arXiv:2601.14873v1 [math.OA] 21 Jan 2026

# $C^*$代数中的序同构

YOUSSEF EL KHATIRI

Abstract. 我们完整地描述了$C^*$代数自伴部分之间的序同构。此外，我们还刻画了 $AW^*$代数中一般算子区间之间的此类同构。为此，我们使用了 Jordan $^*$-同构以及$AW^*$代数正则环中的闭算子。本文将冯·诺伊曼代数上的先前结果加以推广。

## 1. Introduction

若映射 $\Phi\colon (\mathcal{F},\ \leq_{\mathcal{F}}) \to (\mathcal{G},\ \leq_{\mathcal{G}})$定义在两个偏序集之间，则称其为序同构，当且仅当它是一个双射，且正向和反向都保持序关系，即

$$a \leq_{\mathcal{F}} b \iff \Phi(a) \leq_{\mathcal{G}} \Phi(b), \qquad a, b \in \mathcal{F}.$$

许多作者对序同构进行了深入研究。例如，Connes 对非交换 $L^2$空间之间的线性序同构进行了分类；参见 [10]。此外，Arendt 和 De Canni`ere 研究了傅里叶代数中的这类同构，并证明这类同构能够刻画其底层的局部紧群；参见 [4]。本文出于若干原因，着重研究 $C^*$代数中的这类同构。 $C^*$代数为描述量子力学表述所依据的非交换结构提供了严谨的数学框架。其核心思想基于 Gelfand–Naimark 定理，该定理表明，每个 $C^*$代数都可以表示为希尔伯特空间上有界算子构成的代数。在这一框架下，量子系统的可观测量对应于 $C^*$代数的自伴元，而状态则由该代数上的正线性泛函给出；例如参见 [8]。此外，对 $C^*$代数中的算子区间之间的序同构进行分类，仍然是保持子理论中一个极具挑战性的问题。

2020 数学学科分类。主要分类 47B49；次要分类 46L51、46L05。关键词与短语。$C^*$代数、 $AW^*$代数、单调完备 $C^*$代数、序同构、保持子问题。

关于$C^*$代数中序同构的基础性成果之一归功于 Kadison。在 [16] 和 [17], 中，他对 $C^*$代数之间的线性等距映射进行了分类。我们注意到，这些映射与序同构之间存在密切联系。值得注意的是，经过简单变换，任何等距映射都可成为线性序同构。这种联系也体现在两篇论文的主要结果中，可概括如下：

**定理1.1.** （*Kadison*） $C^*$-代数自伴部分之间的任意保单位线性序同构，都唯一地延拓为相应 $C^*$-代数之间的 *Jordan* $^*$-同构。

很自然会想知道，若不假设线性，是否也能用 Jordan $^*$-同构来描述这些同构？如果不能，这些同构具有什么形式?

从 Kadison 定理中去掉线性假设后，对一般 $C^*$-代数上的序同构进行研究便变得更具挑战性，需要发展一种新方法。后续一些探讨不带线性假设的序同构的论文清楚地展现了这一点。这些论文聚焦于具有丰富结构性质的特定 $C^*$-代数，例如交换代数、具有极小投影的代数，以及呈现空间性质的代数。

对于交换情形， [11], Cabello S´anchez 对交换 $C^*$代数自伴部分之间的所有序同构给出了完整描述。随后，Ehsani 对这些 $C^*$代数的效应代数之间的所有序同构进行了完整刻画；见 [12]。这些例子只是文献中若干相关结果的代表。对于非交换情形，Moln´ár 刻画了希尔伯特空间上有界算子全代数的自伴部分之间的序自同构；见 [21]。沿着这一思路，Semrl 刻画了 [24, 25]中所有算子区间之间的序同构。随后，Mori 在 [22] 中完整描述了一般冯·诺伊曼代数中算子区间之间的序同构。这些结果推广了 Moln´ár 和 Semrl 关于 I 型因子的若干早期研究。Abdelali 和 El Khatiri 将 Moln´ár 和 Semrl 的研究平行地推广到紧空间上的连续算子值函数代数；见 [2]。

这引发了人们对任意 $C^*$-代数之间算子区间序同构整体结构的极大兴趣。Mori 在 [22, 第 5]节提出了以下问题。

**问题 1.2**。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $C^*$-代数。假设 $\Phi$ 是它们的自伴部分之间的序同构。在什么条件下 $\Phi$必须是仿射映射?

这个问题自然产生，因为在大多数冯·诺伊曼代数中，确切地说，在没有 I 型$_1$ 直和项的那些代数中，相应的同构都是线性的。本文旨在完整描述这类同构。我们的策略是先确定一类称为 $AW^*$代数的 $C^*$代数中算子区间之间的序同构形式。

若 $\mathcal{A}$ $C^*$代数满足以下条件，则称其为 $AW^*$代数：对于每个非空子集$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$，都存在一个投影 $p \in \mathcal{A}$ 使得

$$\{a \in \mathcal{A} : ba = 0, \text{ for all } b \in \mathcal{F}\} = \{pa : \ a \in \mathcal{A}\}.$$

$AW^*$代数的概念源于冯·诺伊曼对算子环的开创性研究，这类算子环如今称为冯·诺伊曼代数。为提取该理论纯粹的代数核心，Kaplansky 将 $AW^*$代数的概念表述为一种抽象推广；参见 [18]。每个冯·诺伊曼代数都是 $AW^*$代数，但反之并不成立。一个经典例子是这样的 $AW^*$代数：取实数域 $\mathbb{R}$上所有有界复值博雷尔可测函数组成的代数，再对其函数 $f$ 的理想取商，其中这些函数的支集

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq 0\}$$

在 $\mathbb{R}$ 中是稀疏的；见 [23]。尽管 $AW^*$-代数的理论仍有许多未解问题，但近年来已取得了重大进展。有关这些代数的更多详情，请参阅[5, 23]。

为处理不含 I 型$_2$直和项的 $AW^*$-代数之效应代数这一情形，我们主要依赖 Dye定理中关于正交同构的结果；参见 [15, 定理 4.3]。与保持问题中的通常做法一样，I 型$_2$ 代数需要特殊处理；例如参见 [1, 13, 22]。在此背景下，我们采用了 [2], 中的结果，该结果刻画了由紧豪斯多夫空间上的连续算子值函数构成的 $C^*$-代数的效应代数之间的序同构。为了完整描述$AW^*$-代数中效应代数之间的所有序同构，有必要采用更大的结构，即可测算子环；参见 [5, 6, 7]。对于算子区间的其余情形，我们给出的证明是自成一体的，不依赖更大的理论框架。因此，尽管我们的方法与.....的方法在某些方面相似，

[22], 但此处采用的整体论证和技术则有很大不同。

在研究了 $AW^*$-代数的自伴部分之间的所有序同构之后，我们转而研究 $C^*$-代数的一般情形。为描述这些同构，我们采用的方法是将问题从任意 $C^*$-代数约化到单调完备 $C^*$-代数的情形。具体而言，我们将 $C^*$-代数的自伴部分之间的序同构延拓为其正则单调完备化的自伴部分之间的序同构。所使用的工具包括 Wright 关于带有序单位的阿基米德偏序向量空间的 Dedekind 完备化的定理，以及 Hamana 关于 $C^*$-代数的正则单调完备化的定理；见 [14, 26]。

本文其余部分的结构如下。第 2 节将介绍预备结果。第 3 节将陈述我们的主要结果。众所周知，对算子区间之间的序同构进行分类的基石之一，是确定效应代数之间序同构的形式。因此，第 4 节首先描述 $AW^*$-代数的效应代数之间的序同构，作为分析 $AW^*$-代数中算子区间的第一步。在第 5 节，我们完整描述其余类型的算子区间之间的序同构。第 6 节将问题 1.2 约化到单调完备 $C^*$-代数的情形。最后，在第 7 节，我们给出若干评论，以说明效应代数之间序同构描述的非唯一性。本文最后提出两个开放问题，为未来研究指明了颇具前景的方向。

## 2. Preliminaries

本文中，假设每个 $C^*$-代数 $\mathcal{A}$ 都是含单位元 1 的，并将其范数记为 $\|\cdot\|$。$\mathcal{A}$的自伴部分记为 $\mathcal{A}^{sa}$，构成一个实巴拿赫空间，并配备 Jordan 乘积

$$a \circ b = \tfrac{1}{2}(ab + ba), \qquad a, b \in \mathcal{A},$$

它构成一个 Jordan 代数。 $\mathcal{A}$的正锥记为 $\mathcal{A}^+$，定义为 $\{a^2 : a \in \mathcal{A}^{sa}\}$。此锥在 Jordan 代数 $\mathcal{A}^{sa}$上诱导出自然偏序。具体而言，对于两个自伴元 $a, b \in \mathcal{A}^{sa}$，若 $b - a \in \mathcal{A}^+$，则称 $a \le b$。 $\mathcal{A}$中所有正可逆元的集合记为 $\mathcal{A}^{++}$。若 $b - a \in \mathcal{A}^{++}$，则记作 $a < b$。我们定义算子区间 $[a, b]_{\mathcal{A}}$:
$= \{ c \in \mathcal{A}^{sa} : a \le c \le b \}$。特别地，$\mathcal{A}$的效应代数记为 $\mathcal{A}^1$，定义为 $[0, 1]_{\mathcal{A}}$。

我们还将使用以下记号。

- $\mathcal{P}(\mathcal{A}) := \{p \in \mathcal{A} : \ p^* = p = p^2\}$ 以及 $p^\perp = 1 - p$，对所有 $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$。
- 对于 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, $p\mathcal{F} := \{pa : a \in \mathcal{F}\}$ 和 $\mathcal{F}p := \{ap : a \in \mathcal{F}\}$。

• 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，$\mathrm{M}_n(\mathcal{A})$ 表示所有 $n \times n$ 矩阵构成的代数，其元素取自$\mathcal{A}$。

我们用符号 $\sim$表示 Murray-von Neumann 等价。具体而言，对于 $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$，当存在偏等距 $v \in \mathcal{A}$使得 $vv^* = p$ 且 $v^*v = q$时，我们记作 $p \sim q$。此外，对于某个 $q' \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$，若 $q' \leq q$，则记作 $p \preceq q$，其中 $p \sim q'$。

设 $\mathcal{I}$是 $\mathcal{A}$的子集。对于紧豪斯多夫空间 $\mathcal{X}$，用 $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{I})$表示所有从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{I}$值连续函数的集合。为简洁起见，我们将用$\mathcal{C}(\mathcal{X})$代替 $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$。于是 $\mathcal{C}\big(\mathcal{X}, [0,1]\big) = \mathcal{C}(\mathcal{X})^1$, $\mathcal{C}\big(\mathcal{X}, [0,\infty)\big) = \mathcal{C}(\mathcal{X})^+$且 $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(\mathcal{X})^{sa}$。

设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间，我们用 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$表示 $\mathcal{H}$上所有有界线性算子的集合。

回顾一下，两个 $C^*$-代数之间的 Jordan $^*$-同构 $J\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个保持伴随运算和 Jordan 乘积的线性双射，即

$$J(a^*) = J(a)^* \quad \text{and} \quad J(a \circ b) = J(a) \circ J(b), \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

因此，任意此类映射 $J$ 在 $\mathcal{A}^{sa}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 上的限制，关于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$的自然序，都是从 $\mathcal{F}$ 到$J(\mathcal{F})$的序同构。

**2.1. 中的算子区间-代数**。设 $\mathcal{A}$ 是一个 $C^*$-代数。若子集$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{F} = \mathcal{A}^{sa}$，或存在一个 $a \in \mathcal{A}^{sa}$使得 $\mathcal{F}$ 是下列集合之一，则称其为算子区间：

$$\{c \in \mathcal{A}^{sa} : c \geq a\},$$
$$\{c \in \mathcal{A}^{sa} : c \leq a\},$$
$$\{c \in \mathcal{A}^{sa} : a < c\},$$
$$\{c \in \mathcal{A}^{sa} : c < a\},$$

或存在 $a,\ b \in \mathcal{A}^{sa}$，满足 $a < b$，使得 $\mathcal{F} = [a, b]_{\mathcal{A}}$，或者 $\mathcal{F}$是下列集合之一：

$$\{c \in \mathcal{A}^{sa} : a \leq c < b\},$$
$$\{c \in \mathcal{A}^{sa} : a < c \leq b\},$$
$$\{c \in \mathcal{A}^{sa} : a < c < b\}.$$

