arXiv:2601.14715v1 [physics.atom-ph] 21 Jan 2026

原子分层介质中的光传播：高密度下传输矩阵法的失效

IGOR M. SOKOLOV[1] 和 WILLIAM GUERIN[2]

[1]*Ioffe*研究所，*194021*，俄罗斯圣彼得堡[2]蔚蓝海岸大学、法国国家科学研究中心、尼斯物理研究所，法国

编译于*2026*年*1*月*22*日

传输矩阵法是研究分层介质中波传播的标准方法。随着基于冷原子的量子技术和光子技术兴起，多项实验和许多方案都在研究光在一维光学晶格中的传播，并将传输矩阵作为模拟的主要工具。在此，我们通过将该方法的结果与在线性光学区制下精确成立的微观耦合偶极子模型进行比较，研究该方法的有效性。我们表明，传输矩阵法在低密度下效果很好，即使对于较薄的无序切片也是如此；但在高密度下会失效，因为偶极-偶极相互作用会诱发原子的集体响应，使得某一层的性质受到其他层的影响。我们确定了该方法仍适用于描述实验的原子密度范围边界。我们的研究结果与使用超冷原子的实验实现相关。

http://dx.doi.org/10.1364/ao.XX.XXXXXX

冷原子样品与光相互作用所产生的集体响应，出于基础研究和应用方面的原因，一直是当前活跃的研究课题 [1–5]。在基础问题中，气体折射率的数值 [6] 以及其共振线型和线宽的理解，长期以来一直备受争议（参见 [7–10] 及其中的参考文献）。相关应用涉及量子技术领域，例如时钟 [11], 、量子存储器 [12], 、新型激光方案 [13–17], 等。

对于由少量原子构成的微观样品，可以依靠精确数值求解，或在线性光学区制下使用耦合偶极子方程 [18–20]进行建模。但对于包含数百万个甚至更多原子的大型样品，这种方法并不切实可行，因此在许多情况下，采用宏观理论非常有用。例如，可以根据比尔-朗伯指数定律计算光在无序样品中的传播。尽管这种方法极其简单，却足以解释一些观测到的集体效应，包括散射光的量 [21–23], 、辐射压力 [24], 以及集体光学瞬态 [25–27]。对于光学密集样品，光的多重散射是不可或缺的因素，可以通过随机游走方法进行模拟；事实证明，这种方法足以解释许多可观测现象，无论是在稳态范围 [28, 29] 还是在时间动力学过程中 [30, 31]。值得注意的是，将光在有效介质中的比尔-朗伯传播与多重散射相结合，也能解释线性光学区制下的超辐射和亚辐射 [32–37]。最后，对于分层样品，例如被捕获在一维（1D）晶格中的冷原子，可以使用传递矩阵模型 [38–42]。

这些方法在低密度条件下 $\rho \ll k^3$,非常有效，此时可以将教科书中的公式用作宏观理论的构建模块。例如，单个原子的散射截面 $\sigma_{\rm sc} = (k^4/6\pi)|\alpha|^2$，其中 $\lambda = 2\pi/k$ 是跃迁的波长，是多重散射随机游走模型的关键要素。这里， α 是原子极化率，

$$\alpha = \frac{6\pi}{k^3} \times \frac{2\Delta/\Gamma + i}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2}, \tag{1}$$

这也使得能够计算复折射率，

$$n = \sqrt{1 + \rho\alpha}, \tag{2}$$

而复折射率是比尔-朗伯定律和传输矩阵模型的基本组成部分。

然而，在密度较高、原子间典型距离小于波长时，由于原子间强烈的近场偶极-偶极相互作用（DDI），这些简单公式便不再适用。这一点早已为人所知，例如教科书中介绍的洛伦兹-洛伦兹位移[43]。不过，近期研究表明，由于 DDI 引发的强关联，教科书中的结果并不适用于冷原子 [6–8]。

本文研究了传输矩阵（TM）模型在模拟线性光学区制下光在一维冷原子晶格中的传播与反射时的适用范围。通过与耦合偶极子（CD）模型进行比较，我们

发现，采用教科书公式计算折射率的 TM 模型在低密度下表现良好，即使对于非常薄（亚波长）的薄层也是如此；而在高密度下，该模型失效，这并不令人意外。然而，我们还发现，将高密度下由 CD 模型确定的有效折射率作为 TM 模型的输入，并不能恢复其有效性。我们认为，这一较不直观的结果源于层间的偶极-偶极相互作用。

本文结构如下。首先，我们在第 1 节介绍传输矩阵模型和耦合偶极子模型。随后，我们在第 2 节比较两个模型的结果：先讨论低密度区域，再讨论单个厚层处于较高密度时的情况。由此，我们可以确定 TM 模型的适用范围。最后，在第 3 节中，我们将研究结果应用于由冷原子构成的布拉格反射镜这一具体且有趣的案例。

