪斯多夫左连续（右连续）拓扑都是离散的；$(ii)$ $S_\alpha$ 上存在非离散豪斯多夫右连续（左连续）拓扑；$(iii)$ 存在一个紧豪斯多夫拓扑半群，其中包含半群 $\mathscr{C}_+(p,q)$（$\mathscr{C}_-(p,q)$）。

沃恩 [35], 在研究双简单逆半群的结构时，其幂等元子半群同构于半格 $(\mathbb{Z},\ \max)$，引入了 扩展双循环半群 作为集合 $\mathscr{C}_\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，其半群运算由公式（1）定义。

双循环幺半群 $\mathscr{C}(p,\ q)$ 和扩展双循环半群 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$ 具有许多共同的代数性质。特别是，这两个半群都是双简单且逆的，而它们的幂等元子半群关于自然偏序都是线性有序的稀疏集合。因此自然产生了这样一个问题：扩展双循环半群作为拓扑代数结构，具有哪些类似于双循环幺半群的拓扑性质？这一方向的第一个结果见于文献 [14], ，其中证明了，在 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$ 上的每个平移连续的豪斯多夫拓扑都是离散的。

本文部分回答了上述问题。在 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$ 上构造了非离散的局部紧致 $T_1$-拓扑，以及左连续（右连续）的伯尔 $T_1$-拓扑。此外，还指出了使半群 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$ 上的 $T_1$-拓扑为离散拓扑的条件。

## 2. $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$上的非离散拓扑例

例 1. 如下定义 $\tau_1$ 在 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$ 上的拓扑。设 $(i,j)$ 是半群 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$的任意元素。对于每个自然数 $n$，记作 $U_n(i,j) = \{(i,j)\}\cup\{(s,t) \in \mathscr{C}_\mathbb{Z}:\ \ s,t \geqslant n\}$。设 $\mathscr{B}_1(i,j) = \{U_n(i,j):\ \ n\in\mathbb{N}\}$ 是点 $(i,j)$ 处的开邻域系统。那么，族$\mathscr{B}_1 = \bigcup_{i,j\in\mathbb{Z}}\mathscr{B}_1(i,j)$ 满足 [13], 中的条件 (BP1)–(BP3)，因此生成 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$上的某个拓扑。将此拓扑记作 $\tau_1$。

显然， $\tau_1$ –是 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$上的非离散 $T_1$-拓扑。

**命题 1.** $(\mathscr{C}_\mathbb{Z},\tau_1)$ –是一个拓扑逆半群。

证明。 固定任意自然数 $n$。由 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$上的半群运算定义可知，对于半群 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$ 的任意元素$(i_1,j_1)$和$(i_2,j_2)$，有以下包含关系

$$U_m(i_1,j_1)\cdot U_m(i_2,j_2)\subseteq U_n(k,l) \qquad \text{i} \qquad (U_n(i_1,j_1))^{-1}\subseteq U_n(j_1,i_1),$$

其中 $(k,\ \ l) = (i_1,\ \ j_1)\cdot(i_2,\ \ j_2)$ 和 $m\geqslant 2n+|i_1|+|j_1|+|i_2|+|j_2|$。因此，半群运算和逆映射在 $(\mathscr{C}_\mathbb{Z},\ \ \tau_1)$ 中连续。□

对于扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的自然偏序 $\preccurlyeq$，以及任意元素 $(i,\ j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，定义：

$$\begin{aligned}
\uparrow_{\preccurlyeq}(i,j) &= \{(s,t)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon (i,j)\preccurlyeq(s,t)\};\\
\downarrow_{\preccurlyeq}(i,j) &= \{(s,t)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon (s,t)\preccurlyeq(i,j)\};\\
\updownarrow_{\preccurlyeq}(i,j) &= \uparrow_{\preccurlyeq}(i,j)\cup\downarrow_{\preccurlyeq}(i,j);\\
\downarrow^{\circ}_{\preccurlyeq}(i,j) &= \downarrow_{\preccurlyeq}(i,j)\setminus\{(i,j)\}.
\end{aligned}$$

下面的命题描述了 $\preccurlyeq$扩展双循环半群上的自然偏序 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，并由关系的定义 $\preccurlyeq$和命题 2.1$(vi)$ [14]得出。

**命题 2.** 对于扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 中的元素 $(i,j)$ 和$(s,t)$，以下条件等价：

$(i)$ $(i,\ j)\preccurlyeq(s,\ t)$; $(ii)$
$i\geqslant s$ 以及 $i-j=s-t$; $(iii)$
$j\geqslant t$ 以及 $i-j=s-t$。

接下来我们将经常用到以下简单结果：

**引理 1.** 设 $S$ 是一个逆（右） $T_1$-拓扑半群。那么，对于半群 $S$ 中的任意元素 $x$，集合 $\uparrow_{\preccurlyeq}x$ 在空间 $S$ 中是闭的。

证明。 由 [25]中的引理 1.4.6 可得，

$$\uparrow_{\preccurlyeq}x=\{s\in S\colon s\cdot xx^{-1}=x\}=\{s\in S\colon xx^{-1}\cdot s=x\},$$