若存在一个双射 $\Phi\colon (\mathcal{F}, \leq_{\mathcal{F}}) \to (\mathcal{G}, \leq_{\mathcal{G}})$，且它在两个方向上都反转序关系，即称两个偏序集 $(\mathcal{F}, \leq_{\mathcal{F}})$ 和 $(\mathcal{G}, \leq_{\mathcal{G}})$ 序反同构，

$$a \leq_{\mathcal{F}} b \iff \Phi(b) \leq_{\mathcal{G}} \Phi(a), \qquad a, b \in \mathcal{F}.$$

众所周知，刻画算子区间之间序同构的一般形式这一问题，可以归结为特殊情形。

具体而言，通过简单变换，我们可以验证，这些区间中的每一个都与以下子集之一序同构或反同构：

$$\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^+, \mathcal{A}^{++} \text{ and } \mathcal{A}^{sa}.$$

证明见 [25]，其中证明了希尔伯特空间上所有有界算子构成的$C^*$代数的相应结果。对于一般的 $C^*$代数，同样的证明在此也成立。因此，要得到算子区间之间序同构的一般形式，只需考察上述形式的集合之间的序同构。若 $\mathcal{A}$ 是交换的，则容易看出 $\mathcal{A}^{sa}$ 与 $\mathcal{A}^{++}$ 序同构。然而，当 $\mathcal{A}$ 是非交换的时代，这一点并不成立，后文将对此进行讨论。在缺乏交换性的情况下，无法进一步减少需要研究的区间数量。这是因为这些区间彼此之间均不存在序同构。

**2.2. 正则单调完备化 $C^*$代数。**$C^*$代数 $\mathcal{A}$ 的扩张是一个二元组（$\mathcal{B}$, $J$），其中 $\mathcal{B}$ 是一个 $C^*$代数，且 $J\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ 是一个保单位元的 $^*$单同态。

在所有 $\mathcal{A}$的扩张构成的集合上，我们可以定义如下等价关系 $\sim$: ($\mathcal{B}$, $J$) $\sim$ ($\mathcal{C}$, $J'$)，当且仅当存在一个保单位的 $^*$-同构 $J''\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$，使得 $J'' \circ J = J'$。

我们将 $\mathcal{A}$ 与其像 $J(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$ 视为相同，并将($\mathcal{B}$, $J$)简写为 $\mathcal{B}$。如果对于每个元素 $b \in \mathcal{B}^{sa}$, $b$ 都是集合 $\{a \in \mathcal{A}^{sa} : a \leq b\}$在 $\mathcal{B}^{sa}$ 中的最小上界，则称 $\mathcal{A}$ 的扩张 $\mathcal{B}$ 是正则的。目前，我们满足于采用正则性的这一定义；第 4 节将对这一概念作更深入的论述。

设 $\mathcal{F}$ 为一个偏序集，$\mathcal{G}$ 为其子集。若存在，我们用 $\sup_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$ 表示 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{F}$ 中的最小上界（上确界）。类似地，若存在，$\inf_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$表示最大下界（下确界）。

$\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{A}^{sa}$ 中的子集，若对 $\mathcal{F}$ 中任意有界递增（分别为递减）网 $\mathcal{G}$，其最小上界为 $\sup_{\mathcal{A}^{sa}} \mathcal{G}$（分别为最大下界 $\inf_{\mathcal{A}^{sa}} \mathcal{G}$），则 $\sup_{\mathcal{A}^{sa}} \mathcal{G}$（分别为 $\inf_{\mathcal{A}^{sa}} \mathcal{G}$）属于 $\mathcal{F}$，称为在 $\mathcal{A}^{sa}$ 中单调闭。$\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{A}^{sa}$ 中的单调闭包，是所有包含 $\mathcal{F}$的 $\mathcal{A}^{sa}$的单调闭子集的交集。

在 [14, 定理 3.1], 中，Hamana 证明了任意 $C^*$-代数 $\mathcal{A}$都存在一个正则扩张$\mathcal{A}$，其中 $\overline{\mathcal{A}}$ 是一个单调完备 $C^*$-代数，满足以下性质：

(i) $\overline{\mathcal{A}^{sa}}$ 是 $\mathcal{A}^{sa}$ 在 $\overline{\mathcal{A}}^{sa}$中的单调闭包。

(ii) 对于每个 $a \in \overline{\mathcal{A}}^{sa}$，我们有 $a = \sup_{\overline{\mathcal{A}}^{sa}} \{c \in \mathcal{A}^{sa} : \ c \leq a\}$。

(iii) 若 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^{sa}$ 使得 $\sup_{\mathcal{A}^{sa}} \mathcal{F} = a$。那么， $a = \sup_{\overline{\mathcal{A}}^{sa}} \mathcal{F}$。

他还证明了代数 $\mathcal{A}$ 在等价关系 $\overline{\sim}$ 下是唯一的，并称其为 $\mathcal{A}$ 的正则单调完备化。在本文中， $\mathcal{A}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的一个固定正则单调完备化。虽然这一扩张并不唯一，但 $\mathcal{A}$ 的所有正则单调完备化彼此 $^*$-同构，特别地，它们彼此 Jordan $^*$-同构。由于这些同构保持 $C^*$-代数的序结构，我们可以任选其中一个扩张，而不会产生任何冲突。

2.3. **有限 $AW^*$-代数的正则环**。众所周知，冯·诺伊曼代数的经典类型理论可以扩展到 $AW^*$-代数；参见 [5], [23]。在本文中，对于涉及 $AW^*$-代数的所有问题，我们遵循 Berberian [5] 的术语。如果 $\mathcal{A}$ 是一个 $AW^*$-代数，则对每个严格正整数 $n$ ，存在唯一的中心投影 $p_{\mathcal{A}}(n)$，使得 $p_{\mathcal{A}}(n)\mathcal{A}$: $= \mathcal{A}_n$ 或为 0，或为 I 型 $_n$ ；并且 $p_{\mathcal{A}}(n)^{\perp}\mathcal{A}$ ： $= \mathcal{A}_{-n}$ 不具有 I 型 $_n$ 直和项。更多信息请参见 [5, 定理 3，第 94 页；定理 4，第 116] 页。

设 $\mathcal{A}$ 为一个 $AW^*$代数，对于任意 $a \in \mathcal{A}^{sa}$，存在满足条件的最小投影 RP($a$) $\in \mathcal{P}(\mathcal{A})$:

$$\mathrm{RP}(a)a = a\mathrm{RP}(a) = a.$$

设 $\mathcal{A}$ 为一个有限 $AW^*$代数。带闭包算子是一对序列（$a_n$， $p_n$），其中（$a_n$） $\subseteq \mathcal{A}$ 且（$p_n$） $\subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ 是一个递增序列，其上确界为 $_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p_n : n\} = 1$, 满足 $a_n p_m = a_m p_m$ 和 $a_n^* p_m = a_m^* p_m$，对所有 $m \leq n$ 均成立。若存在一个投影序列（$q_n$），其上确界为 $_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{q_n : n\} = 1$，使得$a_n q_n = b_n q_n$，则称两个带闭包算子（$a_n$， $p_n$）、（$b_n$， $p'_n$）等价。闭算子 $[a_n, p_n]$ 表示与（$a_n$， $p_n$）等价的所有带闭包算子所构成的等价类。

根据 [6, 定理 2.1], ，所有与 $\mathcal{A}$相伴的闭算子构成的集合 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ 是复数上的结合代数，并带有对合 $*$，相对于以下运算:

$$[a_n, p_n] + [b_n, q_n] = [a_n + b_n, \inf_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p_n, q_n\}]$$
$$\lambda[a_n, p_n] = [\lambda a_n, p_n]$$
$$[a_n, p_n]^* = [a_n^*, p_n]$$
$$[a_n, p_n][b_n, q_n] = [a_n b_n, p'_n]$$

其中，($p'_n$) 是投影的递增序列，且 $\sup_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p'_n : n\}$ =1。映射 $a \mapsto [a, 1]$ ( $a \in \mathcal{A}$) 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ 的 $*$-同构，而 $[1, 1]$ 是 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ 的单位元。

为简化记号，我们将每个元素 $a \in \mathcal{A}$ 与 $[a, 1] \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$等同。注意， $\mathcal{R}(\mathcal{A})$的有界元素并不比 $\mathcal{A}$多，也就是说，若

$[a_n, p_n] \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$使得数列 $(\|a_n\|)$有界，则存在 $[a_n, p_n] = [a, 1]$ $a \in \mathcal{A}$；参见 [6, 定理 5.1]。另一方面， $\mathcal{R}(\mathcal{A})$有更多可逆元素。事实上，若 $a \in \mathcal{A}^{sa}$ 且 $\mathrm{RP}(a) = 1$，则 $a$ 在$\mathcal{R}(\mathcal{A})$中可逆，但 $a$ 在 $\mathcal{A}$中未必可逆，详情请参见 [6, 推论 7.5]。我们用 $a^{-1}$表示 $a$ 在 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$中的逆元。

下面的引理给出了 $\mathcal{A}^1$ 中可逆元素的序刻画，其中 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$。

**引理 2.1.** 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限的 $AW^*$-代数。假设 $a$、$b \in \mathcal{A}^1$ 彼此可交换。当且仅当 $a$ 不大于或等于 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 中的任何投影，且对于每个满足 $c \geq a$ 的 $c \in \mathcal{A}^1 \setminus \{a\}$，存在 $\{b, c\}$ 的一个下界 $d \in \mathcal{A}^1$，使得 $d \neq a$，元素 $b - a$ 在 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ 中是正的可逆元素。

证明。 首先，我们注意到，对于每个满足 $c \geq a$ 的 $c \in \mathcal{A}^1 \setminus \{a\}$，存在 $\{b, c\}$ 的一个下界 $d \in \mathcal{A}^1$，使得 $d \neq a$，这一条件等价于：对于每个满足 $c \geq a$ 的 $c \in \mathcal{A}^1 \setminus \{a\}$，集合 $\{b - a, c - a\}$ 在 $\mathcal{A}^1$ 中有一个非零下界。

若 $\mathrm{RP}(b - a) = 1$, $b - a$ 在 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ 中可逆。否则， $p := \mathrm{RP}(b - a)^{\perp} \in \{b - a\}''$ 是一个非零投影；参见 [5, 推论 1，第 17] 页。由于$a$ 与 $b$ 彼此交换，我们得到 $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}'$，因此$\{a, b\}'' \subseteq \{a, b\}'$，这意味着 $\{a, b\}''$是交换的。另一方面， $\{a, b\}' \subseteq \{b - a\}'$，于是 $\{b - a\}'' \subseteq \{a, b\}''$，这意味着 $p$与 $a$ 和 $b$交换。因此，

$$\inf_{\mathcal{A}^1}\{a, p\} = \inf_{\mathcal{A}^1}\{b, p\} = ap = bp.$$

记 $c = ap^{\perp} + p$。于是 $c \neq a$ 和 $c \geq a$。容易看出

$$\inf_{\mathcal{A}^1}\{b - a, c - a\} = 0.$$

这证明了充分性断言。

反过来，设 $c \in \mathcal{A}^1 \setminus \{a\}$ 且 $c \geq a$。我们可以将 $(b - a)^{-1/2}(c - a)(b - a)^{-1/2} = [d'_n, p_n]$ 写成如下形式：$(d'_n, p_n)$ 属于交换的 $AW^*$-子代数 $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ 的锥，其中 $\mathcal{A}$，且 $(d'_n)$ 是非零递增序列；见 [6, 定理 4.2]。令 $d_n = \inf_{\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})}\{1, d'_n\}$，由于 $(\|d_n\|)$ 是非零有界序列，存在非零元素 $d \in \mathcal{A}^+$ 使得 $d = [d_n, p_n]$。因此 $d \leq 1$ 且 $d \leq (b - a)^{-1/2}(c - a)(b - a)^{-1/2}$。于是， $c_0 := (b - a)^{1/2} d (b - a)^{1/2}$ 是 $\mathcal{A}^1$ 中 $\{b - a, c - a\}$ 的非零下界。□

## 3. The statement of main results

下面的定理概述了本文的一些主要结果，即定理 4.6、5.1、5.2、5.3、5.4。这些结果共同刻画了不含类型 $\mathrm{I}_1$ 直和项的 $AW^*$-代数中算子区间之间的序同构。

**定理 3.1.** 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $AW^*$-代数，且 $\mathcal{A}$ 不含类型$\mathrm{I}_1$ 直和项，则以下陈述成立。

