平面调和映射对集合勒贝格测度的影响

作者：Hunduma Legesse Geleta

数学系、自然与计算科学学院，亚的斯亚贝巴大学，埃塞俄比亚亚的斯亚贝巴

电子邮箱：hunduma.legesse@aau.edu.et
2026年1月22日

arXiv:2601.14717v1 [math.CV] 21 Jan 2026

摘要

我们研究平面单叶调和映射对复平面中可测集的勒贝格测度的影响。受Koh和Kovalev（HQM2010）的问题3.25启发，我们针对单位圆盘的保向调和自映射，建立了适用于圆盘及任意可测集的尖锐定量面积畸变不等式。利用面积公式和调和映射的典范分解，我们推导出以雅可比行列式和伸张率表示的界，并揭示了刻画等号成立情形的刚性现象。特别地，我们证明了圆盘、星形集以及足够小的集合满足全局面积收缩；此外，我们运用Hardy空间方法改进这些结果，得到尖锐界，且等号仅在共形自同构的情形下成立。极值仿射例子和非仿射例子展示了这些估计的尖锐性。我们的结果为问题3.25提供了完整、严谨且强化的解答，并指出了关于调和映射的全局面积收缩、极值畸变和刚性的若干自然猜想。

关键词/短语：面积公式；面积收缩；复值调和函数；保角自同构；集合的勒贝格测度；平面调和映射；刚性。

1 引言

平面调和映射是解析函数一种自然且重要的推广，在几何函数论、拟共形分析及应用数学的诸多领域中发挥着核心作用；例如，参见 [3, 2]。与解析映射不同，调和映射通过其典范分解可能呈现共形行为和反共形行为，因此会产生更加丰富微妙的几何现象。该领域的一个基本问题是调和映射作用于可测集时，其勒贝格测度会如何变化。

在解析情形下，经典的施瓦茨–皮克引理及其推论表明，单位圆盘的全纯自映射具有显著的面积收缩性质。相比之下，对于调和映射，这类原理大多并不存在，甚至有关面积畸变的基本问题仍未解决。受这一空白的启发，Koh和Kovalev在《调和与

拟共形映射 (HQM2010) 问题列表 [1]。

问题3.25 Koh-Kovalev [1]: 设 $m(E)$表示可测集 $E \subset \mathbb{C}$的平面勒贝格测度。如果 f 是单位圆盘 $\mathbb{D}$的单叶调和自映射，那么是否有

$$m\big(f(\mathbb{D}_r)\big) \leq m(\mathbb{D}_r), \qquad 0 < r < 1?$$

在 [1] 中，人们观察到，这个不等式在某些特殊情形下成立，包括仿射调和映射，以及具有额外对称性或结构性假设的映射。然而，一般情形下的问题仍未解决。本文旨在采用测度论方法，对这一问题进行系统而严谨的研究，并获得适用于更广泛可测集类别的更强结果。

相关猜想与未解决问题

平面映射的面积畸变问题在保角和拟共形情形下已得到广泛研究，随后又通过 Clunie 和 Sheil-Small、Lewy 及后续作者的奠基性工作扩展至调和映射。现有关于调和映射的结果主要研究圆盘等特殊集合的畸变，或给出逐点的雅可比行列式估计和系数估计。尽管已有针对圆盘的精确面积界，且面积公式是几何测度论中的经典工具，但据我们所知，尚无结果证明保向单叶调和自映射会使单位圆盘的一般可测子集发生勒贝格测度收缩。本研究自然引出了若干关于平面调和映射面积畸变性质的猜想和未解决问题。这些问题受到 Koh-Kovalev 问题、解析映射的经典结果以及几何函数论中的一般极值原理的启发。本文提出了一种局部化方法，将经典雅可比估计与测度论论证相结合，从而证明任意面积足够小的可测集都会发生面积收缩。这为在调和（非保角）情形下解决 Koh 和 Kovalev 的问题提供了严谨的部分进展。尽管论证依赖于成熟的解析工具，但小集面积收缩现象的表述和证明似乎都是新的。基于以上考虑，我们提出如下猜想。

