arXiv:2601.14842v1 [math.SG] 21 Jan 2026

接触同胚的竖直凸域

JAN EYLL、JONAS FRITSCH 和 KAI ZEHMISCH

Abstract. 我们研究赋予径向对称接触形式的标准Darboux空间。我们研究一直延伸至边界的相对紧域之间保持余定向的接触同胚。对于所有位于Liouville超平面中圆球上方、关于Reeb轴径向对称，且其边界沿公共赤道的某个邻域重合的严格垂直凸域，我们确定了其接触同胚类。总不变量是边界球面在脐点处具有相同符号的平均曲率。将Liouville超平面替换为闭非Besse黎曼流形的余盘丛，或替换为闭非Besse严格接触流形的有限次辛化，也可得到类似结果，此时结果分别用特征长度和总特征作用量表述。

1. Introduction

令 V 为光滑流形，并考虑 $\mathbb{R}\times V$ 中一个连通紧致的超曲面 S。假设 S 是某个（唯一的）相对紧域的边界。其闭包 D_S 称为 S 的**定义域**。

我们假设 S 在以下意义下是**严格垂直凸**的：存在光滑函数 $f_\pm\colon V_S\to\mathbb{R}$，定义在 V 的一个开子集 V_S 上，且满足 $f_-<f_+$。记 $f_\pm$ 的图为 $S^\pm$。假设两个函数 $f_\pm$ 都能连续延拓到 V_S 的边界 ∂V_S 上，并且沿 ∂V_S 满足 $f_-=f_+$。我们要求 S 是**入口集** S^-、**出口集** S^+ 以及 $f_\pm|_{\partial V_S}$ 的图（即 S 的所谓**赤道集**）的不交并。若 $\partial S^\pm$ 是 S 的子流形，我们简称其为**赤道**，并记作 $E=\partial S^\pm$。三元组（S，V_S，$f_\pm$）称为一种**形状**，而 V_S 称为 S 的**影集**。

若 V 具有恰当辛形式 $\mathrm{d}\lambda$，则选取一个优选的李维尔原函数 λ，即可构造其接触化 $(\mathbb{R}\times V,\mathrm{d}b+\lambda)$，以及接触结构 $\xi_\lambda=\ker(\mathrm{d}b+\lambda)$。$(\mathbb{R}\times V,\mathrm{d}b+\lambda)$中的严格垂直凸超曲面 S 可用于为带边界的紧接触流形提供边界条件。若要求某个领圈邻域与(D_S,ξ_λ)中 S 的领圈邻域接触同胚，则其微分同胚类型自然与D_S相比较。人们曾利用这一点，在对所支承的 Reeb 动力学施加额外假设的情况下确定微分同胚类型，见 [2, 3, 6, 8, 9, 10, 12]。要确定接触同胚类型，可用的已知工具包括根据边界上的特征叶状结构，对三维球（[5]）和实心环面（[14]）上的紧接触结构进行分类。

Date：2026年1月21日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 53D35；53D05、37C27、37J55、57R17。本研究是 SFB/TRR 191 *Symplectic Structures in Geometry, Algebra and Dynamics*项目的一部分，资助方为德国研究联合会。

为了找到能够确定严格垂直凸超曲面所界定定义域的接触同胚类型的例子，我们将采用以下概念：若 S 和 T 是 $\mathbb{R}\times V$ 中的严格垂直凸超曲面，并且 $V_S = V_T$ 成立，且连续函数 f_+ 与 g_+ 的芽以及 f_- 与 g_- 的芽分别沿 $\partial V_S = \partial V_T$ 重合，则称它们具有**等价**形状（$S, V_S, f_\pm$）和（$T, V_T, g_\pm$）。特别地，S 和 T 在公共赤道集的某个邻域内重合。

考虑标准接触化 $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n},\ \mathrm{d}b+\frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}-\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{x})\right)$，其接触结构记为 ξ_{st}。定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 的开子集上的函数 f 称为**径向对称**，若 f 在正交群的作用下保持不变。对于 $r = |(\mathbf{x},\ \mathbf{y})|$，我们将 $f(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 视为 $f(r)$。

定理 1. 设 $(S, V_S, f_\pm)$ 和 $(T, V_T, g_\pm)$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n}$ 中的等价形状，其影集 $V_S = V_T$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中以 0 为中心的圆球。假设 $f_\pm$ 和 $g_\pm$ 均为径向对称。那么，区域 (D_S, ξ_{st}) 和 (D_T, ξ_{st}) 在边界处保余定向接触同胚，当且仅当 $f_+''(0) = g_+''(0)$ 且 $f_-''(0) = g_-''(0)$。

换言之，形状等价的径向对称垂直凸域是接触同胚的，当且仅当同号脐点处的平均曲率相同。构造部分使用莫泽积分向量场，因此实际上可得到一个相对于赤道邻域的环境紧支撑接触各向同性。垂直凸域边界所诱导的各向同性经过的都是径向对称形状。

在定理 4.7.1 和第 4.8 节中，我们将考虑影集具有更一般斯坦类型的对称形状。我们将介绍一种扰动方法，以获得其定义域接触同胚的形状。

为构造一个例子，我们考虑一个闭的连通黎曼流形 Q。余切丛 π 的全空间 $V = T^*Q$：$T^*Q \to Q$ 配备了规范的李维尔 1-形式 $\lambda = \lambda_Q$，其在 $u \in T^*Q$ 处由 $u \circ T\pi$ 给出。接触化 $\left(\mathbb{R}\times V,\ \mathrm{d}b+\lambda\right)$ 是 Q 的 1-喷射丛，其接触结构 $\ker(\mathrm{d}b+\lambda)$ 记为 ξ_Q。

我们称开子集 T^*Q 上的光滑函数 f **纤维径向对称**，前提是相对于对偶度量，$f(u)$ 可以与 $f(r)$ 识别。定义**特征半长度**

$$\mathscr{L}(f_\pm) := \pm\int_0^{r_0} \frac{f_\pm'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau$$

每当 $f = f_\pm$ 连续延拓到半径为 $r_0 > 0$ 的闭余圆盘丛 $D_{r_0}T^*Q$，并通过图定义 $\mathbb{R}\times V$ 中的严格垂直凸超曲面 S 的入口集或出口集。属于出口/入口集决定符号 $\pm$。量 $\mathscr{L}(f_\pm)$ 由 $\left(\mathbb{R}\times V, \mathrm{d}b+\lambda\right)$ 中 $f_\pm$ 的图上的特征叶状结构导出。也就是说，$|\mathscr{L}(f_\pm)|$ 是将半特征投影到 Q 后，删去方向相反且长度相等的连续子弧所得到的测地线弧长度，见第 3.1 节和第 5.5 节。定义**特征长度**为

$$\Sigma(S) := \mathscr{L}(f_+) + \mathscr{L}(f_-)\,.$$

定理 2. 设$(S, V_S, f_\pm)$和$(T, V_T, g_\pm)$是 $\mathbb{R}\times T^*Q$ 中的等价形状，其影集 $V_S = V_T$ 等于 $D_{r_0}T^*Q$的内部。假设 $f_\pm$ 和 $g_\pm$ 是纤维径向对称的，并且 $\Sigma(S) = \Sigma(T)$。

于是，区域(D_S, ξ_Q)和(D_T, ξ_Q)存在保持余定向的接触同胚，且该同胚延伸至边界。此外，可以假设现有的接触同胚

(a) 在赤道的某个邻域内限制为恒等映射 $\times\eta_{\theta_0}$，其中 η_{θ_0}是时间为 θ_0的归一化余测地流；并(b) 通过 $\begin{pmatrix} f_\pm(0) & q\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_\pm(0) & q\end{pmatrix}$将 $\{f_\pm(0)\}\times Q$ 映至 $\{g_\pm(0)\}\times Q$，分别如此。

定理 2 基于莫泽尔论证，与定理 1 的若成立则 部分类似，必要时可先应用第 5.6 节中讨论的归一化余测地扭转。注意，重参数化η_{θ/r_0} 是余球丛 $S_{r_0}T^*Q$ 上时间为 θ/r_0 的 Reeb 流，该流对应的接触形式 α^{r_0} 由将 λ_Q限制到 $T(S_{r_0}T^*Q)$得到。定理 2 的证明表明，若特征半长度满足等式 $\mathscr{L}(f_\pm) = \mathscr{L}(g_\pm)$，则定理 2 (a) 中的时间 θ_0可以取为零，从而所得的接触同胚逐点固定赤道。

为表述定理 2 的逆命题，请注意，根据第 3.5 节，任意接触同胚 $(D_S,\ \xi_Q) \to (D_T,\ \xi_Q)$ 都可以假定在接触同伦意义下保持赤道$E = \{f_+(r_0)\}\times S_{r_0}T^*Q$ 不变。这样的赤道保持接触同胚限制在 E 上时，是关于 $\ker\alpha^{r_0}$的接触同胚。在定理 3 中，我们将推导出接触同胚的接触不变量；这些接触同胚限制在 $(E,\ \alpha^{r_0})$ 上时是严格的接触同胚。

为此，回顾一下，若 Q 的所有测地线都是闭合的，则称其为**Besse** 。根据 Wadsley 的一个结果 [17]，这等价于Q的测地流具有周期性。注意，当且仅当 η_P 与余切向量上的乘法 -1 相交换（其中 P为非零实数）时，测地流才具有周期性。在此情况下，归一化余测地流 η_θ 的最小周期等于 $2P$。若 Q 不是 Besse，则在下面的定理中简单地令 $P = 0$：

定理 3. 设$(S, V_S, f_\pm)$和$(T, V_T, g_\pm)$是 $\mathbb{R}\times T^*Q$中的等价形状，其影集 $V_S = V_T$ 等于 $D_{r_0}T^*Q$的内部。假设 $f_\pm$ 和$g_\pm$ 是纤维径向对称的，并且存在一个保余定向的接触同胚 φ，将定义域(D_S, ξ_Q)与(D_T, ξ_Q)映至边界。进一步假设，关于 α^{r_0}，φ在赤道$\{f_+(r_0)\}\times S_{r_0}T^*Q$ 上的限制是严格接触同胚 ε。

(i) 则存在一个整数 k，使得
$$\Sigma(S) = \Sigma(T) + kP\,.$$
(ii) 若 ε 与乘以 -1的纤维乘法可交换，则存在整数$k_\pm$，使得
$$\mathscr{L}(f_\pm) = \mathscr{L}(g_\pm) + k_\pm P\,.$$
因此，我们在 *(i)* 中得到 $k = k_+ + k_-$。
(iii) 若 φ 限制为映射 $\begin{pmatrix} g_\pm(0) & \iota\end{pmatrix}$，从 $\{f_\pm(0)\}\times Q$ 映至 $\{g_\pm(0)\}\times Q$，且满足 $\iota\circ\pi = \pi\circ\varepsilon$，则存在整数 $k_\pm$，使得
$$\mathscr{L}(f_\pm) = \mathscr{L}(g_\pm) + 2k_\pm P\,.$$
因此，我们在 *(i)* 中得到 $k = 2(k_+ + k_-)$。

这里，若 Q 是 *Besse*，则 $2P$ 是测地流的最小周期；否则为零。

在第 5.6 节中，我们将构造 $\mathbb{R}\times T^*Q$ 中区域之间的接触同胚，它们在赤道上限制为 $\varepsilon=\eta_{\theta_0}$，通过恒等映射 ι 将 $\{f_\pm(0)\}\times Q$ 映到 $\{g_\pm(0)\}\times Q$，并且对于任意给定值 θ_0，满足 $\mathscr{L}(f_\pm)-\mathscr{L}(g_\pm)=\pm\theta_0$。特别地，如定理 3 (i) 所述，对于所有这些例子，$\Sigma(S)=\Sigma(T)$。这表明定理 3 (ii) 中的假设是必要的。此外，取 Q 为最小周期为 $2P$ 的 Besse，并令 $\theta_0=kP$，可知定理 3 (ii) 中的所有整数倍数都会出现，见注5.6.1。注意，当 k 为偶数时，即使 η_{kP} 在赤道上也是恒等映射；当 k 为奇数时则不是。

涉及 T^*S^n 单位球面 $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$上的 Dehn–Seidel 扭转，其中其测地流的周期为 2π，对于任意 j，$k\in\mathbb{Z}$，存在 $\mathbb{R}\times T^*S^n$ 中的接触同胚区域，如定理3（ii）所示，并且 $\mathscr{L}(f_\pm)-\mathscr{L}(g_\pm)=\pm(k-j)\pi$，见注5.6.1。所构造的接触同胚通过 $\varepsilon=\eta_{k\pi}$重新参数化赤道，并经由 ι 将 $\{f_\pm(0)\}\times S^n$ 映射到 $\{g_\pm(0)\}\times S^n$，其中 ι 等于 j倍的 S^n上的对踵映射。特别地，只要 $j\equiv k$ 模2，ε 就是关于 π 的丛映射，其定义域为 ι，如定理3（iii）所示。

作为定理 1、定理 2 和定理 3中的几何之间的插值，我们将考虑边界不连通的影集，参见第6.1节：设 $(M,\ \alpha)$ 是一个连通的、闭的严格接触流形，它通过其辛化 $(V,\ \lambda)$ 定义了一个恰当辛流形 $(\mathbb{R}\times M,\ \mathrm{e}^a\alpha)$。这里，$a\in\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$方向上的坐标。$\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\times M)$上的接触化具有接触结构 $\ker(\mathrm{d}b+\mathrm{e}^a\alpha)$，记为 ξ_α。

定义在 (a_1,a_0) 上的实值函数 f，若满足 $f\equiv f(a)$，则称其为 $\mathbb{R}$-**对称的**。定义**特征作用量**

$$\mathcal{A}(f_\pm):=\pm\int_{a_1}^{a_0}\mathrm{e}^{-\tau}f_\pm'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