*(1)* 设 $\Phi\colon \mathcal{A}^1 \to \mathcal{B}^1$ 是一个序同构，且 $\Phi(1/2) = 1/2$。那么，$\Phi$ 唯一地延拓为一个从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$的 ***Jordan*** $^*$-同构。*(2)* 设 $\Phi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}^+$ 是一个序同构。那么存在一个元素 $b \in \mathcal{B}^{++}$ 和一个 ***Jordan*** $^*$-同构 $J : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，使得

$$\Phi(a) = bJ(a)b, \qquad a \in \mathcal{A}^+.$$

*(3)* 设 $\Phi : \mathcal{A}^{++} \to \mathcal{B}^{++}$ 是一个序同构。那么存在一个元素 $b \in \mathcal{B}^{++}$ 和一个 ***Jordan*** $^*$-同构 $J : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，使得

$$\Phi(a) = bJ(a)b, \qquad a \in \mathcal{A}^{++}.$$

*(4)* 设 $\Phi : \mathcal{A}^{sa} \to \mathcal{B}^{sa}$ 是一个序同构。那么存在一个元素 $b \in \mathcal{B}^{++}$、一个元素 $c \in \mathcal{B}^{sa}$ 以及一个 ***Jordan*** $^*$-同构 $J : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，使得

$$\Phi(a) = bJ(a)b + c, \qquad a \in \mathcal{A}^{sa}.$$

*(5)* 算子区间 $\mathcal{A}^{sa}$ 和 $\mathcal{B}^{++}$ 不存在序同构。

注 3.2. 对于效应代数，我们实际上在定理 4.7 中给出了更一般的描述。对于有限的 $AW^*$-代数，我们利用 Jordan $^*$-同构以及 Berberian [6] 意义下正则环的闭算子，给出了完整的描述。

尽管交换情形（$\mathrm{I}_1$ 情形）下算子区间的序同构已得到广泛研究，参见例如 $[19, 20],$，但现有结果并未全面涵盖所有交换 $C^*$-代数，也未涵盖所有类型的算子区间。在下面的命题中，我们通过考察一般交换 $C^*$-代数中的每一种算子区间，弥补这一不足。

**命题 3.3.** 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是两个豪斯多夫紧空间，且 $\mathcal{I} \in\{[0,1],[0,\infty)\ \mathbb{R}\}$。假设 $\Phi\colon \mathcal{C}(\mathcal{X},\mathcal{I}) \to \mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{I})$ 是一个序同构。那么，存在一个同胚 $\mu : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 的一个稠密 $G_\delta$- 子集 $\mathcal{Y}_0$，以及一族递增同胚 $(f_y)_{y\in\mathcal{Y}_0}$，其定义在 $\mathcal{I}$ 上，使得

$$\Phi(f)(y) = f_y\big(f(\mu(y))\big), \qquad f \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\mathcal{I}), y \in \mathcal{Y}_0. \tag{3.1}$$

以下定理表明，研究 $AW^*$-代数中算子区间之间的序同构时，应将这类代数分为两个不同的等价类分别研究：交换代数，以及不含交换直和项的代数。

**定理 3.4**。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $AW^*$-代数。假设 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{B}$ 是两个算子区间。设 $\Phi : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ 是一个序同构。

那么存在唯一的一对序同构 $\Phi_1:\ p_{\mathcal{A}}(1)\mathcal{I}\to p_{\mathcal{B}}(1)\mathcal{J}$ 和 $\Phi_{-1}:\ p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}\mathcal{I}\to p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}\mathcal{J}$，使得

$$\Phi(a)=\Phi_1\left(p_{\mathcal{A}}(1)a\right)+\Phi_{-1}\left(p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}a\right),\qquad a\in\mathcal{I}.$$

注记 3.5. 由此可见，前述结果共同完整刻画了 $AW^*$-代数中除效应代数以外所有算子区间之间的序同构。

下面的定理表明，将一般 $C^*$-代数的自伴部分之间的序同构刻画问题，可归结为单调完备 $C^*$-代数的情形，进而归结为 $AW^*$-代数的情形。

**定理 3.6.** 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $C^*$-代数。假设 $\Phi$: $\mathcal{A}^{sa}\to\mathcal{B}^{sa}$ 是一个序同构。那么存在唯一的序同构 $\Phi$:$\mathcal{A}^{sa}\to\mathcal{B}^{sa}$，它扩张了 $\Phi$。

设 $\mathcal{A}$ 是一个 $C^*$-代数。容易验证，$\mathcal{A}$ 具有如下直和分解

$$\overline{\mathcal{A}}=\overline{\mathcal{A}}_1\oplus\overline{\mathcal{A}}_{-1}.$$

由于 $\overline{\mathcal{A}}_1$ 是一个交换的 $AW^*$-代数，因此存在一个斯通空间 $\mathcal{X}$，使得

$$\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{C}(\mathcal{X})\oplus\overline{\mathcal{A}}_{-1}.$$

因此，对于每个 $a\in\mathcal{A}^{sa}$，存在唯一的 $f\in\mathcal{C}(\mathcal{X})$ 和 $a'\in\mathcal{A}_{-1}$，使得

$$a=f+a'.$$

即，$f=p_{\mathcal{A}}(1)a$ 和 $a'=p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}a$。

由此我们得出任意 $C^*$-代数的自伴部分之间序同构的一般形式。

**推论 3.7**。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $C^*$-代数，$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是两个紧豪斯多夫空间，满足

$$\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{C}(\mathcal{X})\oplus\overline{\mathcal{A}}_{-1}\quad and\quad\overline{\mathcal{B}}=\mathcal{C}(\mathcal{Y})\oplus\overline{\mathcal{B}}_{-1}.$$

假设 $\Phi:\ \mathcal{A}^{sa}\to\mathcal{B}^{sa}$ 是一个序同构，且 $\Phi$: $\mathcal{A}^{sa}\to\mathcal{B}^{\underline{sa}}$ 是其由定理 *3.6* 给出的扩张。那么，对于每个 $f+a\in\mathcal{A}^{sa}$，有

$$\Phi(f+a)=\overline{\Phi}(f)+\overline{\Phi}(a).$$

此外，还存在一个同胚 $\mu:\ \mathcal{Y}\to\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$的一个稠密 $G_\delta$-子集 $\mathcal{Y}_0$、$\mathbb{R}$的一族递增同胚 $(f_y)_{y\in\mathcal{Y}_0}$、一个元素 $\underline{b}\in(\mathcal{B}_{-1})^{++}$、一个元素 $c\in\mathcal{B}_{-1}^{sa}$，以及一个 ***Jordan*** $^*$-同构

$$J:\overline{\mathcal{A}}_{-1}\to\overline{\mathcal{B}}_{-1}$$

使得

$$\Phi(f)(y) = f_y\big(f(\mu(y))\big), \qquad f \in \mathcal{C}(\mathcal{X}),\ y \in \mathcal{Y}_0,$$

*and*

$$\Phi(a) = bJ(a)b + c, \qquad a \in \overline{\mathcal{A}}_{-1}.$$

我们通过回答问题 1.2 来结束本节。

**推论 3.8**。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $C^*$-代数，且 $\Phi\colon \mathcal{A}^{sa} \to \mathcal{B}^{sa}$ 是一个序同构。若 $\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$ 的正则单调完备化没有 $I$ 型 $\mathrm{I}_1$ 直和项，则 $\Phi$ 是仿射的。

## 4. Order isomorphisms between effect algebras

本节研究 $AW^*$-代数的效应代数之间的序同构。

正交投影在研究效应代数之间的序同构时发挥着重要作用，例如参见 [2, 22, 25]。我们回顾一下，$C^*$-代数的效应代数之间的任何序同构都会保持正交投影。这一事实可以用与 [22,引理 3.1]，中相同的方法证明，因此我们略去其证明。

以下引理对于分析投影上的序至关重要。

**引理 4.1**。设 $\mathcal{A}$ 是一个 $C^*$-代数。设 $t \in [0,1]$ 和 $\alpha$ 是复数，且 $|\alpha| = \sqrt{t(1-t)}$。假设 $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $q = \begin{pmatrix} t & \alpha \\ \alpha^* & 1-t \end{pmatrix}$ 属于 $\mathrm{M}_2(\mathcal{A})$。则

$$\frac{1}{2-t}p = \inf_{\mathrm{M}_2(\mathcal{A})^1}\left\{p, \sup_{\mathrm{M}_2(\mathcal{A})^1}\{q, 1/2\}\right\}.$$

证明。为简便起见，我们假设 $\alpha = \sqrt{t(1-t)}$。我们有

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathrm{M}_2(\mathcal{A})^1}\{q, 1/2\} - \frac{1}{2-t}p &= q + 1/2q^{\perp} - \frac{1}{2-t}p \\
&= 1/2 \begin{pmatrix} \dfrac{t(1-t)}{2-t} & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & 2-t \end{pmatrix} \\
&= 1/2 \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{t(1-t)}{2-t}} & 0 \\ \sqrt{2-t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{t(1-t)}{2-t}} & 0 \\ \sqrt{2-t} & 0 \end{pmatrix}^* \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

因此，$\frac{1}{2-t}p$ 是 $\{p, \sup_{M_2(\mathcal{A})^1}\{q, 1/2\}\}$ 的下界。另一方面，对于每个被 $p$ 控制的 $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})^+$，$a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ 和 $a_{11} \in \mathcal{A}^+$。如果 $a \leq q + 1/2q^\perp$，那么

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{t(1-t)}}{2-t} & 0 \end{pmatrix}^* a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{t(1-t)}}{2-t} & 0 \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{t(1-t)}}{2-t} & 0 \end{pmatrix}^* (q + 1/2q^\perp) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{t(1-t)}}{2-t} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-t}p. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

众所周知，$AW^*$代数的所有正交投影构成一个格。以下引理受 [2, 命题 3.9] 的启发，给出了投影之间正交性的序刻画。

**引理 4.2.** 设 $\mathcal{A}$ 是一个 $AW^*$代数。两个投影 $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ 正交，当且仅当

$$\inf_{\mathcal{A}^1}\{p, 1/2\} = \inf_{\mathcal{A}^1}\{p, \sup_{\mathcal{A}^1}\{q, 1/2\}\}.$$

证明. 我们容易验证，$1/2p = \inf_{\mathcal{A}^1}\{p, 1/2\}$ 是$\{p, \sup_{\mathcal{A}^1}\{q, 1/2\}\}$的一个下界。另一方面，若 $p, q$正交，利用这样一个事实：对于 $\{p,\sup_{\mathcal{A}^1}\{q, 1/2\}\}$ 的每个下界 $a \in \mathcal{A}^1$，都有 $p \leq q^\perp$，我们得到

$$a = pap \leq p(q + 1/2q^\perp)p = 1/2pq^\perp p = 1/2p.$$

反之，将 $p$ 和 $q$ 视为 $AW^*$-子代数 $\sup_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p, q\}\mathcal{A}\sup_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p, q\}$ 的投影，则不妨设 $\sup_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p, q\} = 1$。记 $p_1 = \inf_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p, q^\perp\}$、$p_2 = \inf_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p^\perp, q\}$ 和 $p_3 = \sup_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p - p_1, q - p_2\}$。容易验证，$\inf_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p, q\} = 0$，投影 $p_i$、$i \in \{1, 2, 3\}$ 构成一个单位元分割，即 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$，并且它们与 $p$ 和 $q$ 交换。注意，$p$，$q$ 正交，当且仅当 $p_3p$，$p_3q$ 正交。投影 $p_3p$，$p_3q$ 作为 $AW^*$-代数 $p_3\mathcal{A}p_3$ 的投影处于位置 (p)，即

$$\begin{aligned} \inf_{\mathcal{P}(p_3\mathcal{A}p_3)}\{p_3p, p_3q\} &= \inf_{\mathcal{P}(p_3\mathcal{A}p_3)}\{p_3p^\perp, p_3q\} = \inf_{\mathcal{P}(p_3\mathcal{A}p_3)}\{p_3p, p_3q^\perp\} \\ &= \inf_{\mathcal{P}(p_3\mathcal{A}p_3)}\{p_3p^\perp, p_3q^\perp\} = 0. \end{aligned}$$

于是根据 [15, 命题 2.4、命题 2.5], , 存在一个 $AW^*$-子代数，其中 $p_3\mathcal{A}p_3$ 包含 $p_3p$，$p_3q$，且同构于 $\mathcal{C}(\mathcal{X},\ \mathbb{M}_2(\mathbb{C}))$，其中 $\mathcal{X}$ 是一个紧致豪斯多夫空间。此外，我们可以将 $p_3p$ 和 $p_3q$ 表示为矩阵值函数

$$(p_3p)(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad (p_3q)(x)=\begin{pmatrix}f(x) & \sqrt{f(x)(1-f(x))}\\ \sqrt{f(x)(1-f(x))} & 1-f(x)\end{pmatrix}$$

