耦合曲线缩短流与二维里奇流下嵌入环带的定量谱稳定性

MOHAMMADJAVAD
HABIBIVOSTAKOLAEI河南省科学院数学研究所
mjhabibi@hnas.ac.cn

arXiv:2601.14575v1 [math.DG] 21 Jan 2026

摘要

我们研究嵌入环带上的狄利克雷特征值的谱稳定性。该环带的边界沿曲线缩短流演化，而环境曲面则遵循二维里奇流演化。借助变分公式、Rellich 型恒等式和调和容量方法，我们将特征值变化与几何亏量及模数联系起来。我们建立了定量界，用于比较演化环带的谱与具有相同模数的平坦圆柱的谱。由此，我们得到几何稳定性，并证明谱隙估计受亏损泛函控制。[1]

目录

1 引言与研究动机 **1**
1.1 预备知识.2 1.2 背景与相关工作.3

2 变分公式 **5**

3 环域与圆柱的谱比较 123.1 Rellich 型公式与亏损边界项.12 3.2 几何稳定性与谱隙.17

4 示例与数值结果 25

1 引言与研究动机

设 M 为一个光滑、紧致、定向且无边界的黎曼曲面。它可以带有固定度量 g，也可以带有随时间变化的度量 $g(t)$，并按二维里奇流演化：$\partial_t g = -2Kg$，其中 K 为高斯曲率。 A 表示嵌入在M中的一个环域，其边界由两条互不相交的光滑简单闭曲线 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$构成。本文关注边界曲线在曲线缩短流（CSF）作用下演化的情形。粗略地说，在每个时刻 t，我们选取一个区域 $A(t)$，它与环域微分同胚，边界由两条互不相交的光滑简单闭曲线 $\partial A(t) = \Gamma_0(t) \cup \Gamma_1(t)$ 构成，并且边界曲线按曲线缩短流演化，即

$$\partial_t \Gamma_i = \kappa \nu, \quad i = 1, 2,$$

[1]AMS 分类：35P15；53C44；58J50。关键词：拉普拉斯特征值、狄利克雷边值问题、环域、里奇流、曲线缩短流。

其中 κ 为测地曲率。这意味着，若 V 表示 $\partial A(t)$上的外法向速度，则在每个时刻 t，点 x 沿着 ∂A运动，其运动方式为 $x_t = V\nu$，其中 ν 为 A的外单位法向量。

在本文中， u 是调和容量势，即 u 在 $A(t)$ 中满足方程 $\Delta_{g(t)}u = 0$，且满足边界条件 $u|_{\Gamma_0(t)} = 0$ 和 $u|_{\Gamma_1(t)} = 1$。此外，将 $E(t) = \frac{1}{2}\int_{A(t)} |\nabla u|^2 d\mu_{g(t)}$ 视为能量泛函，其中 $h(t) = \frac{1}{2E(t)}$ 是模数，而 $\mathcal{D}(t) = \frac{1}{2}\int_{A(t)} |\operatorname{Hess} u|^2 d\mu_{g(t)}$ 表示亏损泛函。

For 对每个 t，令 $(\lambda(t), \phi(t))$ 为 $-\Delta_{g(t)}\phi = \lambda\phi$ 在 $A(t)$ 上的一个简单狄利克雷特征对，即。e.,

$$-\Delta_{g(t)}\phi = \lambda\phi \quad \text{in } A(t), \quad \phi|_{\partial A(t)} = 0,$$

其中我们采用归一化

$$\int_{A(t)} \phi^2 d\mu_{g(t)} = 1,$$

以确保能够顺利运用 Kato–Rellich 理论和解析扰动 .

1.1 预备知识

光滑黎曼流形 $(M, g(t))$ 上的里奇流是度量张量满足下式的演化方程

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{ij},$$

其中 Ric 表示 $g(t)$ 的里奇曲率。在二维情形下，由于里奇张量与度量成比例，该方程大大简化：

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}Rg,$$

其中 R 是标量曲率。因此，二维里奇流可化为标量共形演化：

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -Rg.$$

这一结构意味着该流保持度量的共形类不变，而共形因子 u 在 $g(t) = e^{2u(t)}g_0$ 中的演化满足以下非线性热型方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{g_0}u - K_{g_0},$$

其中， K_{g_0} 是初始度量的高斯曲率。在二维情形下，里奇流起到曲率归一化过程的作用，趋于平滑度量中的不规则性，并使度量演化至常曲率度量；具体取决于底层曲面的拓扑（欧拉示性数为正、零或负）。对于紧曲面上的所有光滑初始度量，该流都适定，并可通过适当的重标度技术延拓穿过奇点。这一性质使二维里奇流成为几何分析、特希米勒理论和谱几何中的重要分析工具，尤其适用于研究几何量或谱量如何随时间演化（见 [6, 13]）。

设 $\Gamma_t \subset (M, g(t))$ 是黎曼曲面上的一族光滑闭嵌入曲线。曲线缩短流（CSF）由以下几何演化方程定义

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\kappa\nu,$$

其中，$\gamma(s,t)$ 是 Γ_t 的光滑参数化，κ 表示演化曲线相对于环境度量 $g(t)$ 的测地曲率，而 ν 是沿着 Γ_t 的外向单位法向量场。直观地说，曲线上的每个点都沿法向量方向运动，速度等于其测地曲率。该流是长度泛函的自然梯度流

$$L[\Gamma] = \int_{\Gamma} ds,$$

因此，曲线的总长度会单调递减：

$$\frac{dL}{dt} = -\int_{\Gamma_t} \kappa^2 \, ds \leq 0.$$

在曲线缩短流下，嵌入曲线在奇点形成之前始终保持嵌入，而凸曲线会在有限时间内平滑地收缩至一个圆点。当环境度量同时按里奇流演化时，这一耦合系统呈现出丰富的耦合几何行为，曲面与边界曲线的曲率会动态地相互作用。在固定或演化的黎曼曲面上，曲线缩短流为分析演化区域相关的几何量和谱量提供了强有力的工具（更多详情见 [9, 11]）。

1.2 背景与相关工作

紧黎曼曲面及其子区域上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱性质研究，是几何分析的核心主题之一，它将曲率、拓扑与特征值行为联系起来。给定一个紧黎曼曲面（M，g）（可能带有边界），其特征值问题

$$-\Delta_g u = \lambda u,$$

在适当的边界条件（狄利克雷、诺伊曼或混合条件）下，具有离散谱

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty,$$

其中，每个特征值 λ_k 都编码了关于 (M, g) 的几何与拓扑信息（见 [5]）。经典结果表明，这些谱量与面积、曲率、直径和边界长度等几何不变量有着复杂的依存关系。对于带边界的曲面，几何不等式和比较结果（例如 [14, 20]）将 λ_1 与底层共形结构联系起来。对于嵌入环域，环带模数等额外的共形参数在决定谱行为方面起着根本作用，因为在二维中，拉普拉斯算子及其特征函数具有共形协变性。因此，环域是研究几何与拓扑之间的相互作用如何影响谱不变量的自然模型。

当环境度量和边界都在演化时，会带来新的分析挑战。具体而言，可以研究嵌入环带 $A_t \subset (M,\ g(t))$ 上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的特征值如何演化，其中黎曼度量 $g(t)$ 满足二维里奇流，而边界分支 ∂A_t 则在曲线缩短流下演化。最近，Sobnack 和 Topping [18] 证明，对于曲面上在曲线缩短流下演化的两条互不相交的闭嵌入曲线，它们之间环形区域的共形模数随时间单调增加。这种流下模数的单调性提供了一种新的共形不变量，可用于控制演化环带的几何和解析行为。具体而言，随着模数增大，环带在共形意义上变得“更薄”，这会直接影响狄利克雷或

诺伊曼特征值等谱量的变化。因此，环境度量上的里奇流与边界上的曲线缩短流相结合，为研究动态变化区域中几何与谱的耦合演化提供了丰富的框架。

过去十年，尤其是近几年，人们对黎曼流形有界区域的谱问题重新燃起了浓厚兴趣，这既得益于几何分析的发展，也源于对斯捷克洛夫问题等边界谱问题的再次关注。综述和概述文章总结了许多新方向：斯捷克洛夫特征值的尖锐上、下界，渐近性与计数函数的精细研究，以及与自由边界极小曲面的联系，均取得了显著进展。这些进展使有界区域上的特征值研究成为一项更宏大的计划的一部分，该计划将极值特征值问题与几何偏微分方程及变分构造联系起来（例如，参见近期关于斯捷克洛夫问题和谱不等式的综述）。近期研究的另一条脉络聚焦于带孔区域（二连通区域、环域），以及拓扑和共形不变量如何影响谱量。对于环域，经典结果正由拉普拉斯谱和斯捷克洛夫谱的尖锐界与刚性现象加以补充：研究人员为对称环域推导了显式公式和比较结果，研究了内孔移动时特征值的单调性与极值问题，并探讨了边界约束下特征函数的刚性。这些研究表明，环域的共形参数（特别是模数）自然会出现在二维特征值估计中，因为拉普拉斯算子的共形协变性，以及共形映射在控制多连通区域上瑞利商方面的特殊作用。与本文最为相关的是近期将边界几何流与所围区域的共形不变量联系起来的成果。Sobnack 和 Topping [18] 证明，当两条嵌套的嵌入曲线同时在曲线缩短流下演化时，它们之间环域的共形模数随时间单调（事实上是递增）的；他们还在环境曲面曲率具有下界的情况下给出了相应的推广。这种单调性为演化环域的共形几何提供了稳健且流不变的控制，因此也为谱问题搭建了一座自然的桥梁：模数递增会约束共形类，进而直接影响对共形结构敏感的谱量（例如瑞利商，以及区域演化时狄利克雷／诺伊曼／斯捷克洛夫特征值的变化）。与这条研究脉络相辅相成的是，近期若干预印本和文章推进了带孔区域的特征值界研究，给出了对称环域的显式计算，并改进了能够反映多个边界分支存在与否的高阶斯捷克洛夫估计。综合来看，这些成果为研究嵌入环带的耦合里奇流–曲线缩短流演化提供了具体策略：利用模数单调性控制环带的共形几何，再结合来自里奇流的演化几何量，推导演化区域上拉普拉斯谱（满足狄利克雷、诺伊曼或斯捷克洛夫条件）的单调性、比较或渐近结论。后文将采用这一思路，把演化模数界与谱不等式联系起来，并推导耦合流下特征值时间导数的初步结果（例如，详见 [3, 7, 8]）。

全文中，我们均采用以下基本假设。

- $(M,\ g(t))$ 是一张光滑紧致的黎曼曲面，其中 $g(t)$ 按照二维里奇流 $\partial_t g = -2Kg$ 演化。
- $A(t) \subset M$ 是一个光滑嵌入的环域，其边界分支 $\Gamma_0(t)$ $\Gamma_1(t)$ 按照曲线缩短流演化。
- 该环域存在一个宽度固定为 $\rho_0 > 0$ 的管状邻域，且该邻域随时间一致，并具有一致有界的曲率和单射半径。

- 高斯曲率满足 $|K|_{L^\infty(A(t))} \leq K_0$ 对所有 t 均成立。
- 调和容量势 $u(t)$ 满足非退化条件

$$m := \inf_{\partial A(t)} \partial_\nu u\left(t\right) > 0.$$

除非另有说明，估计中出现的所有常数仅取决于（ρ_0、K_0）以及与 $A(t)$ 相关的标准椭圆估计常数和 Sobolev 常数。

2 变分公式

对于一族边界速度场为 V 的光滑区域 $\Omega_t \subset M$，它断言，对于任意充分光滑的函数 F，

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} F\, d\mu_g = \int_{\Omega_t} \frac{\partial F}{\partial t}\, d\mu_g + \int_{\partial\Omega_t} F\left(V\cdot\nu\right) d\sigma_g,$$

其中，ν 是外单位法向量，$d\sigma_g$ 是由 $g(t)$ 诱导的边界测度。该定理是演化几何中许多变分恒等式的基础，使我们能够在度量和区域同时演化时计算能量、面积或谱泛函的时间导数（例如参见 [12]）。该公式称为“雷诺输运定理”，本节广泛运用它来寻找和计算变分公式。

我们回顾一下，当 $-\Delta_{g(t)}\phi = \lambda\phi$ 在有界区域内处处成立且 ϕ 在边界上消失时，λ 被称为与特征函数 ϕ 相关的拉普拉斯算子的特征值。还可以作归一化假设，即对于有界区域 A，则

$$\int_A \phi^2 d\mu_g = 1.$$

为了将 λ 表示为积分，由于 $\int|\nabla\phi|^2 = \int\phi\left(-\Delta\phi\right) = \lambda\int\phi^2 = \lambda$，于是

$$\lambda\left(t\right) = \int_{A(t)} |\nabla\phi|^2 d\mu_g.$$

引理 2.1. 设 $(M, g\left(t\right))$ 为一族光滑的一参数黎曼曲面，并设$A(t) \subset M$ 为一族与环域微分同胚且具有光滑边界 $\partial A(t) = \Gamma\left(t\right)$的有界区域。若对每个 t，$\lambda\left(t\right)$ 表示拉普拉斯特征值，而 $\phi\left(t\right)$ 表示其对应的特征函数，并满足狄利克雷边界条件和归一化，则

$$\frac{d}{dt}\lambda = -\int_{\partial A} V\left(\partial_\nu\phi\right)^2 d\sigma_g + \int_A \{\frac{1}{2}\operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)\left(|\nabla\phi|^2 - \lambda\phi^2\right) - \partial_t g\langle\nabla\phi,\nabla\phi\rangle\} d\mu_g,$$