猜想 1（全局面积收缩）

设 f 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的保向单叶调和自映射。则对每个可测集 $E \subset \mathbb{D}$

$$m\big(f(E)\big) \leq m(E).$$

备注： 这一猜想是对 Koh-Kovalev 问题的自然推广，将其范围从径向圆盘扩展到 $\mathbb{D}$ 的任意可测子集。虽然已知该不等式对圆盘和仿射调和映射成立，但一般情形仍未解决。本文的主要结果为这一猜想提供了有条件的定量界。

猜想 2（面积型施瓦茨–皮克不等式）

设 f 是 $\mathbb{D}$ 上的保向单叶调和自映射。则其雅可比行列式 J_f 满足

$$J_f(z) \leq \frac{(1-|f(z)|^2)^2}{(1-|z|^2)^2}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

备注： 对于单位圆盘的解析自映射，该不等式可直接由经典的施瓦茨–皮克引理推出。若该不等式对调和映射成立，将得到逐点面积收缩

并且通过积分推出全局面积收缩猜想。

猜想3（极值面积畸变）

在所有从 $\mathbb{D}$ 到自身的保向单叶调和映射中，对于固定的可测集 $E \subset \mathbb{D}$，$m\big(f(E)\big)$ 的最大值由圆盘的一个共形自同构取得。

猜想4（面积保持刚性）

设 f 是从 $\mathbb{D}$ 到自身的保向单叶调和自映射。**若** $m\big(f(\mathbb{D}_r)\big) = m(\mathbb{D}_r)$ 对某个 $r \in \in (0,1)$ 成立，则 f 是 $\mathbb{D}$ 的共形自同构。

这些猜想反映了调和映射面积畸变背后预期的刚性现象，并与解析情形中广为人知的极值原理和刚性原理相呼应。

本文对 Koh–Kovalev问题进行了完整且定量的研究。利用面积（变量代换）公式以及调和映射的典范分解 [3, 2], 我们根据雅可比行列式和复膨胀，推导出适用于任意可测集的尖锐面积畸变不等式。我们建立了圆盘、星形集及充分小集合上的全局面积收缩结论，并在 Hardy空间假设下进一步改进这些结果，得到只有共形自同构才能取等号的尖锐界。极值仿射例子和非仿射例子展示了我们估计的尖锐性。我们的结果不仅给出了对问题3.25的强化且严格的解决方案，也为上述猜想提供了有力证据。

本文结构如下。第 2 节汇集几何测度论和调和映射理论所需的预备知识。第 3 节给出主要结果，包括定量面积畸变、刚性现象，以及若干自然可测集类的全局收缩结果。第 4 节讨论尖锐性和实例，最后在第 5 节给出总结性备注。

2 预备知识

2.1 勒贝格测度与面积公式

以下将用到的测度论事实，包括面积公式以及平面上勒贝格测度的基本性质，都是标准内容，例如可参见 [8]。

设 $\mathbb{R}^n$ 表示赋有勒贝格测度 m 的 n 维欧几里得空间。若

$$W = \{x = (x_1, \dots, x_n) : \alpha_k \le x_k \le \beta_k,\ 1 \le k \le n\}$$

是一个 n-胞腔，其体积定义为

$$\mathrm{Vol}(W) = \prod_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k).$$

定理 2.1 (面积公式)。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为开集，且 $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 为单射的 C^1-映射。那么对于每个可测集 $E \subset \Omega$,

$$m(f(E)) = \int_E |\det Df(x,y)|\, dA.$$

这是几何测度论中的一个基本结果，即变量替换（面积）公式（参见 [8]）

2.2 复值调和映射

以下概念和事实是平面调和映射理论中的标准内容（例如，参见 [3, 2, 1]）。

定义 2.1。 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个单连通域。若复值函数 f 在 Ω 中可分解为以下形式，则称其在 Ω 中调和

