Effic稀疏图类转导的逆

Jan Dreier维也纳工业大学
dreier@ac.tuwien.ac.at

Jakub Gajarsk´y马萨里克大学和华沙大学
gajarsky@mimuw.edu.pl

Michał Pilipczuk华沙大学
michal.pilipczuk@mimuw.edu.pl

arXiv:2601.14906v1 [cs.LO] 21 Jan 2026

摘要

（一阶）转导是一个基本概念，用于刻画能够用一阶逻辑描述的图修改。在这项工作中，假设源图是稀疏的，我们提出了一种高效的算法方法，用于近似地逆转转导的应用。具体而言，对于任意具有结构有界扩张的图类 $\mathscr{C}$（即可以从一个有界扩张的图类转导得到），我们给出一个 $\mathcal{O}(n^4)$ 时间算法：给定一个图 $G \in \mathscr{C}$，计算一个顶点着色图 H，使得可以使用一阶解释从 H 中恢复 G，且 H 属于一个具有有界扩张的图类 $\mathscr{D}$。这回答了 Gajarsk´y 等人提出的一个公开问题。[ACM TOCL，'20]。事实上，要使我们的过程有效，我们只需假设 $\mathscr{C}$ 是单调稳定的（即不能转导出所有半图组成的类），并且具有内在线性邻域复杂度（即从 $\mathscr{C}$ 可转导得到的所有图类中的邻域复杂度都是线性的）。这意味着，满足这两个性质的图类恰好与具有结构有界扩张的图类一致。

1 引言

考虑如下操作：对图进行平方：给定一个图 H，计算图 $G := H^2$，其顶点集相同，并且当且仅当两个顶点在 G 中的距离至多为2 时，它们在 H中相邻。可以预期，如果源图 H 属于某类性质良好的图，例如是平面图、类树图，或以其他方式具有稀疏性，那么输出图 G 会保留 H的大部分有用结构。当然，如果在输入中同时提供 G，那么揭示这种结构很容易。但如果只给出 H，如何才能高效地计算源图 G？对于图平方这一具体情形，该问题（给定 G，寻找一个 H，使其满足 $G = H^2$）一般而言实际上是NP困难的 [25]。

上文讨论的图平方操作，是一个更一般的图修改操作框架的基本示例；这类操作可以用逻辑来描述：一阶解释和转导。一个（简单的[1]）一阶解释 I 由一对 $\psi(x, y)$ $\nu(x)$图上的一阶逻辑公式（下文简称 FO）构成，其中 ψ 有两个自由变量，ν 有一个。将 I 应用于图 H会得到一个新图 $G = I(H)$，它由 H 通过以下方式构造：(i) 替换邻接关系，使得 G 中的任意两个顶点 u, v 相邻，当且仅当 $\psi(u, v) \vee \psi(v, u)$在 H 中成立；(ii) 将顶点集限制为满足 $\nu(u)$的顶点 u。因此，要将图平方操作建模为一阶解释，我们可以取 $\psi(x, y) = $邻接$(x, y) \vee \exists_z($邻接$(x, z) \wedge $邻接$(y, z))$，并取 $\nu(x) = $真。

*JG 获得波兰国家科学中心 SONATA-18 项目资助，项目编号为 2022/47/D/ST6/03421。MP 获得 BOBR 项目资助；该项目获得欧洲研究委员会（ERC）在欧盟地平线2020研究与创新计划下的资助，资助协议编号为 948057。[1]文献中关于逻辑的讨论所采用的一阶解释标准概念，允许输出图的顶点是输入图顶点构成的 k-元组，其中 $k \in \mathbb{N}$为某个固定值。本文将注意力限制在简单或一维解释上，即满足 $k = 1$ 的解释。





一个一阶转导是一个更一般的概念，此外还允许 (i) 将顶点集复制固定的次数；(ii) 用固定的一组标签（称为颜色）标记顶点，并在公式 ψ 和 ν中访问这些标签。关于正式定义，请参见第 3 节。在本文中，我们只考虑一阶解释和转导，因此从现在起，为简洁起见，我们省略前缀一阶。

对于图类 $\mathscr{C}$和 $\mathscr{D}$，如果存在一个转导 T，使得 $\mathscr{C} \subseteq \mathrm{T}(\mathscr{D})$，其中 $\mathrm{T}(\mathscr{D}) := \bigcup_{H \in \mathscr{D}} \mathrm{T}(H)$ 包含将 T 应用于来自 $\mathscr{D}$的图所得到的所有可能输出，则称 $\mathscr{C}$可由 $\mathscr{D}$ 转导得到。回顾这一概念后，我们可以将推动本文工作的主要问题具体表述如下：

1. 假设 $\mathscr{D}$是一个良性图类，且 $\mathscr{C}$可由 $\mathscr{D}$转导得到，那么我们能对 $\mathscr{C}$中图的结构作何论断？