因此，$\uparrow_{\preccurlyeq}x=\rho^{-1}_{xx^{-1}}(x)=\lambda^{-1}_{xx^{-1}}(x)$。由于 $S$ 中的右（左）平移是连续的，且 $S$ 是一个 $T_1$-空间，因此集合 $\uparrow_{\preccurlyeq}x=\rho^{-1}_{xx^{-1}}(x)$（$\uparrow_{\preccurlyeq}x=\lambda^{-1}_{xx^{-1}}(x)$）在 $S$中是闭的。□

例 2. 在 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上定义如下拓扑 $\tau_2$。对于半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 中的任意元素 $(i,j)$ 以及任意非负整数 $n$，记 $V_n(i,j)=\{(i,j)\}\cup\downarrow^{\circ}_{\preccurlyeq}(i+n,j+n)$。设 $\mathscr{B}_2(i,j)=\{V_n(i,j)\colon\ n\in\mathbb{N}\}$ 是点 $(i,j)$ 处的开邻域系统。那么，族 $\mathscr{B}_2=\bigcup_{i,j\in\mathbb{Z}}\mathscr{B}_2(i,j)$ 满足 [13], 中的条件 (BP1)–(BP3)，因此在 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$上生成某个拓扑。将该拓扑记作 $\tau_2$。

由在 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上构造拓扑 $\tau_2$ 可知，$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau_2)$ 是一个 $T_1$-空间。显然，族 $\mathscr{B}_2(i,j)$中的每个元素$V_n(i,j)$都是$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau_2)$中的紧子集，因此，空间$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau_2)$是局部紧的。

**命题 3.** $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau_2)$ 是一个拓扑逆半群。

证明。 由半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的半群运算定义可知，对于半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$中的任意元素$(i_1,j_1)$和$(i_2,j_2)$，以及任意非负整数 $n$ 和自然数 $m\geqslant 2n+|j_1|+|i_2|$，以下包含关系成立

$$V_m(i_1,j_1)\cdot V_m(i_2,j_2)\subseteq V_n(k,l)\qquad\text{i}\qquad (V_n(i_1,j_1))^{-1}\subseteq V_n(j_1,i_1),$$

其中 $(k,l)=(i_1,j_1)\cdot(i_2,j_2)$。因此，$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau_2)$ 是一个拓扑逆半群。 □

回顾一下，拓扑空间 $X$ 称为可数紧致的，如果空间 $X$ 的每个可数开覆盖都含有一个有限子覆盖。

在 [7] 中已证明，在双循环半群 $\mathscr{C}(p,q)$ 上，余有限拓扑是平移连续的，且关于该拓扑的逆映射在 $\mathscr{C}(p,q)$ 上也连续，因此双循环半群上存在紧致的平移连续 $T_1$-拓扑。由命题 4 可知，对于扩展双循环半群，类似的命题不成立。

**命题 4.** 不存在 可数紧致连续的左（右） $T_1$-拓扑在 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上 .

证明. 设 $\tau$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上连续的左 $T_1$-拓扑。对于半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的任意元素 $(i,j)$，用 $\rho_{(i,j)}$ 表示半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 中对元素 $(i,j)$ 的右内移，即对于所有 $(x,y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，有 $\rho_{(i,j)}(x,y) = (x,y)\cdot(i,j)$。由于 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 是 $T_1$-空间，根据引理 1，$\uparrow_{\preccurlyeq}(i,i) = \rho^{-1}(i,i)(i,i)$ 是 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中的闭子集，对于半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的任意幂等元 $(i,i)$ 均成立。因此，$\mathscr{U} = \{U_i = \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \setminus \uparrow_{\preccurlyeq}(i,i) : i \in \mathbb{Z}\}$ 是空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 的一个可数开覆盖，但它没有有限子覆盖。

在 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的右连续拓扑情形下，证明类似 . □

**引理 2.** 对于扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的任意元素 $(i,j)$ 和 $(k,l)$，有如下包含关系

$$\uparrow_{\preccurlyeq}(i,j)\cdot(k,l) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(m,n) \qquad i \qquad (i,j)\cdot\uparrow_{\preccurlyeq}(k,l) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(m,n),$$

其中 $(m,n) = (i,j)\cdot(k,l)$。

证明。 由命题2可得等式

$$\uparrow_{\preccurlyeq}(p,q) = \{(p-s,q-s) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} : s \in \omega\}, \tag{2}$$

对于任意元素 $(p,q) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$。

固定半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的任意元素 $(i,j)$ 和 $(k,l)$。

考虑各种可能的情况。

若 $k \geqslant j$，则 $(i,j)\cdot(k,l) = (i-j+k,l)$，并且对于任意非负整数 $s$，有 o

$$\begin{aligned}(i-s,j-s)\cdot(k,l) &= (i-s-(j-s)+k,l) = \\ &= (i-j+k,l) = (m,n),\end{aligned}$$

因此，由等式 (2) 可得 $\uparrow_{\preccurlyeq}(i,j)\cdot(k,l) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(m,n)$。