当 $f=f_\pm$ 连续延拓至 $[a_1,a_0]\times M$，并定义了 $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\times M)$ 中严格竖直凸超曲面 S 的入口集或出口集时。量$\mathcal{A}(f_\pm)$ 是 (M,α) 中 Reeb 弧的作用量，该 Reeb 弧由一条特征线经投影得到，这条特征线连接了 $f_\pm$ 的图上赤道 $E=\{a_1,a_0\}\times M$ 的各分支，见第 6.2 节。定义**总特征作用量**为

$$\mathcal{T}(S):=\mathcal{A}(f_+)+\mathcal{A}(f_-)\,.$$

定理 4。设$(S,V_S,f_\pm)$和$(T,V_T,g_\pm)$是(M,α)的辛化的接触化中的等价形状，其影集 $V_S=V_T$ 等于$(a_1,a_0)\times M$，其中 $a_1<a_0$ 为实数。假设 $f_\pm$ 和 $g_\pm$ 是 $\mathbb{R}$-对称的。

(a) 若 $\mathcal{T}(S)=\mathcal{T}(T)$，则定义域$(D_S,\xi_\alpha)$与$(D_T,\xi_\alpha)$在边界处也保余定向接触同胚。此外，可假设现有的接触同胚在赤道 $\{a_1,a_0\}\times M$的某个邻域内限制为恒等映射。(b) 假设存在一个保余定向的接触同胚 φ，使定义域(D_S,ξ_α)与(D_T,ξ_α)在边界处也接触同胚。(i) 若 φ在赤道 $\{a_1,a_0\}\times M$的某个分支上限制为相对于 α的严格接触同胚，则存在一个整数k，使得

$$\mathcal{T}(S)=\mathcal{T}(T)+2kP\,.$$

(ii) 若 φ 保持赤道 $\{a_1, a_0\}\times M$ 的每个分支不变，且到(M,α) 的投影与单个严格接触同胚 ε一致，则存在整数 $k_\pm$ ，使得

$$\mathcal{A}(f_\pm) = \mathcal{A}(g_\pm) + 2k_\pm P\,.$$

这里， $2P$是 (M,α) 上的 ***Reeb*** 流的最小周期；若(M,α)是 ***Besse*** 流形，则该值如此；否则为零。

若严格接触流形的 Reeb 流是周期性的，则称其为**Besse**流形。第 6.3 节中对 Reeb 扭转的应用表明，特征作用量 $\mathcal{A}(f_\pm)$ 一般不是接触不变量。即使接触同胚在赤道上的限制是赤道的严格接触同胚，第 6.3 节中的例子也表明，等于 ε 这一假设至关重要。

2. Radial symmetric functions

2.1. Morse 引理及其推论。 考虑一个光滑函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$。根据微积分基本定理，我们可找到一个光滑函数 $f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得 $f(t) - f(0) = tf_1(t)$，即 $f_1(t) := \int_0^1 f'(st)\mathrm{d}s$。归纳定义光滑函数$f_{k+1} := (f_k)_1$，便得到：当 $f_{(l)}(0) = 0$时，对 $l = 1,\dots,k$，有 $f(t) - f(0) = t^{k+1}f_{k+1}(t)$。对 0 求 $(k+1)$ 阶导数，得到

$$f_{k+1}(0) = \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}\,.$$

引理 2.1.1 (根引理)。 设 f 是一个偶函数。那么存在一个光滑函数 $\tilde{f}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得 $f(t) = \tilde{f}(t^2)$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$都成立。

˜证明。 根据 Whitney延拓，只需在 $[0,\infty)$ 上找到一个光滑函数 f，因为 t^2 总是非负的。我们可以假设 $f(0) = 0$。定义

$$\tilde{f}(t) := f(\sqrt{t})$$

对于 $t\geq 0$。由于 f是偶函数，对于所有 $t\in\mathbb{R}$，都有 $\tilde{f}(t^2) = f(|t|) = f(t)$。

还需证明其光滑性 $\tilde{f}$。对于 $t>0$，根据 Morse 引理，

$$\tilde{f}'(t) = \frac{f'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}(f')_1(\sqrt{t})$$

因为偶函数满足 $f'(0) = 0$。类似地，利用 $f(0) = 0$,

$$\frac{\tilde{f}(t)}{t} = \frac{(\sqrt{t})^2 f_2(\sqrt{t})}{t} = f_2(\sqrt{t})$$

对所有 $t>0$，使得当 t 趋于 0 时，左极限存在且等于

$$\tilde{f}'(0) = f_2(0) = \frac{1}{2}f''(0) = \frac{1}{2}(f')_1(0) = \lim_{t\to 0}\tilde{f}'(t)\,.$$

第二个等式由 Morse 引理得出，第三个等式是令 t 趋于 0 后由 $f'(t)/t = (f')_1(t)$ 得到的，最后一个等式则来自上面得到的方程 $\tilde{f}'(t) = \frac{1}{2}(f')_1(\sqrt{t})$。换言之，$\tilde{f}'$ 从左侧连续延拓至 0，因此 $\tilde{f}$ 在 $[0,\infty)$ 上是 C^1，其中

$$\tilde{f}' = \frac{1}{2}\widetilde{(f')_1}\,.$$

用光滑偶函数 $(f')_1 - (f')_1(0)$ 替代 f，重复上述论证，可得 $\frown(f')_1$ 是 C^1，进而可得 $\tilde{f}$ 是 C^2。归纳可知，$\tilde{f}$ 是光滑的。□

2.2. **关于 Hessian矩阵**。根引理表明，定义在$\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数 f 是径向对称的，当且仅当存在一个光滑函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(r^2)$，$r = |\mathbf{x}|$，对所有$\mathbf{x}$均成立，参见引理 2.1.1。因此，

$$\partial_j f(\mathbf{x}) = 2x_j \tilde{f}'(r^2)$$

并且，因此，

$$\partial_{ij} f(\mathbf{x}) = 4x_i x_j \tilde{f}''(r^2) + 2\delta_{ij} \tilde{f}'(r^2)\,.$$

在根引理的证明中，我们得到了 $\tilde{f}'(0) = \frac{1}{2} f''(0)$，因此

$$\operatorname{Hess}_f(0) = f''(0)\mathbb{I}\,.$$

3. Invariants of contactomorphisms

3.1. **特征叶状结构**。给定一个余定向接触流形 (M, ξ)，接触结构 ξ 可以写成接触形式 α的核。定义接触形式 α 在 M上唯一确定，且仅相差一个正函数的乘法。ξ 的余定向等于任意定义 ξ的接触形式的 Reeb向量场所诱导的余定向。类似地，ξ 通过$\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n$ 在 M 上定义一个定向，并通过 $\mathrm{d}\alpha$在 ξ 上定义一个共形辛结构，其中 M 的维数为 $2n+1$。

设 S 是配备正体积形式 Ω 的 M 定向超曲面。令 $\beta := \alpha|_{TS}$，则方程 $i_X \Omega = \beta \wedge (\mathrm{d}\beta)^{n-1}$ 唯一确定 S 上的光滑向量场X。分别将 Ω 或 α 乘以正函数，只会使 X 发生由正函数给出的共形变化。换言之，共形类 $[X]$仅取决于 S 的定向以及余定向接触结构 ξ。由任一代表性**特征向量场** X 积分得到的定向奇异一维叶状结构 S_ξ 称为**特征叶状结构**，正则一维叶称为**特征线**。注意，特征向量场的集合是凸的，因此允许进行剪切与粘贴操作。

对于 S_ξ 的任意特征向量场 X 以及所有 $p \in S$，线性张成空间$\mathbb{R}X_p$ 是 ξ_p 中 $\ker \beta_p$ 的辛正交补，其中 $\ker \beta_p$ 是 $T_pS \cap \xi_p =$，这里相对于 ξ上的共形辛结构而言，见 [7, 引理 2.5.20]。S_ξ 的**奇异点**是满足 $T_pS = \xi_p$ 的那些 $p \in S$。若 S_ξ 的奇异点 p 处 T_pS 与 ξ_p 的定向一致，则称其为**正**奇异点；否则称为**负**奇异点。作适当选择后，奇异点集合（即所谓的**奇异集**）等于 S_ξ的任一特征向量场的零点集。或者，奇异集可表示为 $\{p \in S \mid \beta_p = 0\}$。因此，由于 ξ的 Frobenius不可积性，奇异集没有内点。其补集，即所谓的**正则集**，是开集。

关于任意联络D，特征向量场 X 在 S_ξ 上的线性化为所有 $p \in S$定义了 T_pS 上的线性自同态 $DX|_p$。在奇点 $p \in S$ 处，由于它由坐标邻域中的方向导数给出，该自同态 $DX|_p$ 与联络的选择无关。此外，根据乘积法则，特征向量场 X 的不同选择会导致 $DX|_p$ 发生正常数倍的变化。特别地，S_ξ 的奇点 p 决定了 $DX|_p$ 的特征值，但仅确定到正倍数。

前面的讨论表明:

命题 3.1.1。 设 φ 是M上的保持余定向的接触同胚(ξ)。考虑 M中的定向超曲面 T。假设 φ限制为从 S 到 T的保定向微分同胚。那么， φ 保持定向特征叶状结构，将其限制为正则集之间的微分同胚，并将特征线映射为特征线；此外，它还在保持特征值共形关系的同时，在带符号奇点之间诱导一个双射。

证明。 φ 在 α 上的拉回作用由乘以 M上的一个正函数给出。 $\psi := \varphi|_S$ 将 T 上的正体积形式拉回后，得到 S上的正体积形式。因此，根据定义，给定S_ξ的一个特征向量场 X ，其推前 $\psi_* X$ 将是 T_ξ 的一个特征向量场。这立即推出该命题，特征值的相关陈述可能除外；该陈述可如下得到：相对于 T 上的联络 D' ，$\psi_* X$ 的协变导数可由 DX 通过与 $T\psi$共轭得到，其中 $D = \psi^* D'$ 是 S上的拉回联络。□

3.2. **哈密顿表示**。 设 M 上的 ξ-定义接触形式为 α ，并将其 Reeb向量场记为 R_α。考虑 M 上的光滑函数 H 及其**接触哈密顿向量场** X_H，它是下式的唯一解:

$$\alpha(X_H) = H \quad \text{and} \quad i_{X_H} \mathrm{d}\alpha = -\mathrm{d}H + \mathrm{d}H(R_\alpha)\alpha\,.$$

注意到 $R_\alpha = X_1$。

命题 3.2.1. 假设 S 是 H 的正则零点集，且 H 沿余定向在 S 的法向方向上增长。进一步假设 S_ξ有奇异点。那么， $X_H|_S$ 生成定向的奇异1维叶状结构 S_ξ。

证明。 由于 $\pm T_p S$ 作为定向向量空间等于 ξ_p ，对 H 的选取意味着，在 S_ξ 的正/负奇点 p处， $\pm \mathrm{d}H(R_\alpha)|_p > 0$ 。由接触哈密顿量 X_H的定义方程可知，限制 $X = X_H|_S$与 ξ 及 S相切。此外， X 恰好在 S_ξ的奇点处消失。因此，根据定义，逐点来看， $\mathbb{R}X$ 是 $TS \cap \xi$ 的辛正交补。

要得出 X 是 S_ξ 的特征向量场，注意到

$$i_{X_H}(\mathrm{d}\alpha)^n = n\big(-\mathrm{d}H + \mathrm{d}H(R_\alpha)\alpha\big) \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}\,.$$

限制到 TS 上得到

$$i_X(\mathrm{d}\beta)^n = n \cdot \mathrm{d}H(R_\alpha)\beta \wedge (\mathrm{d}\beta)^{n-1}$$

令 $\beta = \alpha|_{TS}$。由于$\mathrm{d}\beta$ 在正/负奇点 p附近是辛的，并在 p附近诱导 S 的正确/错误定向，

$$\frac{(\mathrm{d}\beta)^n}{n \cdot \mathrm{d}H(R_\alpha)}$$

是 S 在 p附近的正体积形式。因此， X 以正确的定向生成 S_ξ 。□

因此，对 α 和 H 的不同选择，会使 $X_H|_S$ 乘以定义在 S 上的正函数。

3.3. **接触化**。考虑接触化 $(M,\alpha) = (\mathbb{R}\times V, \mathrm{d}b+\lambda)$，并假设超曲面 S 是定义在 V 上的光滑函数 f 的图。换句话说，对于所有 $v\in V$，$S=\{\pm H=0\}$ 都是由 $H(b,v)=b-f(v)$ 给出的哈密顿量 H 的正则零点集。S 的余定向由 $\pm\partial_b$ 诱导。

注意到 $R_\alpha=\partial_b$，并且 $\mathrm{d}\alpha=\mathrm{d}\lambda$ 限制在 S 上是一个辛形式。特别地，结合命题 3.2.1 中的论证，接触哈密顿向量场 $\pm X_H = X_{\pm H}$ 限制在 $S=\{\pm H=0\}$ 上是一个特征向量场。记 Y_λ 为 λ 关于 $\mathrm{d}\lambda$ 的对偶，记 X_f 为 f 的哈密顿向量场，即下式的唯一解

$$i_{Y_\lambda}\mathrm{d}\lambda=\lambda \quad\text{and}\quad i_{X_f}\mathrm{d}\lambda=-\mathrm{d}f\,,$$

分别地，$H=b-f$ 的接触哈密顿量 X_H 计算为

$$X_H=\big((b-f)+\lambda(X_f)\big)\partial_b+Y_\lambda-X_f\,.$$

因此，S 上诱导的特征向量场为

$$X=\pm\big(\lambda(X_f)\partial_b+Y_\lambda-X_f\big)\,.$$

3.4. **径向对称性**。令 V 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 中原点的一个开邻域，并取 $\lambda=\frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}-\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{x})$，使得 $Y_\lambda=\frac{1}{2}(\mathbf{x}\partial_{\mathbf{x}}+\mathbf{y}\partial_{\mathbf{y}})$。为简单起见，假设 $f(0)=0$，且 0 是 f 的临界点。因此，$T_0S=\{0\}\times\mathbb{R}^{2n}$ 属于 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n}$，且 $X_f=-J\nabla f$ 在 0 处是奇异的，其中 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的标准复结构记为 J。

