循环证明验证活动揭示了怎样的证明理解

Alexis Gautreau[1]

[1]巴黎西岱大学，巴黎，法国；alexisgautreau00@gmail.com

本研究属于关于证明验证的研究，将其视为揭示与证明及证明活动相关的教学现象的一种视角。我们重新考察初二学生验证循环证明这一令人困惑的案例。循环证明是指在演绎步骤中将结论用作前提的证明。如果这些年龄在*12*至*13*岁的学生能够正确识别出这类证明的最终陈述是对目标命题结论的改述，那么他们仍然难以解释目标命题的条件是如何在证明中被重新运用的。我们的分析对 *Miyazaki* 等人对这一现象的解释提出质疑；他们认为，当肯定前件式连续出现两次时，学生对循环推理有效性的认可源于对肯定前件式的理解有误。我们提出另一种解释，建立在数学命题的操作性地位与理论地位之分上。这一区分既为循环证明无效提供了理论论证，也为考察学生试图驳斥此类证明时的论证活动提供了一种教学工具。

*Key*关键词：证明、证明的验证、证明阅读理解、证明框架 *k.*

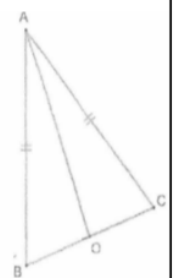
引言

本文所呈现的研究是博士研究的一部分，旨在构建几何证明阅读理解（RCGP[1]）模型。我们所说的证明，是以文本形式书写的假言演绎推理；同时需要立即指出的是，本文所考察的目标命题是一个全称量化蕴含命题。我们的理解模型既建立在教学文献中的相关概念之上，也建立在实验所收集数据的分析之上。在该实验中，55名12至13岁的学生完成了四项证明验证任务。其中一项证明

Claim: If a triangle is isosceles, then its angles at the base are equal.

Proof:

1 | We are going to work on triangle ABC, which is isosceles at A.
2 | Let's draw the segment $[AO]$ that divides angle $\widehat{BAC}$ into two equal angles: $\widehat{BAO}$ and $\widehat{CAO}$.
3 | We know that $AB = AC$, $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ and $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$.
4 | [Or,] for two triangles to be equal, they only need to have a side of the same length
5 | between two equal angles (case of equality ACA).
6 | So triangles ABO and ACO are equal.
7 | [Or,] by definition, two equal triangles have their homologous angles equal.
8 | So angles $\widehat{ABO}$ and $\widehat{ACO}$ are equal.



[1] RCGP：“几何证明阅读理解”的缩写，Yang & Lin（Yang & Lin，2008 ）

（图1）包含循环推理，即证明结论被作为其某个演绎步骤（第3行）的前提加以使用。

图1：循环论证及其目标命题

本文聚焦于验证循环推理的活动揭示了学生对证明的何种理解。我们呈现以下教学现象：一些学生声称，该证明证明了目标命题，因为证明结论与命题的结论相对应，但他们并未理解该证明证明的是一个蕴含。更确切地说，他们没有意识到，该证明是通过将目标命题的条件假设化而展开的。

第一部分阐述我们的理论框架。该框架强调，从教学角度看，有必要将证明中每个句子在演绎步骤中的功能（操作地位）与其相对于数学理论的位置（理论地位）区分开来。第二部分首先对 Miyazaki 等人（2017）关于接受循环推理所提出的命题进行批判性分析。我们认为，这种接受源于无法将证明中重述目标命题条件的句子解释为假设。最后，第三部分通过一项案例研究阐释这一解释：分析由三名学生组成的小组在一位实习教师陪同下，作为循环论证验证者时所提出的一系列论证。

理论基础

Mejia-Ramos 等（2012）在其证明理解模型中区分了局部成分和整体成分。整体成分体现了运用理解策略的能力：概述证明；提取核心思想……局部成分则对应于对词语、符号、句子以及句子在假设演绎运作中所起作用的理解。本研究关于证明入门的背景促使我们只考察局部成分；我们旨在识别学生赋予证明中各个句子的、与假设演绎组织相关的功能。