若 $k < j$，则 $(i,j)\cdot(k,l) = (i,j-k+l)$，并且对于任意非负整数 $s$，有 o

$$\begin{aligned}(i-s,j-s)\cdot(k,l) &= \begin{cases}(i-s-(j-s)+k,l), & \text{якщо } j-s \leqslant k;\\ (i-s,j-s-k+l), & \text{якщо } j-s > k\end{cases} = \\ &= \begin{cases}(i-j+k,l), & \text{якщо } j-s \leqslant k;\\ (i-s,j-s-k+l), & \text{якщо } j-s > k.\end{cases}\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}(i-j+k,l)\cdot(j-k+l,j-k+l) &= (i-j+k-l+(j-k+l),j-k+l) = \\ &= (i-j+k-l+j-k+l,j-k+l) = \\ &= (i,j-k+l)\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}(i-s,j-s-k+l)\cdot(j-k+l,j-k+l) &= (i-s-(j-s-k+l)+j-k+l,j-k+l) = \\ &= (i-s-j+s+k-l+j-k+l,j-k+l) = \\ &= (i,j-k+l)\end{aligned}$$

对于任意非负数 $s$。由 [25] 中的引理 1.4.6 可知，$(i-s,j-s)\cdot(k,l) \in \uparrow_{\preccurlyeq}(m,n)$，因此利用等式 (2)，得到包含关系 $\uparrow_{\preccurlyeq}(i,j)\cdot(k,l) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(m,n)$。

包含关系 $(i,j)\cdot\uparrow_{\preccurlyeq}(k,l) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(m,n)$ 的证明是类似的。 □

回顾一下，拓扑空间 $X$ 称为 贝尔空间，如果对于任意序列$\infty$ $A_1$，$A_2$，……，$A_i$，…… 空间 $X$ 的稠密开子集的交集 $\bigcap A_i$ 是 $i=1$中的稠密子集 $X$ [24]。

文献 [8]证明了，双循环半群上的每个左连续（右连续）豪斯多夫拓扑都是离散的。由例3可知，对于扩张双循环半群，相应的命题并不成立。

**例3.** 扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的拓扑 $\tau_{\mathrm{B}}$ 由如下前基$\mathscr{P}_{\mathrm{B}}$生成：

- $\mathscr{P}_0 = \{\{(i,j)\}\colon\ i \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}\}$;
- $\mathscr{P}_1 = \{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\setminus\{(i,j)\}\colon\ i,j\in\mathbb{Z}\}$;
- $\mathscr{P}_2 = \{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\setminus\uparrow_{\preccurlyeq}(i,j)\colon\ \ i,j\in\mathbb{Z}\}$;
- $\mathscr{P}_3 = \{O(i,\ j) = \bigcup_{k\in\omega}\uparrow_{\preccurlyeq}(i+k,\ \ j)\colon\ \ i,\ \ j\in\mathbb{Z}\}$。

显然， $\tau_{\mathrm{B}}$ –是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$上的非离散拓扑。集合中的所有点

$$\mathrm{IZ} = \{(i,j)\colon i \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}, j\in\mathbb{Z}\}$$

都是空间（$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{B}}$）中的孤立点，而由于 $\mathscr{P}_1 \subseteq \mathscr{P}_{\mathrm{B}}$，因此 $\tau_{\mathrm{B}}$ – $T_1$-拓扑。由前基 $\mathscr{P}_{\mathrm{B}}$ 的定义可知，对于任意 $i \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$和 $j\in\mathbb{Z}$，族 $\mathscr{B}_{\mathrm{B}}(i,j) = \{U_p(i,j)\colon\ \ p\in\mathbb{N}\}$，其中$U_p(i,j) = \{(i,j)\}\cup\bigcup_{s=p}^{\infty}\uparrow_{\preccurlyeq}(i+s,\ j)$，确定了拓扑 $\tau_{\mathrm{B}}$ 在点（$i,j$）处的一个基。根据命题1.3.5，[13], IZ是空间（$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{B}}$）中的开稠密子集，因此由专著 [24] 中的命题1.18和定理1.15可知，该拓扑空间是贝尔空间。

**命题5**。 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{B}})$ – 左拓扑半群。

证明。 固定半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 中的任意元素 $(i,j)$ 和 $(k,l)$。由拓扑 $\tau_{\mathrm{B}}$ 的定义可知，只需考虑 $(i,j)\cdot(k,l)$，其中 $i\in\mathbb{N}$ 的情形。

固定点 $U_p(m,n)$ 的任意开基邻域

$$(m,n) = (i,j)\cdot(k,l) = \begin{cases} (i-j+k,l), & \text{якщо } j\leqslant k;\\ (i,j-k+l), & \text{якщо } j>k \end{cases}$$

在拓扑空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{B}})$ 中。由于对任意自然数 $s$ ，等式成立

$$(i+s,j)\cdot(k,l) = \begin{cases} (i+s-j+k,l), & \text{якщо } j\leqslant k;\\ (i+s,j-k+l), & \text{якщо } j>k \end{cases} =$$
$$= (m+s,n),$$

因此由引理2可得， $\uparrow_{\preccurlyeq}(i+s,j)\cdot(k,l)\subseteq\uparrow_{\preccurlyeq}(m+s,n)$。由此可知，对任意自然数 $p$，包含关系 $U_p(i,j)\cdot(k,l)\subseteq U_p(m,n)$ 成立，因此，$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_{\mathrm{B}})$ 中的右平移是连续的。□