通过对 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n}$ 求方向导数，再将其正交投影到 TS 上，来定义 D 在 S 上的联络。于是，

$$DX|_0=\pm\big(\tfrac{1}{2}\mathbb{I}+J\,\mathrm{Hess}_f(0)\big)\,.$$

如果 f 是径向对称的，那么结合第 2.2 节可得

$$DX|_0=\pm\big(\tfrac{1}{2}\mathbb{I}+f''(0)J\big)\,.$$

注意，$\frac{1}{2}\mathbb{I}+f''(0)J$ 的特征值等于 $\frac{1}{2}\pm f''(0)\mathrm{i}$。由于 Y_λ 垂直于 f 的正则水平集，而这些水平集是以原点为中心的圆球面，因此 0 是 S_ξ 的唯一奇点。

定理 1 的证明——仅当部分。设 φ 是从 (D_S,ξ_{st}) 到 (D_T,ξ_{st}) 的保余定向接触同胚。那么，根据命题 3.1.1，φ 将带符号奇点 $\pm(f_\pm(0),0)$ 映射到 $\pm(g_\pm(0),0)$，且特征值 $\pm\big(\frac{1}{2}\pm f''_\pm(0)\mathrm{i}\big)$ 和 $\pm\big(\frac{1}{2}\pm g''_\pm(0)\mathrm{i}\big)$ 相差一个正常数。比较实部可知，该常数必为 1；再比较虚部可得 $|f''_\pm(0)|=|g''_\pm(0)|$。此外，$\varphi$ 在奇点处的线性化将 $\pm f''_\pm(0)J$ 共轭到 $\pm g''_\pm(0)J$（因为可知该正常数等于 1），因此，将 $\pm f''_\pm(0)\cdot\mathrm{d}\lambda(\,.\,,J\,.\,)$ 共形映射到 $\pm g''_\pm(0)\cdot\mathrm{d}\lambda(\,.\,,J\,.\,)$。因此，$f''_\pm(0)=g''_\pm(0)$，如所声称的那样。□

3.5. **保持赤道**。考虑（S、V_S、$f_\pm$）中的一个形状（$\mathbb{R}\times V$，$\mathrm{d}b+\lambda$），并假设影集 V_S 的闭包是一个李乌维尔域。特别地，V_S 具有光滑边界，并且 Y_λ 横向于 ∂V_S 且指向外部。此外，假设 $f_\pm$ 沿 ∂V_S为常数，例如取值为零。因此，赤道 $E=\{0\}\times\partial V_S=\pm\partial S^\pm$ 是一个带有接触形式 $\lambda|_{TE}$的光滑子流形。

选取一个管状邻域 U_δ of $[-\delta,\delta]_b\times\partial V_S$，使得 Y_λ 在 U_δ 上的限制与 S横截。令 $\chi\equiv\chi(b)$ 为 U_δ 上的光滑函数，在 ±1 处取值为

b between $\pm\delta$ and $\pm\infty$，并在 $(-\delta,\ \delta)$ 上严格递增，且 $\chi(b) = b$ 在零附近。将 χ 延拓为 $\mathbb{R}\times V$ 上的光滑函数，使得 χ 在 $S^{\pm}\setminus U_{\delta}$附近为 ± 1。χ 的接触哈密顿向量场 X_{χ} 与 ∂D_S 横截，方向朝外，并且沿 S等于 $\chi\partial_b + \chi' Y_{\lambda}$。因此，$S$ 是一个 **Giroux 凸** 超曲面。由于 $\mathrm{d}b + \lambda$ 恰好在 E上消去 X_{χ}，由 X_{χ}定义的**分界集** 等于 E。

因此，给定等价形状以及它们的定义域之间的接触同胚，我们可以在经过一次将分界集彼此重合的接触同伦后，假设赤道保持不变，参见 [7, 定理 4.8.5(b)]。这种保持赤道不变的接触同胚限制在 E 上，仍是一个接触同胚，其接触结构为 $\ker\ \lambda|_{TE}$。

注 3.5.1。如 [7, 第 4 节8], 所述，在 $(M,\ \xi)$ 的闭 Giroux 凸超曲面 S 上，存在一个光滑函数 $u\colon\ S\to\mathbb{R}$，满足以下性质：u 的零点集 Γ 非空，且等于一个分界集。此外，对于 S_{ξ} 的任意特征向量场 X，沿着 Γ 有 $X(u) < 0$，因此 Γ 是 $\{u > 0\}$ 的光滑定向边界，并且横截于 S_{ξ}。

注意，根据 [7, 例 4.8.10]，存在特征叶状结构不含任何奇点的 Giroux 凸超曲面。我们将在注 6.4.1 中再次讨论这一点。

4. Integrating a contactomorphism

我们将证明定理 1 的必要性。本节中，我们考虑接触化 $(\mathbb{R}\times V, \mathrm{d}b + \lambda)$ 中的等价形状 $(S, V_S, f_{\pm})$ 和 $(T, V_T, g_{\pm})$。由严格垂直凸超曲面 S 和 T 在 $\mathbb{R}\times V$ 中围成的区域分别记为 D_S 和 D_T。

4.1. 垂直微分同胚。如果存在光滑函数 $f\colon\ \mathbb{R}\times V\to\mathbb{R}$，使得对所有 $(b, v)\in\mathbb{R}\times V$，均有 $\partial_b f > 0$ 和 $\phi(b, v) = \big(f(b, v)\ v\big)$，则称 ϕ 是 $\mathbb{R}\times V$ 的**垂直**微分同胚。

引理 4.1.1. 存在 $\mathbb{R}\times V_S$ 中 $S^{\pm}$ 的开邻域 $U^{\pm}$ 和 $\mathbb{R}\times V_S$ 中 $S^{\pm}$ 的开邻域 $U^{\pm}$，以及一个垂直微分同胚 $\phi = (f,\mathrm{id})\ \ \mathbb{R}\times V$，使得

(i) $\phi(D_S) = D_T$,(ii) $f(b, v) = b + g_{\pm}(v) - f_{\pm}(v)$ 对所有$(b, v)\in U^{\pm}$均成立，并且(iii) ϕ 是一个在 $\mathbb{R}\times V_S$ 中具有紧支撑的垂直同伦的时间1 映射；在 $\mathbb{R}\times V_S$ 之外，f 等于$(b, v)\ \mapsto b$。

证明。取足够小的 $\varepsilon > 0$，并考虑函数

$$\max\{f_-, g_-\} + \varepsilon \quad \text{and} \quad \min\{f_-, g_-\} - \varepsilon$$

在 V_S 上。令 A_1^- 为 $\mathbb{R}\times V_S$ 中位于其图之间的点集。令 A_0^- 为 $\mathbb{R}\times V_S$ 中位于图上方或下方的点集

$$\max\{f_-, g_-\} + 2\varepsilon \quad \text{and} \quad \min\{f_-, g_-\} - 2\varepsilon$$

分别地。取一个光滑函数 $\chi_-\colon\ \mathbb{R}\times V_S\to[0,1]$，使其在 A_1^- 上为 1，在 A_0^- 上为 0。定义一个向量场

$$\chi_-(b, v)\Big(g_-(v) - f_-(v)\Big)\cdot\partial_b$$

在 $\mathbb{R}\times V$ 上，并将 $g_- - f_-$ 视为通过取值 0 光滑延拓到 V。该流的时间-1映射给出一个垂直微分同胚 ϕ_-，其在 $\mathbb{R}\times V_S$ 中具有紧支撑，将 S^- 映射到 T^-，并且限制为

$$(b,v)\longmapsto \Big(b+g_-(v)-f_-(v),v\Big)$$

对所有 $(b,v)\in A_1^-$。

$\phi_-\big(\{b=f_+\}\big)$ 的像 S^+ 是 $\tilde{f}_+=f_++(g_--f_-)$的图。将˜构造中的 f_-,g_- 替换为 f_+,g_+并重复构造，得到一个垂直微分同胚ϕ_+，其在 $\mathbb{R}\times V_S$中具有紧支撑，将 $\phi_-(S^+)$映到 T^+，并且限制为

$$(b,v)\longmapsto \Big(b+g_+(v)-\tilde{f}_+(v),v\Big)$$

对所有 $(b,v)\in A_1^+$。选取足够小的 $\varepsilon>0$，可确保 $\phi_+=$ 在 $\phi_-(S^-)$的某个邻域内等于id $=T^-$，因为 g_+-f_+ 在 ∂V_S附近消失。于是，$\phi=\phi_+\circ\phi_-$ 就是所需的垂直微分同胚。□

备注 4.1.2（奇辛唯一性）。沿垂直微分同胚 $\phi=(f,\mathrm{id})$拉回$\mathrm{d}b+\lambda$，得到接触形式$\mathrm{d}f+\lambda$；它在 $\mathbb{R}\times V_S$的某个紧子集之外与$\mathrm{d}b+\lambda$ 一致。取外导数后，由引理 4.1.1可知，$(D_S,\mathrm{d}\lambda)$和$(D_T,\mathrm{d}\lambda)$在垂直意义下奇辛同构。

4.2. **插值**。引理 4.1.1 给出了一个垂直同伦 ϕ_t，其形式为 $\mathbb{R}\times V(b,\ v)=\big(f_t(b,\ v)\ v\big)$，对所有 $(t;b,\ v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times V$ 均成立，并且在 $\mathbb{R}\times V_S$ 中具有紧支撑。这里，$f_t\colon\ \mathbb{R}\times V\to\mathbb{R}$ 是一个满足 $\partial_b f_t>0$ 的光滑函数族。通过沿 ϕ_t 拉回 $\mathrm{d}b+\lambda$，定义正接触形式族 $\mathrm{d}f_t+\lambda$。

由于垂直微分同胚的空间是凸的，ϕ_t 与这样一个垂直同伦同伦等价，其中将 f_t 替换为 f 与 $(b,\ v)\mapsto b$ 的凸组合。因此，我们考虑凸同伦

$$\alpha_t:=(1-t)\mathrm{d}b+t\,\mathrm{d}f+\lambda$$

由紧支撑接触形式组成的。

4.3. **莫泽问题**。考虑 $\mathbb{R}\times V$ 的同伦 φ_t。对 $\dot{\varphi}_t=X_t|_{\varphi_t}$ 取时间导数，我们得到 $\mathbb{R}\times V$ 上的含时向量场 X_t。假设 φ_t 具有紧支撑，则 X_t 被唯一确定。Picard–Lindel¨of 定理给出了逆命题。因此，同伦 φ_t（我们假设其支集是紧的且包含于 $\mathbb{R}\times V_S$ 中）可以与唯一的 X_t 对应。注意，$\mathrm{supp}(\varphi_t)=\mathrm{supp}(X_t)$。

此外，设 f_t 是定义在 $\mathbb{R}\times V_S$ 上的正函数光滑族，且 f_t-1 的支集包含于 $\mathrm{supp}(\varphi_t)$ 中。正如 [7], 中所解释的，当且仅当由 φ_t-生成向量场 X_t 和 $g_t:=(\ln f_t)^{\cdot}\circ\varphi_t^{-1}$ 组成的对 $(X_t,\ g_t)$ 满足

$$\dot{\alpha}_t+\mathrm{d}H_t+i_{X_t}\mathrm{d}\alpha_t=g_t\alpha_t$$

对所有 $t\in[0,1]$ 均成立，其中 $H_t:=\alpha_t(X_t)$。注意，$f_t=\mathrm{e}^{\int_0^t g_s\circ\varphi_s\mathrm{d}s}$，且 g_t 的支集包含于 $\mathrm{supp}(\varphi_t)$ 中。

注 4.3.1. 为了证明定理 1 的充分性部分，只需找到在 $\mathbb{R}\times V_S$ 中具有紧支撑的 (X_t,g_t)，使得对于所有 $t\in[0,1]$，$\varphi_t(S)\subset S$。事实上，由引理 4.1.1 可知，$\phi\circ\varphi_1$ 将是从 (D_S,ξ_λ) 到 (D_T,ξ_λ) 的接触同胚。

因此，只需找到 (X_t, g_t)，使得对于所有 $t \in [0,1]$，X_t 都与 S 相切。这意味着

$$\mathrm{d}f_{\pm}(X_t)|_{S^{\pm}} = \mathrm{d}b(X_t)|_{S^{\pm}}$$

对所有 $t \in [0,1]$，由于形状等价允许在赤道集附近取 $X_t = 0$。注意，对所有 $t \in [0,1]$，$\varphi_t(S^{\pm}) = S^{\pm}$。

4.4. 分解。 简记

$$\eta_t := t\,\mathrm{d}_V f$$

表示 d 的水平部分为 d_V。分解

$$\alpha_t = \frac{1}{r_t}\mathrm{d}b + \eta_t + \lambda\,,$$

其中垂直部分的系数

$$\frac{1}{r_t} := (1-t) + t\partial_b f$$

是一个正函数。最后，记 $s := \partial_b f - 1$ 和 $\delta := \mathrm{d}_V f$，我们有

$$\dot{\alpha}_t = s\mathrm{d}b + \delta\,.$$

注意，给定的数据 η_t、$r_t - 1$、s 和 δ 在 $\mathbb{R} \times V_S$ 中具有紧支撑。在 $S^{\pm}$ 的邻域 $U^{\pm}$ 上限制后，我们有 $\mathrm{d}_V f = \mathrm{d}(g_{\pm} - f_{\pm})$、$r_t = 1$ 和 $s = 0$，见引理 4.1.1 的 (ii)。

类似地，我们将积分向量场 $X_t = H_t R_{\alpha_t} + Y_t$ 分解。α_t 的 Reeb向量场等于 $R_{\alpha_t} = r_t\partial_b$，因为 $\mathrm{d}\alpha_t = \mathrm{d}\lambda$。与 α_t 的核相切的分量可写为 $Y_t = y_t\partial_b + V_t$，其中 V_t 是水平的。因此，

$$X_t = (H_t r_t + y_t)\partial_b + V_t\,.$$

引理 4.4.1。 第 *4.3* 节中表述的莫泽问题存在解(φ_t, f_t) 当且仅当存在 H_t、y_t、V_t 和 g_t，使得

(i) $y_t = -r_t(\eta_t + \lambda)(V_t)$,(ii) $i_{V_t}\mathrm{d}\lambda = -\delta - \mathrm{d}_V H_t + g_t(\eta_t + \lambda)$,(iii) $0 = s + \partial_b H_t - \frac{g_t}{r_t}$, —