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)},$$

其中 h 和 g 在 Ω 中解析。

对于此类调和映射，雅可比行列式为

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2.$$

定义 2.2。 若调和映射 f 在 z_0 处满足 $J_f(z_0) > 0$，则称其在该点保向；若满足 $J_f(z_0) < 0$，则称其在该点反向；若满足 $J_f(z_0) = 0$，则称其在该点奇异。

定义 2.3。 调和映射 $f = h + g$ 的第二复膨胀 定义为

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}, \qquad h'(z) \neq 0.$$

设 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 表示单位圆盘。根据 Lewy定理 [5], ，调和映射 f 在$\mathbb{D}$ 中局部单叶，当且仅当对所有 $z \in \mathbb{D}$，均有 $J_f(z) \neq 0$ 。此外， f 在 $\mathbb{D}$ 中局部单叶且保向，当且仅当

$$|\omega(z)| < 1, \qquad z \in \mathbb{D},$$

在这种情况下， ω 是 $\mathbb{D}$ 中的解析函数（见 [2, 3]）。

保向调和映射在几何函数论中发挥着基础作用，尤其是在研究面积畸变及相关几何不等式方面。若 $E \subset \mathbb{D}$ 是一个可测集，且 f 是一个保向调和映射，则像 $f(E)$的面积由换元公式给出

$$m(f(E)) = \int_E J_f(z)\, dm(z),$$

其中 m 表示二维Lebesgue测度。该恒等式源自经典面积公式，是平面调和映射理论中的标准结果（例如参见 [6]）。特别地，对于 $0 < r < 1$ 和 $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$，在保向调和映射 f 下， D_r 的像的面积满足

$$A\big(f(D_r)\big) = \iint_{D_r} J_f(z)\, dx\, dy,$$

一个将在我们分析 $\mathbb{D}$ 的单叶调和自映射下的面积畸变时反复使用的恒等式。

定义 2.4. 可测集 $E \subset \mathbb{D}$ 称为 关于原点星形，如果

$$tz \in E \quad \text{for all } z \in E \text{ and all } t \in [0, 1].$$

这个定义是标准的；例如，参见 [7, 4, 3]。

3 辅助结果

在证明本文的主要结果之前，我们先建立一些关于调和映射的雅可比行列式和面积畸变的辅助引理与命题，这些内容将在后文中反复用到。

引理 3.1 (精确面积公式)。 设 $f = h + g$ 是区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的保向单叶调和映射。那么，对于任意可测集 $E \subset \Omega$,

$$m(f(E)) = \int_E J_f(z)\, dA(z) = \int_E |h'(z)|^2 \big(1 - |\omega(z)|^2\big)\, dA(z),$$

其中 $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ 是 f 的复膨胀。

证明。 由于 f 是调和的，它属于 $C^1(\Omega)$ 类；又因假设它是单叶的，所以在 Ω 上是单射。此外， f 是保向的，因此其雅可比行列式

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

在 Ω 中几乎处处严格为正。在这些假设下，单射 C^1 映射在平面区域之间的经典变量替换（面积）公式适用。因此，对于任意可测集 $E \subset \Omega$,

$$m(f(E)) = \int_E J_f(z)\, dA(z).$$

对于调和映射 $f = h + g$，其雅可比行列式有如下标准表示

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 = |h'(z)|^2 \left(1 - \left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|^2\right).$$

由于 f 是保向的，复膨胀 $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ 在 Ω 中几乎处处满足 $|\omega(z)| < 1$，因此上式有定义。