设 $X$ – 是一个拓扑空间， $Y$ – 是 $X$ 中的子空间。如果对于空间 $Y$ 中点 $x$ 的任意开邻域 $U(x)$，在 $Y$ 中都存在一个非空开子集 $V$，使得 $\mathrm{cl}_Y(V)\subseteq U(x)$，则称空间 $Y$ 在点 $x\in Y$ 处是 拟正则的。如果 $X$ – 在其每一点处都是拟正则的，则称拓扑空间 $X$ 为拟正则的。

**注释 2**。 (1) 根据 [24] 中的命题 1.30，任意可数的伯利空间 $T_1$ 都包含一个无限的孤立点子集，因此是准正则的。由上可知，拓扑空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\ \tau_{\mathrm{B}})$ 是准正则的。(2) 扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的每个连续左逆 $T_1$-拓扑都是连续右拓扑，因此根据 [22] 中的定理 1，它是离散的。(3) 由于逆映射 $\mathrm{inv}: \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\to\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, (i,\ \ j)\mapsto(j,\ \ i)$ 是扩展双循环半群的反同构，因此，关于拓扑 $\tau_{\mathrm{B}}$ 的对偶拓扑 $\tau_{\mathrm{dB}} = \{U\subseteq\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon \mathrm{inv}(U)\in\tau_{\mathrm{B}}\}$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上连续右伯利 $T_1$-拓扑。

## 3. $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的拓扑何时是离散的?

引理 3。*(i)* 对半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的任意元素 $(i,j)$、$(k,l)$、$(m,n)$ 和 $(p,q)$，由条件 $(p,q)=(i,j)\cdot(k,l)\cdot(m,n)$ 可推出等式 $p-q=i-j+k-l+m-n$。

$(ii)$ 半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 中的元素 $(i,j)$ 和$(k,l)$ 关于 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的自然偏序可比较，当且仅当 $i-j=k-l$。

$(iii)$ 若$(i_0,i_1)$、$(j_1,j_0)$ 和$(i_0,j_0)$ 是半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$的固定元素，则$(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 是方程的解

$$(i_0,i_1)\cdot(x,y)\cdot(j_1,j_0)=(i_0,j_0) \tag{3}$$

当且仅当$(x,y)\in\uparrow_{\preccurlyeq}(i_1,j_1)$。

*(iv)* 如果 $(j_1,j_0)$ 和 $(i_0,j_0)$ 是半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的固定元素，那么 $(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 是方程 $(x,y)\cdot(j_1,j_0)=(i_0,j_0)$ 的解，当且仅当 $(x,y)\in\uparrow_{\preccurlyeq}(i_0,j_1)$。*(v)* 如果 $(i_0,i_1)$ 和 $(i_0,j_0)$ 是半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的固定元素，那么 $(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 是方程 $(i_0,i_1)\cdot(x,y)=(i_0,j_0)$ 的解，当且仅当 $(x,y)\in\uparrow_{\preccurlyeq}(i_1,j_0)$。

证明。*(i)* 根据命题 2.1*(iv)*，由 [14] 条件 $(a,b)=(k,l)\cdot(m,n)$ 可推出等式 $a-b=k-l+m-n$。由于 $(p,q)=(i,j)\cdot(a,b)$，根据命题 2.1*(iv)*，由 [14] 可得，

$$p-q=i-j+a-b=i-j+k-l+m-n.$$

$(ii)$由命题 2 推出。

$(iii)$ $(\Leftarrow)$ 假设 $(x,y)\in\uparrow_{\preccurlyeq}(i_1,j_1)$。根据命题 2 存在一个非负整数 $a$ 使得 $(x,y)=(i_1-a,j_1-a)$。于是

$$\begin{aligned}(i_0,i_1)\cdot(i_1-a,j_1-a)\cdot(j_1,j_0)&=(i_0,i_1-(i_1-a)+(j_1-a))\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0,i_1-i_1+a+j_1-a)\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0,j_1)\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0,j_0),\end{aligned}$$

因此，$(x,y)$ 是方程（3）的解。

$(\Rightarrow)$ 假设 $(x,y)$ 是方程（3）的解。由命题 $(i)$ 可得

$$i_0-j_0=i_0-i_1+x-y+j_1-j_0,$$

因此，$x-y=i_1-j_1$。那么，根据命题（$ii$），元素（$x,y$）和（$i_1,j_1$）在半群$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$上的自然偏序$\preccurlyeq$下可比较。因此，以下条件至少有一个成立：（$x,y$）$\preccurlyeq$（$i_1,j_1$）或（$i_1,j_1$）$\preccurlyeq$（$x,y$）。若（$x,y$）$\preccurlyeq$（$i_1,j_1$），则根据命题2，存在一个非负整数$a$，使得（$x,y$）$=$（$i_1+a,j_1+a$）。那么

$$\begin{aligned}(i_0,i_1)\cdot(i_1+a,j_1+a)\cdot(j_1,j_0)&=(i_0-i_1+(i_1+a),j_1+a)\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0-i_1+i_1+a,j_1+a)\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0+a,j_1+a)\cdot(j_1,j_0)=\\&=(i_0+a,j_0+a),\end{aligned}$$