其中，V 是边界沿外法向方向 ν 的法向速度，且此处$\partial_\nu\phi := \langle\nabla\phi, \nu\rangle_{g(t)}$。

证明。由于

$$\frac{d}{dt}\lambda = \frac{d}{dt}\int_{A(t)} |\nabla\phi|^2 d\mu_g,$$

该 pr 问题转化为直接计算右侧。显然,

$$\partial_t\left(|\nabla\phi|^2\right)=\partial_t\left(g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi\right)=\left(\partial_t g^{ij}\right)\partial_i\phi\partial_j\phi+2g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\left(\partial_t\phi\right).$$

利用 $\partial_t g^{ij}=-g^{ik}g^{jl}\partial_t g_{kl}$，我们可以写成

$$\left(\partial_t g^{ij}\right)\partial_i\phi\partial_j\phi=-\partial_t g\langle\nabla\phi,\nabla\phi\rangle,$$

其中，我们采用简写 $\partial_t g\langle X,\ X\rangle=\partial_t g_{ij}X^iX^j$ 表示向量场 X。因此

$$\partial_t\left(|\nabla\phi|^2\right)=-\partial_t g\langle\nabla\phi,\nabla\phi\rangle+2\langle\nabla\phi,\nabla\left(\partial_t\phi\right)\rangle.$$

为便于书写，由于此时我们省略对 t 的显式依赖，并将积分写在$A=A(t)$、 $\partial A=\partial A\left(t\right)$上。对 $|\nabla\phi|^2$应用雷诺输运定理，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\lambda&=\int_A\left(\partial_t\left(|\nabla\phi|^2\right)+\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2\operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)\right)d\mu_g+\int_{\partial A}|\nabla\phi|^2Vd\sigma_g\\&=\int_A\left(-\partial_t g\langle\nabla\phi,\nabla\phi\rangle+2\langle\nabla\phi,\nabla\left(\partial_t\phi\right)\rangle+\frac{1}{2}\operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)|\nabla\phi|^2\right)d\mu_g\\&+\int_{\partial A}|\nabla\phi|^2Vd\sigma_g.\end{aligned}$$

对项 $2\int_A\langle\nabla\phi,\ \nabla\left(\partial_t\phi\right)\rangle d\mu_g$使用分部积分（格林恒等式），可得

$$2\int_A\langle\nabla\phi,\nabla\left(\partial_t\phi\right)\rangle d\mu_g=-2\int_A\left(\partial_t\phi\right)\Delta\phi d\mu_g+2\int_{\partial A}\left(\partial_t\phi\right)\partial_\nu\phi d\sigma_g,$$

其中 $\partial_\nu\phi$ 表示 ∂A上的外法向导数。由于 ϕ 满足拉普拉斯方程，因此

$$-2\int_A\left(\partial_t\phi\right)\Delta\phi d\mu_g=2\lambda\int_A\phi\partial_t\phi d\mu_g.$$

特征函数 ϕ 满足狄利克雷条件 $\phi|_{\partial A(t)}\equiv0$ ，对每个 t 均成立。沿着边界点 $x\left(t\right)\in\partial A\left(t\right)$对这一恒等式求导，得到

$$0=\frac{d}{dt}\phi\left(x\left(t\right),t\right)=\partial_t\phi\left(x\left(t\right),t\right)+\langle\nabla\phi\left(x\left(t\right),t\right),x_t\rangle.$$

但是 $x_t=V\nu$ 且 $\langle\nabla\phi,\ \nu\rangle=\partial_\nu\phi$，因此

$$\partial_t|_{\partial A}=-V\partial_\nu\phi.$$

（由于 ϕ 沿边界恒为零，因此没有切向贡献。）于是边界项为

$$2\int_{\partial A}\left(\partial_t\phi\right)\partial_\nu\phi d\sigma_g=2\int_{\partial A}\left(-V\partial_\nu\phi\right)\partial_\nu\phi d\sigma_g=-2\int_{\partial A}V\left(\partial_\nu\phi\right)^2d\sigma_g.$$

我们回顾一下，边界项 $\int_{\partial A}|\nabla\phi|^2Vd\sigma_g$ 来自雷诺输运定理，但 $\phi|_{\partial A}=0$ 因此切向导数消失，故

$$|\nabla\phi|^2|_{\partial A}=\left(\partial_\nu\phi\right)^2.$$

因此，边界项的总贡献为

$$-2\int_{\partial A} V\left(\partial_\nu \phi\right)^2 d\sigma_g + \int_{\partial A} \left(\partial_\nu \phi\right)^2 V d\sigma_g = -\int_{\partial A} V\left(\partial_\nu \phi\right)^2 d\sigma_g.$$

对归一化方程应用雷诺输运定理，可得

$$0 = \frac{d}{dt}\int_A \phi^2 d\mu_g = \int_A \left(2\phi\partial_t\phi + \frac{1}{2}\phi^2 \operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)\right) d\mu_g + \int_{\partial A} \phi^2 V d\sigma_g.$$

类似地，由于边界条件，边界项消失。因此

$$\int_A \phi\partial_t\phi d\mu_g = -\frac{1}{4}\int_A \phi^2 \operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right) d\mu_g. \tag{1}$$

这将有助于消去 $\int \phi\partial_t\phi$。现在，汇总以上各部分，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\lambda &= -\int_{\partial A} V\left(\partial_\nu\phi\right)^2 d\sigma_g + \int_A \left(-\partial_t g\langle\nabla\phi,\nabla\phi\rangle + 2\langle\nabla\phi,\nabla\left(\partial_t\phi\right)\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)|\nabla\phi|^2\right) d\mu_g \\ &= -\int_{\partial A} V\left(\partial_\nu\phi\right)^2 d\sigma_g + \int_A \left(-\partial_t g\langle\nabla\phi,\nabla\phi\rangle + 2\lambda\phi\partial_t\phi + \frac{1}{2}\operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)|\nabla\phi|^2\right) d\mu_g.\end{aligned}$$

由 (1) 可得

$$2\lambda\int_A \phi\partial_t\phi d\mu_g = 2\lambda\left(-\frac{1}{4}\int_A \phi^2 \operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right) d\mu_g\right) = \frac{\lambda}{2}\int_A \phi^2 \operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right) d\mu_g.$$

因此，内部被积函数变为

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)\left(|\nabla\phi|^2 - \lambda\phi^2\right) - \partial_t g\langle\nabla\phi,\nabla\phi\rangle.$$

这与边界被积函数正是我们所需要的。 □

注记 2.2 **(特殊情形)**。• 考虑固定度量（$\partial_t g \equiv 0$）。此时公式化为经典哈达玛公式

$$\frac{d}{dt}\lambda = -\int_{\partial A} V\left(\partial_\nu\phi\right)^2 d\sigma_g,$$

这是标准结果，即向内运动（$V < 0$）会增加 λ。

- 考虑固定区域（$V \equiv 0$），因此只有度量在变化。此时

$$\frac{d}{dt}\lambda = \int_A \left(-\partial_t g\langle\nabla\phi,\nabla\phi\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)|\nabla\phi|^2 - \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)\phi^2\right) d\mu_g.$$

- 共形变分 $\partial_t g = 2fg$（维数为 n 中的无穷小共形因子 $2f$）。计算 $\partial_t g\langle\nabla\phi,\ \nabla\phi\rangle = 2\dot{f}|\nabla\phi|^2$，以及 $\operatorname{tr}_g(\partial_t g) = 2n\dot{f}$。代入内部被积函数可得

$$-2\dot{f}|\nabla\phi|^2 + n\dot{f}|\nabla\phi|^2 - n\dot{f}\lambda\phi^2 = (n-2)\,\dot{f}|\nabla\phi|^2 - n\dot{f}\lambda\phi^2.$$

在维数为 $n=2$ 时，这可简化为 $-2\dot{f}\lambda\phi^2$ 积分，因此

$$\frac{d}{dt}\lambda = -2\lambda\int_A \dot{f}\phi^2 d\mu_g,$$

并且如果 $\dot{f}$ 为常数，则得到预期的标度律： λ 按因子 e^{-2f}进行缩放。

- 考虑二维的里奇流， $\partial_t g = -2Kg$ 其中 K 为高斯曲率。那么$\partial_t g\langle\nabla\phi,\ \nabla\phi\rangle = -2K|\nabla\phi|^2$ 并且由于 $n=2$，因此 $\mathrm{tr}_g(\partial_t g) = -4K$。于是我们有

$$\begin{aligned}
&-\partial_t g\langle\nabla\phi,\nabla\phi\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{tr}_g(\partial_t g)\,|\nabla\phi|^2 - \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}_g(\partial_t g)\,\phi^2\\
&= -\left(-2K|\nabla\phi|^2\right) + \frac{1}{2}(-4K)\,|\nabla\phi|^2 - \frac{\lambda}{2}(-4K)\,\phi^2\\
&= 2K|\nabla\phi|^2 - 2K|\nabla\phi|^2 + 2\lambda K\phi^2 = 2\lambda K\phi^2.
\end{aligned}$$

因此，在曲线缩短流（CSF）和里奇流下，该公式变为

$$\frac{d}{dt}\lambda = -\int_{\partial A} V\,(\partial_\nu\phi)^2\,d\sigma_g + 2\lambda\int_A K\phi^2 d\mu_g.$$

注 2.3： $\lambda(t)$ 和 $\phi(t)$ 的可微性源于针对单特征值的经典解析扰动理论（Kato–Rellich 理论），以及区域和度量的光滑依赖性。归一化 $\int_{A\ (t)}\ \phi^2\,d\mu_{g(t)} = 1$ 确保特征函数除符号外具有唯一性。

无穷小共形因子意味着：如果度量随时间通过共形缩放$g(t) = e^{2f(t)}g_0$发生变化，那么 $\partial_t g = 2\dot{f}g$。标量函数 $\dot{f}(x)$ 就是“无穷小共形因子”。它衡量了度量在每个点沿所有方向均匀拉伸的速率。

引理 *2.4.* 将 (M, g) 视为一个光滑的二维黎曼流形，并对每个 t，令 $A(t) \subset M$ 为一个与环域微分同胚、由 $\partial A(t) = \Gamma_0(t) \cup \Gamma_1(t)$ 围成的光滑区域。另令 ν 表示沿 $\partial A(t)$ 的 $A(t)$ 的外单位法向量；边界相对于 ν 以法向速度 V 移动，即边界点沿着 $x_t = V\nu$ 移动（因此，若边界向内移动，则 $V<0$）。若 u 和 E 分别表示 $A(t)$ 上的调和容量势和容量能量，则在与引理 *2.1* 相同的狄利克雷条件下，有

$$\frac{d}{dt}E = -\frac{1}{2}\int_A\left(|\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2 + \partial_t g\,(\nabla u,\nabla u) - \frac{1}{2}|\nabla u|^2\operatorname{tr}_g(\partial_t g)\right)d\mu_g,$$

其中 K 为高斯曲率，$\mathrm{tr}_g(\partial_t g) = g^{ij}\partial_t g_{ij}$。

证明。 我们回顾

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_A |\nabla u|^2 d\mu_g.$$

将雷诺输运定理应用于 $F = \frac{1}{2}|\nabla u|^2$。为计算 $\partial_t\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)$，我们对逐点量求导

$$\frac{1}{2}|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}g^{ij}\partial_i u\partial_j u.$$

求导（保持坐标不变）

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\partial_t g^{ij}\right)\partial_i u\partial_j u+g^{ij}\partial_i u\partial_j\left(\partial_t u\right).$$

利用 $\partial_t g^{ij}=-g^{ik}g^{jl}\partial_t g_{kl}$将第一项写成$-\frac{1}{2}\partial_t g(\nabla u,\ \nabla u)$。因此

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)=-\frac{1}{2}\partial_t g\left(\nabla u,\nabla u\right)+\langle\nabla u,\nabla\left(\partial_t u\right)\rangle.$$

代入雷诺输运定理，得到

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{1}{2}\int_A\left(\partial_t g\left(\nabla u,\nabla u\right)+\langle\nabla u,\nabla\left(\partial_t u\right)\rangle-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)\right)d\mu_g+\frac{1}{2}\int_{\partial A}|\nabla u|^2Vd\sigma_g.\quad(2)$$