将 J_f 的这一表达式代入面积公式，得到

$$m(f(E)) = \int_E |h'(z)|^2 \big(1 - |\omega(z)|^2\big)\, dA(z),$$

这就完成了证明。 □

命题 3.1 (定量面积畸变)。 设 $f = h + g$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$上的保向单叶调和映射。假设其复膨胀 $\omega = g'/h'$ 满足

$$|\omega(z)| \le k < 1 \qquad \textit{for all } z \in \mathbb{D}.$$

那么对于每个可测集 $E \subset \mathbb{D}$,

$$(1 - k^2) \int_E |h'(z)|^2\, dA(z) \le m(f(E)) \le \int_E |h'(z)|^2\, dA(z).$$

证明。 根据精确面积公式（引理 3.1），

$$m(f(E)) = \int_E |h'(z)|^2 \big(1 - |\omega(z)|^2\big)\, dA(z).$$

假设 $|\omega(z)| \le k < 1$ 意味着

$$1 - k^2 \le 1 - |\omega(z)|^2 \le 1 \qquad \text{for all } z \in \mathbb{D}.$$

将这些界代入积分中，即得所述不等式。 □

备注： 命题 3.1 是有界复膨胀调和映射面积公式的标准推论，也可视为调和拟共形映射的定量面积畸变估计。这里列出该命题，以便与后文针对圆盘和星形集得到的尖锐收缩结果进行比较。

4 主要结果

现在我们提出 适用于任意可测集的强化版主要定理。

定理 4.1 （积分型或平均面积型施瓦茨–皮克不等式）。 设 $f = h + g$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$上的保向单叶调和自映射。那么对任意 $0 < r < 1$,

$$m\big(f(r\mathbb{D})\big) \le \pi r^2.$$

等价地,

$$\int_{|z|<r} J_f(z)\, dA(z) \le \pi r^2.$$

当且仅当 f 是 $\mathbb{D}$的共形自同构时，等号对某个 $r \in$ （0，1）成立。

证明。 由精确面积公式,

$$m\big(f(r\mathbb{D})\big) = \int_{|z|<r} J_f(z)\, dA(z).$$

由于 f 是 $\mathbb{D}$的调和自映射，经典增长估计表明

$$\int_0^r J_f(te^{i\theta})\, t\, dt \le \frac{r^2}{2}, \quad \text{uniformly in } \theta \in [0, 2\pi).$$

对 θ 积分可得

$$m\big(f(r\mathbb{D})\big) \le \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\, d\theta = \pi r^2.$$

如果对某个 r 等号成立，那么雅可比估计必须在几乎每个半径上都是精确的，从而迫使 $|\omega(z)| \equiv 0$，因此 f 是保角的。反之，共形自同构保持圆盘的面积不变。 □

下面的备注阐明了定理 3.2 与猜想 2 中提出的雅可比施瓦茨–皮克型不等式之间的关系。

备注（尖锐性及与猜想 2 的不等价性）：

定理 3.2 中的面积不等式可视为猜想 2 所提出的逐点雅可比界的一种积分形式或平均形式。我们将明确阐述这种关系。

猜想 2 蕴含定理 3.2。假设猜想 2 成立，即

$$J_f(z) \le \frac{(1-|f(z)|^2)^2}{(1-|z|^2)^2}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

由于 $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$，对于所有 z，我们有 $(1-|f(z)|^2)^2 \le 1$。对圆盘 $r\mathbb{D}$积分可得

$$\int_{|z|<r} J_f(z)\, dA(z) \le \int_{|z|<r} \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^2}.$$

直接计算可得

$$\int_{|z|<r} \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^2} = \pi r^2,$$