1. 模型描述

A. 传输矩阵法

传输矩阵法将任意光学元件右侧向前传播和向后传播的波与左侧的波联系起来 [43]（图1）。Deutsch 等人首次将其应用于冷原子晶格 等 [38]。该方法基于每个界面处的菲涅耳系数，以及原子层内部透射所遵循的比尔-朗伯衰减定律。这两个要素由复折射率（2）计算得到。在正入射条件下，真空到原子层界面的菲涅耳系数为

$$r_{\mathrm{va}} = \frac{1-n}{1+n} \quad \& \quad t_{\mathrm{va}} = \frac{2}{1+n}, \tag{3}$$

对于从原子层到真空的界面，则为：

$$r_{\mathrm{av}} = \frac{n-1}{n+1} \quad \& \quad t_{\mathrm{av}} = \frac{2n}{1+n}. \tag{4}$$

最后，厚度为L的原子层的透射为

$$t_{\mathrm{a}} = e^{inkL}. \tag{5}$$

根据图1所示的传输矩阵定义，每个界面的矩阵为 [44]（$i = \{$av,va$\}$）：

$$M_i = \frac{1}{t_i}\begin{bmatrix} 1 & r_i \\ r_i & 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

而穿过原子层的传输矩阵为：

$$M_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} t_{\mathrm{a}} & 0 \\ 0 & 1/t_{\mathrm{a}} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

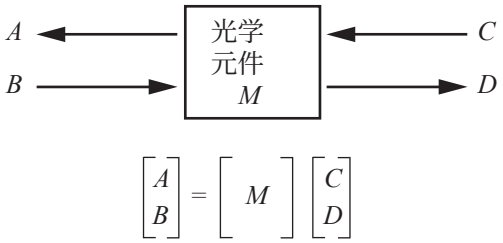

图 1。 传输矩阵法示意图。A、B、C、D 表示场的振幅。

显然，将 n 替换为 1，即可将同一矩阵用于真空间隙。

因此，真空包围的原子层的总矩阵为

$$M = M_{\mathrm{va}} M_{\mathrm{a}} M_{\mathrm{av}}, \tag{8}$$

场的全局透射系数和反射系数为

$$r_M = \frac{M_{12}}{M_{22}}, \quad t_M = \frac{1}{M_{22}}. \tag{9}$$

经过一些代数运算可得

$$t(n) = \frac{t_{\mathrm{va}} t_{\mathrm{av}} t_{\mathrm{a}}}{1 + r_{\mathrm{va}} r_{\mathrm{av}} t_{\mathrm{a}}^2}, \tag{10}$$

$$r(n) = \frac{r_{\mathrm{va}} + r_{\mathrm{av}} t_{\mathrm{a}}^2}{1 + r_{\mathrm{va}} r_{\mathrm{av}} t_{\mathrm{a}}^2}. \tag{11}$$

这里我们明确指出了复折射率n的依赖关系。

这种方法对于分层介质（例如薄膜）尤其有效。如果介质具有周期性，例如布拉格反射镜（第3节），则整个传输矩阵是单个周期矩阵的幂。

B. 耦合偶极子方程

耦合偶极子模型近年来广泛用于研究光与原子相互作用中的集体效应 [1–5], 。该模型考虑N 个二能级原子（基态的总角动量为$J_g = 0$，简并激发态为$J_e = 1$，其$m \equiv J_z = -1$为 0、1），这些原子位于随机位置$\boldsymbol{r}_i$，并受入射激光驱动（拉比频率为 $\Omega(\boldsymbol{r})$，失谐为 Δ）。将希尔伯特空间限制在由原子的基态$|G\rangle = |g\cdots g\rangle$和单激发态 $|i\rangle = |g\cdots e_{im}\cdots g\rangle$张成的子空间，并对光子自由度求迹后，可得到描述原子波函数 $|\psi(t)\rangle$时间演化的有效哈密顿量，

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|G\rangle + \sum_{i=1}^{N}\sum_{m}\beta_{e_{im}}(t)|i\rangle. \tag{12}$$

考虑低强度极限，此时原子主要处于基态，即 $\alpha \simeq 1$，问题便转化为求振幅 $\beta_{e_{im}}$，它们由以下耦合线性方程组给出

$$\dot{\beta}_{e_{im}} = \left(i\Delta - \frac{\Gamma}{2}\right)\beta_{e_{im}} - \frac{i\Omega_{e_{im}}}{2} + \frac{i\Gamma}{2}\sum_{j\neq i}\sum_{m'} V_{e_{im}e_{jm'}}\beta_{e_{jm'}}. \tag{13}$$

这些方程与描述由振荡电场驱动的N 个经典偶极子的方程相同 [45–47]。右端第一项对应独立偶极子的自然演化（其中 Γ 是跃迁线宽），第二项对应外部激光的驱动，最后一项对应偶极-偶极相互作用，并引起所有集体效应。该项为

$$V_{e_{im}e_{jm'}} = -\frac{4\pi k^2}{\hbar}\sum_{\mu\nu}\mathbf{d}^{\mu}_{e_{im}g_i}\mathbf{d}^{\nu}_{g_j e_{m'j}} G_{\mu\nu}(\mathbf{r}_{ij}). \tag{14}$$