对 $\langle\nabla u,\ \nabla\left(\partial_t u\right)\rangle$应用格林恒等式（分部积分），可得

$$\int_A\langle\nabla u,\nabla\left(\partial_t u\right)\rangle d\mu_g=-\int_A\left(\partial_t u\right)\Delta_g u d\mu_g+\int_{\partial A}\left(\partial_t u\right)\partial_\nu u d\sigma_g.$$

由调和性（$\Delta_g u=0,\ \text{in}A(t)$），体积分项消失，只剩下边界项

$$\int_A\langle\nabla u,\nabla\left(\partial_t u\right)\rangle d\mu_g=\int_{\partial A}\left(\partial_t u\right)\partial_\nu u d\sigma_g.\quad(3)$$

由于 u 在边界的每个分支上都取常数狄利克雷值，在边界点 $x(t)$处对恒等式 $u\left(x\left(t\right)\ \ t\right)=$ const 求导，得到

$$0=\frac{d}{dt}u\left(x\left(t\right),t\right)=\partial_t u+\langle\nabla u,x_t\rangle=\partial_t u+V\partial_\nu u.$$

因此在 ∂A上，

$$\partial_t u|_{\partial A}=-V\partial_\nu u.\quad(4)$$

将 (4) 代入 (3)，得到

$$\int_A\langle\nabla u,\nabla\left(\partial_t u\right)\rangle d\mu_g=\int_{\partial A}\left(-V\partial_\nu u\right)\partial_\nu u d\sigma_g=-\int_{\partial A}V\left(\partial_\nu u\right)^2d\sigma_g.\quad(5)$$

回到 (2) 和 (5)，两个边界项分别为 $\frac{1}{2}\int_{\partial A}|\nabla u|^2Vd\sigma_g$和 $-\int_{\partial A}V(\partial_\nu u)^2\,d\sigma_g$。但在 ∂A 上， u 的切向导数为零（因为 u 在此处为常数），因此 $|\nabla u|^2|_{\partial A}=(\partial_\nu u)^2$。所以，边界项之和等于

$$\frac{1}{2}\int_{\partial A}\left(\partial_\nu u\right)^2Vd\sigma_g-\int_{\partial A}\left(\partial_\nu u\right)^2Vd\sigma_g=-\frac{1}{2}\int_{\partial A}V\left(\partial_\nu u\right)^2d\sigma_g.\quad(6)$$

至此，我们已将 (2) 化为

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{1}{2}\int_A\left(\partial_t g\left(\nabla u,\nabla u\right)-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\operatorname{tr}_g\left(\partial_t g\right)\right)d\mu_g-\frac{1}{2}\int_{\partial A}V\left(\partial_\nu u\right)^2d\sigma_g.\quad(7)$$

这已经是修正后的精确公式；能量的导数等于一个纯粹的度量内部项加上一个边界形状项。接下来，我们应将边界项转化为内部积分。

我们得出 在黎曼流形上，对于光滑函数 u，博赫纳恒等式为

$$\Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = |\operatorname{Hess} u|^2 + \langle \nabla u, \nabla(\Delta u)\rangle + \operatorname{Ric}(\nabla u, \nabla u).$$

在二维中，里奇曲率满足 $\mathrm{Ric} = Kg$，因此对于我们的调和势函数（$\Delta u = 0$），这可简化为

$$\Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = |\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2. \tag{8}$$

对 A 上的式 (8) 积分，并应用散度定理；

$$\int_A \left(|\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2\right) d\mu_g = \int_A \Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) d\mu_g = \int_{\partial A} \frac{1}{2}\partial_\nu\left(|\nabla u|^2\right) d\sigma_g. \tag{9}$$

因此，左侧的内部量可表示为单个边界法向导数积分。在 ∂A 上， u 的切向导数为零（因为 u 在每个边界分支上都是常数），所以 $\nabla u|_{\partial A} = (\partial_\nu u)\ \nu$。因此，

$$\partial_\nu\left(|\nabla u|^2\right) = \partial_\nu\left((\partial_\nu u)^2\right) = 2(\partial_\nu u)\,\partial_\nu(\partial_\nu u) = 2(\partial_\nu u)\operatorname{Hess} u(\nu,\nu).$$

因此，由式 (9) 得

$$\int_A \left(|\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2\right) d\mu_g = \int_{\partial A} (\partial_\nu u)\operatorname{Hess} u(\nu,\nu)\, d\sigma_g. \tag{10}$$

在边界点处，可取局部坐标 $(s,\ \mathfrak{n})$，其中 s 是沿 ∂A的弧长， $\mathfrak{n}$ 是法向方向上的有向距离（因此 $\nu = \partial_{\mathfrak{n}}$）。边界附近拉普拉斯算子的标准分解为

$$\Delta u = \partial_{\mathfrak{n}}^2 u + \kappa\partial_{\mathfrak{n}} u + \partial_s^2 u,$$

其中 κ 是 M 中 ∂A 的测地曲率（符号约定：对于朝向内部弯曲的边界，取值为 $\kappa > 0$ ）。在边界上， $u|_{\partial A}$ 在每个分支上为常数，因此 $\partial_s u = 0$ ，从而在此处有 $\partial_s^2 u = 0$。利用 $\Delta u = 0$，我们在边界点处得到

$$\partial_{\mathfrak{n}}^2 u + \kappa\partial_{\mathfrak{n}} u = 0,$$

即，

$$\operatorname{Hess} u(\nu,\nu)\,|_{\partial A} = -\kappa\partial_\nu u. \tag{11}$$

将 (11) 代入 (10)，得到

$$\int_A \left(\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2\right) d\mu_g = \int_{\partial A} (\partial_\nu u)(-\kappa\partial_\nu u)\, d\sigma_g = -\int_{\partial A} \kappa(\partial_\nu u)^2\, d\sigma_g,$$

或者等价地

$$\int_{\partial A} \kappa(\partial_\nu u)^2\, d\sigma_g = -\int_A \left(|\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2\right) d\mu_g. \tag{12}$$

曲线缩短流（通常的几何曲线缩短流）使每条边界曲线沿法向

速度等于内法向方向上的曲率

$$\partial_t x = \kappa \nu.$$

我们的符号约定采用 ν =外法向，因此曲线缩短流的外法向速度 $VV = -\kappa$ 等于（曲线缩短流以速度 κ使边界向内移动，因此当 $\kappa > 0$时， $V < 0$ ）。因此，对于曲线缩短流，我们设

$$V = -\kappa.$$

将此代入 (7) 的边界项，我们得到

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial A} V\,(\partial_\nu u)^2\,d\sigma_g = -\frac{1}{2}\int_{\partial A} (-\kappa)\,(\partial_\nu u)^2\,d\sigma_g = \frac{1}{2}\int_{\partial A} \kappa\,(\partial_\nu u)^2\,d\sigma_g.$$

利用 (12) 将边界积分替换为内部积分

$$\frac{1}{2}\int_{\partial A} \kappa\,(\partial_\nu u)^2\,d\sigma_g = -\frac{1}{2}\int_A \Big(|\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2\Big)\,d\mu_g. \tag{13}$$

因此，结合 (7) 和 (13)，我们得到边界在曲线缩短流作用下移动时能量导数的一般公式

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\int_A \left(|\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2 + \partial_t g\,(\nabla u, \nabla u) - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \operatorname{tr}_g\,(\partial_t g)\right) d\mu_g.$$

□

在上述证明中， η 边界附近一点 x 沿法向方向的有向距离η （x）是从 x 到边界、取向外为正的测地距离。因此， ∂A附近的局部“费米坐标” η中的 (s， η) 表示：s 沿边界切向变化，而 η 表示沿法向方向移动的距离。

注 2.5（**一些特殊情形** ）。• 也可以将内部度量项写成与 $\partial_t g$ 无迹对称张量的缩并。因此，最终的被积函数可以改写为

$$-\frac{1}{2}\left(\partial_t g\,(\nabla u, \nabla u) - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \operatorname{tr}_g\,(\partial_t g)\right) = -\frac{1}{4}\langle \partial_t g, 2\nabla u \otimes \nabla u - |\nabla u|^2 g\rangle.$$

• 若 $\partial_t g = 0$ （固定度量），且边界按曲线缩短流演化（因此 $V = -\kappa$），则最终积分化为 Topping 恒等式（黎曼情形） [18]

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\int_A \Big(|\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2\Big)\,d\mu_g.$$

这表明，若曲面的高斯曲率非负，则 $E \le 0$。特别是在平坦曲面上（$K \equiv 0$）， E 递减，且亏损 $\frac{1}{2}\int |\operatorname{Hess} u|^2$ 控制其变化速率。 –

• 取 $\partial_t g = -2Kg$ （度量按二维里奇流演化，边界曲线按曲线缩短流演化）。于是，度量变化项的被积函数变为

a) $\partial_t g\,(\nabla u, \nabla u) = -2K|\nabla u|^2$。 b) $\operatorname{tr}_g(\partial_t g)$ $= -4K$， （因为在二维中，$\operatorname{tr}_g(g) = 2$ ）

因此，最终的恒等式为

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\int_A \left(|\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2\right) d\mu_g.$$

这意味着，在二维情形下，里奇流项会抵消显式的度量变分项，因此即使环境度量随里奇流演化，只要边界按曲线缩短流移动，先前的 Topping 恒等式仍然成立。

3 环域与圆柱的谱比较

3.1 Rellich 型公式与亏损边界项

定义向量场（在 A 上）

$$Y := |\nabla\phi|^2 X - 2\,(X.\nabla\phi)\,\nabla\phi.$$

这里， X 是一个向量场，使得 $X.\nabla\phi := \langle X,\ \nabla\phi\rangle$ （我们可以认为 X 是$\mathcal{V}\nu$ 的任意延拓）。考虑 Y 的原因是，它的边界通量会产生我们所需的边界量，而其散度可以表示为涉及 ∇X 和 $\nabla\phi$ 的内部项。通过计算 $\operatorname{div} Y$ 并在 A 上积分，可得黎曼流形上的标准 Rellich 型恒等式 [4, 16]

$$\int_{\partial A} \langle X,\nu\rangle\,(\partial_\nu\phi)^2\,d\sigma_g = -\int_A \{(\operatorname{div} X)\,|\nabla\phi|^2 - 2\langle\nabla X, \nabla\phi\otimes\nabla\phi\rangle - 2\,(X.\nabla\phi)\,\Delta\phi\} d\mu_g. \tag{14}$$

由于 $-\Delta\phi = \lambda\phi$，因此

$$-2\,(X.\nabla\phi)\,\Delta\phi = 2\lambda\phi\,(X.\nabla\phi)\,,$$

因此我们观察到

$$2\lambda\phi\,(X.\nabla\phi) = \lambda X.\nabla\left(\phi^2\right) = \lambda\operatorname{div}\left(\phi^2 X\right) - \lambda\phi^2\operatorname{div} X.$$

对 A 积分（边界项消失），得到

$$\int_A 2\lambda\phi\,(X.\nabla\phi)\,d\mu_g = -\lambda\int_A \phi^2\operatorname{div} X d\mu_g.$$

代入 (14) 得到紧凑形式

$$\int_{\partial A} \langle X,\nu\rangle\,(\partial_\nu\phi)^2\,d\sigma_g = -\int_A \{(\operatorname{div} X)\left(|\nabla\phi|^2 - \lambda\phi^2\right) - 2\langle\nabla X, \nabla\phi\otimes\nabla\phi\rangle\} d\mu_g. \tag{15}$$

任取边界向量场$\mathcal{V}\nu$ 的任意光滑延拓至内部，并将右侧估计为 $\operatorname{div} X$ 和 ∇X 的 L^∞ 范数以及ϕ 中的内部 L^1型量（稍后我们会用领圈内部的光滑延拓替换此延拓）。由（15）可得

have

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\partial A} \mathcal{V}\left(\partial_\nu \phi\right)^2 d\sigma_g\right| &= \left|\int_A \left(\operatorname{div} X\right)\left(|\nabla\phi|^2 - \lambda\phi^2\right) d\mu_g - 2\int_A \langle \nabla X, \nabla\phi \otimes \nabla\phi\rangle d\mu_g\right| \\
&\leq \|\operatorname{div} X\|_{L^\infty(A)} \int_A \left||\nabla\phi|^2 - \lambda\phi^2\right| d\mu_g \\
&\quad + 2\|\nabla X\|_{L^\infty(A)} \int_A |\nabla\phi|^2 d\mu_g. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

利用特征关系（ ϕ的归一化），可知

$$
\int_A \left||\nabla\phi|^2 - \lambda\phi^2\right| d\mu_g \leq \int_A |\nabla\phi|^2 d\mu_g + \lambda\int_A \phi^2 d\mu_g = 2\lambda.
$$

因此，(16) 给出了一个简单的界

$$
\left|\int_{\partial A} \mathcal{V}\left(\partial_\nu\phi\right)^2\right| \leq 2\lambda\left(\|\operatorname{div} X\|_{L^\infty(A)} + \|\nabla X\|_{L^\infty(A)}\right).
$$

这里，在 X 的延拓中，$\mathcal{V}$： $\partial A \to \mathbb{R}$ 是一般的（任意的）边界权重，不同于几何流中的边界法向速度。