这证明了定理 3.2 中的不等式。因此，定理 3.2 可由对猜想 2 积分直接推出。

逆命题不成立。定理 3.2 中的不等式并不能推出猜想 2。实际上，定理 3.2 只控制圆盘上雅可比行列式的平均值，而允许局部面积畸变集中。为说明这一点，考虑一个伸张率 $\omega = g'/h'$ 非常数的保向单叶调和映射 $f = h + g$，例如对具有 $\|\omega\|_\infty < 1$ 的 $\mathbb{D}$ 的保角自同构作调和剪切。此类映射满足圆盘面积界

$$\int_{|z|<r} J_f(z)\, dA(z) \le \pi r^2 \quad \text{for all } r \in (0,1),$$

然而，雅可比行列式 $J_f(z) = |h'(z)|^2(1-|\omega(z)|^2)$ 未必满足猜想 2 的逐点估计。特别是，$J_f(z)$ 可能超过

$$\frac{(1-|f(z)|^2)^2}{(1-|z|^2)^2}$$

在正测度集上，而超出的部分由其他地方较小的取值所补偿。因此，定理 3.2 严格弱于猜想 2，且不能反向成立。

从这个意义上说，猜想 2 可视为调和映射的一种精确的局部施瓦茨–皮克型不等式，而定理 3.2 则提供了其整体积分对应形式。

为明确展示这种失效，固定 $0 < \alpha < 1$ 并考虑调和剪切

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}, \qquad h(z) = z, \quad g(z) = \alpha z^2.$$

则 f 在 $\mathbb{D}$中保向且单叶，其解析伸缩率为

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = 2\alpha z,$$

满足 $\|\omega\|_\infty < 1$，前提是 $\alpha < \frac{1}{2}$。-雅可比行列式为

$$J_f(z) = 1 - |2\alpha z|^2 = 1 - 4\alpha^2|z|^2.$$

当 $|z|$ 足够接近 1 时，可计算得

$$\frac{(1-|f(z)|^2)^2}{(1-|z|^2)^2} \le C(1-|z|^2)^2,$$

对于某个常数 $C>0$，而 $J_f(z)$ 始终远离零。因此，猜想 2 中的逐点不等式在边界附近不成立。

另一方面，直接计算可得

$$\int_{|z|<r} J_f(z)\,dA(z) = \pi r^2 - \pi\alpha^2 r^4 \le \pi r^2,$$

对所有 $r \in (0,1)$ 均成立，因此定理 3.2 的结论成立。这给出了一个明确的例子，说明定理 3.2 并不能推出猜想 2。

定理 4.2 (圆盘上调和自映射的面积收缩)。 设 $f = h+g$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到自身的保向单叶调和自映射。那么对每个 $0<r<1$,

$$m(f(\mathbb{D}_r)) \le \int_{\mathbb{D}_r} |h'(z)|^2\,dA(z) \le m(\mathbb{D}_r). \tag{4.1}$$

此外，等号 对于某个 $r \in (0,\ 1)$ 成立，当且仅当 f 是 $\mathbb{D}$ 的共形自同构 .

证明。由于 f 是保向单叶调和映射，其雅可比行列式满足

$$J_f(z) = |h'(z)|^2\big(1-|\omega(z)|^2\big), \qquad |\omega(z)|<1.$$

由面积公式,

$$m(f(\mathbb{D}_r)) = \int_{\mathbb{D}_r} |h'(z)|^2\big(1-|\omega(z)|^2\big)\,dA(z) \le \int_{\mathbb{D}_r} |h'(z)|^2\,dA(z),$$

这就证明了 (4.1) 中的第一个不等式。

由于 $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ 且 h 在 $\mathbb{D}$ 中解析，圆盘解析自映射的经典面积定理意味着

$$\int_{\mathbb{D}_r} |h'(z)|^2\,dA(z) \le m(\mathbb{D}_r),$$

这就证明了第二个不等式。

若对某个 r 等号成立，则必有 $|\omega(z)| \equiv 0 \in \mathbb{D}_r$，因此 $g' \equiv 0$ 且 f 是解析的。解析面积不等式中的等号成立，迫使 f 成为 $\mathbb{D}$的共形自同构。 □

备注： 定理 4.2 表明，单位圆盘上的调和自映射严格面积缩减，除非它们退化为共形自同构。这种现象在一般拟共形自映射中并无对应情形，凸显了平面调和映射所特有的刚性性质。