这里$\mathbf{d}_{e_{im}g_i}$ 是原子i从$g \to e_m$ 跃迁的偶极矩算符，$\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}^j$ 和$r_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$。 上标$\mu$ 或 ν 表示矢量在某一参考系上的投影，

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left[P(ikr)\delta_{\mu\nu} + Q(ikr)\frac{\mathbf{r}_\mu \mathbf{r}_\nu}{r^2}\right] \tag{15}$$

是麦克斯韦方程的格林矩阵，其中k $= \omega_0$ $=$ 2π λ_0 $= 1-1$ $+1$ ^{2}, $= -1+3$ -3 ^{2} $/c/$, $P(u)/u/uQ(u)/u/u_\circ$

为了计算无限宽薄板的反射率和折射系数，我们采用 [48, 49] 中描述的方法。我们考虑半径为$R \gg L$的圆柱形样品，其母线平行于z轴。对入射平面波$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0 E_0 \exp(ikz - i\omega t)$，我们对方程（13）进行数值求解。原子系综后方任意一点处的透射电场$\mathbf{E}(\mathbf{r})$可按如下方式计算[1]：

$$\mathbf{E}_\mu(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{0\mu}(\mathbf{r}) - 4\pi k^2 \sum_{i,m,\nu} \mathbf{d}^{\nu}_{g_i e_{im}} G_{\mu\nu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,\beta_{e_{im}}. \tag{16}$$

在数值计算中，我们假设光电探测器平面垂直于z轴，且位于距离为$15\text{–}30k^{-1}$处，具体取值取决于系综半径。由于半径R有限，该平面不同位置处的电场强度并不相同。然而，我们已验证，在距z轴小于$R/2$的范围内，对随机原子空间构型取平均后的场强在很好的近似下为常数。因此，为了估算相干透射，我们采用以下对原子系综和光电探测器面积（半径R_d）取平均的表达式：

$$t = \frac{1}{\pi R_\mathrm{d}^2 E_0} \int_{\pi R_\mathrm{d}^2} d^2\mathbf{r} \langle \mathbf{u}_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle\,. \tag{17}$$

平均区域的半径选为$R_\mathrm{d} = R/2$。

为了计算振幅反射系数，我们采用相同的方法，但在计算相应的场强时不考虑源辐射（式 16）。

2。两个模型的比较 ELS

我们首先比较低密度下两个模型的结果，然后研究密度较大时会发生什么。

A. 低密度下的单层

我们考虑一个圆柱形单层，其半径为 $R = 600k^{-1}$。该层的厚度为 L，原子密度为 ρ。该层受到垂直入射的平面波激发，我们按照上文所述的耦合偶极子模型计算透射 t 和反射 r 系数。然后，我们利用单层的传输矩阵，通过式（10）和（11），将得到的系数与原子样品的折射率联系起来。这两个方程各自提供关于 n的实部和虚部的两个独立方程，并通过数值方法求解。

按照这一流程，我们首先考虑一个满足 $kL = 0.25$ 且 $\rho = 0.001k^3$ 的薄层。我们在图 2 中绘出通过 t 或 r 得到的折射率虚部。两种结果完全一致，并且也与教科书中的结果相符公式

$$\mathrm{Im}(n) = \frac{\rho}{2}\mathrm{Im}(\alpha)\,, \tag{18}$$

其中 α 为由公式（1）给出的极化率。

我们还验证了，使用实部也同样有效。这个初步基准测试表明，在低密度下，耦合偶极子模型能够很好地模拟教科书中的折射率；该折射率通过其宏观效应，即透射和反射来测量。

这一结果还强调了这样一个事实：折射率作为一种宏观量，可以用来描述

[1]请注意，为避免有限尺寸效应，我们排除了圆柱体侧边缘附近原子的贡献。

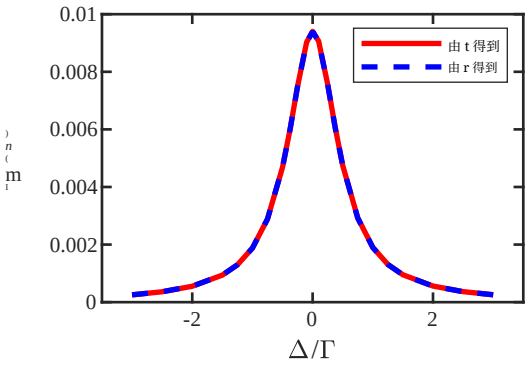

图 2. 由原子薄层（$kL = 0.25$）的反射和透射计算得到的介质折射率虚部。反射和透射由耦合偶极子模型计算。

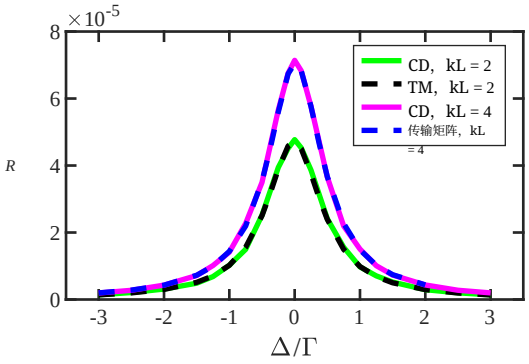

图 3. 由厚层原子产生的反射系数，分别由耦合偶极子模型（实线）和 TM 模型（虚线）计算得出。层厚度为 $kL = 2$（绿色和黑色）以及 $kL = 4$（粉色和蓝色）。