在发展其旨在进行证明理解评估的框架时，Miyazaki 等人（2017）强调，他们所构建的工具旨在将证明理解建模为一种“结构性对象”，并将其界定为“通过演绎推理将单称命题与全称命题结合起来的关系网络。”（Miyazaki 等人，2017年，第226页）。我们也采取这一观点。单称命题在逻辑上对应于未量化的、含自由变量的命题，例如“我们将研究三角形 ABC，它在 A 点为等腰三角形。”，或“因此，角 ABO 和角 ACO 相等。” Miyazaki 等人所提到的全称命题，是指属于公认或已证明的性质库中的性质，学生依靠这些性质进行证明。我们将这一性质库称为理论。需要指出的是，从谓词逻辑的角度来看，理论包含全称量化命题，也包含存在量化命题。然而，在我们的研究背景下，构成常规证明的理论命题几乎全都是全称命题。这些命题与前提相衔接

以及结论，共同构成我们沿用 Duval（1998）的称谓所说的三元推理步。从谓词逻辑的角度来看，三元推理步由两条推理规则构成：全称实例化（将一个全称蕴含实例化为一个特称蕴含）和肯定前件式（将特称前提与一个特称蕴含相结合，从而得到一个特称结论）。

除了利用特称命题与全称命题之间的这一区分，在局部层面建模证明理解之外，我们还提出，证明中的每个句子都可以从两个方面加以解释：一方面，根据其在三元推理步中的作用；另一方面，根据其相对于理论的位置。Duval（1998）确立了一套有用的词汇，用于根据证明中的命题在三元推理步中的作用，也就是其 操作地位（Duval，1998），对它们进行称谓。一个句子可以作为某个推理步的 前提，即某个全称性质的应用条件；也可以作为 第三陈述，即连接前提与结论的蕴含；还可以是三元推理步的 结论。 为了理解一个证明，读者必须根据每个句子的操作地位来解释它。

然而，这还不足以建模证明理解。读者可能识别出三元推理步中各句子的操作地位，却未必理解某个前提之所以可用，是因为它是假设为真的命题；某个第三陈述之所以成立，是因为它是属于该理论的全称量化蕴含命题；或者某个三元推理步的结论之所以能够再次用作前提，是因为它是通过演绎得到的真命题。因此，我们认为，证明理解模型必须明确区分每个句子的两种地位：操作地位和理论地位。

句子的 理论地位 表明该句子相对于理论所处的位置。Duval（1998）仅提及了以下几种理论地位：定义、公理、性质和猜想。公理的理论地位表明，该量化命题的真由一个假设所保证；而性质的理论地位表明，该量化命题的真由一个证明所保证。至于猜想的理论地位，则表明该命题仅仅是可能纳入理论的候选命题。据我们所知，Duval 并未为证明中出现的单称命题赋予理论地位。在下一段中，我们将介绍如何扩展理论地位这一概念的含义，使其适用于单称命题。

不同于理论中的量化陈述在整个理论范围内都为真，证明中的单称命题只在其所属证明的范围内为真。它们的真值在证明开始时通过将其中一个命题假设化而被激活，并在证明结束时通过引入蕴含而被取消；该蕴含构成目标命题的实例化形式。因此，单称命题只是暂时加入理论之中，仅在证明进行期间有效。此外，它们的真值可以通过两种方式赋予：一是这些命题由假设而真，这意味着作者或读者在证明开始时实施了如下认知操作：假设目标命题的条件；二是这些命题由演绎而真，这意味着它们是证明内部某个演绎步骤的结论。真值的赋予

因此遵循一定的假设—演绎时间顺序。事实上，从证明开始时进行假设化起，证明中的所有单称命题都为真，即使它们尚未被演绎出来。然而，由演绎而真的命题只有在已经成为某个演绎步骤的结论之后，才能被调动使用。这种演绎出的与真的之间的区别具有教学启示：有些学生认为，某些命题凭借其真值即可被使用，即使对它们的演绎要到之后才发生。我们将在后文说明，对于所有学生而言，在进行证明时遵守这种演绎顺序并非不言自明。总之，我们将单称命题的理论地位定义为这些单称命题真值的赋予来源。这一界定在Duval列出的理论地位清单中增加了两个要素：由假设而真的命题和由演绎而真的命题。