以及边界条件

(iv) $H_t|_{S^{\pm}} = \big((1-t)\mathrm{d}f_{\pm} + t\mathrm{d}g_{\pm} + \lambda\big)(V_t)|_{S^{\pm}}$

均得到满足。此外，仅当 H_t、y_t、V_t 和 g_t 具有紧支撑时，(φ_t, f_t) 才会在 $\mathbb{R} \times V_S$ 中具有紧支撑。

证明。 核条件 $\alpha_t(Y_t) = 0$ 等价于 (i)。第 4.3 节中的李条件等价地分解为 (ii) 和 (iii)。第 4.3 节中的边界条件等同于 (iv)，其中利用 $\mathrm{d}_V f = \mathrm{d}(g_{\pm} - f_{\pm})$ 和 $r_t = 1$，在 $\mathbb{R} \times V_S$ 中 $S^{\pm}$ 的邻域 $U^{\pm}$ 上代入 (i)，见引理 4.1.1。支集的陈述由 (i)、(ii) 和 (iii) 直接得出。□

4.5. **实现边界条件**。 我们将继续使用第 3.3 节中引入的水平 Liouville 向量场和哈密顿向量场。

引理 4.5.1. 设 H_t 是定义在 $\mathbb{R}\times V$ 上的光滑函数族，其紧支集包含于 $U^+\cup U^-$ 中，见引理 *4.1.1*。假设水平向量场族

$$V_t = X_f + X_{H_t} + r_t(s+\partial_b H_t)(Y_\lambda - tX_f)$$

满足引理 *4.4.1* 中的边界条件 *(iv)*。那么，第 *4.3* 节中提出的莫泽问题存在一个紧支撑解 (φ_b, f_t)。

证明。 利用给定的 V_t，根据引理 4.4.1 中的 (i) 定义 y_t 。给定 H_t 后，公式 (iii) 确定 $g_t = r_t(s+\partial_b H_t)$。将其代入 (ii) 的右端，得到

$$i_{V_t}\mathrm{d}\lambda = -\delta - \mathrm{d}_V H_t + r_t(s+\partial_b H_t)(\eta_t+\lambda)\,,$$

从而给定的 V_t 在水平方向上是 $\mathrm{d}\lambda$-对偶，即引理 4.4.1 中的 (ii) 成立。由于 V_t 在 $\mathbb{R}\times V_S$ 中具有紧支撑，因此 y_t 和 g_t 也具有紧支撑。由引理 4.4.1 即得结论。□

令 H_t 为引理 4.5.1 中的一个解。根据引理 4.1.1 的 (ii)，我们将利用 $\mathrm{d}_V f = \mathrm{d}(g_\pm - f_\pm)$、$r_t = 1$ 和 $s = 0$ 在 $S^\pm$ 的邻域 $U^\pm$ 上成立这一事实。因此

$$V_t|_{U^\pm} = X_f + X_{H_t} + \partial_b H_t\cdot(Y_\lambda - tX_f)\,.$$

引理 4.4.1 中的边界条件 (iv) 可表述为

$$H_t|_{S^\pm} = \big(t\mathrm{d}_V f + \lambda\big)(V_t)|_{S^\pm} + \mathrm{d}f_\pm(V_t)|_{S^\pm}\,.$$

为计算右端，注意到

$$t\mathrm{d}_V f\big(X_f + X_{H_t}\big) = -\mathrm{d}_V H_t\big(tX_f\big)$$

根据水平能量守恒，并且

$$\lambda\big(X_f + X_{H_t}\big) = \lambda(X_f) + \mathrm{d}_V H_t(Y_\lambda)\,.$$

将两式相加，并利用 $\mathrm{d}\lambda$-对偶性，得到

$$\big(t\mathrm{d}_V f + \lambda\big)\big(\partial_b H_t\cdot(Y_\lambda - tX_f)\big) = 0$$

得到

$$\big(t\mathrm{d}_V f + \lambda\big)(V_t) = \lambda(X_f) + \mathrm{d}_V H_t\big(Y_\lambda - tX_f\big)\,.$$

此外

$$\mathrm{d}f_\pm(V_t) = \mathrm{d}f_\pm(X_f) - \mathrm{d}_V H_t\big(X_{f_\pm}\big) + \partial_b H_t\cdot\mathrm{d}f_\pm\big(Y_\lambda - tX_f\big)\,,$$

使得所需的右端

$$\big(t\mathrm{d}_V f + \lambda\big)(V_t) + \mathrm{d}f_\pm(V_t)$$

等于

$$\big(\mathrm{d}f_\pm + \lambda\big)(X_f) + \big(\partial_b H_t\cdot\mathrm{d}f_\pm + \mathrm{d}_V H_t\big)\big(Y_\lambda - tX_f - X_{f_\pm}\big)$$

由于 $\mathrm{d}f_\pm$ 湮灭 $X_{f_\pm}$，因此。如同 $\big(\mathrm{d}f_\pm + \lambda\big)(X_f) = \mathrm{d}_V f\big(Y_\lambda - X_{f_\pm}\big)$，我们得到

$$\big(\mathrm{d}_V f + \partial_b H_t\cdot\mathrm{d}f_\pm + \mathrm{d}_V H_t\big)\big(Y_\lambda - tX_f - X_{f_\pm}\big)\,.$$

为了沿着 $S^+ = \{b = f_+\}$ 进行求值，我们设

$$h_t^\pm(v) := H_t\big(f_\pm(v), v\big)$$

对所有 $v \in V_S$ 均成立。根据链式法则

$$\mathrm{d}h_t^{\pm} = \partial_b H_t \cdot \mathrm{d}f_{\pm} + \mathrm{d}_V H_t \,,$$

从而边界条件变为

$$h_t^{\pm} = \big(\mathrm{d}_V f + \mathrm{d}h_t^{\pm}\big)\big(Y_\lambda - tX_f - X_{f_\pm}\big)$$

最终为 V_S。

反之亦然。

命题 4.5.2。设 $h_t^{\pm}$ 是定义在 V_S 上的紧支撑光滑函数族，满足

$$h_t^{\pm} = \mathrm{d}\big(h_t^{\pm} + (g_\pm - f_\pm)\big)\big(Y_\lambda - X_{f_\pm + t(g_\pm - f_\pm)}\big)$$

对符号 $\pm$ 中的每一个分别成立。则 (D_S, ξ_λ) 和 (D_T, ξ_λ) 在公共赤道集的某个邻域的相对意义下接触同伦。

证明。令 $U_1^{\pm}$ 为 V_S 中 $S^{\pm}$ 的小邻域，其在 V_S 中的闭包分别包含于 $U^{\pm}$。对于所有 $(b,\ v),\ \in U_1^{\pm}$ 定义 $H_t(b,\ v) = h_t^{\pm}(v)$，并通过在 $U^{\pm}$ 内截断，将 H_t 延拓到整个 $\mathbb{R}\times V$。所得 H_t 是定义在 $\mathbb{R}\times V$ 上、支集包含于 $U^+ \cup U^-$ 的光滑函数族，符合引理 4.5.1 的要求。将 $U_1^{\pm}$ 取得足够小，可确保 H_t 的两个 $\pm$ 分支不会重叠。将 $\mathrm{d}_V f = \mathrm{d}(g_\pm - f_\pm)$ 限制在 $U^{\pm}$ 上，并倒推上述边界条件右端的计算，可得 V_t 满足引理 4.4.1 中的边界条件 (iv)。由引理 4.5.1 可知，第 4.3 节中提出的莫泽问题存在一个紧支撑解 $(\varphi_t,\ f_t)$。现在按照注 4.3.1 的论证即可得到所需结论。□

注 4.5.3。将上述得到的解限制在 $S^{\pm}$ 上，满足 $\partial_b H_t = 0$，由此得到 $V_t|_{S^{\pm}} = X_{g_\pm - f_\pm} + X_{H_t}$。

4.6. 特征线法。对于每个 $t \in [0,1]$，记 $\psi_s \equiv \psi_s^t$ 为刘维尔向量场 $Y_\lambda - X_{f_\pm + t(g_\pm - f_\pm)}$ 的局部流，并分别处理各个符号 $\pm$。鉴于边界条件的特征方程的解 $h \equiv h_t^{\pm}$（见命题 4.5.2），我们作如下说明：

将

$$\psi_s^* h = \Big(\psi_s^*\big(h + (g_\pm - f_\pm)\big)\Big)'$$

在 $s = 0$处代入，其中（.....）′表示 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}s$，得到

$$h = L_{(Y_\lambda - X_{f_\pm + t(g_\pm - f_\pm)})}\big(h + (g_\pm - f_\pm)\big)\,,$$

这就是命题 4.5.2 中边界条件的特征方程。注意，在平衡点处，解 h 为零。此外，应用常数变易法可得

$$\psi_s^* h = \mathrm{e}^s\left(h - \int_0^s \mathrm{e}^{-\sigma}\big(\psi_\sigma^*(g_\pm - f_\pm)\big)'\mathrm{d}\sigma\right)\,,$$

根据链式法则，这又回到了上述特征方程。换言之，h 是一个解，当且仅当沿着每条流线 $c(s) \equiv c_t^{\pm}(s) = \psi_s(v)$，对于每个初始点 $v \in V_S$，我们有

$$h\big(c(s)\big) = \mathrm{e}^s\left(h(v) - \int_0^s \mathrm{e}^{-\sigma}\mathrm{d}(g_\pm - f_\pm)\big(c'(\sigma)\big)\,\mathrm{d}\sigma\right)\,.$$

沿任意一条包含在开子集中的流线 c 的积分

$$U_0 := V_S \setminus \operatorname{supp}\big(\mathrm{d}(g_\pm - f_\pm)\big)$$

of V_S 消失。因此， h 沿着 U_0中的每条流线 c 在正向时间 s 中呈指数增长。

为了使 h 具有紧支撑，我们令 $h(v) = 0$ 对所有 $v \in U_\partial$成立，其中

$$U_\partial := V_S \setminus \operatorname{supp}\left(g_\pm - f_\pm\right).$$

注意， U_∂ 的闭包是 ∂V_S 的一个邻域，并且 V_S 中所有存在一条 c 完全包含于 supp $(g_\pm - f_\pm)$ 内的流线经过的点所组成的集合不含任何内点。这是由 Liouville 流 ψ_s 在正向时间 s中沿流线的指数 $\mathrm{d}\lambda$-体积增长所导致的。

4.7. **李维尔影集**。 我们继续第 4.6 节中的讨论。$(\mathbb{R} \times V, \mathrm{d}b + \lambda)$ 中的形状 $(S, V_S, f_\pm)$ 属于**李维尔域型**，如果

(a) Y_λ 正向横截于（事后得到的光滑边界） ∂V_S；(b) 限制在 ∂V_S 上的 $f_\pm$ 是局部常值的；以及 (c) 限制在 ∂V_S 的一个邻域上的 $\mathrm{d}f_\pm(Y_\lambda)$ 为负/正。

(a)项意味着，配备了 Y_λ 的影集 V_S 的闭包是一个李乌维尔域。此外，根据(b)和 (c)， V_S上的刘维尔向量场 $Y_\lambda - X_{f_\pm}$ 将$V_{f_\pm}$变成一个李乌维尔域，其中$V_{f_\pm}$是从 V_S 中移除一个完全由 $f_\pm$的水平集构成的小开领圈邻域后得到的。

因此，与任意李乌维尔域的情形一样， $Y_\lambda - X_{f_\pm}$ 的局部流 ψ_s^0 对所有 $s \leq 0$都有定义，并且具有非空、紧致的骨架

$$\left\{ v \in V_{f_\pm} \,\middle|\, \psi_s^0(v) \in V_{f_\pm} \ \forall s \geq 0 \right\} = \bigcap_{s \leq 0} \psi_s^0(V_{f_\pm})$$

且没有内点。此外，映射$(s, w) \mapsto \psi_s^0(w)$是一个微分同胚，它将$(-\infty,0] \times \partial V_{f_\pm}$ 映到$V_{f_\pm}$中骨架的补集上。

等价形状$(S, V_S, f_\pm)$和$(T, V_T, g_\pm)$是**相似的**，如果

(x) $(S, V_S, f_\pm)$属于李维尔域型；(y) 对所有 $t \in [0,1]$， $Y_\lambda - X_{f_\pm + t(g_\pm - f_\pm)}$ 的局部流 $\psi_s \equiv \psi_s^t$ 的骨架都相同；并且(

z) $g_\pm - f_\pm$ is locally 的常数 tant i$^{\text{n 的一个 ne}}$ ighbourhood of the skeleton of $Y_\lambda - X$ $_{f_\pm}$。鉴于 (x) 和形状等价，$(T, V_T, g_\pm)$ 也属于李维尔域型。要求所有 $Y_\lambda - X_{f_\pm + t($ $_{g_\pm - f_\pm)}$ 的骨架具有一个公共邻域，且 $g_\pm - f_\pm$ 在该邻域上局部常值，这与 (y) 和 (z) 等价。

定理 4.7.1。 假设形状$(S, V_S, f_\pm)$ 和$(T, V_T, g_\pm)$ 相似。此外，假设对所有 $w \in \partial V_{f_\pm}$ 以及所有 $t \in [0,1]$

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\sigma} \mathrm{d}(g_\pm - f_\pm)\big(c'(\sigma)\big)\, \mathrm{d}\sigma = 0\,,$$

其中 $c(s) \equiv c_t^\pm(s) = \psi_s^t(w)$ 是 $Y_\lambda - X_{f_\pm + t(g_\pm - f_\pm)}$ 的流线，从w出发。于是，(D_S, ξ_λ) 和(D_T, ξ_λ) 在公共赤道集的一个邻域之外接触同伦。

证明。 目标是求命题 4.5.2 中所表述问题的解 $h \equiv h_t^\pm$。根据第 4.6 节，只需找到一个光滑的 h ，使其沿所有流线 c 求解所表述的积分方程。我们在 V_S 中的 U_0 上设定 $h = 0$ ，使得 $h(w) = 0$