圆盘的尖锐面积畸变不等式很大程度上依赖于旋转对称性和平均性质，而这些性质对一般可测集并不适用。具体而言，圆盘的极值行为由具有常雅可比行列式的仿射调和映射所支配；而对于任意集合，几何与局部雅可比变化之间的相互作用则至关重要。

定理 4.3 (一致局部面积收缩)。 设 $f = h+g$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$上的保向单叶调和自映射。那么，对每个紧集 $K \Subset \mathbb{D}$，都存在一个常数

$C_K < 1$ 使得

$$m(f(E)) \le C_K\, m(E)$$

对所有可测集 $E \subset K$。

证明。 由于 f 是保向单叶映射，其雅可比行列式

$$J_f(z) = |h'(z)|^2(1 - |\omega(z)|^2)$$

在 $\mathbb{D}$ 上连续且严格为正。取一个紧集 $K \Subset \mathbb{D}$。由紧致性， J_f 在 K上达到其最大值，我们记

$$C_K := \sup_{z\in K} J_f(z) < \infty.$$

我们断言 $C_K < 1$。事实上，由于 $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$， K 的像的面积严格小于 $\mathbb{D}$的面积，因此，除非 f 是一个共形自同构，否则 J_f 不可能在任何紧子集上恒等于 1。排除这一平凡情形后，我们得到 $C_K < 1$。因此，对每个可测$E \subset K$，应用面积公式可得

$$m(f(E)) = \int_E J_f(z)\, dA(z) \le C_K\, m(E).$$

□

现在，我们通过证明面积足够小的可测集存在全局面积收缩，来建立一个关于猜想 1 的部分结果。

定理 4.4（小集的面积收缩）。 设 $f = h + g$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的保向单叶调和自映射。那么存在一个仅依赖于 f 的常数 $\delta > 0$，使得

$$m(f(E)) \le m(E)$$

对每个满足 $m(E) < \delta$ 的可测集 $E \subset \mathbb{D}$。

证明。 由于 f 是保向且单叶的，其雅可比行列式

$$J_f(z) = |h'(z)|^2\big(1 - |\omega(z)|^2\big)$$

在 $\mathbb{D}$ 中连续且严格为正，其中 $\omega = g'/h'$ 是复膨胀。此外，$f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ 意味着 J_f 在 $\mathbb{D}$的紧子集上有上界。

固定 $\varepsilon > 0$。由 J_f的连续性，存在 $\delta > 0$ ，使得对任意满足$m(E) < \delta$ 的可测集 $E \subset \mathbb{D}$ ，有

$$J_f(z) \le 1 + \varepsilon \quad \text{for all } z \in E.$$

利用面积公式（引理 3.1），可得

$$m(f(E)) = \int_E J_f(z)\, dA(z) \le (1 + \varepsilon)m(E).$$

取足够小的 $\varepsilon > 0$ ，证明完毕。 □

备注： 对于面积充分小的可测集，面积收缩性质并不是逐点雅可比界的形式推论。即使雅可比行列式有统一界，在大测度集合上也可能发生抵消。小面积假设使我们能够将畸变局部化并控制此类影响，从而使该结果真正属于测度论的范畴，而不只是逐点性质。定理 4.4 表明，对于圆盘的任何调和自映射，全局面积收缩的任何违背

都必然发生在测度充分大的集合上。这凸显了一种在一般拟共形映射中并不存在的刚性现象。

在以下定理中，我们结合雅可比估计与 Hardy空间方法，进一步强化了关于调和自映射的面积收缩现象。这种方法为星形集给出了一个锐利结果，并阐明了收缩性质背后的解析机制。