本文聚焦于理解证明中与目标命题建立联系的各个命题的理论地位。Selden & Selden（1995）将这些句子称为证明框架（证明框架）：

> 我们所说的证明框架，是指证明的“顶层”逻辑结构的一种表示。它不依赖于对相关数学概念的详细了解，但足够丰富，能够重构所证明的命题，或与其等价的命题。（Selden & Selden，1995年，第129页）

所考察的证明框架由以下两个句子构成：

1	We are going to work on triangle ABC, which is isosceles at A.
8	So angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{ACO}$ are equal.

图2：证明框架

此外需要指出的是，读者可以理解假设为真的命题（证明框架中的1re 句子）或通过演绎得出的真命题（证明框架中的2e 句子）的理论地位，却不一定理解证明框架中的句子分别是目标命题的条件和结论的具体实例。本文不探讨对这种实例化的理解，而是除了关注理论地位之外，也考察读者是否将证明框架中的两个句子理解为对目标命题的条件和结论的复述—改写。以下列出本文关注的证明框架的四种预期解释（表1）。

表1：证明框架中各句子的预期解释

第一句话	假设为真的命题
	对目标陈述条件的重述与修改
第二句话	通过演绎得出的真命题
	对目标陈述结论的重述与修改

循环论证验证任务分析

本部分回答以下问题：为什么要通过循环证明验证活动，记录学生对测验预期解释（参见表1）的理解情况?

我们采用 Selden & Selden（1995年，第127页）对“验证”一词的定义：

> “我们用‘验证’一词来描述这样一个过程：个人通过这一过程判断证明是否正确，以及它是否确实证明了自己声称要证明的特定定理。”

根据这一定义，验证一项证明不仅要检查它本身是否正确，还要检查它是否确实证明了目标命题。正如 Selden & Selden 所定义的，验证过程针对的是目标命题与证明这一组合，而不是脱离目标命题的证明。在我们的例子中，目标命题是一个蕴含，这意味着需要检查两点：一方面，目标命题的条件是否确实以假设的形式出现在证明中，以及目标命题的结论是否确实对应于证明末尾推导出的命题；另一方面，不能假设与目标命题的条件不同的其他命题。我们的证明满足第一项条件，却不符合第二项，因为它假设了一个与目标命题的条件不符的命题。

据我们所知，只有一篇文章从教学视角探讨了循环推理。Miyazaki 等人（2017）为了说明在证明理解模型中引入全称实例化逻辑规则的重要性，分析了一段课堂片段：师生围绕一名学生针对以下任务提出的循环论证展开了交流（图3）：

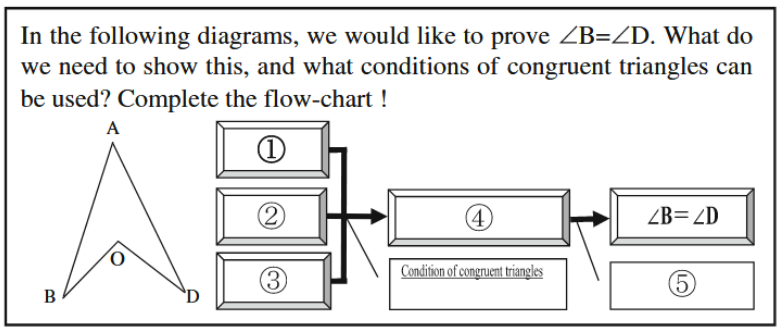


图3：Miyazaki 等人（2017）的任务副本

这道待完成的证明以演绎图的形式呈现。其设计如下：粗边框矩形用于填写单称命题，而细边框矩形则用于填写理论中的量化性质。请注意，这项任务不包含目标命题。学生必须仅凭对所给图形的认识，选出初始的单称命题。因此，启动证明的这些单称命题，并非通过对目标命题蕴含关系中的条件进行假设化这一认知操作而得出的。