稀薄无序原子极薄切片中的光传播，前提是我们只考虑对无序构型取平均后的相干透射和反射。这多少有些违反直觉，因为人们通常认为折射率是连续介质的属性，而这里的情况远非如此（另见 [1] 中的讨论）。

接下来，我们对更厚的层进行类似的比较。现在绘制反射系数 $R = |r|^2$，分别通过耦合偶极子模型计算，或使用教科书中的折射率通过 TM 模型计算；所用单层的厚度为 $kL = 2$和$kL = 4$（图3）。两个模型之间的差异未超过数值计算的误差。我们已确认，两个模型在透射系数 $T = |t|^2$方面也完全一致。我们得出结论：TM 方法非常适用于稀薄介质。厚层的光学性质可以根据薄层的性质推导出来。

B. 高密度下的单层

现在让我们研究密度更高时的同一问题。

与之前一样，我们根据薄层（$kL = 0.25$）的透射和反射微观计算来计算复折射率，但现在取 $\rho = 0.1k^3$。虚部的结果如图4所示。透射和反射的结果仍然吻合，但我们观察到

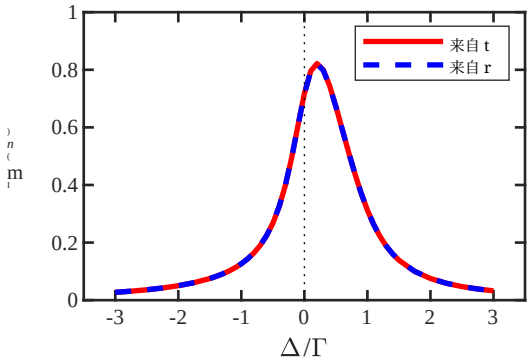

图 4. 与图2 相同，但密度更高，$\rho = 0.1k^3$ 而非 $\rho = 0.001k^3$。

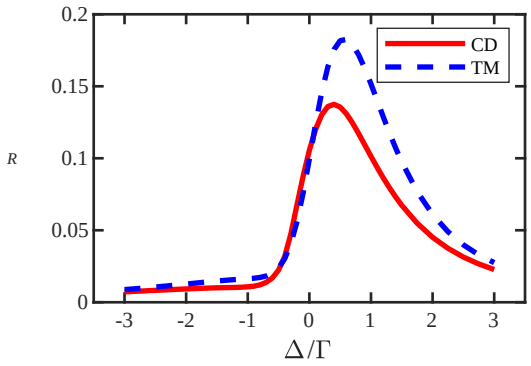

图 5. 厚（$kL = 2$）且高密度（$\rho = 0.1k^3$）原子层的反射系数，由两种方法计算得到。实线表示微观 CD 模拟结果，虚线表示 TM 模型的结果，该模型使用由薄层确定的折射率。

相对于原子共振发生了偏移，这表明教科书中的方程（2）已不再有效。

我们能否利用这一有效折射率计算更厚层的响应？我们将通过薄层的 CD 模拟确定的这一折射率，输入厚层的 TM 模型（$kL = 2$），并与厚层的 CD 模拟进行比较。比较结果如图5所示。两个模型之间的差异十分明显。

在图 6中，我们针对透射和反射随层厚度的变化，更详细地研究了这一差异。密度固定为 $\rho = 0.1k^3$。我们绘制了相对误差，即结果差值与其均值之比。相对误差随厚度增加而增大，尤其是透射的相对误差，且可能超过 100%。

我们针对密度加倍的情况重复了相同的分析，$\rho = 0.2k^3$,，结果发现相对误差更大。

这些结果表明，我们不能将薄层所得的结果用于后续厚层模拟。分层方法会导致透射和反射均出现误差。其物理解释是，不同层中的原子会相互影响：相邻层的存在会改变给定层的光学性质。因此，我们面对的是集体响应。