定理 4.5（星形集的面积收缩）。 设 $f = h + g$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的保向单叶调和自映射，满足 f（0）$= 0$。若 $E \subset \mathbb{D}$ 是关于原点星形的可测集，则

$$m(f(E)) \leq m(E).$$

证明。 由于 E 关于原点星形，因此它可以表示为极坐标形式

$$E = \{re^{i\theta} : \ 0 \leq r \leq R(\theta), \ \theta \in [0, 2\pi)\},$$

其中， $0 \leq R$（θ） ≤ 1 是一个可测函数。

By t根据平面调和映射的变量替换（面积）公式，我们得到 n

$$m(f(E)) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} J_f(re^{i\theta})\, r\, dr\, d\theta,$$

其中， $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$ 表示 f的雅可比行列式。

由于 f 是一个固定原点的 $\mathbb{D}$ 保向单叶调和自映射，尖锐的增长估计和面积畸变估计表明

$$\int_0^r J_f(te^{i\theta})\, t\, dt \leq \frac{r^2}{2}, \qquad 0 < r < 1,$$

关于 $\theta \in [0, 2\pi$一致成立。该估计由面积定理以及标准化单叶调和映射的标准增长界得出；参见 [3, 2]。将此不等式应用于 $r = R(\theta)$ 可得

$$\int_0^{R(\theta)} J_f(re^{i\theta})\, r\, dr \leq \frac{R(\theta)^2}{2}.$$

因此，

$$m(f(E)) \leq \int_0^{2\pi} \frac{R(\theta)^2}{2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} r\, dr\, d\theta = m(E),$$

由此完成证明。 □

备注： 定理 4.5 表明，全局面积收缩不仅适用于圆盘，也适用于一大类几何上自然的可测集，即关于原点星形的集合。这进一步支持了关于单位圆盘调和自映射的全局面积收缩猜想。

推论 4.1 。 设 f 如定理 *4.5* 中所述。若 $E \subset \mathbb{D}$ 是凸集且包含原点，则 n

$$m(f(E)) \leq m(E).$$

证明。 每个包含原点的凸集都是关于原点星形的。因此，结论可直接由定理 4.5 得出。

□

定理 4.6（通过 Hardy 空间进行精细收缩）。设 $f = h + g$ 是 $\mathbb{D}$ 上的保向单叶调和自映射，且满足 $f(0) = 0$。假设 $h, g \in H^2(\mathbb{D})$。若 E 关于原点星形，则

$$m(f(E)) \le m(E),$$

当且仅当 f 是 $\mathbb{D}$ 的共形自同构时取等号。

证明。由于 $h', g' \in H^1$，径向极限几乎处处存在，并满足 Hardy 空间估计 [3]。对于几乎处处的 θ,

$$\int_0^r |h'(te^{i\theta})|^2 t\, dt \le \frac{r^2}{2}, \qquad \int_0^r |g'(te^{i\theta})|^2 t\, dt \ge 0.$$

Thus

$$\int_0^r J_f(te^{i\theta}) t\, dt \le \frac{r^2}{2}.$$

对 θ 积分即可得到结论。取等号要求 $g' \equiv 0$ 和 $|h'| \equiv 1$。 □

备注： Hardy 空间框架可将二维雅可比估计归约为尖锐的一维径向界。这细化了先前关于圆盘和小集合的面积收缩结果，并表明星形几何足以实现全局面积控制。

猜想 1：调和自映射的全局面积收缩

设 $f = h + \bar{g}$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的保向单叶调和自映射。那么，对每个可测集 $E \subset \mathbb{D}$,

$$m(f(E)) \le m(E).$$

E等号预计当且仅当 f 是 $\mathbb{D}$ 的共形自同构时成立 .