注 3.1（**关于延拓的几点说明** X)。我们需要 X，使得 $X|_{\partial A} = \mathcal{V}\nu$（因此 $\langle X, \nu\rangle = \mathcal{V}$ 在 ∂A 上）。一种便于构造的选择是使用 ∂A 的管状（ Fermi ）邻域。

- 令 $\rho > 0$ 小于 M 中 ∂A 的单射半径。在管状邻域 $U_\rho = \{p \in A | \operatorname{dist}_g(p, \partial A) < \rho\}$ 中引入法坐标 $(s, \mathfrak{n})$，其中 s 是沿 ∂A 的弧长，dist_g 表示由黎曼度量 g 所诱导的黎曼距离，而 $\mathfrak{n}$ 是沿法向的有向距离，即在 ∂A 上 $\mathfrak{n} = 0$， $\mathfrak{n} > 0$ 指向内部（或向外——选定一致的符号）。在这些坐标下， $\nu = \partial_{\mathfrak{n}}$，且度量具有众所周知的形式 $g = d\mathfrak{n}^2 + a(\mathfrak{n}, s)^2 ds^2$，其中 $a(0, s) = 1$，且 $\partial_{\mathfrak{n}} a(0, s) = -\kappa(s)$，等等。 a 的所有几何导数均受曲率控制。

- 选择一个光滑的截断函数 $\zeta(\mathfrak{n})$，满足 $\zeta(0) = 1$、 $\zeta(\mathfrak{n}) = 0$（对于 $\mathfrak{n} \geq \rho$），并且 $|\zeta'| \lesssim \rho^{-1}$。在领圈中定义延拓

  $$
  X(s, \mathfrak{n}) = \zeta(\mathfrak{n})\,\mathcal{V}(s)\,\nu(s, \mathfrak{n}),
  $$

  其中，$\mathcal{V}(s)$ 是给定的边界标量（取决于边界点）。将 X 在领圈外延拓为零。

- 仔细估计（几何学中的标准估计）表明，存在某个常数 C，其仅取决于 ρ、环境曲率界以及 ∂A 的 C^1–几何，

  $$
  \|\nabla X\|_{L^\infty(A)} \leq C\left(\rho^{-1}\|\mathcal{V}\|_{L^\infty(\partial A)} + \|\partial_s \mathcal{V}\|_{L^\infty(\partial A)} + \|\kappa\mathcal{V}\|_{L^\infty(\partial A)}\right).
  $$

  因此， ∇X 的子范数（$\operatorname{div} X$ 同理）可归结为 $\mathcal{V}$ 及其切向导数 $\partial_s V$ 的边界范数——这正是当 $\mathcal{V}$ 等于 $(-\kappa)$ 或类似情形时可获得的几何量；将这些界代入 Rellich 型恒等式，即可得到如下形式的具体不等式

  $$
  \left|\int_{\partial A} \mathcal{V}\left(\partial_\nu\phi\right)^2 d\sigma\right| \leq C\lambda\left(\rho^{-1}\|\mathcal{V}\|_{L^\infty(\partial A)} + \|\partial_s\mathcal{V}\|_{L^\infty(\partial A)} + \|\kappa\mathcal{V}\|_{L^\infty(\partial A)}\right),
  $$

  whe关于 C 仅取决于领圈的几何（曲率界、单射半径).

我们回顾向量场 X 的延拓，其中我们希望在 ∂A 上满足 $\langle X, \nu\rangle = \mathcal{V}$。一种便于插入 Hess u 的（且标准的）选择是令 X 在领形邻域中与 ∇u 成正比，并在领圈之外消失。具体而言，设 $\mathfrak{n}$、U_ρ、s 和 ζ 与上文相同，然后定义边界函数

$$\alpha(s) := \frac{\mathcal{V}(s)}{\partial_\nu u(s)}, \quad s \in \partial A.$$

若考虑非退化假设，即 $m := \inf_{\partial A} \partial_\nu u > 0$，则 α 是良定义且有界的，

$$\|\alpha\|_{L^\infty(\partial A)} \leq \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m}.$$

现在将 α 光滑地延拓为领圈上的函数 $\tilde{\alpha}(s, \mathfrak{n})$，令 $\tilde{\alpha}(s, \mathfrak{n}) = \alpha(s)\zeta(\mathfrak{n})$（然后在领圈外延拓为 0）。最后令

$$X := \tilde{\alpha}\nabla u,$$

于是，在边界上（其中 $u = 0$ 和 $\zeta(0) = 1$），我们有

$$\langle X, \nu\rangle = \alpha\langle \nabla u, \nu\rangle = \alpha\partial_\nu u = \mathcal{V},$$

因此 X 是一个可容许延拓。

定理 3.2。设 (M, g) 为光滑黎曼曲面，且令 $A \subset M$ 为由边界曲线 Γ_0 和 Γ_1围成的嵌入环带，u 为调和容量势，ϕ 为拉普拉斯算子的归一化狄利克雷特征函数，V 表示给定边界权函数。另假设非退化条件，即 $m > 0$。则存在常数 C，使得对于 $V\nu$ 的光滑给定延拓 X，我们有

$$\left|\int_{\partial A} \mathcal{V}(\partial_\nu\phi)^2\, d\sigma\right| \leq \frac{C}{m}\lambda\Big\{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}\sqrt{\mathcal{D}} + \sqrt{E}\left(\|\partial_s\mathcal{V}\|_{L^\infty} + \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m}\left(\sqrt{\mathcal{D}}+1\right) + \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{\rho}\right)\Big\},$$

其中，E 和 D 分别表示 u的能量和亏损泛函。

注 3.3. 我们回顾一下，在 Rellich 型边界恒等式中，我们使用一个任意的光滑标量函数

$$\mathcal{V} : \partial A \to \mathbb{R},$$

该函数仅作为边界权重，用于匹配测试向量场 X的法向分量。此函数独立于任何几何演化。相比之下，当边界 ∂A 在曲线缩短流下演化时，其外法向速度为 $V\nu$，具体而言，$V = -\kappa$。这两个量发挥着不同的作用，例如，$\mathcal{V}$ 是解析量，而 V 是几何量。只有当我们有意将几何速度代入 Rellich 恒等式时，二者才会一致，也就是说，在计算特征值或容量能量等几何量的时间导数时才会一致。除此之外，应将这两个符号视为不同的量。

注记 3.4. 非退化条件 $m > 0$ 确保调和坐标 u 在边界附近是浸没，且调和共轭函数在全局上有定义。该条件在小的几何扰动下保持稳定；例如，当环域充分接近平坦圆柱时，该条件就成立。

定理 3.2 的证明。 由于 u 是调和的，我们可以计算

$$\operatorname{div} X = \langle \nabla\tilde{\alpha}, \nabla\alpha\rangle + \tilde{\alpha}\Delta u = \langle \nabla\tilde{\alpha}, \nabla u\rangle,$$

and

$$\nabla X = \nabla\left(\tilde{\alpha}\nabla u\right) = \nabla\tilde{\alpha}\otimes\nabla u + \tilde{\alpha}\operatorname{Hess} u.$$

将这些代入 Rellich 型恒等式，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{B} := \int_{\partial A}\mathcal{V}\left(\partial_\nu\phi\right)^2 d\sigma &= -\int_A\{\langle\nabla\tilde{\alpha},\nabla u\rangle\left(|\nabla\phi|^2-\lambda\phi^2\right) - 2\langle\nabla\tilde{\alpha}\otimes\nabla u+\tilde{\alpha}\operatorname{Hess} u, \nabla\phi\otimes\nabla\phi\rangle\}d\mu\\ &= -\int_A\langle\nabla\tilde{\alpha},\nabla u\rangle\left(|\nabla\phi|^2-\lambda\phi\right)d\mu + 2\int_A\langle\nabla\tilde{\alpha}\otimes\nabla u,\nabla\phi\otimes\nabla\phi\rangle d\mu\\ &+ 2\int_A\tilde{\alpha}\langle\operatorname{Hess} u,\nabla\phi\otimes\nabla\phi\rangle d\mu,\end{aligned}$$

其中我们将这三项记为 $\mathcal{B} = T_1 + T_2 + T_3$，其定义显而易见。

T_3的上界：

考虑 $T_3 = 2\int_A\tilde{\alpha}\langle\text{Hess } u, \nabla\phi\otimes\nabla\phi\rangle d\mu$，然后对 A 应用柯西–施瓦茨不等式，其中使用 2 阶张量上的希尔伯特–施密特内积

$$\begin{aligned}|T_3| &\le 2\|\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)}\left(\int_A|\operatorname{Hess} u|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_A|\nabla\phi\otimes\nabla\phi|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\|\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)}\sqrt{2\mathcal{D}}.\left(\int_A|\nabla\phi|^4 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

So

$$|T_3| \le 2\sqrt{2}\|\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)}\sqrt{\mathcal{D}}\|\nabla\phi\|^2_{L^4(A)}.$$

回想一下，$\tilde{\alpha}$ 是由 $\alpha = \mathcal{V}/\partial_\nu u$ 乘以一个截断函数构造而成的，因此 $\|\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)} \le \|\alpha\|_{L^\infty(\partial A)} \le \|\mathcal{V}\|_{L^\infty(\partial A)}/m$（由非退化条件可知）。因此

$$|T_3| \le C_1\frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty(\partial A)}}{m}\sqrt{\mathcal{D}}\|\nabla\phi\|^2_{L^4}, \tag{17}$$

这里显然有 $C_1 = 2\sqrt{2}$。因此，亏损 $\sqrt{\mathcal{D}}$ 乘上了 L^2 范数的 $\nabla\phi$。 **的上界 T_2：**

由于

$$T_2 = 2\int_A\langle\nabla\tilde{\alpha}\otimes\nabla u,\nabla\phi\otimes\nabla\phi\rangle = 2\int_A\left(\nabla\tilde{\alpha}.\nabla u\right)|\nabla\phi|^2 d\mu.$$

应用 Hölder不等式/柯西–施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned}|T_2| &\le 2\|\nabla\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)}\int_A|\nabla u||\nabla\phi|^2 d\mu\\ &\le 2\|\nabla\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)}\|\nabla u\|_{L^2(A)}\|\nabla\phi\|^2_{L^4(A)}.\end{aligned}$$

回顾$\|\nabla u\|^2_{L^2(A)} = 2E$。因此

$$|T_2| \le 2\sqrt{2}\|\nabla\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)}\sqrt{E}\|\nabla\phi\|^2_{L^4}. \tag{18}$$

T_1的上界：
对 $T_1 = -\int_A \langle\nabla\tilde{\alpha},\ \nabla u\rangle\left(|\nabla\phi|^2 - \lambda\phi^2\right) d\mu$应用霍尔德不等式，我们得到

$$|T_1| \le \|\nabla\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)}\|\nabla u\|_{L^2(A)}\||\nabla\phi|^2 - \lambda\phi^2\|_{L^2(A)}.$$

我们需要控制 L^2–范数，即 $\||\nabla\phi|^2 - \lambda\phi\|_{L^2}$。注意到

$$\||\nabla\phi|^2 - \lambda\phi^2\|_{L^2} \le \|\nabla\phi\|^2_{L^4} + \lambda\|\phi\|^2_{L^4}.$$

在 A （二维）上应用 Sobolev 椭圆估计，可以用 λ 和固定的几何常数（区域索伯列夫常数）控制 $\|\phi\|_{L^4}$ 和 $\|\nabla\phi\|_{L^4}$。具体而言，存在一个常数 C_s，其仅依赖于 A （通过单射半径、曲率界和边界正则性），使得

$$\|\phi\|_{L^4} \le C_s\|\phi\|_{H^1} \le C_s\left(1+\sqrt{\lambda}\right), \quad \|\nabla\phi\|_{L^4} \le C_s'\lambda^{1/2}\left(1+\sqrt{\lambda}\right),$$

其中， C_s' 是另一个依赖于与 C_s 相同几何量的常数，并且由对求解 $-\Delta\phi = \lambda\phi$的 ϕ 应用椭圆估计得到；可以跟踪其显式依赖关系，但对我们的目的而言，只需注意这些量可由 λ的多项式次幂控制。为使表达式保持显式，我们取某个常数 C_2，令 C_3 依赖于 Sobolev 常数和几何

$$\|\nabla\phi\|^2_{L^4} \le C_2\lambda, \quad \|\phi\|^2_{L^4} \le C_3.$$

如果需要精确的幂次，则应将 C_2 替换为显式的索伯列夫–椭圆常数；关键在于其依赖关系仅通过 λ 和固定数据给出。因此

$$\||\nabla\phi|^2 - \lambda\phi^2\|_{L^2} \le C_2\lambda + C_3\lambda = C_4\lambda,$$

对于某个 C_4，它仅依赖于区域几何和索博列夫常数。因此，利用$\|\nabla u\|_{L^2} = \sqrt{2E}$，我们得到

$$|T_1| \le \|\nabla\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)}\sqrt{2E}.C_4\lambda. \tag{19}$$