在 $\mathcal{X}$ 上，对于某个取值于 $[0,1]$ 的连续函数 $f$（定义在 $\mathcal{X}$ 上）。根据引理 **4.1**,

$$\frac{1}{2-f}p_3p\leq p_3(q+1/2q^{\perp}).$$

因此,

$$\begin{aligned}1/2p+(\frac{1}{2-f}-1/2)p_3p &= \frac{1}{2-f}p_3p+1/2(p_1+p_2)p\\ &\leq p_3(q+1/2q^{\perp})+1/2(p_1+p_2)p\\ &= p_3(q+1/2q^{\perp})+1/2p_1\\ &\leq p_3(q+1/2q^{\perp})+(q+1/2q^{\perp})(p_1+p_2)\\ &= q+1/2q^{\perp}.\end{aligned}$$

因此，根据假设，$\frac{1}{2-f}=1/2$。于是，$f=0$，这意味着 $p_3p$ 与 $p_3q$ 正交。 □

**推论 4.3**。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $AW^*$ 代数。假设 $\Phi:\ \mathcal{A}^1\to\mathcal{B}^1$ 是一个序同构，且 $\Phi(1/2)=1/2$。那么，将 $\Phi$限制在 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$上所得的映射是到 $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ 上的正交同构，即 $\Phi$ 将 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 双射到 $\mathcal{P}(\mathcal{B})$，并且对每个 $p,\ q\in\mathcal{P}(\mathcal{A})$

$$pq=0\qquad if\ and\ only\ if\qquad \Phi(p)\Phi(q)=0.$$

非空集合 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}$ 的交换子 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{A}$ 中与 $\mathcal{F}$ 的每个元素都可交换的所有元素构成的集合。若 $\mathcal{A}$ 是一个 $AW^*$ 代数且$a\in\mathcal{A}^{sa}$，则根据 [23], $\{a\}''\cap\mathcal{A}^{sa}$ 是单调闭的。此外，根据 [5], $\{a\}''$ 可识别为 $\mathcal{C}(\mathcal{X})$，其中 $\mathcal{X}$ 是某个斯通空间，即一个紧致豪斯多夫空间，且极不连通，具体而言，其每个开子集的闭包都是开集。

复数 $z$ 的模记作 $|z|$。

**引理 4.4.** 设 $\mathcal{A}$ 是一个 $AW^*$-代数，且 $a \in \mathcal{A}^1$。那么存在一个序列 $(a_n) \subset \mathcal{A}^1$，使得

$$a = \sup_{\mathcal{A}^1}\{a_n : n\};$$

并且对于每个 $n$，都存在一个有限序列 $\{p_1, p_2, ..., p_k\} \subseteq \mathcal{P}(\{a\}'')$ 的两两正交投影，以及 $\{t_1, t_2, ..., t_k\} \subset (0, 1]$，使得 $a_n = \sum t_i p_i$.$_{i=1}$

证明。只需证明，对于每个 $n$，都存在一个有限序列的两两正交投影 $\{p_1, p_2, ..., p_k\} \subseteq \mathcal{P}(\{a\}'')$，以及 $\{t_1, t_2, ..., t_k\} \subset (0, 1]$ 使得

$$0 \leq a - \sum_{i=1}^{k} t_i p_i \leq 1/n.$$

我们有 $\{a\}'' = \mathcal{C}(\mathcal{X})$，其中 $\mathcal{X}$ 是一个斯通空间。固定 $n$ 并假设$x \in \mathcal{X}$。令 $\mathcal{X}_x$ 为开集 $\{y \in \mathcal{X}$的闭包：$|a(y) - a(x)| < \frac{1}{2n}\}$。因此，$\{\mathcal{X}_x : x \in \mathcal{X}\}$ 是 $\mathcal{X}$的既开又闭覆盖。由于 $\mathcal{X}$是一个紧空间，存在一个有限族 $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subseteq \mathcal{X}$，使得$\{\mathcal{X}_{x_1}, \mathcal{X}_{x_2}, ..., \mathcal{X}_{x_k}\}$ 构成 $\mathcal{X}$的既开又闭覆盖。不失一般性，可假设 $\mathcal{X}_{x_i}$ 两两不相交。对于每个 $i \in \{1, 2, ..., k\}$，我们记 $t_i := \min\{a(y) : y \in \mathcal{X}_{x_i}\}$ 并由 $p_i$ 在 $\mathcal{X}_{x_i}$ 上的特征函数给出。于是 $0 \leq a(x) - \sum_{i=1}^{k} t_i p_i(x) \leq 1/n$，对所有 $x \in \mathcal{X}$，都有，如所需。□

与保持问题中的常见情况一样，$\mathrm{I}_2$ 情形比较特殊，与其他情形相比，需要做一些额外工作。在我们的情形中，我们在很大程度上依赖于 [2, 定理 2.4]。为回顾该定理，我们需要定义所谓的性质 $(\mathrm{K}_{\mathcal{E}})$。设 $\mathcal{X}$ 是一个紧豪斯多夫空间。若 $\mathcal{X}$ 满足性质 $(\mathrm{K}_{\mathcal{E}})$，则称其具有此性质：$\mathcal{C}(\mathcal{X}, [0, 1])$ 上的每个序自同构都是连续的，或者等价地，公式 (3.1) 对整个空间 $\mathcal{X}$ 成立。

**定理 4.5。** ***(Abdelali, El Khatiri)*** 设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，且 维数$\mathcal{H} \geq 2$，并设 $\mathcal{X}$ 是满足性质 $(\mathrm{K}_{\mathcal{E}})$ 的紧豪斯多夫空间。假设 $\Phi$ 是 $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))^1$ 上的序自同构，且满足 $\Phi(1/2) = 1/2$。那么 $\Phi$ 可唯一延拓为 $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ 上的 ***Jordan*** $^*$-同构。

作者利用性质 $(\mathrm{K}_{\mathcal{E}})$ 来保证，对于任意忠实（即其中心覆盖为 1）的阿贝尔投影 $p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H})))$，$\Phi$ 到 $\{a \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))^1$ 上的限制：$0 \leq a \leq p\}$ 是连续的，参见 [2, 第 4 节1]。因此，如果 $\mathcal{X}$ 未必满足性质 $(\mathrm{K}_{\mathcal{E}})$，而我们能够以某种方式证明，对于 $\mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H})))$中的所有忠实阿贝尔投影 $p$，$\Phi$ 到 $\{a \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))^1$ 上的限制：$0 \leq a \leq p\}$是连续的，那么通过

完全重复同样的论证，我们可以证明 $\Phi$ 唯一地延拓为 $\mathcal{C}(\mathcal{X},\ \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ 上的 Jordan $^*$-同构。

现在我们可以证明本节的主要结果之一了。不过，在此之前，先回顾一些有助于简化证明的记号。对于任意序同构 $\Phi:\ \mathcal{A}^1\ \to\ \mathcal{B}^1$，我们定义序同构 $\Phi^{\perp}:\mathcal{A}^1\to\mathcal{B}^1$ 为

$$a\mapsto 1-\Phi(1-a),\qquad a\in\mathcal{A}^1.$$

**定理 4.6.** 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $AW^*$代数。假设 $\mathcal{A}$ 没有 $I$ 型 $_1$ 直和项。设 $\Phi$: $\mathcal{A}^1\to\mathcal{B}^1$ 是一个满足 $\Phi(1/2)\ =1/2$ 的序同构。那么 $\Phi$ 可以唯一地延拓为一个从 $\mathcal{A}$到 $\mathcal{B}$的 ***Jordan*** $^*$-同构。

证明。注意，投影 $p\in\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 是中心的，当且仅当它有唯一补元，也就是说，存在唯一的投影 $p'\in\mathcal{P}(\mathcal{A})$，使得 $\inf_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p,p'\}=0$ 且 $\sup_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p,p'\}=1$；参见 $[18,$ 定理 6.6$]$。注意，任意投影 $p\in\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 是阿贝尔的，当且仅当所有投影$p'\le p$ 在 $p\mathcal{A}p$中都是中心的，也就是说，存在唯一的投影 $q'$，使得 $\sup_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p',q'\}=p$ 且 $\inf_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p',q'\}=0$。

对于每个正整数 $n$，$p_{\mathcal{A}}(n)$ 是最大的中心投影，使得存在 $n$ 个两两正交的阿贝尔投影 $p_1$、$p_2$、.....、$p_n$，它们以 $p_{\mathcal{A}}(n)$ 为公共中心覆盖；也就是说，对于每个 $i$，$p_{\mathcal{A}}(n)$ 是最小上界中心投影，使得 $p_{\mathcal{A}}(n)\ \ge p_i$，或者等价地，$p_i\sim p_j$，对所有 $i$，$j$ 均成立，参见 Proposition 1, p. 33; Remark 5, Proposition 1, p. $111\ ]$。

$$\sup_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p_1,p_2,...,p_n\}=p.$$

由于 $\Phi$ 是序同构，根据推论 4.3，它保持投影之间的正交性，因此对于所有正整数 $n$，我们得到 $\Phi(p_{\mathcal{A}}(n))\ =p_{\mathcal{B}}(n)$。

由于 $\mathcal{A}$ 没有 $\mathrm{I}_1$ 直和项，根据上述讨论，$\mathcal{B}$ 也没有 $\mathrm{I}_1$ 直和项，并且 $\Phi(p_{\mathcal{A}}(2))\ =p_{\mathcal{B}}(2)$。遵循证明 $[22,$ Lemma 3.4$]$ 中或下一节定理 3.4 的证明中所用的类似论证，我们可以证明，由 $p_{\mathcal{A}}(2)a\mapsto p_{\mathcal{B}}(2)\Phi(a)$ 和 $p_{\mathcal{A}}(2)^{\perp}a\ \mapsto\ p_{\mathcal{B}}(2)^{\perp}\Phi(a)$ 分别给出的映射 $p_{\mathcal{A}}(2)\mathcal{A}^1\to p_{\mathcal{B}}(2)\mathcal{B}^1$ 和 $p_{\mathcal{A}}(2)^{\perp}\mathcal{A}^1\to p_{\mathcal{B}}(2)^{\perp}\mathcal{B}^1$ 是序同构。因此，要证明我们的定理，只需分别处理以下两种情形：$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都没有 $\mathrm{I}_1$ 或 $\mathrm{I}_2$ 直和项；以及 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是 $\mathrm{I}_2$ 型。

我们首先考虑 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 没有 $\mathrm{I}_1$ 或 $\mathrm{I}_2$ 直和项的情形。由推论 4.3 和 $[15,$ 定理 4.3$]$，，存在一个 Jordan $^*$-同构 $J:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，使得 $\Phi(p)\ =J(p)$，对所有 $p\in\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 都成立。记$\Psi:=J^{-1}\circ\Phi:\ \mathcal{A}^1\to\mathcal{A}^1$。容易看出，$\Psi$ 是一个序自同构

with

$$\Psi(a) = a, \qquad a \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \cup \{1/2\}.$$

我们将证明 $\Psi$ 是 $\mathcal{A}^1$ 上的恒等映射。由 [18, 引理 4.12] 和 [5, 定理 4, 第 116] 页，我们可以得出存在一族两两正交投影 $\{p_i : i \in \mathcal{I}\}$，使得 $\sup_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p_i : i \in \mathcal{I}\} = 1$ 和 $p_i \preceq p_i^{\perp}$，对所有 $i \in \mathcal{I}$ 都成立。令 $p \in \{p_i : i \in \mathcal{I}\}$，则 $p \sim p'$，对于某个投影 $p' \leq p^{\perp}$。因此，我们可以将 $(p+p')\mathcal{A}(p+p')$ 识别为 $M_2(p\mathcal{A}p)$，使得

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

参见命题 1，第 98] 页。设 $t \in [1/2, 1]$。由引理 4.1，得到$tp = \inf_{\mathcal{A}^1}\{p, q + 1/2q^{\perp}\}$ 其中

$$q = 1/t \begin{pmatrix} 2t-1 & \sqrt{(2t-1)(1-t)} \\ \sqrt{(2t-1)(1-t)} & 1-t \end{pmatrix}.$$