2. 我们能否高效地逆转该转导？也就是说，给定一个图 $G \in \mathscr{C}$，计算一个着色图$H \in \mathscr{D}$，使得可以在其中解释 G。

第一个图论问题对于结构稀疏图类理论的发展至关重要，即那些可由稀疏图类转导得到的图类。对我们的研究动机而言，Gajarsk´y、Kreutzer、Ne˘set˘ril、Ossona de Mendez、Pilipczuk、Siebertz 和 Toru´nczyk [17], 的工作尤为重要；他们研究了结构有界扩张类，并通过低灌木深度覆盖刻画了这些图类。这里，如果一个类 $\mathscr{C}$ 可由某个有界扩张类 $\mathscr{D}$ 转导得到，则称 $\mathscr{C}$ 具有结构有界扩张；而如果对于每个 $d \in \mathbb{N}$，都存在一个有限上界 $c(d) \in \mathbb{N}$，限制从 $\mathscr{D}$中的图出发，先删除一些顶点，再收缩半径至多为 d的两两不相交子图所得到的图的平均度，则称 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张。有界扩张是 Ne˘set˘ril 和 Ossona de Mendez 的《稀疏性》理论中所研究图的一致稀疏性的核心概念；它涵盖了排除某个固定拓扑次式的所有图类、许多源自几何学的稀疏图类以及诸多其他例子；关于《稀疏性》理论的介绍，参见 [27, 33] 。Dreier [6]（通过拉康分解和奇偶分解）以及 Dreier、Gajarsk´y、Kiefer、Pilipczuk 和 Toru´nczyk [8]（通过有界深度灌木）进一步给出了结构有界扩张类的组合描述。对于结构有界度类 [16], 、结构有界路径宽度类 [29], 、结构有界树宽类 [28], 、结构有界孪生宽度类 [20], 以及结构处处稠密类 [8], 也已知相应的结构刻画。

第二个算法问题迄今仍远未得到充分理解。针对结构有界度的图类，已经提出了合适的多项式时间算法 [16], 其“第二层”推广——结构树秩至多为 2 [19], 的图类、结构有界路径宽度的图类 [29],以及结构有界树宽的图类 [28]。在所有这些情形下，所讨论的 稀疏化过程 都遵循以下模板：考虑一个图类 $\mathscr{C}$，它具有结构有界的 $\mathcal{P}$，也就是说，$\mathscr{C}$的形式为 $\mathscr{C} \subseteq \mathrm{T}(\mathscr{D})$，其中 $\mathscr{D}$ 是一个具有性质 $\mathcal{P}$的图类，其 $\mathcal{P} \in \{$具有有界度、树秩 $\leqslant$2、有界路径宽度或有界树宽$\}$。然后，稀疏化过程会计算出一个着色图H，该图属于某个固定的类 $\mathscr{D}'$，并具有 $\mathcal{P}$，使得对于某个固定的解释 I，$G = I(H)$。请注意，这意味着输出图 H 通常并不 属于原始的“源”图类 $\mathscr{D}$。

也就是说，稀疏化过程可能（通常也确实会）找到另一个类 $\mathscr{D}'$ enjoying$\mathcal{P}$，以及另一种不同于 T 中所用解释的解释 I，使得 $\mathscr{C}$ 中的每个图都能通过 I 从属于 $\mathscr{D}'$ 的某个着色图中得到解释。正如 [16], 所示，要获得可处理性，就必须对逆转导的概念作出这种放宽，因为即使源类仅包含最大度不超过 3 的图，忠实地逆转固定解释的问题也已经是 NP完全的。

对于结构有界扩张类的情形，现有的组合刻画中，没有一种能提供符合上述模板的高效稀疏化过程。Gajarsk´y 等人在 [17], 提出了是否存在此类过程的问题；自该项工作发表以来，这一问题一直在相关学界流传。我们注意到，最近 Braunfeld、Ne˘set˘ril、

Ossona de Mendez 和 Siebertz [4] 提出了[2] 一种适用于更广泛的单子稳定类的稀疏化过程。然而，即使输入类实际上具有结构有界扩张，他们的过程也只能保证输出属于一个几乎处处稀疏类。从本质上说，这意味着在输出图中，所有相关的结构参数（例如弱着色数）只能保证由图规模的次多项式函数所界定，而不像有界扩张类那样能由常数界定。特别是，这极大地限制了此类稀疏化在算法背景中的实用性，也无法得出下文将进一步讨论的算法含义。

我们的贡献 。 我们通过证明以下结果，回答了 Gajarsk´y 等人 [17] 提出的问题： lt.