通过这项任务，Miyazaki 等人（2017）揭示了以下教学现象：他们实验中的一名学生掌握了全称实例化。作者依据以下标准作出这一判断：她理解三元推理步依托的是全称量化性质，而不是该性质的某个实例化形式。然而，这名学生建议将证明结论（角 B = 角 D）填入演绎图入口处的一个矩形中——该矩形专用于填写假设，即第一个演绎步骤的前提。尽管同伴和教师提出异议，她仍坚持这一选择。而这名学生此前已成功完成过类似任务，唯一的区别在于，那些证明只包含一个三元推理步，而非两个。作者据此观察得出结论：学生之所以难以接受逻辑循环，是因为对肯定前件式，理解不足；当连续两次应用这一规则时，这种不足便会显现出来。

我们对这一课堂片段的解读并不相同。首先，原因在于数理逻辑。Miyazaki 等人（2017）认为，在他们的例子中，脱离目标命题的证明是无效的。更确切地说，他们认为每个演绎步骤都有效，但将这两个步骤组合起来则无效。

> 单独考察这些部分时，这并没有问题；但要完成证明，这两个部分[……] 应通过假言三段论[……] 连接起来。然而，在学生A的例子中，这样做是不可能的，因为待得出结论的命题被用作了假设，也就是说，这里存在循环推理。（Miyazaki 等人，2017年，第236页）

我们认为这种解读不正确。将两个演绎步骤联系起来的，是第一个肯定前件式的结论——单称命题——的理论地位。该命题具有通过演绎得出的真命题这一理论地位，因此可以将这个命题用作第二个肯定前件式的前提。尽管存在循环推理，学生提出的证明并非无效。事实上，该证明中运用的普遍性质确实是该理论的性质，而这些单称命题也确实可以使用，因为它们具有假设为真的命题或通过演绎得出的真命题的理论地位。因此，这一循环推理是有效的，并将下列命题判定为真：“如果角B和角C相等，并且满足其他条件，那么角B和角C相等。”这种以重言式为基础的有效推理[2], 并无数学意义。

如果独立于目标命题来看，证明中的循环性并不会使其无效。要判定循环推理无效，必须知道目标命题，并证明该命题并非证明所证明的内容。在我们的证明中，循环推理证明了如下蕴含：“如果一个三角形是等腰三角形，且它的两个底角相等，那么它的两个底角相等。”我们任务中的证明并未脱离其目标命题，因此按照 Selden & Selden 的定义，它是无效的，因为它没有证明目标命题。图2中的证明框架确实对应于该命题

[2] 重言式，也就是说，无论基本命题 A 和 B 的真值如何，蕴含关系（$A \cap B \rightarrow B$）都为真。

目标命题，但“角 ABO 等于角 ACO”这一命题作为假设悄然出现在证明框架中，因此证明无效。

因此，反驳循环推理的关键数学论证如下：三元第一步中的前提角 *ABO* 等于角 *ACO*被当作由假设而真的命题来使用，然而，一方面，它并非推导所得；另一方面，它也不能被假设，因为它并不是目标命题的条件的一种实例化形式。因此，循环证明验证任务是揭示学生如何理解由假设而真的命题的理论地位，以及这些命题与目标命题之间的联系的良好研究对象。

对学生围绕循环推理展开的一段交流的分析

在此，我们分析一段小组合作学习的过程：三名学生（S1、S2 和 S3）与一名实习教师就一项需要他们验证的循环证明进行了交流。下文（表2）列出了三名学生是否采纳预期解释的汇总表。*P*表示读者采纳了预期解释，*NP*表示读者未采纳预期解释。所示编码由下文的分析加以论证。

表2：与 S1 和 S2 的四种解释的关系

		S1	**S2**	**S3**
1re 句子	假设为真的命题	NP	NP	NP
	对目标命题条件的重述与修改	NP	NP	P
2de 句子	通过演绎得出的真命题	NP ?	P	P
	对目标命题结论的重述与修改	P	P	P