因此，$\Psi(tp) = tp$。由于 $\Psi^{\perp}$ 和 $\Psi$ 具有相同的性质，我们得到对每个 $t \in [0, 1/2]$

$$\begin{aligned} (1-t)p &= \Psi^{\perp}((1-t)p) \\ &= 1 - \Psi\left(p^{\perp} + tp\right) \\ &= 1 - \Psi\left(\sup_{\mathcal{A}^1}\left\{p^{\perp}, tp\right\}\right) \\ &= 1 - \sup_{\mathcal{A}^1}\left\{\Psi(p^{\perp}), \Psi(tp)\right\} \\ &= p - \Psi(tp). \end{aligned}$$

因此，对所有 $t \in [0, 1]$ 和所有 $p \in \{p_i , \Psi(tp) = tp : i \in \mathcal{I}\}$。所以，对所有 $t \in [0, 1]$，有 $\Psi(t) = \Psi(\sup_{\mathcal{A}^1}\{tp_i : i \in \mathcal{I}\}) = t$，进而对所有 $t \in [0, 1]$ 及所有 $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$，有 $\Psi(tp) = tp$。

我们将用归纳法证明：对于 $\mathcal{A}$ 中构成单位元分割的任意有限族两两正交投影 $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$，以及任意系数 $0 \leq t_1 < t_2 ... < t_n \leq 1$，都有 $\Psi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i p_i$。当 $n = 1$ 时结论成立。假设结论对 $n \geq 1$ 已成立，并令$a = \Psi\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i p_i\right)$。利用归纳假设，我们有 $\sum_{i=1}^{n-1} t_i p_i \leq a \leq$ $_{n-1}$ $_{n-1}\sum t_i p_i + p_n + p_{n+1}$。根据引理 3.2], $a = \sum t_i p_i + a(p_n + p_{n+1})$。注意到$_{i=1}$ $_{i=1}$ $t_{n+1}p_{n+1} \leq a \leq t_{n+1}$。类似地，我们可推出 $ap_{n+1} = t_{n+1}p_{n+1}$。此外，$a$ 与 $p_n$ 可交换，因此可推出 $t_n p_n = \inf_{\mathcal{A}^1}\{p_n, a\} = ap_n$。因此，

$_{n+1}a = \sum t_i p_i$。由引理 4.4，我们得到 $a \leq \Psi(a)$，对所有 $a \in \mathcal{A}^1$ 均成立。由于 $\Psi_{i=1}$和 $\Psi^{-1}$ 具有相同的性质，我们得出 $\Psi$ 是整个效应代数 $\mathcal{A}^1$上的恒等映射。

现在，考虑 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 为 $\mathrm{I}_2$ 型的情形。我们可以将 $\mathcal{A}$ 识别为$\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$，并将 $\mathcal{B}$识别为 $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$，其中 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$是两个斯通空间。由于 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 同胚，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$；参见 [2, 定理 2.4 和第 5]节。对于 $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$中的任意忠实阿贝尔投影 $q$，存在 $f_q \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{C})^1$和 $g_q \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$，使得对所有满足以下条件的 $x \in \mathcal{X}$，都有$|g_q(x)| = \sqrt{f_q(x)(1 - f_q(x))}$

$$q(x) = \begin{pmatrix} f_q(x) & g_q(x) \\ g_q(x)^* & 1 - f_q(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathcal{X}.$$

根据 [2, 定理 2.4]， $\Phi$ 在两个方向上都保持忠实阿贝尔投影。令 $p$为 $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$ 中的忠实阿贝尔投影。不失一般性，我们可以用函数表示 $p$和 $\Phi(p)$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathcal{X}.$$

由引理 4.1，我们有

$$\begin{aligned} 2/3p = \inf_{\mathcal{A}^1}\{p, q + 1/2q^\perp\} \quad &\Longleftrightarrow \quad \inf_{\mathcal{A}^1}\{p, q + 1/2q^\perp\} = \inf_{\mathcal{A}^1}\{p, q^\perp + 1/2q\} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2/3p^\perp = \inf_{\mathcal{A}^1}\{p^\perp, q + 1/2q^\perp\} \\ &\Longleftrightarrow \quad f_q = 1/2. \end{aligned}$$

回忆 $\Phi(p) = p$，因此 $\Phi(p^\perp) = p^\perp$。可以取由下式定义的投影 $q$

$$q(x) := 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathcal{X},$$

从而推出 $\Phi(2/3p) = 2/3p$ 且 $\Phi(2/3p^\perp) = 2/3p^\perp$。注意， $p + 2/3p^\perp = \sup_{\mathcal{A}^1}\{p, 2/3p^\perp\}$，于是 $\Phi(p + 2/3p^\perp) = p + 2/3p^\perp$。同理可证 $\Phi(p^\perp + 2/3p) = p^\perp + 2/3p$。注意， $2/3$ 是 $\mathcal{A}^1$ 中满足 $2/3p \leq 2/3 \leq p^\perp + 2/3p$ 和 $2/3p^\perp \leq 2/3 \leq p + 2/3p^\perp$的唯一元素。因此， $\Phi(2/3) = 2/3$。由于 $\Phi^\perp$ 和 $\Phi$ 具有相同的性质，我们得出 $\Phi(1/3) = 1 - \Phi^\perp(2/3) = 1/3$。

为证明对于所有 $t \in [0, 1]$， $\Phi(t) = t$，我们借鉴 [22, 定理 3 的证明8] 中概述的方法。将前述讨论中的推理应用于 $\Phi$ 在子区间 $[0, 2/3]_{\mathcal{A}}$ 和 $[1/3, 1]_{\mathcal{A}}$ 上的限制，并无限迭代这一过程，我们证明了 $\Phi(t) = t$ 对于

实数域 $[0,1]$ 的某个稠密子集中的每个 $t$ 都成立。由于 $\Phi$ 是序同构，我们得到

$$\Phi(t) = t, \qquad t \in [0,1] \tag{4.1}$$

设 $p \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$ 是忠实阿贝尔投影，则定义在 $\mathcal{C}(\mathcal{X}, [0,1])$ 上的映射 $\Phi_p$

$$\Phi_p(r)(x) := \|\Phi(rp)(x)\|, \qquad x \in \mathcal{X}, r \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, [0,1]),$$

是一个序自同构；参见 [2, 推论 3.7] 的证明。由 (4.1)，我们得出，对于所有 $t \in [0,1]$，$\Phi_p(t) = t$。由命题 3.3，存在 $\mathcal{X}$ 的一个同胚 $\mu_p$，使得对于 $\mathcal{X}$ 的稠密子集中的每个 $x$，均有 $\Phi_p(r)(x) = r(\mu_p(x))$。因此，$\Phi_p(r) = r \circ \mu_p$。所以，映射$\{\Phi_p : p$ 忠实阿贝尔投影$\}$ 是连续的。由定理 4.5，$\Phi$ 可延拓为定义在 $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$ 上的唯一 Jordan $^*$-同构。证明完毕。□

为了处理更一般的情形，我们将使用非交换积分理论的结果。具体而言，我们将依据 Berberian 关于有限 $AW^*$-代数的正则环的结果；参见 [5, 6]。

设 $\mathcal{A}$ 是一个 $AW^*$ 代数（分别为有限 $AW^*$ 代数）。设 $T \in \mathcal{A}$（分别为 in$\mathcal{R}(\mathcal{A})$）是一个正可逆元。利用 [7, 引理 8.12]，，我们得出映射 $\Phi_T$ 定义如下

$$\Phi_T(a) := (1+T^{-2})^{1/2}\left(1-(1+TaT)^{-1}\right)(1+T^{-2})^{1/2}, \tag{4.2}$$

对所有 $a \in \mathcal{A}^1$，它都是 $\mathcal{A}^1$ 上的序自同构。经简单计算可得

$$\Phi_T^{-1}(a) = T^{-1}\left(\left(1-(1+T^{-2})^{-1/2}a(1+T^{-2})^{-1/2}\right)^{-1}-1\right)T^{-1}, \tag{4.3}$$

对所有 $a \in \mathcal{A}^1$。特别地，对每个 $\alpha \in [0,1]$，我们有

$$\Phi_T(\alpha) = \alpha(1+T^2)(1+\alpha T^2)^{-1} \quad \text{and} \quad \Phi_T^{-1}(\alpha) = \alpha\left((1-\alpha)T^2+1\right)^{-1}. \tag{4.4}$$

F此外，对每个 $a \in \mathcal{A}^1$ 以及每个非零实数 $\alpha$，我们有 e

$$\Phi_\alpha(a) = (1+\alpha^2)a(1+\alpha^2 a)^{-1} \quad \text{and} \quad \Phi_\alpha^{-1}(a) = a\left(1+\alpha^2(1-a)\right)^{-1}. \tag{4.5}$$

下面的定理受 [25, 定理 2.3]，启发，它表明，借助公式 (4.2) 和 (4.3)，可以刻画 $AW^*$ 代数的效应代数之间一大类序同构。

**定理 4.7.** 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $AW^*$ 代数。假设 $\mathcal{A}$ 没有 $I$ 型 $_1$ 直和项，且 $\Phi : \mathcal{A}^1 \to \mathcal{B}^1$ 是一个映射。以下断言等价：

*(1)* 映射 $\Phi$ 是一个序同构，且 $\Phi(1/2)$ 和 $1-\Phi(1/2)$ 在 $\mathcal{B}$中可逆。

*(2)* 存在一个 *Jordan* $^*$-同构 $J:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $T\in\mathcal{B}^{++}$，以及一个正实数 $\alpha$，使得

$$\Phi=\Phi_\alpha^{-1}\circ\Phi_T\circ J|_{\mathcal{A}^1}.$$

此外，如果 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 是有限的，那么当且仅当存在一个 *Jordan* $^*$-同构 $J:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$, 以及两个可逆闭算子 $T\in\mathcal{R}$（$\mathcal{A}$）、 $S\in\mathcal{R}$（$\mathcal{B}$），使得 $\Phi$ 是一个序同构。

$$\Phi=\Phi_S^{-1}\circ J\circ\Phi_T.$$

证明。 （*2*） $\Rightarrow$ （*1*）：容易看出， $\Phi$ 是一个序同构。由（4.4），$\Phi_T(1/2)=(1+T^2)(2+T^2)$。利用（ 4.5 ），经过简单计算可得 $\Phi(1/2)=1-(1+(1+\alpha^2)^{-1}(T^2+1))^{-1}$。由于 $T\in\mathcal{B}^{++}$、 $\Phi(1/2)$ 和 $1-\Phi(1/2)$ 也属于 $\mathcal{B}^{++}$。

（*1*） $\Rightarrow$ （*2*）：由于 $\Phi(1/2)$ 和 $1-\Phi(1/2)$ 在 $\mathcal{B}$ 中是可逆的，因此存在一个 $\varepsilon\in(0,\ 1/2)$，使得 $\varepsilon<\Phi(1/2)<1-\varepsilon$。记 $\alpha:=\left(\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{1/2}$。简单计算表明， $1/2<\Phi_\alpha(\Phi(1/2))<\Phi(1-\varepsilon)<1$。因此， $T:=(2\Phi_\alpha(\Phi(1/2))-1)^{1/2}(1-\Phi_\alpha(\Phi(1/2)))^{-1/2}$ 是 $\mathcal{B}$ 中满足以下条件的良定义正可逆元

$$\Phi_T^{-1}\left(\Phi_\alpha\left(\Phi(1/2)\right)\right)=1/2,$$

这由 (4.4) 和 (4.5) 得出。应用定理 4.6，存在一个 Jordan $^*$-同构 $J:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 使得 $\Phi=\Phi_\alpha^{-1}\circ\Phi_T\circ J|_{\mathcal{A}^1}$.