对骨架上的所有 $w \in \partial V_{f_\pm}$ 和 $h = 0$，由 (y) 和 (z) 可得。由指数增长可知，在骨架上别无选择。

骨架在 $V_{f_\pm}$ 中的补集与 $(-\infty, 0] \times \partial V_{f_\pm}$ 微分同胚，该微分同胚通过 $(s, w) \mapsto \psi_s^t(w)$ 给出。对于所有不包含于骨架中的 $v \in V_{f_\pm}$，定义 $h(v)$ 为

$$h\big(c(s)\big) = \mathrm{e}^s \int_s^0 \mathrm{e}^{-\sigma} \mathrm{d}(g_\pm - f_\pm)\big(c'(\sigma)\big)\, \mathrm{d}\sigma\,,$$

其中，$v = c(s)$ 光滑且唯一地依赖于参数 $(s, w, t) \in (-\infty, 0] \times \partial V_{f_\pm} \times [0, 1]$（对每个符号 $\pm$ 分别而言）。根据 (y) 和 (z)，当 $s \to -\infty$ 时该积分对充分大的 $|s|$ 为常数，因此积分存在。由积分假设，$h = 0$ 在骨架的一个邻域内正如其所需的那样。□

4.8. 对称 Stein 型影子集。我们给出第 4.7 节中情形的一个例子：假设 (V, λ) 具有一个**严格拟多调和势**，即一个光滑真映射 $\varrho\colon V \to [0, \infty)$，使得对于 J 上与 $\mathrm{d}\lambda$ 兼容的几乎复结构，有 $\lambda = -\mathrm{d}\varrho \circ J$，参见第 5.1 节中的一个例子。因此，$Y_\lambda = \nabla\varrho$ 和 $X_\varrho = J\nabla\varrho$，其中梯度是相对于诱导度量 $\mathrm{d}\lambda(\,.\,, J\,.\,)$ 取得的。

这使得我们可以作如下简化：考虑开次水平集 $\{\varrho < \varrho_*\}$ 上的光滑函数 f，其中 ϱ_* 是一个正的常数，且不等于 ϱ 的临界值。假设 f 光滑地通过 ϱ 分解，使得对于所有 $v \in \{\varrho < \varrho_*\}$，$f(v)$ 都可以写成 $\hat{}\, f\big(\varrho(v)\big)$，其中 $\hat{}\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数。那么，对于任意 $g = \hat{}\, g(\varrho)$，我们可以将 $g(c)$ 理解为沿着 c 的流线取得的值，其中 c 可以是 $Y_\lambda - X_f$，或者等价地是 $\hat{}\, Y_\lambda$。为说明这一点，注意根据链式法则，$X_f = f'(\varrho) X_\varrho$。因此，$\hat{}\, Y_\lambda - X_f = (\mathbb{I} - f'(\varrho) J)\nabla\varrho$，所以 $Y_\lambda - X_f$ 和 Y_λ 恰好都在 ϱ 的临界点处消失。在 ϱ 的临界点的补集中，我们使用相对于 $X = \nabla\varrho / |\nabla\varrho|^2$ 的 ϱ 水平集上的流盒。在其中，ϱ 是关于流时间的斜率为 1 的线性函数；ϱ 的水平集就是正交切片。结论成立，因为 Y_λ 与 X 正比例，而 X_f 与其正交。

我们注意到，$Y_\lambda - X_f$ 的骨架由 $Y_\lambda - X_f$ 的所有稳定流形组成，这些流形对应于 ϱ 在 V_S 中的临界点以及 $Y_\lambda - X_f$ 上的 $\mathrm{d}\varrho(Y_\lambda - X_f) = |\nabla\varrho|^2 > 0$。通过在 $f = f(\varrho)$ 上添加满足以下性质的光滑扰动函数 $\chi = \hat{}\, \chi(\varrho)$，不会改变 $Y_\lambda - X_f$ 的 $\hat{}$ 骨架：$\mathrm{d}\chi$ 的支集包含于相对于 X 获得的 $\{\varrho \le \varrho_*\}$ 的最大领圈邻域内部，并且在 $\{\varrho = \varrho_*\}$ 附近为零。

在 $\mathbb{R} \times V$ 中，正则紧超曲面 S 由方程 $b^2 + \varrho(v) = \varrho_*$ 的解集 $(b,\ v)$ 确定。形状结构由函数 $f_\pm(v) = \pm\sqrt{\varrho_* - \varrho(v)}$ 诱导，这些函数对所有 $v \in V_S = \{\varrho < \varrho_*\}$ 均有定义。考虑扰动函数 $\chi_\pm = \hat{}\, \chi_\pm(\varrho)$，满足

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-\sigma} \mathrm{d}\chi_\pm\big(c'(\sigma)\big)\, \mathrm{d}\sigma = 0\,,$$

其中

$$\mathrm{d}\chi_\pm\big(c'(\sigma)\big) = \Big(\chi_\pm\big(c(\sigma)\big)\Big)'$$

可理解为相对于 $Y_\lambda - X_{f_\pm + t}$ 取的流线 $c_{\,(g_\pm - f_\pm)}$，或者等价地 Y_λ。扰动 $g_\pm := f_\pm + \chi_\pm$ 给出一个形状 $\big(T,\ V_S,\ f_\pm + \chi_\pm\big)$ 其定义域与 $(S,\ V_S,\ f_\pm)$ 的定义域接触同伦。这由定理 4.7.1 得出，其中

所得函数

$$h\big(c(s)\big) = \mathrm{e}^{s} \int_{s}^{0} \mathrm{e}^{-\sigma} \mathrm{d}\chi_{\pm}\big(c'(\sigma)\big)\, \mathrm{d}\sigma$$

ˆ 也属于 $h = h(\varrho)$ 类型。

定理 1 的证明——“若”部分。令 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$，其中对所有 $j = 1, \dots, n$，取 $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$；并回顾一下，$\mathbb{C}^n$ 上的标准 Stein 结构由严格多重次调和函数 $\varrho(\mathbf{z}) = \frac{1}{4}|\mathbf{z}|^2$定义。注意，$\mathrm{d}\mathbf{x} \wedge \mathrm{d}\mathbf{y}$ 的径向李维尔原函数为 $-\mathrm{d}\varrho \circ \mathrm{i} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{x})$。

考虑定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上、支集包含于开圆球 $B_{r_0}(0)$ 中的径向对称函数 g：$= g_{+} - f_{+}$。令 $g(\mathbf{z}) = g(r)$，其中 $r = |\mathbf{z}|$，并注意，根据根引理，$g = \hat{}g(\varrho)$ 可分解为一个光滑函数 $\hat{}g = \tilde{g} \circ 2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，因为 $r \mapsto g(r)$ 是偶函数，见引理 2.1.1。因此，正如第 4.8 节所述，我们可以采用自治径向 Liouville 向量场 $\frac{1}{2}(\mathbf{x}\partial_{\mathbf{x}} + \mathbf{y}\partial_{\mathbf{y}})$ 的流 $\psi_s(\mathbf{z}) = \mathrm{e}^{s/2}\mathbf{z}$，无需进行哈密顿扰动。

对于 $\mathbf{z}_0 \in \partial B_{r_0}(0)$，将始发流线记为 $c(s) = \mathrm{e}^{s/2}\mathbf{z}_0$ 对所有 $s < 0$均成立。对于所有非零的 $\mathbf{z} \in B_{r_0}(0)$，记 $\mathbf{z} = \mathrm{e}^{s/2}\mathbf{z}_0$，并定义 $h(\mathbf{z}) = h(r)$ 为

$$h(\mathbf{z}) = \mathrm{e}^{s} \int_{s}^{0} \mathrm{e}^{-\sigma} \Big(g\big(r_0 \mathrm{e}^{\sigma/2}\big)\Big)' \, \mathrm{d}\sigma\,.$$

利用链式法则，被积函数变为

$$\mathrm{e}^{-\sigma} \cdot g'\big(r_0 \mathrm{e}^{\sigma/2}\big) \cdot \frac{1}{2} r_0 \mathrm{e}^{\sigma/2}\,,$$

因此，代换 $\tau = r_0 \mathrm{e}^{\sigma/2}$（由此得到 $\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\tau \mathrm{d}\sigma$ 和 $r = r_0 \mathrm{e}^{s/2}$）最终导出

$$h(\mathbf{z}) = r^2 \int_{r}^{r_0} \frac{g'(\tau)}{\tau^2}\, \mathrm{d}\tau\,.$$

为了证明在 $\mathbf{z} = 0$ 处的光滑性，注意到根据假设，$(g')'(0) = 0$。Morse 引理意味着被积函数等于 $(g')_2(\tau)$，见第 2.1 节。由于 $(g')_2$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇光滑函数，由$G(r) = \int_0^r (g')_2(\tau)\mathrm{d}\tau$ 给出的函数在 $\mathbb{R}$ 上是偶函数且光滑。由根引理可知，存在定义在 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 $\tilde{G}$，使得 $G(r) = \tilde{G}(r^2)$，见引理 2.1.1。因此，$h(\mathbf{z}) = |\mathbf{z}|^2\big(G(r_0) - \tilde{G}(|\mathbf{z}|^2)\big)$ 在 $\mathbf{z} = 0$ 处也是光滑的。如定理 4.7.1 的证明所示，结合命题 4.5.2 和第 4.6 节即可得到该结论。□

5. Cotangent shadows

我们讨论定理 2 和定理 3。

5.1. 驯性几何。如 [12, 第 5] 节所述，$\lambda \equiv \lambda_Q$的刘维尔形式和 Q 的黎曼度量在 T^*Q上诱导出一种驯性结构：Q 上的列维-奇维塔联络的对偶联络将 $TT^*Q = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$分解为水平 $\mathcal{H}$ 和垂直分布 $\mathcal{V}$。几乎复结构 $J \equiv J_{T^*Q}$通过将水平/垂直向量映为 $-$垂直/$+$水平向量来定义。由此得到 T^*Q 上的佐佐木度量 $\mathrm{d}\lambda(\,.\,, J\,.\,)$，使该分解成为正交分解，并使 J 与辛形式 $\mathrm{d}\lambda$相容。此外

$$\lambda = -\mathrm{d}\varrho \circ J\,,$$

其中，我们将动能函数记为 $\varrho(u) := \frac{1}{2}|u|^2$，其中 $u \in T^*Q$。因此，我们处于第 4.8 节所述的情形。特别地，关于佐佐木度量 $\mathrm{d}\lambda(\,.\,, J\,.)$取梯度可得， λ的刘维尔向量场与 ϱ 的哈密顿向量场分别等于 $Y_\lambda = \nabla\varrho$ 和 $X_\varrho = J\nabla\varrho$。这里，与第3.3节中一样， Y_λ表示 T^*Q 上的纤维方向径向刘维尔向量场，其定义为 T^*Q上的典范刘维尔形式 λ 关于 $\mathrm{d}\lambda$ 的对偶。

注意到

$$\lambda(X_\varrho) = Y_\lambda(\varrho) = 2\varrho$$

根据 ϱ 在纤维径向方向上的 2 次齐次性。

5.2. **纤维径向对称**。 考虑 $\mathbb{R} \times T^*Q$ 中的一个形状（S， V_S， $f_\pm$），其影集 V_S 等于 $D_{r_0}T^*Q$的内部。假设两个函数 $f_\pm$ 均为纤维径向对称。记 f 为函数 $f_\pm$之一。

纤维径向对称性使得对于$r = |u|$，通过将 $f(u)$和 $f(r)$限制在 T^*Q任意一个纤维中的直线上，可以将二者等同。由此得到的函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$˜为偶函数，因此根引理 2.1.1给出一个光滑函数 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，满足$f(u) = \tilde{f}(r^2)$，对所有 $u \in D_{r_0}T^*Q$和 $r = |u|$均成立。令ˆ$f = \tilde{f} \circ 2$，得到 $f =$ˆ$f(\varrho)$。将其限制在 $D_{r_0}T^*Q$的内部，利用链式法则可得

$$X_f = \hat{f}'(\varrho)X_\varrho$$

分别对应的哈密顿向量场。注意，当 $r \to r_0$时，前置因子趋于$\mp\infty$；其符号取决于 f 定义的是出口集还是入口集。

在第3.3节中计算的特征向量场 X 在 S 上的投影，限制到 $D_{r_0}T^*Q$ 的内部后，除符号 $\pm$外，等于向量场 $Y_\lambda - X_f = (\mathbb{I} - f'(\varrho)J)\nabla\varrho$。零点集等于 T^*Q的零截面 Q。因此，特征叶状结构 S_{ξ_Q} 的奇异集为 $\{f(0)\} \times Q$；沿此集合，接触结构 ξ_Q是水平的，等于 $\{f(0)\} \times T(T^*Q)|_Q$，见第3.1节。若 f 对应于 S的出口集/入口集，则符号分别为正/负，见第3.2节。 S的赤道 E为 $\{f(r_0)\} \times S_{r_0}T^*Q$。沿着 E，接触结构 ξ_Q 处处非水平，因为 λ 恰好仅在零截面上是平凡的。因此，S_{ξ_Q} 的所有特征线都连接正奇异集与负奇异集，并且事后横截赤道，且各交于唯一一点。赤道的两个补集的闭包称为半特征。沿 $\mathbb{R}$因子投影到T^*Q 的投影，由特征向量场 $\pm(Y_\lambda - X_f)$ 的流线沿着 $D_{r_0}T^*Q$的内部参数化；这些投影通过有限长度的弧，将每个余球丛 S_rT^*Q, $r \in (0, r_0)$ 与边界 $S_{r_0}T^*Q$ 连接起来。

5.3. **半特征动力学**。 刘维尔向量场 Y_λ 在T^*Q 上的流由 $(s, u) \mapsto \mathrm{e}^s u$ 给出。回想一下， X_ϱ将 T^*Q上的余测地流 γ_s积分，参见 [7, 第 27-31]页。这两种流都可用于表示 $D_{r_0}T^*Q$内部向量场$Y_\lambda - X_f$的流 ψ_s。我们声称

$$\psi_s(u) = \mathrm{e}^s \gamma_{\sigma_u(s)}(u)$$

对所有 $u \in T^*Q$、 $|u| < r_0$和 $s \in \mathbb{R}$，其中

$$\sigma_u(s) := \int_s^0 \mathrm{e}^\sigma \hat{f}'\big(\varrho(\mathrm{e}^\sigma u)\big)\mathrm{d}\sigma\,.$$