结合前面的估计——这三个项都是 $\|\nabla\phi\|^2_{L^4}$ 或 λ的倍数，而如前所述，我们可以对其进行控制。

汇总上述所有结果：
我们必须将$\|\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)}$和$\|\nabla\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)}$表示为边界数据$\mathcal{V}$、其切向导数$\partial_s\mathcal{V}$ 以及几何–调和量的形式。

回顾一下，在 ∂A 上有~~$\alpha(s)$~~ $=\mathcal{V}(s)\,\partial_\nu u(s)$，并且我们假设满足非退化性 $m > 0$。由于在 ∂A 上有 $\partial_\tau u = 0$，其中 τ 表示沿边界曲线的单位切向量，因此我们恰好有

$$\partial_s\alpha = \frac{\partial_s\mathcal{V}}{\partial_\nu u} - \frac{\mathcal{V}\partial_s\left(\partial_\nu u\right)}{\left(\partial_\nu u\right)^2} = \frac{\partial_s\mathcal{V}}{\partial_\nu u} - \frac{\mathcal{V}\,\mathrm{Hess}\,u\left(\tau,\nu\right)}{\left(\partial_\nu u\right)^2}.$$

因此，在 ∂A 上逐点有，

$$|\partial_s \alpha| \le \frac{|\partial_s \mathcal{V}|}{m} + \frac{|\mathcal{V}|}{m^2} |\operatorname{Hess} u(\tau,\nu)|. \tag{20}$$

我们将 α 从 ∂A 通过 $\tilde{\alpha}(s,\ \mathfrak{n}) = \zeta(\mathfrak{n})\,\alpha(s)$延拓到领圈中，其中 $\zeta(0) = 1$，ζ支撑于$[0,\rho)$，且 $|\zeta'| \lesssim \rho^{-1}$。在领圈内取值，外部为零

$$\nabla\tilde{\alpha} = \zeta(\mathfrak{n})\,\partial_s\alpha\tau + \zeta'(\mathfrak{n})\,\alpha\partial_{\mathfrak{n}},$$

so

$$\|\nabla\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(a)} \le C\left(\|\partial_s\alpha\|_{L^\infty(\partial A)} + \rho^{-1}\|\alpha\|_{L^\infty(\partial A)}\right),$$

其中 C 仅取决于领圈内的坐标畸变。
利用 $\|\alpha\|_{L^\infty} \le \|\mathcal{V}\|_{L^\infty}/m$ 和 (20)，

$$\|\nabla\tilde{\alpha}\|_{L^\infty(A)} \le C\left(\frac{\|\partial s\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m} + \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m^2}\|\operatorname{Hess} u(\tau,\nu)\|_{L^\infty(\partial A)} + \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m\rho}\right). \tag{21}$$

和之前一样，我们将用关于 $\sqrt{\mathcal{D}}$的椭圆控制以及低阶量来替代 $\|\operatorname{Hess} u(\tau,\ \nu)\|_{L^{\infty}(\partial A)}$；具体而言，存在 C_{ell} 使得

$$\|\operatorname{Hess} u(\tau,\nu)\|_{L^\infty(\partial A)} \le C_{ell}\left(\sqrt{\mathcal{D}} + 1\right),$$

因此，(21) 可化为（吸收常数后）

$$\|\nabla\tilde{\alpha}\|_{L^\infty} \le C\left(\frac{\|\partial_s\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m} + \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m^2}\left(\sqrt{\mathcal{D}} + 1\right) + \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m\rho}\right).$$

利用 $\|\nabla\phi\|_{L^4}^2 \le C_2\lambda$，并汇总 (17)、(18) 和 (19)（分别是关于 T_1、 T_2和 T_3的估计）；存在常数 C （仅取决于几何和 Sobolev/椭圆常数），使得

$$|\mathcal{B}| \le \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m}\sqrt{\mathcal{D}}\lambda + C\lambda\sqrt{E}\left(\frac{\|\partial_s\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m} + \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m^2}\left(\sqrt{\mathcal{D}} + 1\right) + \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m\rho}\right).$$

主导项（当$\mathcal{D}$较小时的首要贡献）是第一项，即 $|\mathcal{B}| \lesssim \lambda\frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m}\sqrt{\mathcal{D}}$。最后 ——— —

$$|\mathcal{B}| \le \frac{C}{m}\lambda\Big\{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}\sqrt{\mathcal{D}} + \sqrt{E}\left(\|\partial_s\mathcal{V}\|_{L^\infty} + \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{m}\left(\sqrt{\mathcal{D}} + 1\right) + \frac{\|\mathcal{V}\|_{L^\infty}}{\rho}\right)\Big\}.$$

□

3.2 几何稳定性与谱隙

我们回顾一下设定：$(M,\ g)$ 是一个光滑的二维黎曼流形；$g(t)$ 是 C^∞，并按二维里奇流 $\partial_t g = -2Kg$ 演化。对于每个 t，$A(t) \subset M$ 是一个边界为 $\partial A(t) = \Gamma_0(t) \cup \Gamma_1(t)$ 的嵌入环带。$V \in C^1(\partial A)$ 表示边界的外法向速度，即边界点以 $x_t = V\nu$ 移动（因此，曲线缩短流对应于先前的 $V = -\kappa$ ）。在 Rellich 型恒等式中，我们使用一般的边界权重$\mathcal{V}$。当环域边界按曲线缩短流（CSF）演化时，其外法向速度为 $V = -\kappa$。在文档的几何演化部分，我们设 $\mathcal{V} = V$，使 Rellich 边界积分与几何边界变分项完全吻合。若不满足这一假设，这两个量在概念上仍然有所区别。

现在考虑引理 2.1 的变分公式。在一个特殊情形下，若 $\partial_t g = -2Kg$，则内部度量项可简化为

$$\int_A \left(-2K|\nabla\phi|^2 + \lambda K\phi^2\right) d\mu_g = 2\lambda \int_A K\phi^2 d\mu_g.$$

因此，在 Ricci 情形下，我们有如下简洁的恒等式

$$d\lambda/dt = -\mathcal{B} + 2\lambda \int_A K\phi^2 d\mu_g.$$

我们应将这一最终关系用于曲线缩短流 + Ricci 耦合情形（其中 $V = \mathcal{V}$）。现在，我们要将定理 3.2 中的边界积分上界代入这一简洁形式的 λ–变分公式。令 $\mathcal{R}(V)$ 表示 $|\mathcal{B}|$ 上界的右侧（即存在常数 C，使得 $|\mathcal{B}| \le C\mathcal{R}(V)$）。于是

$$\frac{d\lambda}{dt} \ge -C\lambda \frac{\|V\|_{L^\infty}}{m}\sqrt{\mathcal{D}} + 2\lambda \int_A K\phi^2,$$

其中常数 C_1 仅取决于环域 A 及其领圈的固定几何数据、曲率界、单射半径、领圈宽度 ρ 以及 Sobolev/椭圆常数。

为将 $\mathcal{D}$ 与 E 联系起来，我们使用在 Ricci + 曲线缩短流情形下成立的 Topping 型恒等式（前文已推导）。在这一情形（Ricci + 曲线缩短流）下，引理 2.4 中的变分公式变为

$$dE/dt = -\frac{1}{2}\int_A \left(|\operatorname{Hess} u|^2 + K|\nabla u|^2\right) d\mu_g.$$

回顾一下，$\int_A |\operatorname{Hess} u|^2 = 2D$，因此

$$\dot{E} = -\mathcal{D} - \frac{1}{2}\int_A K|\nabla u|^2 d\mu_g.$$

- 若 $K \ge 0$ 在 A上，则 $\frac{1}{2}\int_A K|\nabla u|^2 \ge 0$，因此

  $$\mathcal{D} \le -\dot{E}.$$

  因此，$\sqrt{\mathcal{D}} \le \sqrt{-\dot{E}}$。这是一个简洁的替换，它消去了 Hessian，并通过能量的下降速度来表示亏损。

- 若 K 有上界 $K_{\max}$，则

  $$\mathcal{D} \ge -\dot{E} - \frac{1}{2}K_{\max}\int_A |\nabla u|^2 = -\dot{E} - K_{\max}E.$$

为简单起见，假设 $K \ge 0$ 在 A 上（因此可使用 $\mathcal{D} \le -E$）；在先前的假设（Ricci +曲线缩短流）下，我们有

$$\dot{\lambda} \ge -C_1\lambda\frac{\|V\|_{L^\infty}}{m}\sqrt{\mathcal{D}} + 2\lambda\int_A K\phi^2 \ge -C_1\lambda\frac{\|V\|_{L^\infty}}{m}\sqrt{-\dot{E}} + 2\lambda\int_A K\phi^2.$$

两边除以 λ，得到

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \ge -C_1\frac{\|V\|_{L^\infty}}{m}\sqrt{-\dot{E}} + 2\int_A K\phi^2.$$

˙如果能量 E 下降很快（即 $-E$ 很大），那么右侧可能具有很大的量级（产生负贡献），并使 $\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ 向下移动；反之，如果 $-\dot{E}$ 很小–(环域接近平坦圆柱，且亏损很小），那么 $\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ 就由曲率平均值控制。 –

定理 3.5。 设(M, g) 为一光滑黎曼曲面，且 $A \subset M$ 是边界为 $\partial A = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 的光滑嵌入环带。此外，假设

- 宽度为 ρ_0 的管状邻域环绕 ∂A 定义良好，且坐标畸变一致有界（ρ_0）。
- 曲率界$\|K_g\|_{L^\infty(A)} \leq K_0$。

设 $\lambda(A)$和 $\lambda_{\mathrm{cyl}}(h)$分别为 A 上的 $-\Delta_g$ 以及平坦圆柱 $S_h := [0, h] \times \mathbb{S}^1$ 的狄利克雷特征值，其中模数 h 由 $h = 1/2E$ 给出。那么，在满足边界正则性和非退化条件（$m > 0$）的情况下，存在常数 ϵ_0、 C_1、$C_2 > 0$ 和 $0 < \alpha < 1$，它们仅取决于(ρ_0, K_0) 和边界正则性；若 $\mathcal{D} \leq \epsilon_0$，则

- **(几何稳定性)**。 存在一个共形微分同胚 $\Psi : S_h \to A$ ，满足$\Psi^* g = e^{2f} \left(dx^2 + d\theta^2\right)$ ，且 $u \circ \Psi(x, \theta) = x/h$。此外

$$\|f\|_{C^{1,\alpha}(S_h)} \leq C_1 \sqrt{\mathcal{D}}.$$

- **(定量谱比较)**。 这里的比较是针对模数为 h 的平坦圆柱的狄利克雷谱，并以标准坐标 (x, θ)表示。对于相同的 h，

$$\lambda(A) \geq \lambda_{\mathrm{cyl}}(h) + C_2 \sqrt{\mathcal{D}}.$$

该估计应理解为稳定性不等式，而非最优谱隙。

调和容量 u 与调和共轭函数 v 配对后定义了一个全纯坐标 $\omega = u + iv$（局部而言， v 存在，因为在非退化的环域上 $\nabla u \neq 0$ ）。其像是一个高度为 h 的平坦条带，其中 h 等于模数；经过角坐标重缩放后， v 的整体周期与2π 相匹配（见 [1]）。非退化性 $m > 0$ 确保 u在边界上是浸没，因此整体共轭函数定义良好，且该映射是微分同胚。若根据定理 3.5考虑 Ψ ，则我们通过 Ψ将 A 与 S_h 等同起来。从 g 拉回到 S_h 上的度量与平坦度量共形

$$g = e^{2f(x,\theta)} \left(dx^2 + d\theta^2\right),$$

对于定义在 S_h 上的光滑函数 f。由于 $u \circ \Psi(x, \theta) = x/h$， u 在这些坐标下的欧氏导数为

$$u_x = \frac{1}{h}, \quad u_\theta = 0, \quad u_{xx} = u_{x\theta} = u_{\theta\theta} = 0.$$

注记 3.6。 亏损泛函$\mathcal{D}$ 当且仅当环域与平坦圆柱共形等价时取值为零（若$\mathcal{D} = 0$ 则 Hess $u \equiv 0$ an A，因此 ∇u 是一个平行向量场。由于 u是调和函数，且在边界上法向导数不为零，它存在全局调和共轭函数 v，并且 (u, v) 构成 A上的等温坐标。在这些坐标下，度量具有形式 $g = f(u, v)\left(du^2 + dv^2\right)$。条件 Hess $u \equiv 0$ 迫使 f为常数，因此 (A, g) 与平坦圆柱共形等价）。因此，$\mathcal{D}$ 度量了与模型几何的偏离。这些估计表明$\mathcal{D}$ 控制着几何稳定性和谱变分，起到定量刚性参数的作用（见 [17]）。

我们强调，$(u,\ v)$ 表示演化环域上的调和坐标，而 $(x,\ \theta)$ 是平坦模型圆柱上的标准坐标。两者之间的任何比较都通过调和映射所诱导的共形识别进行。以下（证明中的）所有计算均在 S_h 上、以坐标 $(x,\ \theta)$ 和欧几里得度量 δ进行；我们用 ∂_x、 ∂_θ 表示这些坐标导数。