因此，$a=0$i$(x,\ y)=(i_1,\ j_1)\in\uparrow_{\preccurlyeq}(i_1,\ j_1)$。如果$(i_1,\ j_1)\preccurlyeq(x,\ y)$，那么$(x,\ y)\in\uparrow_{\preccurlyeq}(i_1,\ j_1)$。

命题 *(iv)* 和 *(v)* 的证明类似于命题 *(iii)* 的证明。 □

左（右）拓扑半群的孤立点集合 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 由命题 6描述。

**命题 6.** 设 $\tau$ 是扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的左（右）连续 $T_1$-拓扑。若$(i_0,j_0)$ 是空间$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$中的孤立点，则集合整数集$_{i_0}=\{(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon i\leqslant i_0\}$ (整数集$^{j_0}=\{(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon j\leqslant j_0\}$) 中的每个点都是空间$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$中的孤立点。

证明。由于 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中的右平移是连续的，且 $(i_0,j_0)$ 是 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中的孤立点，因此右平移 $\rho_{(j_0,j_0)}$ 的完整原像 $\rho^{-1}_{(j_0,j_0)}(i_0,j_0)$：$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\to\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, (k,l)\mapsto(k,l)\cdot(j_0,j_0)$ 单点集 $\{(i_0,j_0)\}$ 是空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中的既开又闭子集，因为 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 是一个 $T_1$-空间。

由命题2 可推出

$$\rho^{-1}_{(j_0,j_0)}(i_0,j_0)=\uparrow_{\preccurlyeq}(i_0,j_0)=\{(i_0-k,j_0-k)\colon k\in\omega\}.$$

由 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\ \tau)$ 是 $T_1$-空间这一点，根据上述内容可推出，形如 $(i_0-k,\ j_0-k)$ 的每个点在 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\ \tau)$ 中都是孤立的，因为

$$\{(i_0-k,\ j_0-k)\}=\uparrow_{\preccurlyeq}(i_0,j_0)\setminus(\uparrow_{\preccurlyeq}(i_0-k-1,j_0-k-1)\cup\{(i_0,j_0),\ldots,(i_0-k+1,j_0-k+1)\}).$$

固定半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 中任意一个元素 $(i,\ j)$，使得 $i\leqslant i_0$，即对于某个数 $k\in\omega$，$i=i_0-k$。那么

$$(i_0-k,j_0-k)=(i_0-k,j_0)\cdot(j_0,j_0-k)=\rho_{(j_0,j_0-k)}(i_0-k,j_0).$$

由假设 由上述命题和推理可得，完整的原像 3

$$\rho^{-1}_{(j_0,j_0-k)}(i_0-k,j_0-k)=\uparrow_{\preccurlyeq}(i_0-k,j_0)=\{(i_0-k-p,j_0-p)\colon p\in\omega\}$$

是拓扑空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\ \tau)$ 中的开闭子集，它由 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\ \tau)$ 中的孤立点组成。由此可得该命题。

对偶命题的证明类似。 □

定理2 给出了连续左（右） $T_1$-拓扑在扩展双循环半群上 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 为离散的充要条件。

**定理2**。 扩展双循环半群上的连续左（右） $T_1$-拓扑 $\tau$ 离散，当且仅当存在空间$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 的一列孤立点 $\{(i_n,j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得序列 $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}(\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ 严格单调递增。

证明。 </style}蕴含式 $(\Rightarrow)$ 显然。

$(\Leftarrow)$ 假设存在序列 $\{(i_n,j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，由空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 的孤立点组成，且序列 $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ 严格单调递增。任取半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的元素 $(i,j)$。则存在元素 $(i_k,j_k)$，$k\in\mathbb{N}$，属于序列 $\{(i_n,j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $i<i_k(j<j_k)$。根据命题 6，$(i,j)$ 是拓扑空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中的孤立点。由点 $(i,j)$ 的选取可知，拓扑 $\tau$ 是离散的。□

**注 3**。 由示例 3 可知，关于存在序列 $\{(i_n,j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$空间的孤立点 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 这一条件，即使在半群空间 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 为贝尔空间时也十分重要。

对于 $T_1$-半拓扑半群，定理 2 可弱化为如下定理。

**定理 3**。 扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$上的平移连续 $T_1$-拓扑 $\tau$ 离散，当且仅当空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 包含一个孤立点。

证明。 蕴含关系 $(\Rightarrow)$ 显而易见。

$(\Leftarrow)$ 假设空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 包含一个孤立点 $(i_0,j_0)$。任取一点 $(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$。那么 $(i_0,i)\cdot(i,j)\cdot(j,j_0)=(i_0,j_0)$。根据引理 3$(iii)$，方程 $(i_0,i)\cdot(x,y)\cdot(j,j_0)=(i_0,j_0)$ 的解集与集合 $\uparrow_{\preccurlyeq}(i,j)$ 相同。由于 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中的平移是连续的，因此集合 $\uparrow_{\preccurlyeq}(i,j)$ 是空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中的开集，它是开集 $\{(i_0,j_0)\}$关于连续映射的完全原像，该映射是右$\rho_{(j,j_0)}$平移与左 $\lambda_{(i_0,i)}$平移的复合。根据命题 2，$(i,j)\preccurlyeq(i-1,j-1)$ 且 $\uparrow_{\preccurlyeq}(i,j)\setminus\uparrow_{\preccurlyeq}(i-1,j-1)=\{(i,j)\}$。由于 $\tau$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的 $T_1$-拓扑，因此根据引理 1，集合 $\uparrow_{\preccurlyeq}(i-1,j-1)$ 在空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中是闭集。因此，$(i,j)$ 是空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中的孤立点。由以上可知，$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 是离散空间。□