事实上，应用 $i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X$（参见 [13, 命题 V.5.3],）于 $\mathrm{d}\lambda$，并利用 $\lambda(X_\varrho) = Y\lrcorner\varrho = 2\varrho$，可得方程 $[Y_\lambda, X_\varrho] = X_\varrho$ 的 $\mathrm{d}\lambda$-对偶式，由此可知，沿 $-Y_\lambda$ 的流对 X_ϱ 的拉回等于 $\mathrm{e}^{-s}X_\varrho$。暂且假设 ψ_s 只是所述方程右端的缩写，则可得 $\psi_0 = \mathrm{id}$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi_s = Y_\lambda|_{\psi_s} + \sigma'_{(.)}(s)\cdot \mathrm{e}^{-s}X_\varrho|_{\psi_s}$。由于余测地流 γ_σ 保持动能 ϱ，因此 $\varrho(\mathrm{e}^\sigma .) = \varrho(\psi_s)$ 成立；计算 σ' 最终表明，ψ_s 确实是 $Y_\lambda - X_f$ 的流。

注意，对于所有 $a \in \mathbb{R}$，$\mathrm{e}^a\gamma_\sigma \circ \mathrm{e}^{-a} = \gamma_{\mathrm{e}^{-a}\sigma}$ 都成立，因为γ_σ 的共轭流就是 $\mathrm{e}^{-a}X_\varrho$的流。因此，对于 $\psi_s(u)$，我们可以写作 $\mathrm{e}^{s-a}\gamma_{\mathrm{e}^{-a}\sigma_u(s)}(\mathrm{e}^a u)$，于是结合 $\mathrm{e}^a = 1/|u|$，我们得到

$$\psi_s(u) = \mathrm{e}^s|u| \cdot \gamma_{|u|\sigma_u(s)}\left(\frac{u}{|u|}\right)$$

对于所有满足 $|u| < r_0$ 的 $u \neq 0$。

5.4. 定向长度。对于余维为 $|u| \in (0, r_0)$ 的给定 $u \in T^*Q$，考虑通过底点投影得到的曲线 $s \mapsto \pi\big(\psi_s(u)\big)$，它位于 Q 中。根据第 5.3 节，该曲线重新参数化了 Q 中的一条测地线弧，u的度量对偶与之相切。这里，我们允许重新参数化随时间向前和向后进行。我们将计算时间参数介于 0 和 s 之间的定向长度 $\ell_u(s)$，其中，向前/向后的定向弧分别作正/负贡献。利用第 3.4] 节中 [18,的论证，作用量

$$a_u(s) = \int_s^0 U^*\lambda$$

提升 $U(s) = \gamma_{\sigma_u(s)}(u)$ 到 $S_{|u|}T^*Q$ 的面积 $a_u(s) = |u|\ell_u(s)$，即通过与 $s \mapsto \pi\big(\psi_s(u)\big)$ 进行凸插值所得曲面的面积。

曲线 $s \mapsto \pi\big(\psi_s(u)\big)$ 也可以由下式得到

$$s \longmapsto \pi \circ \gamma_{|u|\sigma_u(s)}\left(\frac{u}{|u|}\right).$$

固定 u 和 s，重标定曲线的定向长度

$$[0,1] \ni \tau \longmapsto \pi \circ \gamma_{|u|\sigma_u(s\cdot\tau)}\left(\frac{u}{|u|}\right)$$

等于 $\ell_u(s)$。移除长度相同但符号相反的连续子弧，会诱导出一个相对于端点的形变收缩，将其收缩到重标定后的测地线弧

$$[0,1] \ni \tau \longmapsto \pi \circ \gamma_{|u|\sigma_u(s)\cdot\tau}\left(\frac{u}{|u|}\right)$$

同时保持定向长度。该形变收缩可通过参数函数 $|u|\sigma_u(s\cdot\tau)$ 和 $|u|\sigma_u(s)\cdot\tau$ 的凸插值来定义，并且始终位于由 u 确定的测地线迹内。对基于作用量的定义应用斯托克斯定理即可得出结果。因此，

$$\ell_u(s) = |u|\sigma_u(s)\,.$$

此外，根引理 2.1.1 的证明表明

$$\hat{f}'\big(\varrho(u)\big) = 2\tilde{f}'(r^2) = \frac{1}{r}f'(r)$$

其中 $r=|u|$ 对所有 $u\in T^*Q$ 满足 $|u|\in(0,\ r_0)$，因此

$$\ell_u(s)=\int_s^0 f'\big(\mathrm{e}^\sigma|u|\big)\mathrm{d}\sigma$$

即为所需的定向长度 $\ell_u(s)$。

5.5. **特征半长度**。设 u_0 in $S_{r_0}T^*Q$ 是一个边界点，并取一个序列 $u_\varepsilon\to u_0$，满足当 $\varepsilon>0$ 充分小时，$|u_\varepsilon|=r_0-\varepsilon$。我们声称，对任意固定的 $s<0$，极限

$$\ell_{u_0}(s):=\lim_{\varepsilon\to0}\ell_{u_\varepsilon}(s)$$

存在且有限。事实上，根据第5.4节，$\ell_{u_\varepsilon}(s)$是曲线$[0,1]\ni\tau\mapsto\pi\big(\psi_{s\cdot\tau}(u_\varepsilon)\big)$的定向长度，且仅取决于 $|u_\varepsilon|$。提升 $\big(f(\psi_{s\cdot\tau}(u_\varepsilon))\ \psi_{s\cdot\tau}(u_\varepsilon)\big)$到 f 的图 S，参数化了半特征子弧；当 $\varepsilon\to0$时，这些子弧与赤道相交。根据第5.2节末尾的评注，对于所有 $\varepsilon\to0$，所得子弧都可以重新参数化为 S_{ξ_Q}的特征向量场的积分曲线，且对应有限时间区间。由于定向长度在严格递增的时间重新参数化下保持不变，结论得证。

为了证明在奇异集附近的有限性，我们作如下观察：通过代换 $\tau=\mathrm{e}^\sigma|u|$，得到 $\mathrm{d}\tau=\tau\mathrm{d}\sigma$，且 $r=\mathrm{e}^s|u|$定向长度 $\ell_u(s)$，$|u|\in(0,\ r_0)$，等于

$$L_u(r):=\int_r^{|u|}\frac{f'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau$$

对应于重新参数化的流

$$\Psi_r(u)=r\gamma_{L_u(r)}\left(\frac{u}{|u|}\right).$$

根据第 2.1 节的 Morse 引理，量 $L_u(r)$，因而 $\Psi_r(u)$，对于 r 非正值也有定义，因此根据前面的说明

$$L_{u_0}(-r_0)=\int_{-r_0}^{r_0}\frac{f'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau$$

对所有边界点 $u_0\in S_{r_0}T^*Q$ 都是有限的。量 $L_{u_0}(-r_0)$ 是曲线的定向长度

$$[-r_0,r_0]\ni r\longmapsto\pi\circ\gamma_{L_{u_0}(r)}\left(\frac{u_0}{|u_0|}\right),$$

它提升为一个 **加倍半特征**

$$[-r_0,r_0]\ni r\longmapsto\big(f(\Psi_r(u_0)),\Psi_r(u_0)\big)$$

到图 S 的 f。在 $r=0$ 处，提升穿过奇异集，并在两端到达赤道。

注5.5.1。设（S、V_S、$f_\pm$）是 $\mathbb{R}\times T^*Q$ 中的一个形状，其影集 V_S等于 $D_{r_0}T^*Q$ 的内部，并且 $f_\pm$ 是纤维径向对称的。根据第3.3节中特征向量场的定向，我们有

$$L_{u_0}(0)=\pm\mathscr{L}(f_\pm)\quad\text{and}\quad L_{u_0}(-r_0)=\pm2\mathscr{L}(f_\pm)$$

图上半特征和加倍半特征的定向长度 $f_\pm$。

5.6. 归一化余测地线扭转。 去零截面余切丛 $T^*Q \setminus Q$ 上的归一化余测地流 η_θ 是长度函数 $l(u) := |u|$, $u \in T^*Q$所对应的哈密顿流。生成哈密顿向量场满足 $X_l = \frac{1}{L} X_\varrho$，因此 $\gamma_\theta = \eta_{l\theta}$。注意，$|X_l|_J = 1$ 在 T^*Q 上取佐佐木度量 $\mathrm{d}\lambda(\,.\,, J\,.\,)$，且 $\lambda(X_l) = l$，后者等价于 $\eta_\theta^* \lambda = \lambda$。因此，对于每个 $\theta \in \mathbb{R}$，η_θ 都是 $T^*Q \setminus Q$ 上的一个保持 λ的恰当辛同胚。

给定任意光滑函数 $\theta\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，我们通过如下定义在 $T^*Q \setminus Q$ 上定义一个恰当辛同胚

$$\Phi := \eta_{\theta(l)}\,.$$

由于 η_θ 保持了 l，其逆映射等于 $\Phi^{-1} = \eta_{-\theta(l)}$。计算

$$T\Phi = T\eta_{\theta(l)} + \big(\theta'(l)\mathrm{d}l\big) \cdot X_l|_\Phi$$

我们得到

$$\Phi^* \lambda_Q = \lambda_Q + \mathrm{d}\Theta$$

因为 Φ 保持余向量的长度。这里，我们定义

$$\Theta(u) := -\int_{|u|}^{r_0} \tau\theta'(\tau)\mathrm{d}\tau\,,$$

它是纤维径向对称的。

选取 $\theta\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 0 附近等于 0，并在$[r_0, \infty$附近恒等于 $\theta_0 = \theta(r_0)$。因此，Θ 在 0 附近为常数，且其支集包含于 $[0, r_0)$。由于 $\eta_0 = \mathrm{id}$，我们看到 Φ 可延拓至零截面。此外，Φ 在 $S_{r_0}T^*Q$的一个邻域内等于 η_{θ_0}。定义**归一化余测地扭转**为

$$\varphi(b, u) := \big(b - \Theta(u), \Phi(u)\big)$$

对所有 $(b,\ u) \in \mathbb{R} \times T^*Q$均成立。于是，$\varphi$是保持接触形式 $\mathrm{d}b + \lambda_Q$ 不变的严格接触同胚，并且当 $|u|$ 包含于 $[r_0, \infty)$ 的一个邻域时，φ等于 $(b,\ u) \mapsto \big(b,\ \eta_{\theta_0}(u)\big)$。由于 η_{θ_0} 保持 l不变，严格接触同胚 φ 将任意纤维径向对称形状 $(S,\ V_S,\ f_\pm)$（其中 $V_S = D_{r_0}T^*Q$）映射为等价形状 $(T,\ V_T,\ g_\pm)$，并保持赤道不变，其中 $g_\pm = f_\pm - \Theta$ 为纤维径向对称。计算其差得到

$$\mathscr{L}(f_\pm) - \mathscr{L}\big(f_\pm - \Theta\big) = \pm \int_0^{r_0} \theta'(\tau)\mathrm{d}\tau = \pm\theta_0\,.$$

特别地，归一化余测地扭转保持特征长度

$$\Sigma(T) = \mathscr{L}\big(f_+ - \Theta\big) + \mathscr{L}\big(f_- - \Theta\big) = \Sigma(S)$$

对所有时刻 θ_0均成立。

注5.6.1。 若 Q 是贝塞流形，使得 η_θ 以最小周期 $2P$周期运动，则 φ在赤道的一个邻域内限制为恒等映射 $\mathrm{id} \times \eta_{kP}$，其中$\theta_0 = kP$对应任意整数 k。在这种情况下，我们得到 $\mathscr{L}(f_\pm) - \mathscr{L}\big(f_\pm - \Theta\big) = \pm kP$。

如果 $Q = S^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面，则流 η_θ 具有最小周期 2π。映射 η_π 可延拓到零截面，并且在零截面上等于对踵映射 $(\mathbf{q},\ \mathbf{p}) \mapsto (-\mathbf{q},\ -\mathbf{p})$，其坐标表示见 [1, 第 4] 节或 [11, 第 2.2] 节。取 $\theta(0) = j\pi$ 为 π 的适当倍数，可得到所谓的**Dehn-Seidel 扭转**，其中 $\mathscr{L}(f_\pm) - \mathscr{L}\big(f_\pm - \Theta\big) = \pm(k - j)\pi$。

定理 2 的证明。按照第 5.6 节中的方法施加一次归一化余测地扭转，时间为 $\theta_0 = \mathscr{L}(f_+) - \mathscr{L}(g_+)$，该扭转保持 $\Sigma(S)$ 不变，因此不妨设 $\mathscr{L}(f_\pm) = \mathscr{L}(g_\pm)$，以下仍沿用原记号。现在的论证沿着将定理 1 的“如果”部分应用于第 5.1 节和第 5.2 节情形时的证明思路展开。

对于 $D_{r_0}T^*Q$ 内部的紧支撑径向对称函数 $g := g_\pm - f_\pm$，我们识别 $g(u) = g(r)$，其中 $r = |u|$，因此根据根引理 2.1，$1\ g = \hat{}g(\varrho)$ 可分解为光滑函数 $\hat{}g = \tilde{g} \circ 2\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，因为 $r \mapsto g(r)$ 是偶函数。根据第 4.8 节，我们可以自由地使用自治径向 Liouville 向量场 Y_λ 的流 $\psi_s(u) = \mathrm{e}^s u$。

对于 $u_0 \in S_{r_0}T^*Q$，考虑流线 $c(s) = \mathrm{e}^s u_0$，对所有 $s < 0$ 均成立。对于所有满足 $|u| \in (0, r_0)$ 的 $u \in T^*Q$，记 $u = \mathrm{e}^s u_0$，并定义 $h(u) = h(r)$ 如下：

$$h(u) = \mathrm{e}^s \int_s^0 \mathrm{e}^{-\sigma} \Big(g\big(r_0 \mathrm{e}^\sigma\big) \Big)' \, \mathrm{d}\sigma \,.$$