现在考虑 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是有限 $AW^*$-代数的情形。if 蕴含显然成立。反过来，记 $p$为$\mathcal{C}(\mathcal{X}):=\{\Phi(1/2)\}''$ 中开集 $\{x\in\mathcal{X}:\ \Phi(1/2)(x)>1/3\}$的闭包的特征函数。记 $b_1=1/4p+1/2p^\perp\Phi(1/2)$。由于 $1/2$ 在 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$中可逆。由引理 2.1， $\Phi(1/2)$ 和 $1-\Phi(1/2)=\Phi^\perp(1/2)$ 在 $\mathcal{R}(\mathcal{B})$中均可逆，因此$b_1$、 $\Phi(1/2)-b_1$以及 $1/2-b_1=1/4p+1/2p^\perp(1-\Phi(1/2))$ 在 $\mathcal{R}(\mathcal{B})$中均为正可逆元。再次由引理 2.1， $b_0:=\Phi^{-1}(b_1)$ 和 $1/2-b_0$ 在 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$中均为正可逆元。记 $T=(1-2b_0)^{1/2}b_0^{-1/2}$ 和 $S=(1-2b_1)^{1/2}b_1^{-1/2}$。根据 (4.4)，经过直接计算可得 $\Phi_T^{-1}(1/2)=b_0$ 和 $\Phi_S^{-1}(1/2)=b_1$。因此， $\Phi_S\circ\Phi\circ\Phi_T^{-1}(1/2)=1/2$。由定理 4.6，存在一个 Jordan $^*$-同构 $J:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 使得 $\Phi=\Phi_S^{-1}\circ J\circ\Phi_T$. □

## 5. Order isomorphisms between operator intervals

基于前文关于 $AW^*$-代数的效应代数之间序同构的结构定理，本节将证明其余描述 $AW^*$-代数中算子区间之间序同构的结果，即定理 3.1、命题 3.3 和定理 3.4。

**定理 5.1**。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $AW^*$代数。假设 $\mathcal{A}$ 没有 $I$ 型$_1$ 直和项。映射 $\Phi:\ \mathcal{A}^+\to\mathcal{B}^+$ 是序同构

当且仅当存在 *Jordan* $^*$同构 $J:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 以及 $b\in\mathcal{B}^{++}$，使得

$$\Phi(a)=bJ(a)b,\qquad a\in\mathcal{A}^+.$$

证明。只需证明必要性部分。注意，映射 $\Psi:\ \mathcal{A}^+\to\mathcal{B}^+$定义为

$$a\mapsto\Phi\left(\|\Phi^{-1}(1)\|+1\right)^{-1/2}\Phi\left((\|\Phi^{-1}(1)\|+1)a\right)\Phi\left(\|\Phi^{-1}(1)\|+1\right)^{-1/2},$$

是一个满足 $\Psi(1)=1$ 的序同构。记 $n_0=\max\{3,\|\Psi^{-1}(3)\|\}$。设 $n\geq n_0$，元素 $T_n:=(n-2)^{1/2}$ 和 $S_n:=(\Psi(n)-2)^{1/2}$ 都是正可逆元。由（4.4）可得，$\Phi_{T_n}^{-1}(1/2)=1/n$ 以及 $\Phi_{S_n}^{-1}(1/2)=\Psi(n)^{-1}$。注意，映射 $\mathcal{A}^1\to\mathcal{B}^1$ 定义为

$$a\mapsto\Phi_{S_n}\left(\Psi(n)^{-1/2}\Psi(n\Phi_{T_n}^{-1}(a))\Psi(n)^{-1/2}\right)$$

是一个保持 $1/2$ 的序同构。因此，根据定理 4.6，存在一个 Jordan $^*$-同构 $J:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，使得

$$\Psi(a)=\Psi(n)^{1/2}\left(\Phi_{S_n}^{-1}\circ J\circ\Phi_{T_n}\right)(1/na)\Psi(n)^{1/2},\qquad a\leq n. \tag{5.1}$$

特别地，

$$\Psi(t)=\Psi(n)^{1/2}\Phi_{S_n}^{-1}\left(J\left(\Phi_{T_n}(t/n)\right)\right)\Psi(n)^{1/2},\qquad t\in[0,n].$$

由于 $T_n$ 是一个标量，$J(\Phi_{T_n}(t/n))$ 是一个标量，因此由（4.4）可知，对每个 $t\in[0,n]$

$$\Psi(t)=J(\Phi_{T_n}(t/n))\left(1-J(\Phi_{T_n}(t/n))+\Psi(n)^{-1}\left(2J(\Phi_{T_n}(t/n))-1\right)\right)^{-1}.$$

由于这对每个 $n\geq n_0$ 都成立，$\Psi(n)^{-1}$ 和 $J(\Phi_{T_n}(t/n))$ 分别在 $n$ 无限增大时（按范数）收敛到 0 和 $t/(t+1)$，对所有 $t\geq 0$ 都成立。由此得到，对所有 $t\geq 0$，$\Psi(t)=t$。由于 $J$ 与连续函数演算相容，也就是说，对任意自伴元 $a\in\mathcal{A}^{sa}$ 以及定义在 $a$ 的谱上的连续实函数 $f$，都有 $J(f(a))=f(J(a))$。利用 (5.1) 以及对所有 $n\geq n_0$ 均有 $T_n=S_n$ 这一事实，我们得出，对所有 $a\in\mathcal{A}^+$，$\Psi(a)=J(a)$。令 $b=(\Phi(\|\Phi^{-1}(1)\|+1)(\|\Phi^{-1}(1)\|+1)^{-1})^{1/2}$，根据 $\Psi$ 的定义，对所有 $a\in\mathcal{A}^+$，$\Phi(a)=bJ(a)b$。□

以下定理的证明部分受 [3, 定理 2 的证明2] 启发。

**定理 5.2.** 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $AW^*$-代数。假设 $\mathcal{A}$ 没有类型为 $\mathrm{I}_1$ 的直和项。映射 $\Phi:\ \mathcal{A}^{++}\to\mathcal{B}^{++}$ 是序同构，当且仅当存在一个 *Jordan* $^*$-同构 $J:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，以及$b\in\mathcal{B}^{++}$，使得

$$\Phi(a)=bJ(a)b,\qquad a\in\mathcal{A}^{++}.$$

证明。只需证明必要性。取一个 $\varepsilon > 0$。由 $a \mapsto \Phi(a+\varepsilon) - \Phi(\varepsilon)$ 定义的映射$\mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}^+$ 是一个序同构。根据定理 5.1，存在一个 Jordan $^*$-同构 $J : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 以及 $b_\varepsilon \in \mathcal{B}^{++}$，使得

$$\Phi(a) = b_\varepsilon J_\varepsilon(a) b_\varepsilon + c_\varepsilon, \qquad a \geq \varepsilon,$$

其中 $c_\varepsilon = \Phi(\varepsilon) - \varepsilon b_\varepsilon^2$。令 $\varepsilon' > 0$。对于每个 $t \geq \max\{\varepsilon, \varepsilon'\}$，我们有

$$1/t\Phi(t) = b_\varepsilon^2 + 1/t c_\varepsilon = b_{\varepsilon'}^2 + 1/t c_{\varepsilon'}.$$

注意，随着 $t$ 无限增大，$1/tc_{\varepsilon'}$ 和 $1/tc_\varepsilon$ 在范数下都收敛到 0。因此，$b_\varepsilon = b_{\varepsilon'}$，这由平方根的唯一性可知。我们得到，$b := b_\varepsilon$ 和 $c := c_{\varepsilon'}$ 与 $\varepsilon$ 无关，换言之，

$$\Phi(a) = bJ(a)b + c, \qquad a \in \mathcal{A}^{++}.$$

注意，对于所有 $t > 0$，$\Phi(1/t) = 1/tb^2 + c \geq 0$。注意，随着 $t$ 无限增大，$1/tb^2 + c$ 在范数下收敛到 $c$。因此，$c \geq 0$。另一方面，对于所有 $a \in \mathcal{A}^{++}$，$c \leq bJ(a)b + c = \Phi(a)$。$\Phi$ 的双射性意味着，对于所有 $a \in \mathcal{B}^{++}$，$c \leq a$，由此可得 $c \leq 0$。因此，$c = 0$。□

现在我们转而证明定理 3.4。

**定理 5.3**。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $AW^*$-代数。假设 $\mathcal{A}$ 没有 $I$ 型$\mathrm{I}_1$ 直和项。映射 $\Phi: \mathcal{A}^{sa} \to \mathcal{B}^{sa}$ 是序同构，当且仅当存在 *Jordan* $^*$-同构 $J : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$、$b \in \mathcal{B}^{++}$ 和$c \in \mathcal{B}^{sa}$，使得

$$\Phi(a) = bJ(a)b + c, \qquad a \in \mathcal{A}^{sa}.$$

证明。只需证明必要性。由$a \mapsto -\Phi(-a) + \Phi(0)$定义的映射 $\mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}^+$ 是序同构。根据定理 5.1，存在 Jordan $^*$-同构 $J : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ 以及 $b \in \mathcal{B}^{++}$，使得

$$\Phi(a) = bJ(a)b + \Phi(0), \qquad a \leq 0.$$

令 $\Psi: \mathcal{A}^{sa} \to \mathcal{B}^{sa}$ 为由 $a \mapsto b^{-1}(\Phi(a) - \Phi(0))b^{-1}$定义的映射。容易看出，$\Psi$ 是一个序同构，并满足对所有 $a \leq 0$，$\Psi(a) = J(a)$。设 $n$ 为正整数，由于由 $a \mapsto \Psi(a-n) + n$ 定义的映射 $\mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}^+$ 是序同构，因此存在一个 Jordan $^*$-同构 $J_n : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ 和 $b_n \in \mathcal{B}^{++}$ 使得

$$\Psi(a) = b_n J_n(a) b_n + n(b_n^2 - 1), \qquad a \geq -n.$$

注意到 $\Psi(0) = J(0) = n(b_n^2 - 1) = 0$，于是 $b_n = 1$。因此，对于所有 $a \geq -n$，$\Psi(a) = J_n(a)$。事实 $J = J_n$ 可由等式 $\Psi|_{[-n,0]_\mathcal{A}} = J|_{[-n,0]_\mathcal{A}} = J_n|_{[-n,0]_\mathcal{A}}$得到。后者对每个 $n > 0$均成立，这意味着$\Psi = J|_{\mathcal{A}^{sa}}$。因此，根据 $\Psi$的定义，我们得到

$$\Phi(a) = bJ(a)b + c, \qquad a \in \mathcal{A}^{sa},$$

其中 $c:=\Phi(0)$。证明至此完成。 □

现在，我们转向定理 3.4 的证明。

**定理 *3.4* 的证明**：我们首先考虑满足 $\mathcal{I}=\mathcal{A}^1$ 和 $\mathcal{J}=\mathcal{B}^1$的情形。令 $p\in\mathcal{P}(\mathcal{A})$。回想一下， $p$ 是中心的，当且仅当它有唯一的补，即存在唯一的投影 $p'\in\mathcal{P}(\mathcal{A})$，使得 $\inf_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p,p'\}=0$ 且 $\sup_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}\{p,p'\}=1$。由于 $p_{\mathcal{A}}(1)$ 是 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 中最大的中心投影，并且其中所有投影 $p\leq p_{\mathcal{A}}(1)$ 也都是中心的，因此我们得出 $\Phi(p_{\mathcal{A}}(1))=p_{\mathcal{B}}(1)$ 且 $\Phi\left(p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}\right)=p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}$。因此，限制 $\Phi_i\colon\ \Phi|_{\mathcal{A}_i^1}$，$i\in\{1,-1\}$ 是到 $\mathcal{B}_i^1$ 上的序同构。令 $a\in\mathcal{A}^1$,$\Phi(a)=p_{\mathcal{B}}(1)\Phi(a)+p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}\Phi(a)$。由于 $p_{\mathcal{A}}(1)a=\sup_{\mathcal{A}^1}\{a,p_{\mathcal{A}}(1)\}$，我们得到

$$\Phi_1\left(p_{\mathcal{A}}(1)a\right)=\Phi\left(p_{\mathcal{A}}(1)a\right)=\sup_{\mathcal{B}^1}\{\Phi(a),p_{\mathcal{B}}(1)\}=p_{\mathcal{B}}(1)\Phi(a).$$

同理，我们可以证明 $\Phi_{-1}\left(p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}a\right)=p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}\Phi(a)$。因此 $\Phi(a)=\Phi_1(p_{\mathcal{A}}(1)a)+\Phi_{-1}(p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}a)$。

对于一般情形，设 $a_1,a_{-1}\in\mathcal{I}$，使得 $a_{-1}<a_1$，且 $\Phi(a_{-1})<\Phi(a_1)$。令 $\Gamma\colon\ [a_{-1},a_1]_{\mathcal{A}}\to\mathcal{A}^1$ 和 $\Theta\colon\ \mathcal{B}^1\to[\Phi(a_{-1})\ \Phi(a_1)]_{\mathcal{B}}$ 为由下式定义的序同构:

$$\Gamma(a):=(a_1-a_{-1})^{-1/2}(a-a_{-1})(a_1-a_{-1})^{-1/2},$$

and

$$\Theta(b):=\left(\Phi(a_1)-\Phi(a_{-1})\right)^{1/2}b\left(\Phi(a_1)-\Phi(a_{-1})\right)^{1/2}+\Phi(a_{-1}).$$

定义 $\Gamma_1\colon\ \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(1)[a_{-1},a_1]_{\mathcal{A}}\to\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(1)\mathcal{A}^1$ 如下:

$$\Gamma_1\left(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(1)a\right):=\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(1)\Gamma(a),\qquad a\in[a_{-1},a_1]_{\mathcal{A}}.$$