定理 3.5 的证明。为简单起见，我们假设所考虑的特征值是单重的；通过标准的扰动论证，该估计可推广到有限重特征值。根据非退化性假设，调和容量势 u 在 A （ A的闭包）上没有临界点，因此存在全局定义的调和共轭函数 v；因此，映射 $\Psi=(u,v):\ A\to[0,h]\times\mathbb{S}^1$ 是到平坦圆柱 S_h上的光滑共形微分同胚，并且经过归一化，使得 $u\circ\Psi(x,\theta)\ =x/h$。

步骤 1；D 的精确代数恒等式
对于与 x,θ 相对应的共形度量 $g_{ij}=e^{2f}\delta_{ij}$（指标 $i,j\in\{1,2\}$），克里斯托费尔符号为

$$\Gamma_{ij}^k=\delta_j^k f_i+\delta_i^k f_j-\delta_{ij}f^k,$$

其中 $f_i=\partial_i f$，且 $f^k=\delta^{kl}f_l$。协变海森矩阵的分量为

$$(\mathrm{Hess}_g\,u)_{ij}=\nabla_i\nabla_j u=\partial_i\partial_j u-\Gamma_{ij}^k\partial_k u.$$

但在我们的坐标 $\partial_1 u=u_x=1/h$ 和 $\partial_2 u=u_\theta=0$ 中，所有二阶欧氏导数均为零。因此

$$(\mathrm{Hess}_g\,u)_{ij}=-\Gamma_{ij}^1\frac{1}{h},$$

并通过计算

$$\Gamma_{ij}^1=\begin{pmatrix}f_x & f_\theta\\ f_\theta & -f_x\end{pmatrix}$$

根据定义

$$|\,\mathrm{Hess}_g\,|_g^2=g^{ia}g^{jb}\,(\mathrm{Hess}_g\,u)_{ij}\,(\mathrm{Hess}_g\,u)_{ab}\,.$$

由于 $g^{ij}=e^{-2f}\delta^{ij}$，我们得到

$$|\,\mathrm{Hess}_g\,u|_g^2=e^{-4f}\delta^{ia}\delta^{jb}\,(\mathrm{Hess}_g\,u)_{ij}\,(\mathrm{Hess}_g\,u)_{ab}\,,$$

代入 Hessian 项并对 $(1/h)^2$,进行因式分解后，我们得到

$$|\,\mathrm{Hess}_g\,u|_g^2=\frac{1}{h^2}e^{-4f}\sum_{i,j}\left(\Gamma_{ij}^1\right)^2.$$

But

$$\sum_{i,j}\left(\Gamma_{i,j}^1\right)^2=2\left(f_x^2+f_\theta^2\right)=2|\nabla f|_\delta^2.$$

现在积分 相对于黎曼面积元 $d\mu_g = e^{2f}dxd\theta$ 的变化率，结合上述公式，我们得到 n

$$\int_{S_h} |\operatorname{Hess}_g u|_g^2 d\mu_g = \frac{2}{h^2}\int_{S_h} e^{-2f}|\nabla f|^2 dxd\theta.$$

由于 $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\int_{S_h} |\operatorname{Hess}_g u|^2 d\mu_g$，因此

$$\int_{S_h} e^{-2f}|\nabla f|^2 dxd\theta = h^2\mathcal{D}. \tag{22}$$

步骤2；辅助函数 e^{-f} 的 H^1–控制
恒等式 (22) 用 $\xi := e^{-f}$ 表示最为自然。事实上 $|\nabla\xi|^2 = e^{-2f}|\nabla f|^2$。因此，(22) 可写为

$$\int_{S_h} |\nabla\xi|^2 dxd\theta = h^2\mathcal{D}.$$

这意味着 ξ 的 H^1–半范数等于 $h\sqrt{\mathcal{D}}$。由于 ξ 光滑且为正，我们可以写成 $\xi = \bar{\xi} + \tilde{\xi}$，其中 $\bar{\xi} = \fint_{S_h}\xi$ 是平均值，而 $\tilde{\xi} = \xi - \bar{\xi}$ 的均值为零。根据紧圆柱 S_h 上的庞加莱不等式，存在 $C_p(h)$，使得

$$\|\tilde{\xi}\|_{L^2(S_h)} \le C_p(h)\,\|\nabla\xi\|_{L^2(S_h)} = C_p(h)\,h\sqrt{\mathcal{D}}.$$

因此，ξ 与其平均值的距离在 L^2–意义下不超过误差 $\mathcal{O}\left(\underline{h}\sqrt{\mathcal{D}}\right)$。由于 $\xi > 0$，平均值 $\bar{\xi} > 0$。将 $\epsilon_0 > 0$ 取得足够小，并考虑 $\mathcal{D} \le \epsilon_0$ 的情形，使得 ξ 在 ξ 附近的 L^2–扰动很小。由切比雪夫不等式/索伯列夫不等式及 ξ 的正性，可推出 ξ 在 L^p 空间中的一致上下界。

步骤3；针对 $C^{1,\alpha}$ 的椭圆正则性提升，适用于 f
现在，我们将对 ξ 的 H^1 控制转化为对 $f = -\ln\xi$ 的 $C^{1,\alpha}$ 控制。度量 $g = e^{2f}\delta$ 的高斯曲率K_g 由以下公式给出（标准的共形公式变形形式）

$$\Delta_{\mathrm{euc}} f = -e^{2f}K_g, \tag{23}$$

其中，Δ_{euc} 是作用于 S_h 上的（平坦）欧几里得拉普拉斯算子。根据假设，$\|K_g\|_{L^\infty(S_h)} \le K_0$。因此，(23)式右侧属于 $L^p(S_h)$，对任意有限的 p 都成立，因为 e^{2f} 连续，且S_h 具有有限测度（有限测度集上的有界函数属于所有 L^p）。由庞加莱不等式和(23)式，再结合 ξ 与 f 之间的$\perp$关系，我们得到 $\|f - \bar{f}\|_{L^2}$ 的控制，其界由 $\sqrt{\mathcal{D}}$ 给出。事实上，由于 $\xi = e^{-f}$ 且 ξ 接近 $\bar{\xi} > 0$，可验证（在 $\bar{\xi}$ 附近对 $-\ln$ 作泰勒展开；相对扰动较小时，其导数有界），当$\mathcal{D}$ 足够小时，存在 C_3，使得

$$\|f - \bar{f}\|_{L^2(S_h)} \le C_3\|\xi - \bar{\xi}\|_{L^2(S_h)} \le C_3.C_p(h)\sqrt{\mathcal{D}}.$$

作为解释，将 $-\ln$ 在 $\bar{\xi}$ 附近展开：若 $\|\xi - \bar{\xi}\|_{L^\infty} \le \frac{1}{2}\bar{\xi}$，则 $|\ln\xi - \ln\bar{\xi}| \le C|\xi - \bar{\xi}|/\bar{\xi}$。为确保 L^∞ 足够小，我们将要求 $\mathcal{D}$ 足够小，并使用后文将得到的 Sobolev 嵌入；为避免循环论证，我们首先利用 $-\ln$ 在区间 $\left[\bar{\xi}/2, 3\bar{\xi}/2\right]$ 上的 Lipschitz 性质，得到 $f - \bar{f}$ 的 L^2 控制。只要 $\mathcal{D}$ 足够小，使得 ξ 在 L^2 中接近 $\bar{\xi}$，从而在 L^p 中也接近 $\bar{\xi}$，这一性质便成立。这是一个标准论证：正函数的小 H^1 扰动会使其对数产生小的 L^2 扰动。因此，当$\mathcal{D}$ 足够小时，我们有$\|f - \bar{f}\|_{L^2} \lesssim \sqrt{\mathcal{D}}$。

固定 $p > 2$。对泊松方程 (23) 应用 Calderón–Zygmund L^p–椭圆估计。该 is

定理指出，对于具有光滑边界的紧致区域上的平坦拉普拉斯算子以及函数 $F \in L^p$，此处 $F = -e^{2f}K_g$，有（更多详情见 [10, 19]）

$$\|f - \bar{f}\|_{W^{2,p}(S_h)} \leq C_{CZ}(p,h)\left(\|\Delta f\|_{L^p(S_h)} + \|f - \bar{f}\|_{L^p(S_h)}\right). \tag{24}$$

由于 $\Delta f = -e^{2f}K_g$ 和 $|K_g| \leq K_0$，因此我们得到

$$\|\Delta f\|_{L^p} \leq K_0 \|e^{2f}\|_{L^p}.$$

由于 $f \in L^2$ 先验成立且 S_h 具有有限测度，所以对所有有限的 p 都有 $e^{2f} \in L^p$（事实上，对于每个有限的 p，我们都可以通过取足够大的 q，用 $e^{2\|f\|_{Lq}}$ 控制 $\|e^{2f}\|_{L^p}$；更具体地，根据Hölder不等式和Sobolev嵌入，较小的$\|f\|_{W^{1,2}}$意味着 $\|e^{2f}\|_{L^p}$有界）。当 $\mathcal{D}$较小时，我们可以确保$\|f\|_{L^p}$一致有界，从而 $\|e^{2f}\|_{L^p} \leq C(p, h)$。因此，由（24）可得

$$\|f - \bar{f}\|_{W^{2,p}} \leq C_{CZ}\left(K_0\|e^{2f}\|_{L^p} + \|f - \bar{f}\|_{L^p}\right) \leq C_4\left(1 + \|f - \bar{f}\|_{L^p}\right). \tag{25}$$

但我们有 $\|f - \bar{f}\|_{L^p} \lesssim \|f - \bar{f}\|_{L^2}$（Poincaré不等式 + Sobolev不等式作用于紧致区域），因此 $\|f - \bar{f}\|_{L^p} \leq C\sqrt{\mathcal{D}}$。代回可得

$$\|f - \bar{f}\|_{W^{2,p}} \leq C_5\left(1 + \sqrt{\mathcal{D}}\right).$$

选取足够小的 ϵ_0 可确保右端一致有界。Sobolev嵌入（紧致二维区域）$W^{2,p} \hookrightarrow C^{1,\alpha}$ 对任意满足 $\alpha = 1 - 2/p$的 $p > 2$ 都成立。因此，由上一个公式可知，存在常数 C_6，其取决于 p, h，使得

$$\|f - \bar{f}\|_{C^{1,\alpha}} \leq C_6\|f - \bar{f}\|_{W^{2,p}}.$$

结合（25）和此前的估计$\|f - \bar{f}\|_{L^2} \lesssim \sqrt{\mathcal{D}}$（当$\mathcal{D}$较小时），我们得到 in

$$\|f - \bar{f}\|_{C^{1,\alpha}} \leq C_7\sqrt{\mathcal{D}},$$

其中某个 C_7 仅取决于 p、h、K_0及背景几何。选取足够小的 ϵ_0，以确保左端足够小，并在必要时将常数平均值 f 吸收到全局缩放中，我们可以得出

$$\|f\|_{C^{1,\alpha}} \leq C_1\sqrt{\mathcal{D}},$$

（之后可适当固定 f 的归一化，使平均值 f 等于 0；这是无害的共形缩放，不会影响谱比较，至多相差一个我们会跟踪的常数因子）。这就证明了第一部分——几何稳定性估计。

步骤 4；谱比较与特征值下界

令 φ_0 表示平坦圆柱 S_h（欧几里得度量）上的第一Dirichlet特征函数，并归一化为 $\int_{S_h}\varphi_0^2 dxd\theta = 1$。其在平坦圆柱上的瑞利商等于 λ_{cyl}，即 $\lambda_{\text{cyl}} = \int_{S_h}|\nabla\varphi_0|^2 dxd\theta$。定义 $\tilde{\varphi}$：$= \varphi_0 \circ \Psi^{-1}$ 于 A 上（等价地，将 φ_0 视为定义在 S_h 上的函数，并比较度量 g 和 δ）。计算 $\tilde{\varphi}$ 关于度量 $g = e^{2f}\delta$ 的瑞利商

$$\mathcal{R}_g(\tilde{\varphi}) = \frac{\int_{S_h} e^{-2f}|\nabla\varphi_0|^2 e^{2f} dxd\theta}{\int_{S_h}\varphi_0^2 e^{2f} dxd\theta} = \frac{\int_{S_h}|\nabla\varphi_0|^2 dxd\theta}{\int_{S_h}\varphi_0^2 e^{2f} dxd\theta}.$$

Thus

$$\mathcal{R}_g(\tilde{\varphi}) - \lambda_{\mathrm{cyl}} = \frac{\lambda_{\mathrm{cyl}}}{\int \varphi_0^2 e^{2f}} - \lambda_{\mathrm{cyl}} = \lambda_{\mathrm{cyl}} \left(\frac{1}{\int \varphi_0^2 e^{2f}} - 1 \right).$$