有人可能会认为，从薄层测得的折射率并非真正的折射率；折射率是一种体性质，因此应通过模拟厚

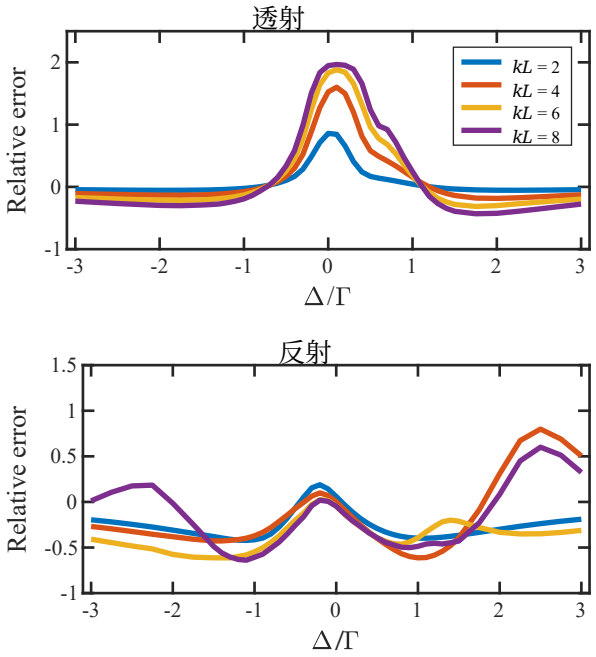

图 6. CD 模型与 TM 模型之间的相对误差，分别对应透射（上图）和反射（下图），随层厚度的变化。密度为 $\rho = 0.1k^3$。

样品来确定。尝试这样做会引发新的问题。事实上，耦合偶极子模型无法直接确定折射率，只能通过其宏观效应来确定，例如样品的透射或反射，就像我们之前对薄样品所做的那样 [50]。然而，对于厚且致密的样品，如果根据透射或反射计算折射率，得到的结果会有所不同。

这在图7 中以 $kL = 1$展示。

不仅折射率的结果取决于我们采用透射还是反射，还取决于样品的厚度。这种尺寸效应如图8所示，其中我们观察到，随着层厚度增加，透射光谱发生了偏移。这让人想起早期关于这一主题的一些实验，例如文献 [21, 51]。这种

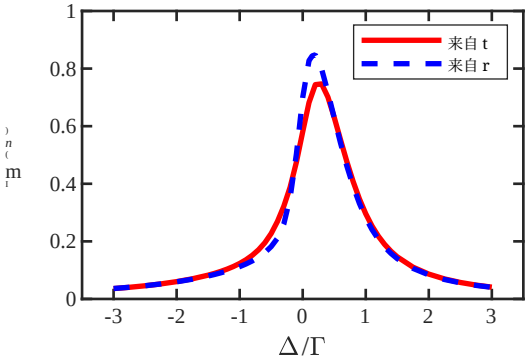

图 7。 利用厚层的 CD 模拟得到的反射（实线）或透射（虚线），确定折射率的虚部（$kL = 1$）。密度为 $\rho = 0.1k^3$。

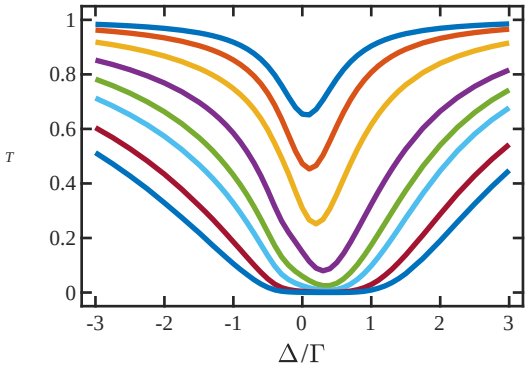

图 8. 固定密度 $\rho = 0.1k^3$ 下，不同层厚度对应的透射光谱：从上到下依次为 $kL = 0.25$、0.5、1、2、3、4、6、8。

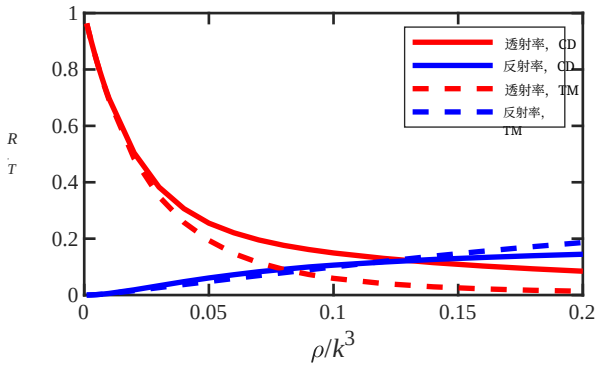

图 9. 固定失谐 $\Delta = 0$ 和固定厚度 $kL = 0.2$ 时，透射（红色）和反射（蓝色）系数随密度的变化。实线表示 CD 模拟，虚线表示将 TM 模型应用于厚层的结果，其中折射率由薄层确定。

有限尺寸效应可以这样解释：每个原子的响应都会受到其邻近原子的影响。因此，介质变得不均匀，因为边界处的原子与中心附近的原子相比，所处的环境不同。

我们得出结论，层间分离方法不适用于高密度原子系综。对于给定的厚度和失谐，可以研究透射和反射如何随密度变化。我们在图 9 中绘出了这一变化，并再次比较这两种方法：将 CD 模拟得到的透射和反射系数与 TM 模型的结果进行比较；在 TM 模型中，我们使用了如图 2 所示由薄层确定的极化率。密度达到 $\rho \sim 0.04k^3$，时，TM 方法的误差已十分明显，反射和透射的相对误差约为 20%。