定义 $\Theta_1\colon\ \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(1)\mathcal{B}^1\to\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(1)[\Phi(a_{-1})\ \Phi(a_1)]_{\mathcal{B}}$ 如下:

$$\Theta_1\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(1)b\right):=\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(1)\Theta(b),\qquad b\in\mathcal{B}^1.$$

注意， $\Gamma_1,\Theta_1$ 是良定义的序同构。用 $p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}$ 和 $p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}$ 分别替代 $p_{\mathcal{A}}(1)$ 和 $p_{\mathcal{A}}(1)$，我们可以类似地定义 $\Gamma_{-1}$ 和 $\Theta_{-1}$。另一方面，映射 $\Psi:=\Theta^{-1}\circ\Phi\circ\Gamma^{-1}$ 是 $\mathcal{A}^1$ 与 $\mathcal{B}^1$ 之间的序同构。通过与前一段中类似的讨论，我们可以证明存在两个序同构 $\Psi_1\colon\ p_{\mathcal{A}}(1)\mathcal{A}^1\to p_{\mathcal{B}}(1)\mathcal{B}^1$ 和 $\Psi_{-1}\colon\ p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}\mathcal{A}^1\to p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}\mathcal{B}^1$，使得对于所有 $a\in\mathcal{A}^1$，$p_{\mathcal{B}}(1)\Psi(a)=\Psi_1\left(p_{\mathcal{B}}(1)a\right)$ 且 $p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}\Psi(a)=\Psi\left(p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}a\right)$。因此，$\Phi^{(1)}{}_{(a_{-1},a_1)}:=\Theta_1\circ\Psi_1\circ\Gamma_1$ 和 $\Phi^{(-1)}{}_{(a_{-1},a_1)}:=\Theta_{-1}\circ\Psi_{-1}\circ\Gamma_{-1}$ 是满足以下条件的序同构：对每个 $a\in[a_{-1},a_1]_{\mathcal{A}}$,

$$\Phi^{(1)}_{(a_{-1},a_1)}\left(p_{\mathcal{A}}(1)a\right)=p_{\mathcal{B}}(1)\Phi\left(a\right)\ \text{ and }\ \Phi^{(-1)}_{(a_{-1},a_1)}\left(p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}a\right)=p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}\Phi\left(a\right).\tag{5.2}$$

注意，对于每一对（$a$，$b$）$\in\mathcal{I}^2$，都存在一对（$a_{-1}$，$a_1$）$\in\mathcal{I}^2$，使得 $a_{-1}<a_1$，$\Phi$（$a_{-1}$）$<\Phi$（$a_1$），且 $a$，$b\in[a_{-1},a_1]_{\mathcal{A}}$。利用前述事实

以及（5.2），很容易验证映射 $\Phi_1$: $p_{\mathcal{A}}(1)\mathcal{I} \to p_{\mathcal{B}}(1)\mathcal{J}$和 $\Phi_{-1}$: $p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}\mathcal{I} \to p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}\mathcal{J}$，其定义为

$$p_{\mathcal{A}}(1)a \mapsto p_{\mathcal{B}}(1)\Phi(a) \quad \text{and} \quad p_{\mathcal{A}}(1)^{\perp}a \mapsto p_{\mathcal{B}}(1)^{\perp}\Phi(a),$$

分别都是良定义的序同构。至此，定理的证明完成。□

**定理 5.4.** 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 $AW^*$代数。那么， $\mathcal{A}^{sa}$ 和 $\mathcal{B}^{++}$ 序同构，当且仅当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ *Jordan* $^*$同构，且 $\mathcal{A}$ 是交换的。

证明. 为证明充分性方向，设 $J\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个 Jordan $^*$同构。定义映射 $\Phi\colon \mathcal{A}^{\mathrm{sa}} \to \mathcal{B}^{++}$ 如下: $\Phi(a) = J(\exp(a))$，其中 exp 表示指数函数。此映射在 $\mathcal{A}^{sa}$ 和 $\mathcal{B}^{++}$之间诱导出一个序同构。

反之，设 $\mathcal{A}$ 不是交换的（$\mathcal{A}_{-1} \neq \{0\}$），且 $\mathcal{A}^{sa}, \mathcal{B}^{++}$序同构。根据定理 3.4，不妨设 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 没有 $\mathrm{I}_1$ 直和项。设 $\Phi\colon \mathcal{A}^{sa} \to \mathcal{B}^{++}$是一个序同构。对于每个 $n > 0$，由$a \mapsto \Phi(a-n) - \Phi(-n)$定义的映射 $\mathcal{A}^{+} \to \mathcal{B}^{+}$是一个序同构。根据定理 5.1，存在一个 Jordan $^*$同构 $J_n\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 以及 $b_n \in \mathcal{B}^{++}$，使得

$$\Phi(a) = b_n J_n(a) b_n + n b_n^2 + \Phi(-n), \qquad a \geq -n. \tag{5.3}$$

令 $m,\ n > 0$, $\Phi(0) = nb_n^2 + \Phi(-n) = mb_m^2 + \Phi(-m)$。因此 $\Phi(1) = b_n^2 + \Phi(0) = b_m^2 + \Phi(0)$，这意味着 $b := b_n = b_m$ 取决于 $n$ 的选择。由 (5.3),

$$\|\Phi(0)\| \geq n\|b\|^2 - \|\Phi(-n)\|, \qquad n > 0. \tag{5.4}$$

由于对所有 $n > 0$, $\Phi(-n) \leq \Phi(0)$，我们得出序列 $(\|\Phi(-n)\|)$ 有界。结合这一点与 (5.4) 得出矛盾。□

现在我们继续证明命题 3.3，该命题讨论交换情形。回想一下，在 [11, 定理 1]和 [12, 定理 2.1], 中，作者给出了自伴部分和效应代数的证明，而 [20] 则在紧空间满足第一可数这一严格假设下考察正锥。为使证明更加简洁，我们只需关注锥情形。

命题 *3.3* 的证明。 设 $\Phi\colon \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^+) \to \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathbb{R}^+)$ 是一个序同构。每个元素 $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ 都可以唯一地写成 $f = f^+ - f^-$，其中 $f^+, f^- \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^+)$ 满足 $f^+ f^- = 0$。因此，映射$\Psi\colon \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathbb{R})$ 定义为

$$\Psi(f^+ - f^-) = \Phi(f^+) - \Phi(f^-), \quad f^+, f^- \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^+) \text{ with } f^+ f^- = 0,$$

是良定义的。 $\Psi$ 的双射性由 $\Phi$ 的双射性以及以下事实可知：对任意 $f^+$, $f^- \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^+)$，我们有

$$f^+ f^- = 0 \quad \text{if and only if} \quad \inf_{\mathcal{C}(\mathcal{X},\mathbb{R}^+)}\{f^+, f^-\} = 0.$$

对于 $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$，不等式 $f \leq g$成立当且仅当 $f^+ \leq g^+$且$f^- \geq g^-$。由于 $\Phi$ 是序同构， $\Psi$ 在两个方向上都保序。因此， $\Psi$也是序同构。

根据 [11, 定理 1], ，存在一个同胚 $\mu : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$、一个$G_\delta$稠密子集 $\mathcal{Y}_0$ （属于 $\mathcal{Y}$），以及一族$\mathbb{R}^+$ 上的递增同胚 $\{f_y\}_{y\in\mathcal{Y}_0}$ ，使得

$$\Phi(f)(y) = f_y\left(f(\mu(y))\right), \quad \text{for all } f \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R}^+),\, y \in \mathcal{Y}_0.$$

证明至此完成。 □

## 6. The reduction of the problem

$C^*$-代数 $\mathcal{A}$ 中的自伴元集合构成一个函数系统，也就是说，它是一个阿基米德偏序实向量空间，其中代数的单位元充当序单位；参见 [9, 第 588–589] 页。事实上，根据谱理论，对于每个 $a \in \mathcal{A}^{sa}$，我们有

$$\|a\| = \inf_{\mathbb{R}}\{t : -t \leq a \leq t\}.$$

这意味着 1 在 $\mathcal{A}^{sa}$ 中充当序单位。此外，这表明 $\|.\|$ 的范数与序单位范数一致。重要的是， $C^*$-代数的序结构完全取决于由其自伴元构成的向量空间的序结构。这一观察说明，将此类向量空间线性嵌入具有特定性质的更大函数系统，同时保留其原有序结构，具有重要意义。

我们首先定义正则性的概念。在此语境中，它是拓扑稠密性概念在序论框架中的类比，其中逼近是通过上确界而非拓扑极限来定义的。

**定义 6.1.** 设 $\mathcal{W}$ 是一个函数系统， $\mathcal{V}$ 是一个子空间。对于 $w \in \mathcal{W}$，我们定义

$$(-\infty, w]_{\mathcal{V}} := \{v \in \mathcal{V} : v \leq w\} \qquad \text{and} \qquad [w, \infty)_{\mathcal{V}} := \{v \in \mathcal{V} : v \geq w\}.$$

我们称 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{W}$ 的正规子空间，若对每个 $w \in \mathcal{W}$

$$w = \sup_{\mathcal{W}}(-\infty, w]_{\mathcal{V}}.$$

若 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{W}$的正规子空间，则直接验证可知，对每个 $w \in \mathcal{W}$

$$w = \inf_{\mathcal{W}}[w, \infty)_{\mathcal{V}}.$$

我们注意到，这一定义与第 2.2 小节中给出的定义一致；此外， $\mathcal{A}^{sa}$ 是$\mathcal{A}^{sa}$ 的正规子空间。

**定义 6.2**。设 $\mathcal{V}$ 是一个函数系统。$\mathcal{V}$ 的一个扩张是一个二元组（$\mathcal{W}$, $j$），其中 $\mathcal{W}$ 是另一个函数系统，且 $j\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ 是一个保单位线性序嵌入，也就是说，它是到 $j(\mathcal{V})\subseteq\mathcal{W}$ 上的序同构，并且 $j(1)=1$。如果 $j(\mathcal{V})$是 $\mathcal{W}$的正规子空间，则扩张（$\mathcal{W}$, $j$）称为正则扩张。若$_{\mathcal{V}}\mathcal{F}=v$ 的任意子集 $\mathcal{F}$ 满足 $\sup_{\mathcal{V}}\mathcal{F}=v$，则函数系统之间的序嵌入 $j\colon\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ 称为保持上确界，即 $\sup_{\mathcal{W}}j(\mathcal{F})=j(v$。

以下引理引自 $[14,$ 引理 2.4$]$。

**Lem引理 6.3**。若 $(\mathcal{W},j)$ 是 $\mathcal{V}$ 的正则扩张，则 $j$ 保持上确界。

函数系统 $\mathcal{V}$ 的 Dedekind 完备化是一个正则扩张 $(\mathcal{W},j)$，其中 $\mathcal{W}$ 是有界完备向量格，也就是说，在这种格中，每个有上界的子集都有最小上界，每个有下界的子集都有最大下界。在 $[26,$ 引理 1.2、定理 2.9$],$ 中，Wright 证明了，任意函数系统在相差一个线性序同构的意义下都有唯一的 Dedekind 完备化。特别地，对于每个（含幺）$C^*$-代数 $\mathcal{A}$，函数系统 $\mathcal{A}^{sa}$ 都存在一个 Dedekind 完备化 $(\mathcal{V}(\mathcal{A})\ j)$。

设 $\mathcal{A}$ 是一个 $C^*$-代数，$\overline{\ }\mathcal{A}$ 是它的正则单调完备化。设 $\big(\mathcal{V}(\mathcal{A})\ j\big)$是函数系统$\mathcal{A}^{sa}$的 Dedekind 完备化。根据引理 6.3，我们知道 $j$ 保持上确界。因此，在不丢失 $\mathcal{A}^{sa}$ 的序结构任何信息的前提下，我们可以将 $\mathcal{A}^{sa}$ 与 $j(\mathcal{A}^{sa})$ 等同起来。更确切地说，若 $\sup_{\overline{\mathcal{A}}^{sa}}\mathcal{F}=v$，且 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{A}^{sa}$ 的一个子集，则有 $\sup_{\mathcal{V}(\mathcal{A})}j(\mathcal{F})=j(v)$。作此等同后，$\mathcal{A}^{sa}$ 也可视为 $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ 的子空间。