根据命题 1.30， [24] 每个可数的贝尔空间 $T_1$都包含一个由其中孤立点组成的无限子集，因此由定理3可得如下推论。

**推论 1.** 扩展双循环半群上的平移连续贝尔 $T_1$-拓扑 $\tau$ 是离散的。

引理 *4.* 设 $\tau$ – 是扩展双循环半群上的平移连续 $T_1$-拓扑 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，且映射 $\varphi$: $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$、 $x \mapsto xx^{-1}$ 和 $\psi$: $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$、 $x \mapsto x^{-1}x$ 连续。若对于某个幂等元 $(i,i)$， $\in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 点 $(i,i)$ 在空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ 中存在一个开邻域 $U(i,i)$，使得集合 $U(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 有限，则 $\tau$– 是离散拓扑。

证明。 由于 $\tau$– $T_1$拓扑定义在 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上，不失一般性，我们可以假设在拓扑空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ 中，点 $(i,i)$ 存在一个开邻域，使得 $U(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) = \{(i,i)\}$。由 $\tau$ 是平移连续拓扑可知，对于半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的任意幂等元 $(j,j)$，它在空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ 中存在一个开邻域 $V(j,j)$，使得

$$(i,j) \cdot V(j,j) \cdot (j,i) \subseteq U(i,i).$$

由引理 3$(iii)$ 可知， $V(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}(j,j)$，因为邻域 $U(i,i)$ 只包含一个幂等元 $(i,i)$。由于 $\tau$ 是平移连续的 $T_1$-拓扑，根据引理 1，集合 $\uparrow_{\preccurlyeq}(j-1, j-1)$ 在拓扑空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ 中是闭的。因此，开邻域 $W(j,j) = V(j,j) \setminus \uparrow_{\preccurlyeq}(j-1, j-1)$ 只包含半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的一个幂等元。由以上证明可知，半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的每个幂等元 $(k,k)$ 都有一个邻域 $W(k,k)$，其中只包含一个幂等元。

设 $(m,n)$ 是半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的任意元素。由于映射 $\varphi$: $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$， $x \mapsto xx^{-1}$ 和 $\psi$: $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$， $x \mapsto x^{-1}x$ 连续，由前述内容可知，在拓扑空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ 中，点 $(m,n)$ 存在一个开邻域 $O(m,n)$，使得

$$(m_1,n_1) \cdot (m_1,n_1)^{-1} = (m_1,m_1) \in \{(m,m)\}$$

i

$$(m_1,n_1)^{-1} \cdot (m_1,n_1) = (n_1,n_1) \in \{(n,n)\}$$

对所有 $(m_1,n_1) \in O(m,n)$ 均成立。因此，集合 $O(m,n)$ 只包含元素 $(m,n)$，故引理的命题成立。□

**引理 5.** 设 $\tau$ 是扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的平移连续 $T_1$-拓扑。若存在元素 $(i,j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，使得空间 $\updownarrow_{\preccurlyeq}(i,j)$ 在点 $(i,j)$ 处是准正则的，则对半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的每个元素 $(m,n)$，空间 $\updownarrow_{\preccurlyeq}(m,n)$ 在点$(m,n)$ 处都是准正则的。

证明。由于 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ 是 $T_1$-空间，因此对于任意元素 $(k,l)$， $\in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 集合 $\downarrow_{\preccurlyeq}(k,l)$ 在子空间 $\updownarrow_{\preccurlyeq}(k,l)$ 中是开集，因为根据引理 1，集合 $\uparrow_{\preccurlyeq}(k-1, l-1)$ 在 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ 中是闭的。映射 $\mathfrak{f}_i^{(m,n)}(\ ,j)$: $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, $(a,b) \mapsto (i,m) \cdot (a,b) \cdot (n,j)$ 作为左移和右移的复合是连续的。根据命题 2，对于任意 $k \in \omega$， $(m+k, n+k) \in \uparrow_{\preccurlyeq}(m,n)$，并由 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上半群运算的定义可得

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_{(i,j)}^{(m,n)}(m+k, n+k) &= (i,m) \cdot (m+k, n+k) \cdot (n,j) = \\ &= (i-m+m+k, n+k) \cdot (n,j) = \\ &= (i+k, n+k-n+j) = \\ &= (i+k, j+k)\end{aligned}$$