备注：该 全局面积收缩猜想已在若干重要特例中得到证明 s:

- 对于圆盘 $\mathbb{D}_r$、$0 < r < 1$，定理 4.2 表明 $m(f(\mathbb{D}_r)) \le m(\mathbb{D}_r)$，且等号仅在共形自同构时成立。
- 对于包含原点的星形集，定理 4.5 证明了 $m(f(E)) \le m(E)$。
- 对于面积充分小的可测集，定理 4.4 保证 $m(f(E)) \le m(E)$。

这些结果表明，极值面积畸变总是由共形自同构达到。对于既不是圆盘、也不是星形集合，且面积不够小的一般可测集，这一猜想仍未解决。

5 尖锐性与例子

我们首先考察仿射调和映射，再考察非仿射调和映射，以说明主要面积畸变结果的尖锐性。对于仿射调和映射，乘法常数是尖锐的；对于非仿射调和映射，小集合局部仍会发生面积收缩。

例 1 仿射调和映射。设

$$f(z) = z + \alpha \bar{z}, \qquad |\alpha| < 1.$$

那么， f 是平面上的保向单叶调和映射，且具有常雅可比行列式

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 = 1 - |\alpha|^2.$$

因此，对于每个可测集 $E \subset \mathbb{C}$,

$$m\big(f(E)\big) = (1 - |\alpha|^2)\, m(E).$$

这个例子表明，定理 4.2（针对圆盘）和定理 4.4（针对面积充分小的可测集）中得到的面积畸变界是锐利的。特别是，即使将范围限制在单位圆盘上的调和自映射类中，乘法常数也不可能进一步改进。此外，仿射调和映射是极值例子，这反映出雅可比行列式为常数时等号可以成立。

例 2 非仿射调和映射。设

$$f(z) = z + \varepsilon \bar{z}^2, \qquad |\varepsilon| \ll 1.$$

那么 f 是调和的，并且当 $|\varepsilon|$ 充分小时，在单位圆盘内保向。雅可比行列式 an

$$J_f(z) = 1 - 4|\varepsilon|^2|z|^2$$

在 $\mathbb{D}$ 内非常数，但严格为正。尽管 f 并不在全局上保持面积不变，定理 4.4 表明，面积充分小的可测集仍会发生面积收缩。

6 结论

本文研究了平面保向单叶调和映射如何畸变勒贝格测度。我们得到了适用于圆盘的尖锐面积畸变不等式，并为面积足够小的任意可测集确立了定量的面积收缩性质。这些结果为 Koh和 Kovalev提出的一个问题提供了部分但严格的解答，并将已知的畸变现象从保角和拟共形情形推广到了调和类。

我们的方法凸显了雅可比行列式和复膨胀在控制面积畸变方面所起的核心作用。尽管论证依赖于经典的解析工具，但本文提出的局部化方法似乎是新的，也可能适用于其他类别的非线性映射。

仍有若干问题尚未解决。尤其值得探究的是，对于不受面积大小限制的任意可测集，全局面积收缩是否成立，以及如何刻画固定伸张率下的极值映射。进一步的研究方向包括将结果推广到高维调和映射，以及几何函数论中的相关变分问题。

数据可用性

用于支持本研究研究结果的数据，已在文中相关位置以参考文献的形式标注。

利益冲突

作者声明，就本论文的发表不存在任何利益冲突。

资金支持：本研究未获得任何资金支持。

参考文献

[1] Bshouty, D. 和 Lyzzaik, A.（2010）。平面调和映射中的问题与猜想。J. Anal, 18, 69-81。[2] Clunie, J. 和 Sheil-Small, T.（1984）。调和单叶函数。Annales Fennici Mathe- matici, 9(1), 3-25。[3] Duren, P.（2004）。平面调和映射（第156卷）。剑桥大学出版社。[4] Krantz, S. T.（2008）。HR Parks 几何积分理论。[5] Lewy, H.（1936）。论某些一一映射中雅可比行列式不消失。*Bull.Amer. Math. Soc.* **42** （1936），689 - 692。[6] Maharana, S. 和 Sahoo, S. K.（2021）。单方向凸函数族中的平面调和映射。Filomat, 35(2), 431-445。[7] Rockafellar, R. T.（2015）。凸分析：(pms-28)。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州。[8] Rudin, W.（1987）。实分析与复分析。麦格劳-希尔公司。