3. 多层结构：原子布拉格反射镜的情形

现在我们转向更复杂的情况：多个原子层由真空分隔开来，以构成周期接近 $\lambda/2$ 的周期性结构。这是一个具有实验意义的情况，因为反向传播方向上的相长干涉可以产生很高的反射率。这种原子布拉格反射镜

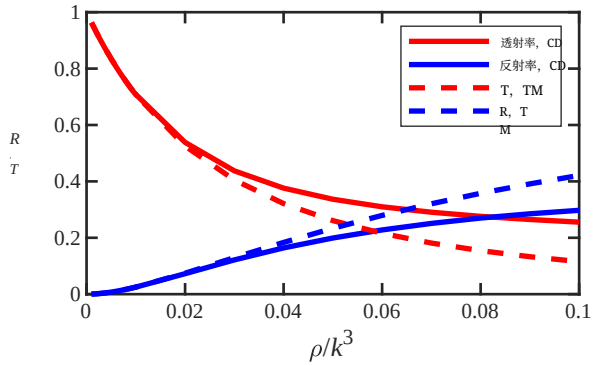

图 10. 与图 9相同，但这里讨论的是布拉格构型中薄原子层与真空交替排列的情形。

已经得到实验证实 [41, 42, 52]，并且已使用 TM 模型对这些实验进行了模拟。由于层间距小于 $\lambda/2$，因此有必要检验这种方法的有效性，而这将取决于每层中的密度。

我们考虑十个厚度为 $kL = 0.2$ 的层，相邻层之间由长度为 ΔL 的间隙隔开，使得 $k\Delta L = \pi - 0.2$，即晶格周期恰好为 $\lambda/2$，满足布拉格条件。层的密度从 $0.001k^3$ 变至 $0.1k^3$。由于耦合偶极子模型（CD 模型）的数值限制，必须根据所选密度调整层的半径：当 $\rho < 0.005k^3$，时，$kR = 500$；当 $0.005k^3 < \rho < 0.009k^3$，时，$kR = 300$；当 $0.01k^3 < \rho < 0.1k^3$，时，$kR = 100$。与之前一样，计算采用两种方法进行。第一种是使用 CD 模型进行微观计算。第二种基于 TM，其中我们采用对单个薄层的反射系数和透射系数进行微观计算所得的复磁化率数值。结果对比如图 10 所示。这里，布拉格结构的反射率受到层数相对较少、层厚较小的限制，而这最终又受制于耦合偶极子模型所能模拟的原子数。关于这类系统的更深入模拟见[53]。

所得结果与厚层的结果非常接近（图9）：当高于 $\rho = 0.05k^3$，时，TM 模型的误差变得非常显著（$\sim 20\%$）。然而，在低密度下，该模型表现非常好，这验证了其在实验中的适用性 [41]，；在该实验中，每层的峰值（分别为平均）密度（具有高斯密度分布）约为 $\sim 2.4 \times 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-3}$（分别为 $\sim 0.7 \times 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-3}$），对于 $\sim 0.005k^3$（分别为 $\sim 0.0016k^3$）的铷而言，这对应于 $\lambda = 780\mathrm{nm}$。在较新的实验中 [42]，，密度增大了一倍，但仍处于 TM 方法的适用范围内。

4. 结论

总而言之，我们研究了传递矩阵方法用于分层原子介质时的有效范围，结果表明，该方法在低密度下表现良好，包括用于薄层时也是如此，但在高密度下则会失效。首先，教科书中的折射率公式不再适用，因此这种方法的实用性大大降低。其次，更糟的是，无法将通过对薄层进行精确模拟所得到的折射率输入传输矩阵模型，用来计算厚层或多个层的集体行为。通常，我们发现

当单层的原子密度达到约 $0.05k^3$（对应于铷原子的 $\rho = 2.6 \times 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-3}$）时，传递矩阵方法会使反射系数和透射系数产生约 20% 的相对误差。

这些结果对于研究周期性原子系统在远高于以往实现条件的密度下的光子学性质具有重要意义，例如基于超冷原子（玻色–爱因斯坦凝聚体或类似系统）的实现。 [54, 55]。

资助。 ISM感谢Ioffe研究所在基线项目FFUG-2024-0039框架内提供的经费支持。WG感谢法国国家研究署在以下项目框架内提供的支持：1DOrder（ANR-22-CE47-0011）、QUTISYM（ANR-23-PETQ-0002）和E-CANNON（ANR-25-CE47-0361）。