我们先从与证明框架第二句话相关的预期解释谈起。三名学生很快就断言，该证明确立了目标命题，因为证明结论断言等腰三角形的底角相等。S2 和 S3 理解这一命题是从证明中演绎出来的；而 S1 的情况则不太明确，他可能认为，凡是真实的内容（“因为合乎逻辑”）都可以不遵循演绎顺序而直接断言。

对证明框架中 1re 这一句的不同解读进行分析，较为棘手。我们将通过综合她们的论证来展开分析。S3 在第一分钟就察觉到了逻辑循环问题。她指出，证明结论同时也是某一步的前提，因此毫不费力地说服了 S2，令其相信该证明无效。S1 则认为该证明有效；在 40 分钟的讨论中，这名学生始终坚持己见，不为各种论证所动。论证分为四种类型，我们将通过转录这一片段录音中的部分内容加以举例。前两种论证针对推理的相关性，质疑证明结论是否重复；后两种则针对论证有效性，质疑是否有权调用相关前提。

（*a*）结论重复论证

S3：嗯，是啊。你想造一把锤子。得，呃……你有一个手柄，有一个小锤头什么的，还得有一颗钉子！而且要造一把锤子，你还需要另一把锤子来敲打。你已经有一把锤子了，再造一把也没用。

S1：那倒未必……你创造出了某种东西。

S1的反驳突显了这个类比的笨拙之处：拥有两把锤子或许很有用，尽管在证明一个命题为真时，先假定它为真确实毫无意义。在我们实验中研究的所有小组里，实习教师为了说服小组中的某些学生，苦于缺乏论证资源，最终都会像遵循判例一样，断言结论重复一遍的论证：

教师：在数学中，你不能使用自己正在证明的东西。

此外，这位教师以及参与该实验的其他实习教师，会在课程结束时鼓励各自小组的学生撰写相关回答，以此作为证明无效的论证；这些回答属于<sty le id='1'>重复论证。这一论证似乎是教师和学生偏好的论证，但并未说服 S1；事实上，她明确表示不理解：既然相关前提为真，为什么重复提及两次会是多余的。

（*b*）前提后续内容无用论证

第二个论证使她相信，结论的重复出现是没有必要的。

S3：那么，这是不是意味着你认为结论……整个证明就在这里结束了 [Gabrielle 指向相关前提]。你同意吗？对你来说。S1：嗯，是的。

这一次，论证的重点不再是证明中出现了两次结论，而是命题第一次出现之后的文本没有必要。S1 接受了这一论证，但由此得出以下结论：这个证明的问题不在于相关前提，而在于其后的文本。既然证明结论已经陈述，后面的文本便没有必要。S1 的这些异议，实验中的多位学生也曾提出，指出了前两类论证的局限：它们依据的是相关性标准，而非逻辑有效性标准。说服他人相信证明中的某些句子没有必要，并不等于说服他人相信使用某个命题在逻辑上不可能。

（*c*）缺乏理论地位的论证

S3：[Gabrielle 指出错误前提] 嗯，我们不知道……它就是结论。我们还不知道。S1：嗯，我们知道啊。S2：不，我们不知道。S3：一开始，没人说过这一点。S1：当然说过。S2：可是没人说过它是真的。S1：当然说过。

与 S1 不同，学生 S3 和 S2 不承认相关前提具有理论地位，认为“它是凭空冒出来的”；他们觉得它不成立。 S1 则认为它显而易见，“因为这符合逻辑”。对我们实验中其他情境的分析表明，S1 已经明白在演绎几何中不应依赖对图形的直观感知或测量；但另一方面，她把等腰三角形、边相等和角相等这几个命题视为一个整体，认为其中一项必然与其他项相伴。Tanguay（2005）将这一教学现象称为真值的显著性。我们的一个假设是，这种将边相等与角相等视为一体的观念，使 S1 无法设想其中一项可以 按照某种演绎顺序由另一项推导出来。这也意味着她无法区分哪些命题可以作为前提，哪些则不可以。因此，S1 认为这个前提是合理的，因为它确实是 一个等腰三角形。我们不能由此断定，S1 不理解假设为真的命题的理论地位，或者她不明白证明框架的第一句话与 目标命题的条件之间的联系。 她对接下来论证的反驳，将使我们得出结论。