对任意 $k \in \omega$。因此，映射 $|_{\downarrow_{\preccurlyeq}(m,n)}$: $\downarrow_{\preccurlyeq}(m,n) \to \downarrow_{\preccurlyeq}(i,j)$ 和 $\mathfrak{f}^{(i,j)}{}_{(m,n)}|_{\downarrow_{\preccurlyeq}(i,j)}$: $\downarrow_{\preccurlyeq}(i,j) \to \downarrow_{\preccurlyeq}(m,n)$ 在 $\mathfrak{f}_i^{(m,n)}(\ ,j)$ 和 $\mathfrak{f}^{(i,j)}{}_{(m,n)}$ 上的限制分别互为逆映射；由 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau)$ 中平移的连续性可知， $|_{\downarrow_{\preccurlyeq}(m,n)}$ 和 $\mathfrak{f}^{(i,j)}{}_{(m,n)}|_{\downarrow_{\preccurlyeq}(i,j)}$ 是空间 $\downarrow_{\preccurlyeq}(i,j)$ 和 $\downarrow_{\preccurlyeq}(m,n)$ 的同胚。由于对半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的任意元素 $(p,q)$，集合 $\downarrow_{\preccurlyeq}(p,q)$ 在空间 $\updownarrow_{\preccurlyeq}(p,q)$ 中是开集，因此得到引理的命题。□

**引理 6.** $\tau$ 是扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的逆半群 $T_1$-拓扑。若存在幂等元 $(i,i) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，使得拓扑空间 $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 在点 $(i,i)$处准正则，则 $\tau$ 是离散拓扑。

证明。设 $U(i,i)$ 是空间 $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 中点 $(i,i)$ 的一个开邻域。若 $\tau$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的非离散拓扑，则由引理 4 可知，$U(i,i)$ 是无限集。由于 $\tau$ 是 $T_1$-拓扑，因此 $U_{(i,i)} = U(i,i)\setminus\{(i,i)\}$ 是空间 $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 中的非空开子集。于是存在非空开子集 $W_{(i,i)} \subseteq U_{(i,i)}$，使得 $\mathrm{cl}_{E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})}(W_{(i,i)}) \subseteq U_{(i,i)}$。显然，$O(i,j) = U(i,j) \setminus \mathrm{cl}_{E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})}(W_{(i,i)})$ 是空间 $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 中点 $(i,i)$ 的一个开邻域。不失一般性，可设集合 $W_{(i,i)}$ 是无限的。事实上，反之，若该集合有限，则存在幂等元 $(j,j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，它有一个开邻域 $U(j,j)$，满足条件 $U(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) = \{(j,j)\}$，于是根据引理 4，$\tau$ 是离散拓扑。

根据引理 1，集合 $\uparrow_{\preccurlyeq}(i,i)$ 在拓扑空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中是闭的，因此在空间$E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$中也是闭的。由此可知，存在幂等元 $(j,j) \in W_{(i,i)}$ 使得 $(j,j) \in \downarrow^{\circ}_{\preccurlyeq}(i,i)$。于是 $(i,i)\cdot(j,j) = (j,j)$，由 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中半群运算的连续性可知，在空间 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ 中分别存在点 $(i,i)$ 和 $(j,j)$ 的开邻域$W_1(i,i)$ 和 $W_1(j,j)$，使得

$$(W_1(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})) \cdot (W_1(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})) \subseteq W_{(i,i)}, \tag{4}$$

$$W_1(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \subseteq O(i,i),$$
$$W_1(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \subseteq W_{)i,i)},$$

集合 $W_1(i,i) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 和 $W_1(j,j) \cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 都是无限的。因此，对于任意幂等元 $(k,k) \in W_1(j,j)$，存在幂等元 $(l,l) \in W_1(i,i)$，使得 $(k,k)\cdot(l,l) = (l,l)\cdot(k,k) = (l,l)$，这与条件（4）矛盾。由此可知，集合 $W_1(i,i)\cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 或 $W_1(j,j)\cap E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 中至少有一个是有限的。接下来我们将使用引理 4。□

由引理 5 和6 可得定理 4。

**定理 4.** 设 $\tau-$ 是扩展双循环半群$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$上的逆半群 $T_1$-拓扑。若存在元素 $(i,j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，使得拓扑空间 $\updownarrow_{\preccurlyeq}(i,j)$ 在点 $(i,j)$处是拟正则的，则 $\tau-$ 是离散拓扑。