以下命题可由引理 6.3 和 $[14,$引理 2.5$]$ 立即推出。

**命题 6.4**。设 $\mathcal{A}$ 为一个 $C^*$代数。则 $\mathcal{A}^{sa}$ 是$\mathcal{V}(\mathcal{A})$的正规子空间。此外，嵌入 $\mathcal{A}^{sa}\hookrightarrow\mathcal{V}(\mathcal{A})$ 保持上确界。

现在我们可以证明定理 3.6；该定理将问题 1.2，更一般地说，将研究 $C^*$代数的自伴部分之间的序同构这一问题，归约为单调完备 $C^*$代数的情形。

定理 *3.6* 的证明：首先证明 $\Phi$ 可延拓为唯一的序同构 $\Phi_{\mathcal{V}}$：$\mathcal{V}(\mathcal{A})\to\mathcal{V}(\mathcal{B})$。设 $v\in\mathcal{V}(\mathcal{A})$，则 $\Phi((-\infty,v]_{\mathcal{A}^{sa}})$ 被 $\overline{\Phi}(\|v\|)$ 有界，即对于所有 $w\in\Phi((-\infty,v]_{\mathcal{A}^{sa}})$，都有 $w\le\Phi(\|v\|)$；记作$\Phi((-\infty,v]_{\mathcal{A}^{sa}})\le\Phi(\|v\|)$。由于 $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ 是有界完备的，我们得到

$$\Phi_{\mathcal{V}}(v):=\sup_{\mathcal{V}(\overline{\mathcal{B}})}\Phi((-\infty,v]_{\mathcal{A}^{sa}})\in\mathcal{V}(\overline{\mathcal{B}}).$$

我们将证明

$$\Phi([v,\infty)_{\mathcal{A}^{sa}})=[\Phi_{\mathcal{V}}(v),\infty)_{\mathcal{B}^{sa}}. \tag{6.1}$$

事实上，注意到 $[v,\infty)_{\mathcal{A}^{sa}}=\{w\in\mathcal{A}^{sa}:\ w\geq(-\infty,\ v]_{\mathcal{A}^{sa}}\}$。于是

$$\begin{aligned}\Phi([v,\infty)_{\mathcal{A}^{sa}}) &= \{w\in\mathcal{B}^{sa}: w\geq\Phi((-\infty,v]_{\mathcal{A}^{sa}})\}\\ &= \{w\in\mathcal{B}^{sa}: w\geq\Phi_{\mathcal{V}}(v)\}\\ &= [\Phi_{\mathcal{V}}(v),\infty)_{\mathcal{B}^{sa}}.\end{aligned}$$

利用（6.1），通过类似的推理可得

$$\Phi((-\infty,v]_{\mathcal{A}^{sa}})=(-\infty,\Phi_{\mathcal{V}}(v)]_{\mathcal{B}^{sa}}. \tag{6.2}$$

映射 $\Phi_{\mathcal{V}}:\mathcal{V}(\mathcal{A})\to\mathcal{V}(\mathcal{B})$ 由 $\overline{v}\mapsto\Phi_{\mathcal{V}}(v)$ 给出，且定义良好。现在我们将证明 $\Phi$ 的双射性。利用命题 6.4，我们可直接由（6.1）推出 $\Phi$ 的单射性。设 $w\in\mathcal{V}(\mathcal{B})$ 和 $v=\sup_{\mathcal{V}(\mathcal{A})}\Phi^{-1}((-\infty,\ w]_{\mathcal{B}^{sa}})$。由于 $\Phi$ 和 $\Phi^{-1}$ 具有相同的性质，利用（6.2）可得

$$\Phi^{-1}((-\infty,w]_{\mathcal{B}^{sa}})=(-\infty,v]_{\mathcal{A}^{sa}},$$

或者等价地，$\Phi_{\mathcal{V}}(v)=w$。这表明 $\Phi_{\mathcal{V}}$ 是满射，因此 $\Phi_{\mathcal{V}}$ 是双射。由（6.2）以及以下等价关系可立即得出，$\Phi_{\mathcal{V}}$ 在两个方向上都保序：$v\leq v'$ 当且仅当 $(-\infty,\ v]_{\mathcal{A}^{sa}}\subseteq(-\infty,\ v']_{\mathcal{A}^{sa}}$，对所有 $v,\ v'\in\mathcal{V}(\mathcal{A})$。因此，$\Phi_{\mathcal{V}}$ 是一个序同构，并满足对所有 $v\in\mathcal{A}^{sa}$，$\Phi_{\mathcal{V}}(v)=\Phi(v)$。

由于 $\mathcal{A}^{sa}$ 在 $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ 中的单调闭包是所有包含 $\mathcal{A}^{sa}$ 的 $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ 的单调闭子集的交集。因此，$\Phi_{\mathcal{V}}$ 将 $\mathcal{A}^{sa}$ 的单调闭包映射到 $\mathcal{B}^{sa}$ 的单调闭包上。根据引理 6.3，$\mathcal{A}^{sa}$ 在 $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ 中的单调闭包等于 $\mathcal{A}^{sa}$ 在 $\mathcal{A}^{sa}$ 中的单调闭包，而后者为 $\mathcal{A}^{sa}$。于是，$\Phi_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}^{sa})=\mathcal{B}^{sa}$。因此，为完成证明，我们将 $\Phi_{\mathcal{V}}$ 在 $\mathcal{A}^{sa}$ 上的限制记为 $\Phi$。□

## 7. 备注与引人入胜的问题

我们的结果达到了很高程度的普适性，涵盖了该领域此前的所有研究。此外，对 $AW^*$-代数中所有算子区间的描述是最优的，并且提供了全面的刻画，唯一的例外是效应代数。值得注意的是，定理 4.7 中给出的公式并不唯一。

备注 7.1。采用与 [2, 定理 2.2], 类似的方法，我们可以证明，定理 4.7 中的条件 *(1)* 和 *(2)* 等价于：

$$\Phi(a)=T\left(a(T^2-1)+1\right)^{-1}aT,\qquad a\in\mathcal{A}^1,$$

其中 $T=(\Phi(1/2)^{-1}-1)^{-1/2}$。

对于每个实数 $\alpha < 1$，我们定义函数 $f_\alpha\colon\ [0,1] \to [0,1]$，其定义如下：

$$f_\alpha(t) = \frac{t}{t\alpha + 1 - \alpha}, \qquad t \in [0,1].$$

注记 7.2。仿照 [25] 的定理 2.2 和 2.3（同时沿用定理 4.7 的记号，并采用其证明中的类似论证），我们可以证明，若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是有限 $AW^*$ 代数，则下列条件等价：

(1) $\Phi$ 是序同构。(2) 存在 Jordan $^*$ 同构 $J\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$、一个可逆元 $T \in \mathcal{R}(\mathcal{B})$ 以及两个实数 $0 < \alpha < 1$，$\beta < 0$，使得

$$\Phi(a) = f_\beta\left((f_\alpha(TT^*))^{-1/2} f_\alpha(TJ(a)T^*)(f_\alpha(TT^*))^{-1/2}\right), \qquad a \in \mathcal{A}^1.$$

在有限情形下，我们对效应代数之间的所有序同构都有完整的刻画。然而，适当无限情形仍未解决。我们认为，研究序同构对可逆性的保持，是处理这一情形的关键途径。我们注意到，效应代数之间的序同构会保持值域投影为单位元的元素；这类元素本质上就是单射算子（若将 $C^*$ 代数的元素视为作用在希尔伯特空间上的算子）。因此，一般而言，只有在愿意使用无界算子或正则 Baer 环时，才能通过这些同构保持可逆性。

如果类似于定理 3.6 的扩张适用于其他算子区间，那么定理 3.1 将立即给出任意 $C^*$-代数中此类区间之间所有序同构的一般形式。这一方法既高效又最优，构成了迄今为止解决该问题的最简洁途径。

作为本文的结尾，我们提出以下问题，这些问题由定理 3.6 和定理 4.7 所启发。若这些问题得到肯定回答，将能够完整刻画一般 $C^*$-代数中算子区间之间的所有序同构。

**问题 7.3**。• 设 $\mathcal{A}$ 是一个 $C^*$-代数。$\mathcal{A}^1$ 中 $\mathcal{A}^1$的单调闭包是否等于 $\mathcal{A}^1$ 自身？

• 设 $\mathcal{A}$ 是一个适当无限的 $AW^*$-代数。是否存在一个将 $\mathcal{A}$嵌入正则 *Baer* $^*$-环的嵌入？

Acknowledgement

作者谨向导师、数学系理学院的 Zine El Abidine Abdelali 教授致以诚挚谢意，

他任职于拉巴特的穆罕默德五世大学。他的宝贵指导和建设性建议极大地提升了这篇稿件的质量。

## Disclosure statement

作者未报告任何潜在的利益冲突。

## Funding

作者没有需要披露的相关经济利益或非经济利益。

## Data availability statement

本研究未生成或分析任何数据集，因此不适用数据共享。

## References

[1] Abdelali, Z. E. A., El Khatiri, Y.：保持 $M_2(F)$ 中次数为 2 的代数元的线性变换。Afr. Mat. 34(7)（2023）。[2] Abdelali, Z. E. A., El Khatiri, Y.： $C^*$ 型 $C(X) \otimes B(H)$ 代数上的效应代数序同构。Linear Algebra Appl. 674，91–123（2023）。[3] Abdelali, Z. E. A., El Khatiri, Y.：无界自伴算子上的序同构。J. Math. Anal. Appl. 542（2025）。[4] Arendt, W., De Canni`ere, J.：傅里叶代数的序同构。J. Funct. Anal. 50（1983），1–7。[5] Berberian, S. K.：Baer $^*$-环。Springer，柏林（1972）。[6] Berberian, S. K.：有限 $AW^*$-代数的正则环。《数学年刊》（第2辑）65（1957），224–240。[7] Berberian, S. K.：有限 Baer $^*$-环的正则环。J. Algebra 23（1972），35–65。[8] Busch, P., Grabowski, M., Lahti, P. J.：运算量子物理。Springer-Verlag，柏林（1995）。[9] Choi, M. D., Effros, E. G.： $C^*$-代数的完全正提升问题。《数学年刊》104（1976），585–609。[10] Connes, A.：冯·诺伊曼代数所对应的底层有序向量空间的刻画。Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 24（1974），121–155。[11] Cabello S´anchez, F.：连续函数格上的同态。Positivity 12（2008），341–362。[12] Ehsani, V., Sady, F.：连续函数的某些子格之间的同构。Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 28（2022），327–339。[13] El Khatiri, Y.：AW*-代数中保持序和谱的映射。Linear Multilinear Algebra 73（2025），第11期，1–14。[14] Hamana, M.：将 $C^*$-代数正规嵌入单调完备的 $C^*$-代数。J. Math. Soc. Japan 33（1981），159–183。[15] Hamhalter, J.： $AW^*$-代数的Dye定理和Gleason定理。J. Math. Anal. Appl. 422（2015），1103–1115。[16] Kadison, R. V.：算子代数的广义施瓦茨不等式和代数不变量。《数学年刊》（第2辑）56（1952），494–503。[17] Kadison, R. V.：算子代数的等距映射。《数学年刊》（第2辑）54（1951），325–338。

[18] Kaplansky, I.: *Banach*代数中的投影。《数学年刊》**53** （1951），235–249。[19] Lochan, R., Strauss, D.: 连续函数空间的格同态。《伦敦数学会杂志》（第2辑）**26**（1982），379–384。[20] Marovt, J.: *()* 上的保序双射。《台湾数学杂志》**14**（2）（2010），667–673。[21] Moln´ar, L.: 关于 $C^*$-代数 $C(X)\otimes B(H)$ 的自反性问题。Proc. Amer. Math. Soc. **129** （2001），531–537。[22] Mori, M.: 冯·诺伊曼代数中算子区间的序同构。《积分方程与算子理论》**91** （2019）。[23] Saitˆo, K., Wright, J. D. M.: 单调完备的 $C^*$-代数与泛型动力学。Springer，纽约（2015）。[24] ˇSemrl, P.: 希尔伯特空间效应代数上的保持可比性的映射。《数学物理通讯》**313**（2012），375–384。[25] ˇ Semrl, P.: 算子区间的序同构。《积分方程与算子理论》**91**（2017），1–42。[26] Wright, J. D. M.: 向量格中的嵌入。《伦敦数学会杂志》（第2辑）**8** （1974），699–706。

Department of Mathematics, Mathematical Research Center of Rabat, Laboratory of Mathematics, Statistics and Applications, Faculty of Sciences, Mohammed V University in Rabat, Rabat, Morocco.电子邮箱地址: elkhatiriyoussef@hotmail.com, youssef elkhatiri2@um5.ac.ma