根据链式法则，被积函数等于 $g'\big(r_0\mathrm{e}^\sigma\big)$，因此作代换 $\tau = r_0\mathrm{e}^\sigma$，从而有 $\mathrm{d}\tau = \tau \mathrm{d}\sigma$ 以及 $r = r_0\mathrm{e}^s$，得到

$$h(u) = r \int_r^{r_0} \frac{g'(\tau)}{\tau} \, \mathrm{d}\tau = -r \int_0^r \frac{g'(\tau)}{\tau} \, \mathrm{d}\tau \,.$$

最后一个等式分别由 $\mathscr{L}(g_\pm) = \mathscr{L}(f_\pm)$ 得出。

还需证明 $\{u = 0\}$ 附近的光滑性。根据第 2.1 节中的 Morse 引理，被积函数等于 $(g')_1(\tau)$，这是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶光滑函数。因此，函数 $h(r) := -r \int_0^r (g')_1(\tau)\mathrm{d}\tau$ 在 $\mathbb{R}$ 上是偶函数且光滑，于是根引理 2.1.1 给出一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 $\tilde{h}$，满足 $h(r) = \tilde{h}(r^2)$。因此，$h(u) = \tilde{h}(|u|^2)$ 在 $\{u = 0\}$ 附近也是光滑的。按照定理 4.7.1 的证明，结合命题 4.5.2 和第 4.6 节即可得到该结论。

由引理 4.1.1 (ii) 和第 5.6 节可知，所得接触同胚限制为奇异集的 b-平移。根据注 4.5.3，计算 h 中的积分向量场后发现，它与 X_ϱ成哈密顿量比例关系，因为所涉及的哈密顿量函数是纤维径向对称的。□

5.7. **一种保赤道接触不变量**。如同第5.5节末尾一样，考虑 $\mathbb{R}\times T^*Q$ 中的一个形状 $(S,\ V_S,\ f_\pm)$，其影集 V_S 等于$D_{r_0}T^*Q$ 的内部，并且 $f_\pm$ 纤维径向对称。对于 $S_{r_0}T^*Q$中的所有边界点 u_0，记

$$L^\pm(r) := \int_r^{r_0} \frac{f'_\pm(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau$$

对所有 $r \in [-r_0, r_0]$均成立。这给出曲线

$$u^\pm(r) = \Psi_r(u_0) = r\gamma_{L^\pm(r)}\left(\frac{u_0}{r_0}\right)$$

在 T^*Q中，它们提升为加倍半特征的参数化

$$[-r_0, r_0] \ni r \longmapsto \big(f_\pm(u^\pm(r)), u^\pm(r)\big)$$

到 $f_\pm$ 的图 $S^\pm$。每个提升都经过 $r = 0$ 的奇异集，并与赤道相交

$$E := \{f_+(r_0)\} \times S_{r_0}T^*Q$$

对于 $r = \pm r_0$。将 u_0 指派给

$$u^{\pm}(-r_0) = -r_0 \gamma_{\sigma_\pm}\left(\frac{u_0}{r_0}\right), \quad \sigma_\pm := \pm 2\mathscr{L}(f_\pm),$$

定义了一个对合

$$\mu_{S^\pm} := -\gamma_{\sigma_\pm / r_0}$$

在赤道上 E 使得

$$\mu_{S^\pm} = \gamma_{-\sigma_\pm/r_0} \circ (-1).$$

这由 $x\gamma_\sigma \circ \frac{1}{x} = \gamma_{\sigma/x}$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 非零推出，参见第 5.3 节。情形$x = -1$ 由测地线的定义直接得到。复合映射

$$\mu_S := \mu_{S^-} \circ \mu_{S^+},$$

它将 $u^+(-r_0)$ 映射为 $u^-(-r_0)$，是严格接触同胚

$$\mu_S = \gamma_{\Sigma/r_0}, \qquad \Sigma := 2\Sigma(S),$$

(E, α^{r_0}) 的。

我们注意到，γ_{σ/r_0^2} 是接触形式 α^{r_0} 在 $TS_{r_0}T^*Q$上的限制所得到的、定义于 $S_{r_0}T^*Q$ 上的 Reeb 流在时间 σ/r_0^2 时的流。将α^{r_0}的 Reeb向量场记为$R_{\alpha^{r_0}}$，这意味着γ_{σ/r_0}是 $S_{r_0}T^*Q$ 上的$\frac{1}{r_0}X_\varrho = r_0 R_{\alpha^{r_0}}$的流。因此，任意满足以下条件的 E 的微分同胚 ε

（ε_{-1}） ε与（-1）交换，且

（$\varepsilon_{\alpha^{r_0}}$） ε 保持 α^{r_0}

都满足以下规则：γ_{σ/r_0} 与 $\varepsilon \circ (-1)$ 的共轭是推前

$$\big(\varepsilon \circ (-1)\big)_*\Big(\frac{1}{r_0}X_\varrho\Big) = -\frac{1}{r_0}X_\varrho|_{(-1)},$$

即$-\gamma_{\sigma/r_0} \circ (-1)$。换言之，

$$\varepsilon \circ \mu_{S^\pm} = \mu_{S^\pm} \circ \varepsilon.$$

同样地，只需使用（$\varepsilon_{\alpha^{r_0}}$），我们得到

$$\varepsilon \circ \mu_S = \mu_S \circ \varepsilon.$$

定理 3 的证明。设 φ 是从（D_S， ξ_{st}）到（D_T， ξ_{st}）的保持余定向的接触同胚，并且限制为赤道 $\{f_+(r_0)$ 的微分同胚 ε：$E \to E$。根据命题 3.1.1，φ 将带符号奇异集$\pm\{f_\pm(\mathbf{0})\} \times Q$ 映射到 $\pm\{g_\pm(\mathbf{0})\} \times Q$，因此 $\varphi(S^\pm) = T^\pm$；又由于 φ 保持赤道，φ 将（$S^\pm$）ξ_Q 的加倍半特征线映射到（$T^\pm$）ξ_Q的加倍半特征线。考虑到端点，我们得到

$$\varepsilon \circ \mu_{S^\pm} = \mu_{T^\pm} \circ \varepsilon$$

并且，由于 $\mu_{S^\pm}$ 和 $\mu_{T^\pm}$ 是对合的，

$$\varepsilon \circ \mu_S = \mu_T \circ \varepsilon.$$

在上述假设 (ε_{-1})、$(\varepsilon_{\alpha^{r_0}})$ 和 $(\varepsilon_{\alpha^{r_0}})$ 下，应用交换规则，我们分别得到 $\mu_{S^\pm} = \mu_{T^\pm}$ and$\mu_S = \mu_T$。因此，存在整数 $k_\pm$、k，使得

$$\mathscr{L}(f_\pm) = \mathscr{L}(g_\pm) + k_\pm P \qquad \text{and} \qquad \Sigma(S) = \Sigma(T) + kP,$$

分别地，其中 $2P/r_0$ 是 $S_{r_0}T^*Q$ 上 γ_σ 的最小周期；当 Q 为 Besse 时，参见 Wadsley [17]；对于非 Besse 情形，读作 $P=0$ 而非 Q。这证明了 (i) 和 (ii)。

鉴于 (iii)，我们定义一个严格接触同胚

$$\kappa_{S^\pm} := \gamma_{\tau_\pm/r_0}\,, \quad \tau_\pm := \pm\mathscr{L}(f_\pm)\,,$$

在赤道 $(E,\ \alpha^{r_0})$ 上，它对应于赋值

$$\kappa_{S^\pm}(u_0) = r_0\gamma_{\tau_\pm}\left(\frac{u_0}{r_0}\right)$$

与上述讨论类似，将其赋给 u_0。注意，$\pi\circ\kappa_{S^\pm}(u_0) = u^\pm(0)$，且 $\big(f_\pm(0)\ u^\pm(0)\big)$ 是奇异集 $\{f_\pm(0)\}\times Q$ 中的一点，它经 $\varphi|_{\{f_\pm(0)\}\times Q} = \big(g_\pm(0)\ \iota\big)$ 映射到 $\{g_\pm(0)\}\times Q$。保持特征线可得

$$\varphi\circ\big(f_\pm(0),\pi\circ\kappa_{S^\pm}\big) = \big(g_\pm(0),\pi\circ\kappa_{T^\pm}\big)\circ\varphi$$

限制在赤道 E 上，它是

$$\Big(g_\pm(0),\iota\circ\pi\circ\kappa_{S^\pm}\Big) = \Big(g_\pm(0),\pi\circ\kappa_{T^\pm}\circ\varepsilon\Big)\,.$$

利用假设 $\iota\circ\pi = \pi\circ\varepsilon$，以及根据 $(\varepsilon_{\alpha^{r_0}})$，$\varphi|_E = \varepsilon$ 与 $\gamma_{\tau_\pm/r_0}$ 可交换，可得 $\pi\circ\kappa_{S^\pm} = \pi\circ\kappa_{T^\pm}$。这意味着

$$\pi\circ\gamma_{\pm(\mathscr{L}(f_\pm)-\mathscr{L}(g_\pm))/r_0} = \pi$$

在 E，这意味着 $\gamma_{\pm(\mathscr{L}(f_\pm)-\mathscr{L}(g_\pm))/r_0}$ 保持 π 的纤维不变：$E\to Q$。若 $\mathscr{L}(f_\pm) - \mathscr{L}(g_\pm)$ 不为零，则 Q 中的所有点 q 都具有如下性质：从 q 出发的所有测地线都会在经过时间 $\pm(\mathscr{L}(f_\pm) - \mathscr{L}(g_\pm))/r_0$ 后返回 q。根据基于 Wadsley定理 [17]，的 [4,命题 7.9(b)]，，E 上的流 γ_τ 是周期性的，最小周期为 $2P/r_0$。注意，Q 中给定测地线 $q=q(\tau)$ 的横截自交点为有限个。事实上，在 Q 处围绕 $q=q(\tau)$ 的横截自交点取半径等于凸性半径的度量球，可以证明满足 $q(\tau_1) = q(\tau_2)$ 但 $\dot q(\tau_1) \neq \dot q(\tau_2)$ 的 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 中的 (τ_1,τ_2) 是孤立的；参见 [4, 引理 7.10]。取 Q 上一条最小周期为 $2P/r_0$ 且不是横截自交点的测地线上的一点，可知存在整数 $k_\pm$，使得

$$\mathscr{L}(f_\pm) = \mathscr{L}(g_\pm) + 2k_\pm P\,.$$

这表明了 (iii)。 □

6. Shadows in symplectisations

我们来证明定理 4。

6.1. Stein型辛化。 回顾第 4.8 节开头的情形。假设定理 4 中考虑的严格闭接触流形 $(M,\ \alpha)$ 是 $\{\varrho<\varrho_*\}\subset V$ 的边界，其接触形式 α 是 Liouville原函数 $\lambda = -\mathrm{d}\varrho\circ J$ 在 $\{\varrho=\varrho_*\}$ 的切空间上的限制。则通过 Y_λ 的 Liouville流 ψ_a 定义了一个 Liouville辛嵌入 $\Psi(a,\ w) := \psi_a(w)$，将 $(\mathbb{R}\times M,\ \mathrm{e}^a\alpha)$ 嵌入 $(V,\ \lambda)$。注意，$\Psi^*Y_\lambda = \partial_a$ 是与 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^a\alpha)$ 对偶的刘维尔向量场。

进一步假设 $\Psi^*\varrho\equiv\varrho(a)$ 是辛化 $(\mathbb{R}\times M,\ \mathrm{e}^a\alpha)$ 上的一个 $\mathbb{R}$-对称函数，正如第 5 节 [12, 中的情形（并取 $\varrho_*=1$）

（r2n）用于欧氏空间，正如第 4.8 节定理 1 证明的若部分中所述，其中 $\varrho(a)=\mathrm{e}^a$，或

（t*q）用于余切丛，详见第 5.1 节，其中 $\varrho(a) = \mathrm{e}^{2a}$。写作 $I = \Psi^* J$，我们得到

$$\mathrm{e}^a \alpha = -\varrho'(a)\mathrm{d}a \circ I\,,$$

其中 $\varrho'(a)$必为正，因此，

$$I\partial_a = X_{\varrho(a)} = \tfrac{\varrho'(a)}{\mathrm{e}^a} R_\alpha$$

将 α 的 Reeb向量场记为 R_α。由此得到

$$\mathrm{e}^a \alpha(X_{\varrho(a)}) = \partial_a(\varrho(a)) = \varrho'(a)$$

and

$$[\partial_a, X_{\varrho(a)}] = \Big(\tfrac{\varrho''(a)}{\varrho'(a)} - 1\Big) X_{\varrho(a)}\,.$$

这两个公式中的 Ψ-相关项分别用于第 5.3 节中的 (t*q) 情形。

考虑由相关接触化诱导的严格接触嵌入 $\mathrm{id} \times \Psi$。设 $(S,\ V_S,\ f_\pm)$ 是包含于像中的一个形状，满足 $f_\pm = f_\pm(\varrho)$，其中 $V_S = \{\varrho_1 < \varrho < \varrho_0\}$ 的取值为实数 ϱ_1, ϱ_0。原像 $(\mathrm{id} \times \Psi)^{-1}(S)$ 定义了一个形状，其影集为 $\Psi^{-1}(V_S) = \{a_1 < a < a_0\}$，其中 $a_{1/0} = \varrho^{-1}(\varrho_{1/0})$，且 $\mathbb{R}$-对称的 $\Psi^* f_\pm \equiv \hat{} f_\pm\big(\varrho(a)\big)$。与第 4.8 节中莫泽问题解相关的函数 $\Psi^* h \equiv \hat{} h\big(\varrho(a)\big)$ 变为

$$\hat{h}\big(\varrho(s + a_0)\big) = \mathrm{e}^s \int_s^0 \mathrm{e}^{-\sigma} \Big((\hat{g}_\pm - \hat{f}_\pm)\big(\varrho(\sigma + a_0)\big) \Big)' \,\mathrm{d}\sigma$$