写作 $\int \varphi_0^2 e^{2f} = 1 + \int \varphi_0^2 \left(e^{2f} - 1\right)$。利用小 $\|f\|_{C^0}$ 时的 $|e^{2f} - 1| \le C\|f\|_{C^0}$，我们得到

$$\mathcal{R}_g(\tilde{\varphi}) - \lambda_{\mathrm{cyl}} \le C\lambda_{\mathrm{cyl}} \|f\|_{C^0}.$$

特别地，根据 $\lambda(A)$ 的变分刻画，

$$\lambda(A) \le \mathcal{R}_g(\tilde{\varphi}) \le \lambda_{\mathrm{cyl}} + C\lambda_{\mathrm{cyl}} \|f\|_{C^0}.$$

因此，度量扰动至多产生 $\mathcal{O}(\|f\|_{C^0})$。为了用 λ_{cyl} 给出 $\lambda(A)$ 的下界，我们将实特征函数 ϕ 拉回到平坦圆柱上，并将其用作测试函数。定义 $\tilde{\phi} := \phi \circ \Psi$（视 ϕ 为定义在 S_h 上的函数）。计算平坦瑞利商

$$\mathcal{R}_\delta\left(\tilde{\phi}\right) = \frac{\int_{S_h} |\nabla \tilde{\phi}|^2 dx d\theta}{\int_{S_h} \tilde{\phi}^2 dx d\theta} = \frac{\int_{S_h} e^{2f} |\nabla_g \phi|_g^2 e^{-2f} dx d\theta}{\int_{S_h} \phi^2 e^{2f} dx d\theta} = \frac{\int_A |\nabla_g \phi|_g^2 d\mu_g}{\int_A \phi^2 d\mu_g} = \lambda(A).$$

可以证明，对于任意两个度量 $g_0 = \delta$ 和 $g = e^{2f}\delta$，只要 $\|f\|_{C^1}$ 足够小，就有

$$|\lambda(A, g) - \lambda(A, g_0)| \le C\|f\|_{C^1}. \tag{26}$$

此外，平坦圆柱（通过直接计算可知）是在保持模数的同一共形类度量中，第一狄利克雷特征值的局部极小值；因此，沿非平凡方向，第一特征值在二阶近似下增大。为得到定量界，我们将 (26) 与 Rellich公式在无穷小共形变分下的精确符号信息结合起来：计算在 $f = 0$ 处的导数可知，该导数为零且二阶导数正定，因此当 $\|f\|_{C^1}$ 足够小时，

$$\lambda(A, g) \ge \lambda_{\mathrm{cyl}} + C_0 \|f\|_{H^1} - C_1 \|f\|_{C^1}^2,$$

其中常数 C_0，$C_1 > 0$ 仅依赖于 h_0。利用 $\|f\|_{C^1} \le C\|f\|_{C^{1,\alpha}}$ 以及步骤 3 中的估计（$\|f\|_{C^{1,\alpha}} \le C_1\sqrt{\mathcal{D}}$），取 ϵ_0 足够小，使二次项被一次项控制，从而可得

$$\lambda(A) \ge \lambda_{\mathrm{cyl}} + C\sqrt{\mathcal{D}},$$

其中某个 $C > 0$ 仅依赖于背景数据。这就证明了所声称的谱下界。

□

注 3.7。• **不等式 (26) 是如何得出的?**

我们在平坦圆柱模型 S_h上工作。设 $g_0 = \delta$、$g = e^{2f}\delta$ 为两个共形度量（因此坐标图固定）。记 $\lambda_0 = \lambda(g_0)$ 和 $\lambda(g)$ 分别为度量 g_0 和 g下$-\Delta$ 的第一狄利克雷特征值。度量 g 的瑞利商为 $\mathcal{R}(\phi) = \frac{\int_{S_h} |\nabla_g \phi|_g^2 d\mu_g}{\int_{S_h} \phi^2 d\mu_g}$。若 $g = e^{2f}\delta$，则

$$|\nabla_g \phi|_g^2 = g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi = e^{-2f}|\nabla\phi|_\delta^2,$$
$$d\mu_g = e^{2f} dx,$$

因此我们有

$$\int_{S_h} |\nabla_g \phi|_g^2 d\mu_g = \int_{S_h} e^{-2f} |\nabla \phi|^2 e^{2f} dx = \int_{S_h} |\nabla \phi|_\delta^2 dx.$$

因此，对任意 ϕ （紧支撑的/在边界上满足狄利克雷条件）

$$\mathcal{R}_g(\phi) = \frac{\int_{S_h} |\nabla \phi|^2 dx}{\int_{S_h} \phi^2 e^{2f} dx}.$$

f 唯一出现的位置是在分母中。由上述瑞利商，通过将 e^{2f} 上下界分别估计为常数，可立即得到双边比较估计。由于

$$e^{-2\|f\|_\infty} \leq e^{2f(x)} \leq e^{2\|f\|_\infty}, \quad \text{for all} x,$$

我们对任意 ϕ都有

$$e^{-2\|f\|_\infty} \int_{S_h} \phi^2 dx \leq \int_{S_h} \phi^2 e^{2f} dx \leq e^{2\|f\|_\infty} \int_{S_h} \phi^2 dx.$$

因此,

$$e^{-2\|f\|_\infty} R_0(\phi) \leq R_g(\phi) \leq e^{2\|f\|_\infty} R_0(\phi),$$

其中 $R_0(\phi) = \frac{\int |\nabla \phi|^2}{\int \phi^2}$是平坦瑞利商。对可容许的 ϕ取下确界（特征值的变分刻画）

$$e^{-2\|f\|_\infty} \lambda_0 \leq \lambda(g) \leq e^{2\|f\|_\infty} \lambda_0.$$

Thus

$$|\lambda(g) - \lambda_0| \leq \left(e^{2\|f\|_\infty} - 1\right) \lambda_0.$$

当 $\|f\|_\infty$较小时，我们可以将 $e^{2\|f\|_\infty} - 1 \leq C\|f\|_\infty$线性化（令 $C = 3$取为 $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{2}$），因此特别有

$$|\lambda(g) - \lambda_0| \leq C\lambda_0 \|f\|_{L^\infty(S_h)},$$

带有明确常数 C（例如，当 $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ 时为 $C = e^1 - 1$，或者在小邻域内取 $C = 10$ 作为粗略的通用界）。

- **在 $f = 0$ 处计算 λ' 和 λ''**
  考虑一参数共形度量族中的 $\lambda(t) = \lambda(g(t))$

$$g(t) = e^{2t\psi} g_0, \quad g_0 = \delta,$$

使得 $f(t) = t\psi$ 且 $f'(0) = \psi$ （我们用 ψ 表示变分函数）。回顾一下,

$$\lambda' = \int_{\partial A} V (\partial_\nu \phi)^2 d\sigma_g + \int_A \left(\partial_t g (\nabla \phi, \nabla \phi) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}_g (\partial_t g) \phi^2\right) d\mu_g,$$

其中 ϕ 是对应的特征函数。如果将共形变分 $\partial_t g = 2\psi g$ 代入该表达式（在 $t = 0$处求值后），我们得到

$$\lambda'(0) = -2\lambda_0 \int_{S_h} \psi(x,\theta)\,\psi_0(x,\theta)^2\,dxd\theta.$$

我们考虑族 $g(t) = e^{2t\psi}g_0$ 在 $t = 0$ 处的导数。对象 $\lambda'(0)$ 是 $-\Delta_{g(t)}$ 在 $t = 0$ 处的第一特征值的导数。特征函数 $\phi(t)$ 的选取方式是：对于每个 t，它在 $L^2(g(t))$ 意义下均已归一化

$$\int \phi(t)^2\,d\mu_{g(t)} \equiv 1.$$

类似地，二阶导数为

$$\lambda''(0) = -4\lambda_0 \int \psi^2\phi_0^2 dx - 8\lambda_0^2 \sum_{k\neq 0} \frac{|\int \psi\phi_0\phi_k dx|^2}{\lambda_k - \lambda_0}.$$

右端项非正，因此在这个共形族中，特征值呈现凹性行为。

4 示例与数值结果

本节通过对两种模型几何进行数值探索，补充分析结果：同心欧几里得环域和带有小亏损的圆柱。这些计算展示了几何参数如何影响拉普拉斯谱，并验证了理论谱估计。所采用的方法将有限元离散与针对有界区域定制的特征值求解器相结合。这类数值研究对于理解非平凡几何中的谱行为，以及指导关于拉普拉斯谱稳定性和谱隙的猜想至关重要（关于研究拉普拉斯谱的数值方法已有多种工作，例如参见 [2, 15]）。

同心欧几里得环域 $\{a < |z| < b\}$
具有狄利克雷边界值 $u(a) = 0$, $u(b) = 1$ 的调和容量 $u(r)$ 是径向的，且由下式给出

$$u(r) = \frac{\ln r - \ln a}{\ln(b/a)}, \quad (a < r < b).$$

根据定义 $E = \frac{1}{2}\int_{\underline{A}} |\nabla u|^2 dA$。对于这个径向的 u,

$$u_r(r) = \frac{1}{r\ln(b/a)}, \quad |\nabla u|^2 = (u_r)^2 = \frac{1}{r^2\ln^2(b/a)}.$$

因此

$$\frac{1}{2}\int_A |\nabla u|^2 dA = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{1}{r^2\ln^2(b/a)} r dr d\theta = \frac{\pi}{\ln(b/a)}.$$

使用 Hessian 的 Frobenius 范数。对于二维中的径向函数，可以验证（在笛卡尔坐标中计算 Hessian，或使用标准径向公式）

$$|\operatorname{Hess} u|^2 = u_{rr}^2 + \left(\frac{u_r}{r}\right)^2.$$

对于上面的 $u(r)$,

$$u_{rr} = -\frac{1}{r^2 \ln(b/a)}, \quad \frac{u_r}{r} = \frac{1}{r^2 \ln(b/a)}.$$

因此 $|\operatorname{Hess} u|^2 = \frac{2}{r^4 \ln^2(b/a)}$。通过积分

$$\int_A |\operatorname{Hess} u|^2 dA = \frac{4\pi}{\ln^2(b/a)} \int_a^b r^{-3} dr = \frac{2\pi}{\ln^2(b/a)} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

因此

$$\mathcal{D} = \frac{\pi}{\ln^2(b/a)} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

我们求解环域上的狄利克雷 Laplace 特征值问题

$$-\Delta\phi = \lambda\phi, \quad \phi|_{r=a} = \phi_{r=b} = 0.$$

分离变量 $\phi(r,\theta) = R_n(r)\cos(n,\theta)$（或 sin）。径向常微分方程是参数为 $k = \sqrt{\lambda}$ 的 Bessel 方程。模态 n 的一般径向解为

$$R_n(r) = AJ_n(kr) + BY_n(kr).$$

在 $r = a$ 和 $r = b$ 处施加狄利克雷条件，得到关于 A、B 的 2×2 齐次系统，其行列式必须为零；等价地，根条件为

$$F_n(k) := J_n(ka)\,Y_n(kb) - J_n(kb)\,Y_n(ka) = 0.$$

对每个整数 $n \geq 0$，都有一个正根的离散序列 $k_{n,1} < k_{n,2} < \cdots$。特征值为 $\lambda = k^2$。第一狄利克雷特征值是所有 n 及该模态中第一个根对应的 λ 中的最小值

$$\lambda_1 = \min_{n \geq 0} \left(k_{n,1}^2\right).$$

圆柱（条带 $x \in (0,\ h)$ 上的平坦度量，$\theta \in \mathbb{S}^1$ 长度 2π），在 $x = 0,\ h$ 处取狄利克雷条件，并在 θ 方向周期，具有可分离模态，其特征值为

$$\lambda_{m,k} = \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + k^2, \quad m \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}.$$

最小值对应于 $m = 1$、$k = 0$，因此

$$\lambda_{\mathrm{cyl}}(h) = \left(\frac{\pi}{h}\right)^2.$$

通过标准模数关系将 h 与容量能量联系起来，我们可以看到

$$h = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \leftrightarrow h = \frac{1}{2E}.$$

b	E	$\mathcal{D}$	$\sqrt{\mathcal{D}}$	λ_{ann}	λ_{cyl}
5.0	1.95198	1.16432	1.07904	0.58246	150.42198
10.0	1.36438	0.58662	0.76591	0.10982	73.48998
20.0	1.04869	0.34919	0.59092	0.02348	43.41637
50.0	0.80306	0.20520	0.45299	0.00333	25.45990
100.0	0.68219	0.14812	0.38486	0.00078	18.37249
200.0	0.59294	0.11191	0.33453	0.00019	13.87981
500.0	0.50552	0.08134	0.28521	0.00003	10.08863
1000	0.45479	0.06584	0.25659	0.00006	8.16555