（*d*）根据理论地位比较前提的论证

为了让 S1 相信相关前提没有存在的理由，S3 提议逐句分析证明的开头部分，为前两个前提说明其存在的理由，并通过对比表明第三个前提没有存在的理由。

> S1：看：“我们将在以 A 为顶点的等腰三角形中进行研究。” S3：这 是真的，这是三角形 ABC，A 点是两条边的交点。我们意见一致。 S1：三角形 ABC 在 A 点是等腰的。这里，我们已经有了三角形。S3：是的，确实，第一句话已经成立了。你可以在这句话旁边打个小 [勾], ，没问题。 [……] S1：是啊，没错，然后他们在这里写了，我们的那个东西 [Jeanne 指着相关前提] 已经写好了。 S3：不，这里我们还缺少这条信息——到底是什么给了我们这条信息，说这个角等于那个角？ 没人…… S1：确实，你看： ABO 等于 ACO，这是真的。

我们在此不讨论前提“角 BAO = 角 CAO”，因为这需要展开长篇论述。本文只比较等边这一前提与错误前提。S3、S2 和 S1 毫无争议地接受了等边这一前提，理由是三角形为等腰三角形。相反，S3 和 S2 从未明确说明第一句话三角形 *ABC* 在 *A* 点等腰的理论地位，即它究竟是假设，还是对目标命题的重述—修改。此外，S1 还强调，如果可以断言这个命题，就没有理由不同时断言错误前提；这证明它并未建立目标命题的条件与证明框架的第一句话之间的联系。

从其他情境中提取的数据表明，S3 理解有必要对目标命题的条件进行重新表述。相反，尽管 S2 从讨论一开始就认为相关前提不合法，因为“没有任何东西说明它是真的”，但他似乎没有考虑证明框架的第一句话与目标命题的条件之间的联系。他也没有解释假设为真的命题的理论地位，

正如以下线索所提示的：小组活动结束时，S2 为了修正证明，提议将“$\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$”替换为“我认为 ABO 等于 ACO”。这一提议表明，对 S2 而言，问题不在于该命题在证明中的位置，而在于断言它时所表现出的确定性。因此，他试图通过对其真值进行模态化处理，使之能够被调动使用。

结论

本文指出了我们实验中的一组学生所遇到的一种普遍困难。尽管一些学生能够将目标命题的结论与证明框架的最后一句联系起来，但他们一方面无法区分可调用前提与其他前提，另一方面也无法（哪怕表达得不够准确）说出如何将目标命题的条件假设化。学生们围绕循环证明验证活动展开的讨论，是揭示这一教学现象的重要契机。该现象提示我们，应探讨如何开展一项探索性研究，研究可以如何教授通过假设推导的命题的理论地位，以及这类命题与目标命题之间建立的联系。

参考文献

Duval, R.（1998）。写作与理解：为什么让学生撰写证明文本？雷恩数学与计算机科学出版物，*S4*，79-98。Mejía Ramos, J., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A.（2012）。本科数学中的证明理解评估模型。数学教育研究，*79*。https://doi.org/10.1007/s10649-011-9349-7 Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K.（2017）。学生对演绎证明结构的理解。数学教育研究，*94*(2)，223-239。https://doi.org/10.1007/s10649- 016-9720-9 Selden, J., & Selden, A.（1995）。剖析数学命题的逻辑。数学教育研究，*29*(2)，123-151。https://doi.org/10.1007/BF01274210 Tanguay, D.（2005）。关于证明中演绎结构学习的一项实验。雷恩大学数学教学法第*4*届研讨会论文集克里特岛，*2*，57-75。Yang, K.-L., & Lin, F.-L.（2008）。几何证明阅读理解模型。数学教育研究，*67*(1)，59-76。https://doi.org/10.1007/s10649-007-9080-6