利益冲突声明。 作者声明不存在利益冲突 。

数据可用性。 支撑本文所呈现结果的数据目前尚未公开，但可根据合理请求向作者获取。

参考文献

1. W. Guerin, M. T. Rouabah, and R. Kaiser, 《光与原子系综的相互作用：集体、协同与介观效应》, J. Mod. Opt. **64**, 895–907 (2017). 2. D. E. Chang, J. S. Douglas, A. Gonzáles-Tudela, 等, 《综述：由原子和光子纳米尺度晶格构建的量子物质》, 《现代物理评论》**90**, 031002 (2018). 3. M. Reitz, C. Sommer, and C. Genes, 《光–物质平台中的协同量子现象》, PRX Quantum **3**, 010201 (2022). 4. A. S. Sheremet, M. I. Petrov, I. V. Iorsh, 等, 《波导量子电动力学：集体辐射与光子–光子关联》, 《现代物理评论》**95**, 015002 (2023). 5. H. H. Jen, 《光子介导的偶极–偶极相互作用：冷原子量子科学与技术的资源》, Quantum Sci. Technol.**10**, 023001 (2025). 6. F. Andreoli, M. J. Gullans, A. A. High, 等, 《原子介质的最大折射率》, Phys. Rev. X **11**, 011026 (2021). 7. Y. A. Fofanov, A. S. Kuraptsev, I. M. Sokolov, and M. D. Havey, 《致密冷原子气体介电常数的色散》, 《物理评论 A》**84**, 053811 (2011). 8. J. Javanainen and J. Ruostekoski, 《超越标准光学平均场理论的光传播》, Opt. Express **24**, 993–1001 (2016). 9. S. Jennewein, L. Brossard, Y. R. P. Sortais, 等, 《致密微观冷二能级原子云对近共振光的相干散射：实验与理论比较》, 《物理评论 A》**97**, 053816 (2018). 10. R. Vatré, R. Lopes, J. Beugnon, and F. Gerbier, 《超冷原子薄层对共振光的散射》, 预印本 (2024). 11. D. E. Chang, J. Ye, and M. D. Lukin, 《控制基于晶格的光学原子钟中的偶极–偶极频移》, 《物理评论 A》**69**, 023810 (2004). 12. A. Asenjo-Garcia, M. Moreno-Cardoer, A. Albrecht, 等, 《利用原子阵列中的亚辐射和"选择性辐射"提升光子存储保真度》, Phys. Rev. X **7**, 031024 (2017). 13. W. Guerin, F. Michaud, and R. Kaiser, 《以冷原子为增益介质实现激光振荡的机制》, 《物理评论快报》**101**, 093002 (2008). 14. J. G. Bohnet, Z. Chen, J. M. Weiner, 等, 《腔内光子数少于一个的稳态超辐射激光器》, Nature **484**, 78–81 (2012). 15. A. Schilke, C. Zimmermann, P. W. Courteille, and W. Guerin, 《冷原子中的分布式反馈光学参量振荡》, Nat. Photon. **6**, 101 (2012). 16. Q. Baudouin, N. Mercadier, and R. Kaiser, 《冷多能级原子辐射俘获的稳态特征》, 《物理评论 A》**87**, 013412 (2013). 17. R. Holzinger, D. Plankensteiner, L. Ostermann, and H. Ritsch, 《纳米尺度相干光源》, 《物理评论快报》**124**, 253603 (2020). 18. J. Javanainen, J. Ruostekoski, B. Vestergaard, and M. R. Francis, 《致密简并样品中光传播的一维建模》, 《物理评论 A》**59**, 649 – 666 (1999).