对于 $s \in (a_1 - a_0,\ 0)$，这当然是对之前在 (r2n) 和 (t*q) 情形下所做计算的重新取样。

6.2. 作用量与特征线。我们考虑配备 $\mathrm{e}^a\alpha$ 的 $\mathbb{R} \times M$，并定义一个（非真）$\mathbb{R}$-对称势 $\varrho(a) = \mathrm{e}^a$。注意，$-\mathrm{d}\varrho \circ I = \mathrm{e}^a \alpha$，或者等价地，$\alpha = -\mathrm{d}a \circ I$；对于 $\mathbb{R} \times M$ 上平移不变的几乎复结构 I，其在 $\ker \alpha$ 上限制为与 $\mathrm{d}\alpha$ 相容的复结构，且满足 $I\partial_a = R_\alpha$。

设 $(S,\ V_S,\ f_\pm)$ 是 $\big(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times M),\ \mathrm{d}b + \mathrm{e}^a\alpha\big)$ 中的一个形状，其中 $V_S = (a_1,\ a_0) \times M$，且 $f = f_\pm$ 是 $\mathbb{R}$-对称的。计算哈密顿量

$$X_f = f'(a) X_a = \mathrm{e}^{-a} f'(a) R_\alpha$$

利用链式法则。因此，无处奇异向量场 $\partial_a - X_f$ 的流等于

$$\psi_s(a, w) = \big(s + a, \eta_{\sigma_a(s)}(w)\big)\,,$$

其中 η_σ 表示 α 的 Reeb 流，并且

$$\sigma_a(s) = \int_{s+a}^{a} \mathrm{e}^{-\tau} f'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

$\pm(\partial_a - X_{f_\pm})$ 的流提升为 $S^\pm$上的特征线参数化。由于 $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times M)$ 上的接触结构 ξ_α 处处都不是水平的，所有特征线都会横截地穿过赤道 $E = \{a_1, a_0\} \times M$，并在有限时间内连接 E 的两个分支。因此，

$$\mathcal{A}(f_\pm) = \pm \int_{a_1}^{a_0} \mathrm{e}^{-\tau} f'_\pm(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

存在且有限，参见第5.5节。量 $\mathcal{A}(f_\pm)$ 是一条 Reeb 弧在 M 中的 α-作用量，该弧是通过投影连接 $S^\pm$ 上相交于 $\{a_1\} \times M$ 和 $\{a_0\} \times M$ 的特征线的赤道得到的，且恰好相交一次。

定理 4 (a) 的证明。考虑定义在 $(a_1,a_0)\times M$ 上的 $\mathbb{R}$-对称函数 $g:=g_\pm-f_\pm$。注意，函数 $g=g(a)$ 的支集位于 (a_1,a_0) 内。如第 4.8 节中的论述，我们考虑 ∂_a 的流 $\psi_s(a,w)=(s+a,w)$。对于初始点 $(a_0,w)\in\{a_0\}\times M$，考虑流线 $c(s)=(s+a_0,w)$，其中所有$s\in(a_1-a_0,0)$均成立。对于点 $(a,w)\in(a_1,a_0)\times M$，记为 $a=s+a_0$，并定义$h_\pm(a,w)=h(a)$ 为

$$h(a)=\mathrm{e}^s\int_s^0\mathrm{e}^{-\sigma}\big(g(\sigma+a_0)\big)'\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

代换 $\tau=\sigma+a_0$ 给出 $a=s+a_0$，从而得到

$$h(a)=\mathrm{e}^a\int_a^{a_0}\mathrm{e}^{-\tau}g'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

为了确保如命题 4.5.2 中所需的 Moser 问题的哈密顿量的光滑性（该问题由下边界 $\{a_1\}\times M$ 附近的分支 h_+ 和 h_- 引起），我们需要要求 $h_+(a_1)=h_-(a_1)$，或者等价地，

$$\int_{a_1}^{a_0}\mathrm{e}^{-\tau}\big(g_+-f_+\big)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{a_1}^{a_0}\mathrm{e}^{-\tau}\big(g_--f_-\big)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

这由关于总特征作用量的假设 $\mathcal{T}(S)=\mathcal{T}(T)$ 保证。与定理 4.7.1 的证明一样，结合命题 4.5.2 和第 4.6 节即可得出结论。关于支集的陈述可利用注 4.5.3 得出。□

6.3. **Reeb 扭转**。与第 5.6 节一样，考虑 (M,α) 的 Reeb 流 η_θ，它满足 $\eta_\theta^*\alpha=\alpha_\circ$ 取一个光滑函数 $\theta\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得 θ 在 $(-\infty,a_1]\cup[a_0,\infty)$ 附近为常数，且 $\theta(a)_{1/0}=\theta_{1/0}$，例如，并且 $\Theta(a_1)=0$，其中

$$\Theta(a):=-\int_a^{a_0}\mathrm{e}^\tau\theta'(\tau)\mathrm{d}\tau$$

支集位于（a_1，a_0）内。定义一个恰当辛同胚

$$\Phi:=\mathrm{id}\times\eta_\theta$$

作用于 $\mathbb{R}\times M$ 上。事实上，逆映射为 $\Phi^{-1}=\mathrm{id}\times\eta_{-\theta}$。线性化计算结果为

$$T\Phi=\mathbb{I}\oplus\Big(T\eta_\theta+\mathrm{d}\theta\cdot R_\alpha|_\Phi\Big)\,,$$

因此

$$\Phi^*(\mathrm{e}^a\alpha)=\mathrm{e}^a\alpha+\mathrm{d}\Theta\,.$$

定义 Reeb 扭转 如下

$$\varphi(b,a,w):=\big(b-\Theta(a),a,\eta_{\theta(a)}(w)\big)$$

对所有的（b,a,w）$\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times M$，都有如此。于是 φ 保持接触形式 $\mathrm{d}b+\mathrm{e}^a\alpha$，等于（$b,a,w$）$\mapsto\big(b,a,^{\eta_{\theta_{1/0}}}(w)\big)$，当 a 接近 $a_{1/0}$ 时，并将任何满足 $V_S=(a_1,a_0)\times M$ 的 $\mathbb{R}$- 对称形状（$S,V_S,f_\pm$）映为等价的 $\mathbb{R}$- 对称形状（$T,V_T,g_\pm$），同时保持赤道 $\{a_1,a_0\}\times M$，其中 $g_\pm=f_\pm-\Theta_\circ$ 特征作用量差为

$$\mathcal{A}(f_\pm)-\mathcal{A}\big(f_\pm-\Theta\big)=\pm\int_{a_1}^{a_0}\theta'(\tau)\mathrm{d}\tau=\pm(\theta_0-\theta_1)\,,$$

使得 Reeb 扭转保留总特征作用量

$$\mathcal{T}(T)=\mathcal{A}\big(f_+-\Theta\big)+\mathcal{A}\big(f_--\Theta\big)=\mathcal{T}(S)\,.$$

6.4. 赤道单值。 我们假设第 6.2 节中的情形。与第 5.7 节一样，我们考虑 $(a_1, a_0) \times M$中的曲线，其在 $S^{\pm}$中的提升参数化了一条特征线，该特征线始于并终于赤道 $\{a_1, a_0\} \times M$的两个分支之一，并且恰好与另一分支相交一次。按照时间顺序沿特征弧向后追踪（如前所述），将终点和起点投影到 M上，得到一个映射

$$\kappa_S := \eta_{\mathcal{T}(S)} .$$

映射 κ_S 是 (M, α) 的严格接触同胚，由 Reeb 流 η_θ 的时间 $\mathcal{T}(S)$-映射给出。特征弧与$S^{\pm}$ 闭包的交点定义了严格接触同胚

$$\kappa_{S^{\pm}} := \eta_{\mathcal{A}(f_{\pm})}$$

(M, α) 的映射。映射 $\kappa_S, \kappa_{S^{\pm}}$ 与 (M, α) 的严格接触同胚 ε 可交换。

定理 4 (b) 的证明。 从 (i) 出发，设 φ 是一个保余定向的接触同胚，它将 (D_S, ξ_α) 映到 (D_T, ξ_α)，并将赤道的分支 $\{a_{1/0}\} \times M$ 上的余定向保留为严格接触同胚 $\varepsilon_{1/0}$。根据命题 3.1.1，φ 将 S_{ξ_α} 的定向特征线映到 T_{ξ_α} 的定向特征线上，因此 $\varepsilon_{1/0} \circ \kappa_S = \kappa_T \circ \varepsilon_{1/0}$。由可交换性可得 $\kappa_S = \kappa_T$，这证明了 (i)。

为证明 (ii)，注意到 φ 在赤道 $\{a_1, a_0\} \times M$ 上限制为一个保余定向的严格接触同胚，且不交换其各个分支。这意味着 $\varphi(S^{\pm}) = T^{\pm}$。此外，$\varphi$ 在 $\{a_{1/0}\} \times M$ 的每个分支上限制为同一个映射 $\varepsilon = \varepsilon_{1/0}$，这些分支均与 M相识别。根据 $(S^{\pm})\xi_\alpha$ 中特征线的端点及其 φ-像 $(T^{\pm})\xi_\alpha$，我们得到 $\varepsilon \circ \kappa_{S^{\pm}} = \kappa_{T^{\pm}} \circ \varepsilon$，见命题 3.1.1。由于 ε 保留了 (M, α)的 Reeb向量场，通过交换关系可得 $\kappa_{S^{\pm}} = \kappa_{T^{\pm}}$，反之亦然。这就证明了 (ii)。□

注 6.4.1。 严格接触同胚 κ_S 的逆映射使得可以将 S 与映射环面 $S(\kappa_S^{-1})$相识别。事实上，沿着从赤道某一分支出发的 M-不变特征流线，可得到一个微分同胚，将其映到 $\mathbb{R} \times M$在作用 $(t, m) \mapsto \big(t - 1, \kappa_S^{-1}(m)\big)$下的商空间。特征线将对应于曲线 $t \mapsto [(t, m)]$。特别地，相对于 ξ_α，S 不可能是 Giroux 凸的。

否则，我们就会在 S 上找到一个光滑函数，其非空零点集 Γ 与 S_{ξ_α} 正向横截，见注 3.5.1。由于通过开闭性论证，$\{0\} \times M$ 在 $S(\kappa_S^{-1})$ 中不分离，Γ 因而不能包含在 $\{0\} \times M$ 中。因此，所有满足存在 $t \in (k, k+1)$ 且 $(t, m) \in \Gamma$ 的 $m \in M$ 所构成的集合 $A_k = (\kappa_S^k)(A_0)$，对于给定整数 k，非空且是开集。由于每条特征线与 Γ 至多相交一次，A_k 两两不相交。此外，A_k 的 α-接触体积相等。这是不可能的。

致谢。 本研究的内容源自2024/25学年在RUB开设的一门讲座课程，并由A5/C5 研讨班的讨论促成。我们感谢所有成员 Johanna Bimmermann、Florian Buck、Lars Kelling、Christopher Schmidt、Bernd Stratmann、Manuel Stange 和 Anton Wilke 所作的贡献。我们感谢 Alberto Abbondandolo、Barney Bramham、Boto von Querenburg 和 Stefan Suhr。

References

[1] K. Barth,

H. Geiges K. Zehmisch *J.* , , 辛填充 *Symplectic Geom.* **17** 2019 929 971
的微分同胚类型, ( ), – 。[2] K. Barth, J. Schneider,接触各向同性环面补集的辛动力学,
Münster J. Math. **12** (2019年), 31–48。[3] F. Beckschulte,带形接触流形, 博士论文, 鲁尔大学波鸿（2023年）。[4] A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*,《数学及其边界领域成果》93, 施普林格出版社, 柏林（1978年）, ix+262。

[5] Ya. Eliashberg 3 *Ann. Inst.* ,J. *Fourier (Grenoble)* **42** 1992 165 192
Martinet 工作二十年后的接触-流形, ( ), – 。[6] Ya. Eliashberg, H. Hofer,三维球的一个哈密顿刻画, *Differential*
Integral Equations **7** 1994 1303 1324 ( ), – 。

[7] H. Geiges, *An introduction to contact topology*,剑桥高等数学研究丛书109, 剑桥大学出版社, 剑桥（2008年）, xvi+440。[8] H. Geiges, N. Röttgen, K. Zehmisch,被困的 Reeb 轨道并不意味着存在周期轨道, *Invent. Math.* **198** (2014年), 211–217。[9] H. Geiges,

K. Zehmisch *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl.* ,Reeb 动 *Sci. (5)* **15** 2016 663 681
力学检测奇数维球, ( ), – 。[10] M. Kegel,

J. Schneider K. Zehmisch 3 *Israel J.* ,辛动力学 *Math.* **235** 2020 245 254
与-球面, ( ), – 。[11] O. van Koert, K. Niederkrüger,布里斯科恩流形上接触结构的开书分解,
Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005年), 3679–3686。[12] M. Kwon, K. Wiegand, K. Zehmisch,通过 Reeb 动力学的非周期性确定微分同胚类型, *J. Fixed Point Theory Appl.* **24** (2022年), 论文编号21, 共26页。[13] S. Lang, *Introduction to differentiable manifolds.*,第2版, 大学教材丛书, 2002年, 纽约, 施普林格, xi+250.[14] S. Makar-Limanov,实心环面上的紧接触结构, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998年), 1013–1044。[15] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*,牛津数学专著, 第二版, 克拉伦登出版社、牛津大学出版社, 纽约（1998年）, 1–486。[16] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*,《美国数学会讨论会出版物》52, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯（2004年）, xii+669。[17] A. W. Wadsley,由圆构成的测地叶状结构,
J. Differ. Geom. **10** (1975年), 541–549。[18] K. Zehmisch,余圆盘半径容量,
Electron. Res. Announc. Math. Sci. **20** (2013年), 77–96。

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsstrasse 150, D-44801 Bochum, Germany*Email address*: Jan.Eyll@rub.de*Email address*: Jonas.Fritsch@rub.de*Email address*: Kai.Zehmisch@rub.de