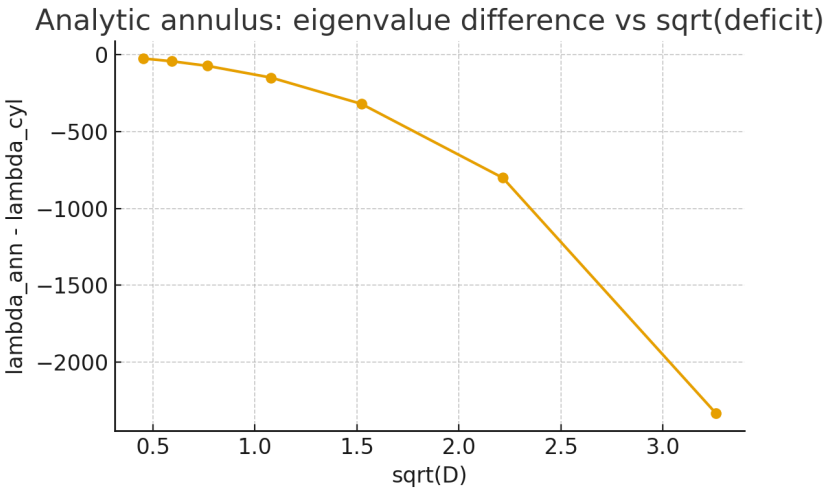

图 1：特征值与亏损的比较

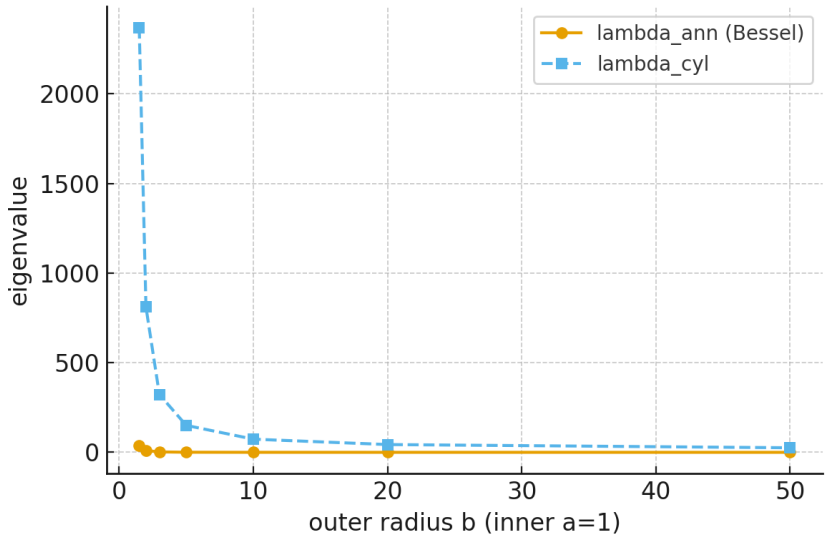

图 2：特征值与外半径的比较 b

圆柱上的数值小亏量检验

我们将对平坦圆柱 $[0,h]\times\mathbb{S}^1$（在 $x\in(0,h)$ 上取狄利克雷条件，在 θ 上取周期条件）进行离散化，并检验小的共形扰动 $g_\epsilon = e^{2\epsilon f_0(x,\theta)}(dx^2+d\theta^2)$。我们求解对应于 $-\Delta_{g_\epsilon}\phi = \lambda\phi$ 的广义离散特征值问题，并计算亏损 $\mathcal{D}$。数值结果表明，在小亏量区间内，特征值差随 $\sqrt{\mathcal{D}}$ 线性变化，这与理论预测 $\delta\lambda\sim C\sqrt{\mathcal{D}}$ 一致（符号与常数取决于所选扰动 f_θ）。考虑矩形 $x\in(0,h)$，$\theta\in[0,2\pi)$，其中 θ 为周期的。我们使用了 $h=1.0$，同时也考虑了上述度量 g_ϵ，其中

$$f_0(x,\theta)=\sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)\cos(k\theta),\ \ k=1.$$

$-\Delta_{g_\epsilon}\phi=\lambda\phi$ 等价于平坦矩形上的广义特征值问题（在此共形度量下）

$$-\Delta_{\text{flat}}\phi=\lambda e^{2\epsilon f_0(x,\theta)}\phi.$$

离散化采用二阶有限差分

- N_x 包含 x 方向上的内部点（在 $x=0,\ h$处满足狄利克雷条件），并且 N_θ 表示 θ的周期的点。
- 在 x 方向上构造一维拉普拉斯算子（狄利克雷），并在 θ 方向上构造一维拉普拉斯算子（周期的）。

考虑

$$A=I_\theta\otimes L_x+L_\theta\otimes I_x,$$

其中 L_x、 L_θ 是标准的二阶差分矩阵（按 $1/\Delta^2$缩放）。这 A 在网格上离散地近似了 $-\Delta_{\text{flat}}$。

- 质量（权重）矩阵为对角矩阵，其元素为 $B_{ii}=e^{2\epsilon f_0(x_i,\theta_i)}$.单元面积，其中单元面积为 $\Delta x.\Delta\theta$。

- 求解的离散广义特征值问题为

$$Au=\lambda_{\text{disc}}Bu.$$

为使用对称特征值求解器，我们构造了

$$\tilde{A}=B^{-1/2}AB^{-1/2},$$

该矩阵是对称的。一个特征对 $\tilde{A}y=\iota y$ 对应一个广义特征对 $Ax=\iota Bx$，其中 $x=B^{-1/2}y$（因此 ι 是离散特征值）。
利用恒等式（如文中圆柱坐标所示），可将亏损化为 f的显式积分，

$$\mathcal{D}=\frac{1}{h^2}\int_{[0,h]\times\mathbb{S}^1}e^{-2\epsilon f_0}|\epsilon\nabla f_0|^2dA.$$

按照所采用的有限差分约定，稀疏特征值求解器返回的常规特征值（记作 ι）是与 $Au=\iota Bu$ 相匹配的离散特征值。若要与连续特征值 λ_{cont}（标准偏微分方程 $-\Delta_g\phi=\lambda\phi$）进行比较，请将计算得到的 ι 乘以网格单元面积

$$\lambda_{\text{cont}}\approx\text{area–cell}\times\iota,$$

(经验上，这种转换重现了已知基准值 $\lambda_{\mathrm{cyl}} = (\pi/h)^2$ 当 $\epsilon = 0$).

ϵ	λ_{num}	λ_{cont}	λ_{cyl}	$\lambda_{\mathrm{cont}} - \lambda_{\mathrm{cyl}}$	$\mathcal{D}$	$\sqrt{\mathcal{D}}$
0.0001	2786.058246	9.863675	9.869604	−0.005930	1.623593×10^{-7}	0.000403
0.0002	2788.056992	9.863670	9.869604	−0.005934	6.494371×10^{-7}	0.000806
0.0005	2788.048215	9.863639	9.869604	−0.005965	4.058982×10^{-6}	0.002015
0.0010	2788.016784	9.863529	9.869604	−0.006076	1.623593×10^{-5}	0.004029
0.0020	2787.891572	9.863085	9.869604	−0.006519	6.494381×10^{-5}	0.008059
0.0050	2787.017380	9.859992	9.869604	−0.009612	4.059022×10^{-4}	0.020147

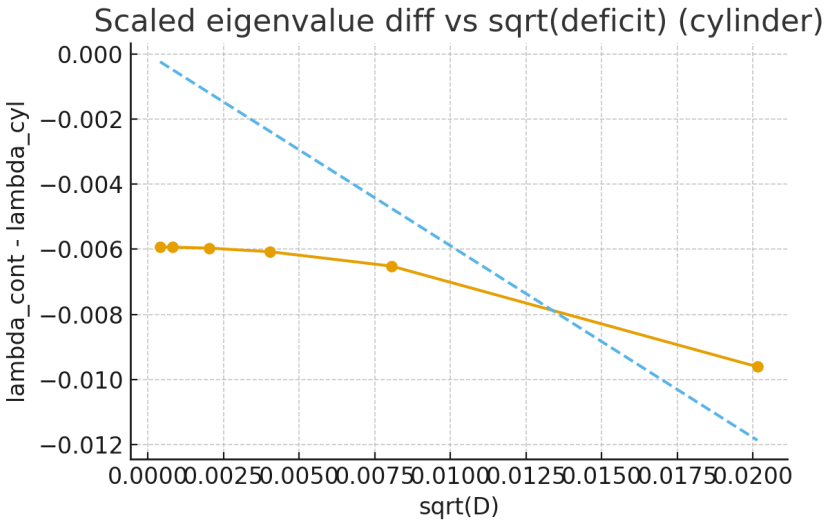

图3：小亏损

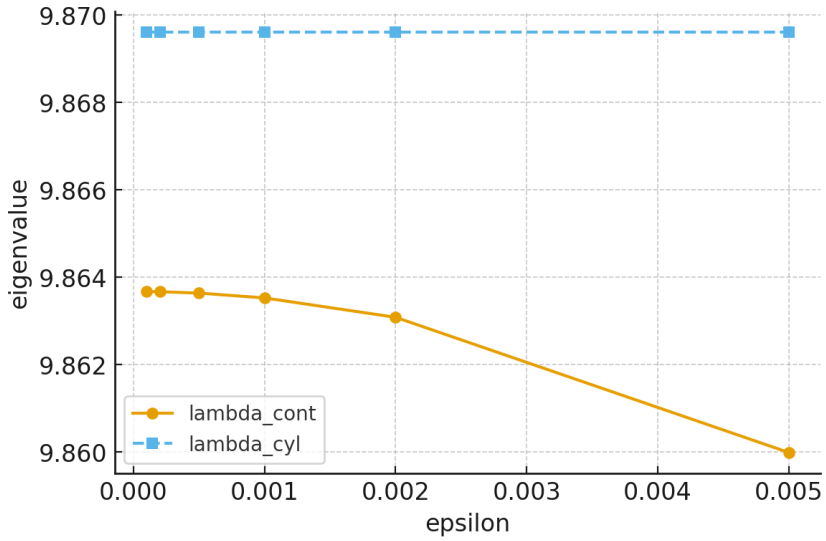

图4：特征值和epsilon参数

致谢

作者感谢河南省科学院高层次人才科研启动项目经费（项目编号：241819245）的支持。作者谨向.....致谢

感谢数学界同仁提出富有见地的讨论意见，这些意见极大地改进了本文。作者声明不存在利益冲突。除文中所呈现的数据外，没有其他可用数据。欢迎提出意见和建议，以进一步改进本文。

参考文献

[1] L. Ahlfors, 共形不变量：几何函数论专题, AMS Chelsea Publication, 美国数学学会, 罗得岛州, 1973.[2] T. Apel and P. Zilk, 圆扇形上的拉普拉斯特征值问题的等几何分析：正则性与分级网格, Comput. Math. Appl., 175(2024), 第236-254页.[3] S. Basak and S. Verma, 具有孔洞区域上的高阶*Steklov*特征值和混合*Steklov-Neumann*特征值的界, arXiv:2412.17124, (2024).[4] Y. Bozhkov and E. Mitidieri, 黎曼流形上的共形*Killing*向量场与*Rellich* 型恒等式 *II*, Meditor. J. Math., 9(2012), 第1-20页.[5] I. Chavel, 黎曼几何中的特征值, Academic Press, (1984).[6] B. Chow, *2*2球面上的里奇流, J. Differential Geom., 33(1991), 第325-334页.[7]E. Dryden, C. Gordon, J. Moreno, J. Rowlett, and C. Villegas–Blas, 凸多边形区域的 *Steklov*谱 *I*：谱有限性, J. Geom Anal., 91(2025), https://doi.org/10.1007/s12220-025-01922-8.[8] A. Enciso, A. Fernández, D. Ruiz, and P. Sicbaldi, 环域的*Schiffer*型问题及其在平面稳态*Euler*流中的应用, Duke Math J., 174(2025), 第1151-1208页.[9] M. Gage and R. Hamilton, 热方程使凸平面曲线收缩, J. Differential Geom., 23(1986), 第69-96页.[10] D. Gilbarg and N. Trudinger, 二阶椭圆型偏微分方程, Springer, 第二版, (2001).[11] M. Grayson, 热方程使嵌入平面曲线收缩至圆点, J. Differential Geom., 26(1987), 第285-314页.[12] M. Gurtin, 连续介质力学导论, Academic Press, (1981).[13] R. Hamilton, 曲面上的里奇流，数学与广义相对论, Contemp. Math., 71(1988), 第237-261页.[14] N. Korevaar, 共形等价度量的特征值上界, J. Differential Geom., 37(1993), 第73-93页.[15] J. Ma, L. Chen, and X. Cheng, 具有诺伊曼边界条件的拉普拉斯特征值问题的虚拟元方法, AIMS Mathematics, 10(2025), 第8203-8219页.[16] F. Rellich, 特征值问题的扰动理论, 技术报告, 第1号, (1954).[17] R. Schoen and S. Yau,调和映射讲义, International Press, (1997).[18] A. Sobnack and P. Topping, 曲线缩短流下模数的单调性, arXiv: 2409.03098, (2024).

[19] N. Trudinger, 具有可测系数的线性椭圆算子, 比萨高等师范学校年刊, 科学部 3^e 系列, 27(1973), 第265-308页.[20] P. Yangand S. Yau, 紧黎曼曲面与极小子流形的拉普拉斯算子特征值, 比萨高等师范学校科学部年刊, 7(1980), 第55-63页.