19. A. A. Svidzinsky, J.-T. Chang, 和 M. O. Scully, "均匀激发的N 原子云中单光子关联自发辐射的动力学演化", 《物理评论快报》**100**, 160504 (2008). 20. I. Sokolov, D. Kupriyanov, 和 M. Havey, "致密超冷原子系综对弱电磁辐射散射的微观理论", 《实验与理论物理学杂志》**112**, 246 (2011). 21. J. Pellegrino, R. Bourgain, S. Jennewein, 等, "观测到冷原子系综中偶极-偶极相互作用引起的光散射抑制", 《物理评论快报》**113**, 133602 (2014). 22. I. M. Sokolov 和 W. Guerin, "稀薄冷原子系综光散射的三种方法比较", 《美国光学学会杂志 B》**36**, 2030–3037 (2019). 23. K. J. Kemp, S. J. Roof, M. D. Havey, 等, "致密冷Rb气体中光散射的光学厚度标度", 《物理评论 A》**101**, 033832 (2020). 24. R. Bachelard, N. Piovella, W. Guerin, 和 R. Kaiser, "辐射压力的集体效应", 《物理评论 A》**94**, 033836 (2016). 25. M. Chalony, R. Pierrat, D. Delande, 和 D. Wilkowski, "冷原子云发射的相干光闪", 《物理评论 A》**84**, 011401(R) (2011). 26. C. C. Kwong, T. Yang, M. S. Pramod, 等, "相干超闪光的协同辐射", 《物理评论快报》**113**, 223601 (2014). 27. C. C. Kwong, T. Yang, , 等, "光学厚散射介质中脉冲序列的协同辐射", 《物理评论快报》**115**, 223601 (2015). 28. D. V. Kupriyanov, I. M. Sokolov, P. Kulatunga, 等, "原子系统中的光相干背向散射：在冷碱金属原子系综弱局域化研究中的应用", 《物理评论 A》**67**, 013814 (2003). 29. G. Labeyrie, D. Delande, C. A. Müller, 等, "共振介质中的光多重散射", 《光学通信》**243**, 157–164 (2004). 30. G. Labeyrie, E. Vaujour, C. A. Müller, 等, "光在冷原子云中的慢扩散", 《物理评论快报》**91**, 223904 (2003). 31. V. M. Datsyuk 和 I. M. Sokolov, "脉冲辐射俘获条件下的相干背向散射", 《实验与理论物理学杂志》**102**, 724–736 (2006). 32. W. Guerin, M. O. Araújo, 和 R. Kaiser, "大型冷原子云中的亚辐射", 《物理评论快报》**116**, 083601 (2016). 33. M. O. Araújo, I. Krešić, R. Kaiser, 和 W. Guerin, "线性光学区制下大型冷原子云中的超辐射", 《物理评论快报》**117**, 073002 (2016). 34. A. S. Kuraptsev, I. Sokolov, 和 M. D. Havey, "稀薄冷原子系综中单光子超辐射的角分布", 《物理评论 A》**96**, 023830 (2017). 35. P. Weiss, A. Cipris, R. Kaiser, 等, "作为嵌入有效介质中的单次散射的超辐射", 《物理评论 A》**103**, 023702 (2021). 36. S. Asselie, A. Cipris, 和 W. Guerin, "线性光学超辐射和亚辐射的光学解释", 《物理评论 A》**106**, 063712 (2022). 37. W. Guerin, "稀薄无序冷原子样品中的超辐射与亚辐射：观测与解释", 载于《原子、分子与光学物理学进展》, 第72卷, L. F. DiMauro、H. Perrin 和 S. F. Yelin 编（爱思唯尔, 2023）, 第253–296页。38. I. H. Deutsch, R. J. C. Spreeuw, S. L. Rolston, 和 W. D. Phillips, "光学晶格中的光子带隙", 《物理评论 A》**52**, 1394 (1995). 39. S. Slama, C. von Cube, M. Kohler, 等, "光学晶格布拉格散射中的多重反射与漫散射", 《物理评论 A》**73**, 023424 (2006). 40. D. Petrosyan, "光学晶格中相干驱动原子产生的可调谐光子带隙", 《物理评论 A》**76**, 053823 (2007). 41. A. Schilke, C. Zimmermann, P. W. Courteille, 和 W. Guerin, "一维有序冷原子蒸气中的光子带隙", 《物理评论快报》**106**, 223903 (2011). 42. S. Asselie, J.-M. Nazon, R. Caldani, 等, "冷原子布拉格反射中的时间动力学：闪光效应与超辐射衰减", 《物理评论 A》**112**(2025). 43. M. Born 和 E. Wolf, 《光学原理》（剑桥大学出版社, 纽约, 1999）, 第7版。44. M. V. Klein 和 T. F. Furtak, 《光学》（威利出版社, 1986）, 第2版, 第298页。45. L. L. Foldy, "波的多重散射。I. 一般理论,

随机分布散射体的各向同性散射”，《物理评论》**67**, 107–119 (1945). 46. M. Lax，“波的多重散射”，《现代物理评论》**23**, 287–310 (1951). 47. A. A. Svidzinsky, J. Chang, 和 M. O. Scully，“N 原子的协同自发辐射：多体本征态、虚拟兰姆位移过程的影响，以及与N 个经典振子辐射的类比”，《物理评论 A》**81**, 053821 (2010). 48. I. M. Sokolov，“致密冷原子系综的光传输”，《激光物理》**25**, 065202 (2015). 49. S. E. Skipetrov 和 I. M. Sokolov，“固体透明基质中杂质导致的光安德森局域化”，《物理评论 B》**112** (2025). 50. 还可以计算样品中的退相干和衰减，见 [7, 56]。51. L. Chomaz, L. Corman, T. Yefsah, 等，“准二维气体的吸收成像：多重散射分析”，《新物理学杂志》**14**, 055001 (2012). 52. A. Schilke, C. Zimmermann, 和 W. Guerin，“电磁感应透明条件下一维有序冷原子蒸气的光子学性质”，《物理评论 A》**86**, 023809 (2012). 53. M. Samoylova, N. Piovella, R. Bachelard, 和 P. W. Courteille，“光学晶格中光子带隙的微观理论”，《光学通信》**312**, 94–98 (2014). 54. J. Zhu, C. Bian, Z. Zhao, 等，“原子数目较多的原子光栅中超辐射光散射的饱和”，《物理评论 A》**106**, 013312 (2022). 55. Y.-X. Wang, Y. Zhang, L. Du, 和 J.-H. Wu，“利用相干冷原子系综实现手性相位调制和可调谐宽带完美吸收器”，《物理评论 A》**108**, 053716 (2023). 56. S. E. Skipetrov 和 I. M. Sokolov，“共振点散射体模型中安德森局域化的伊offe-雷格尔判据”，《物理评论 B》**98**,064207 (2018).