## 参考文献

[1] В. В. Вагнер, 广义群, 苏联科学院通报 84 (1952), 1119–1122. 1[2] О. Гутік, М. Михаленич, 关于双循环幺半群的一种推广, 利沃夫大学学报：力学与数学系列 90 (2020), 5–19. DOI: 10.30970/vmm.2020.90.005-019 1[3] O. Andersen, 抽象半群结构报告, 博士论文. 汉堡, 1952. 1[4] M. O. Bertman and T. T. West, 条件紧双循环半拓扑半群, 爱尔兰皇家科学院院刊 A76 (1976), no. 21–23, 219–226. 1[5] R. H. Bruck, 二元系统概论, (Erg. Math. Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20) Springer, 柏林-G¨ottingen- 海德堡, 1958. 1[6] J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, 拓扑半群理论, 第 I 卷, Marcel Dekker, Inc., 纽约和巴塞尔, 1983. 1[7] A. Chornenka and O. Gutik, 关于双循环幺半群的拓扑化, Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. 95 (2023), 46–56. DOI: 10.30970/vmm.2023.95.046-056 1, 2[8] A. Chornenka and O. Gutik, 关于双循环幺半群子半群的拓扑化, 预印本 (arXiv:2601.02100). 1, 2[9] A. H. Clifford and G. B. Preston, 半群代数理论, 第 I 卷, 美国数学会 Surveys 7, 罗得岛州普罗维登斯, 1961. 1, 1[10] A. H.Clifford and G. B. Preston, 半群代数理论, 第 II 卷, 美国数学会 Surveys 7, 罗得岛州普罗维登斯, 1967. 1[11] W. W. Comfort, 拓扑群, 集合论拓扑手册, Kunen K., Vaughan J. (编) 爱思唯尔, 1984, 第 1143–1263 页. 1[12] C. Eberhart and J. Selden, 关于双循环半群的闭包, 美国数学会汇刊 144 (1969), 115–126. DOI: 10.1090/S0002-9947-1969-0252547-6 1

[13] R. Engelking, 一般拓扑学, 第 2 版, Heldermann, 柏林, 1989年. 1, 2, 2, 3[14] I. R. Fihel and O. V. Gutik, 关于扩展双循环半群的闭包, Carpathian Math. Publ. 3 (2011年), no. 2, 131–157. 1, 2, 3[15] V. A. Fortunatov, 半群单扩张上的同余关系, Semigroup Forum 13 (1976年), 283–295. DOI: 10.1007/BF02194949 1[16] G. L. Fotedar, 关于与有序群相关的半群, Math. Nachr. 60 (1974年), 297–302. DOI: 10.1002/mana.19740600128 1[17] G. L. Fotedar, 关于双单逆半群类, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978年), 49–53. 1[18] O. Gutik, 泰曼诺夫半群的拓扑性质, Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc. 13 (2016年), 1–5. 1[19] O. Gutik, 关于局部紧半拓扑 0-双单逆 ω半群, Topol.AlgebraAppl.6(2018),77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008 1[20] O. Gutik, 关于不可拓扑化半群, Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. 96 (2024年), 25–36. DOI: 10.30970/vmm.2023.96.025-036 1[21] O. Gutik, 关于仅容许离散左连续豪斯多夫拓扑的半群, 预印本. 1[22] O. V. Gutik and K. M. Maksymyk, 关于线性有序群的半拓扑双循环扩张, Мат. методи фіз.-мех. поля 59 (2016 年 ), no. 4, 31–43; 重印版 : J. Math. Sc. 238 (2019 年 ), no. 1, 32–45. DOI: 10.1007/s10958-022-06058-6 2[23] O. Gutik, D. Pagon, and K. Pavlyk, 线性有序群的双循环扩张上的同余关系, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. 15 (2011年), no. 2, 61–80. DOI: 10.12697/ACUTM.2011.15.10 1[24] R. C. Haworth and R. A. McCoy, 贝尔空间, Dissertationes Math., 华沙, PWN, 1977年. 第 141 卷. 2, 3, 1, 3[25] M. V. Lawson, 逆半群: 部分对称理论, 新加坡: World Scientific, 1998年. DOI: 10.1142/3645 1, 2, 2[26] A. A. Markov, 关于自由拓扑群, Izvestia Akad. Nauk SSSR 9 (1945年), 3—64 (俄文); 英文版见: Transl. Amer. Math. Soc. 8 (1962年), no. 1, 195—272. 1[27] A. Yu. Ol’shanskiy, 关于可数不可拓扑化群的注记, Vestnik Moscow Univ. Ser. Mech. Math. 39 (1980年), 1034 (俄文). 1[28] M. Petrich, 逆半群, John Wiley & Sons, 纽约, 1984年. 1[29] L. S. Pontryagin, 拓扑群, Gordon & Breach, 纽约等地, 1966年. 1[30] N. R. Reilly, 双单 ω半群, Proc. Glasgow Math. Assoc. 7 (1966年), no. 3, 160–167. DOI: 10.1017/S2040618500035346 1[31] W. Ruppert, 紧半拓扑半群：内在理论, Lect. Notes Math., 1079, Springer, 柏林, 1984年. DOI: 10.1007/BFb0073675 1[32] A. D. Taimanov, 一个仅容许离散拓扑的半群实例, Algebra Logic 12 (1973年), no. 1, 64–65. DOI: 10.1007/BF02218642 1[33] A. D. Taimanov, 交换半群的拓扑化, Math. Notes 17 (1975年), no. 5, 443–444. DOI: 10.1007/BF01155800 1[34] R. J. Warne, 双单逆半群类 , Pacif. J. Math. 18 (1966 年 ), no. 3, 563–577. DOI: 10.2140/pjm.1966.18.563 1[35] R. J. Warne, 模群上的双单逆半群, Duke Math. J. 34 (1967年), no. 4, 787–812. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03481-3 1, 1

伊万·弗兰科利沃夫国立大学，大学街1号，利沃夫，79000，乌克兰电子邮箱地址：oleg.gutik@lnu.edu.ua, marharyta.zolotar@lnu.edu.ua, oleksandra.lysetska@lnu.edu.ua