定理 1。 设 $\mathscr{C}$ 是一个具有内在线性邻域复杂度的单子稳定图类。那么，存在一个有界扩张图类 $\mathscr{D}$，它可由 $\mathscr{C}$ 转导；还存在一个算法 $\mathcal{A}$ 和一个一阶解释 I，使得以下结论成立：对于任意一个具有 n 个顶点的输入图 $G \in \mathscr{C}$，算法 $\mathcal{A}$ 可在 $\mathcal{O}(n^4)$ 时间内计算出一个着色图 $H \in \mathscr{D}$，使得 $G = I(H)$。

我们来解释定理 1 中迄今尚未定义的术语。首先，若一个图类 $\mathscr{C}$ 不能转导出所有半图组成的类，则称其为单子稳定。（阶为 n 的半图是一个二分图，其两侧为 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ 和 $\{v_1, \ldots, v_n\}$，其中 u_i 与 v_j 相邻当且仅当 $i \leqslant j$。）这一概念似乎在可转导性理论中起着核心作用，参见 [30, 第 4.1 节1]，其中有全面的介绍。特别地，每个结构有界扩张类都是单子稳定的。其次，如果存在常数 c，使得对每个图 $G \in \mathscr{C}$ 及其任意非空顶点子集 $S \subseteq V(G)$，都有 $|\{N(u) \cap S\colon u \in V(G)\}| \leqslant c \cdot |S|$，则称图类 $\mathscr{C}$ 具有线性邻域复杂度；若从 $\mathscr{C}$ 转导出的每个类都具有线性邻域复杂度，则称 $\mathscr{C}$ 具有内在线性邻域复杂度。由 Pilipczuk、Siebertz 和 Toru´nczyk [31] 的结果可知，每个结构有界扩张类都具有内在线性邻域复杂度。因此，对每个结构有界扩张类，定理 1 的前提均成立；但该结果还蕴含更多结论：由于结论意味着原类 $\mathscr{C}$ 可由一个有界扩张类 $\mathscr{D}$ 转导而来，事实上，这些前提——单子稳定性和内在线性邻域复杂度——等价于具有结构有界扩张。也就是说，定理 1 蕴含以下结论。

C推论 2。 对于图类 $\mathscr{C}$，以下条件等价：

- $\mathscr{C}$ 具有结构有界扩张；
- $\mathscr{C}$ 是单子稳定的，且具有内在线性邻域复杂度；并且
- $\mathscr{C}$ 是单子稳定的，且具有有界合并宽度。

这里，合并宽度是 Dreier 和 Toru 最近引入的一族图参数´nczyk，见 [11]。 [11] 的结果与 Bonamy 和 Geniet 最近给出的证明 [2] 相结合，后者证明了有界合并宽度的类具有线性邻域复杂度。这意味着：(i) 每个结构有界扩张类都具有有界合并宽度；(ii) 每个有界合并宽度类都具有内在线性邻域复杂度。因此，将最后一项纳入推论 2是合理的。

算法含义。 我们简要讨论一下 定理 1 的一些算法推论。Gajarsk´y 等人 [17] 提出这一问题的主要动机，是为结构有界扩张的任意类上的一阶逻辑模型检验问题，给出一种固定参数算法。回顾一下，这意味着：给定一个 n 顶点图 G，它属于所讨论的类，以及一个一阶句子 φ，我们可以判定 φ 是否在 G 中成立，所需时间为 $\mathcal{O}_\varphi(n^c)$，其中 c 是某个通用常数，而 $\mathcal{O}_\varphi(\cdot)$

[2]在 [4], Braunfeld 等人仅陈述了一个组合结果。然而，他们使用的所有工具都是算法性的，因此，他们的推理可以转化为一个多项式时间稀疏化过程。

该记号隐藏了可能依赖于 φ 的因子。其思路是，对于一个结构有界扩张类 $\mathscr{C}$，多项式时间稀疏化过程可以让我们立即将其上的一阶逻辑模型检验问题化归到有界扩张类 $\mathscr{D}$ 的情形，在那里可以使用 Dvo˘r´ak、Kr´al' 和 Thomas [15] 的算法。事实上，若给定一个图 $G \in \mathscr{C}$，且对于某个固定的解释 $I = (\psi, \nu)$ 和一个图 $H \in \mathscr{D}$，有 $G = I(H)$，那么，检验给定的一阶句子 φ 是否在G 中成立，等价于检验经过适当"回拉"得到的句子 φ' 是否在 H中成立。（更准确地说，φ' 是由 φ 得到的：将每个邻接关系检查都替换为公式 ψ，并用公式 ν 限定每个量词。）

迄今为止，关于 FO 模型检验在每个具有结构有界扩张的图类上都是固定参数可处理的这一结论，源于更一般的结果： [9, 7], 分别证明了这一结论适用于结构处处稠密类和单子稳定类。算法 [9, 7] 避免了执行高效稀疏化[3] 的需求，直接处理所考虑的图 G。然而，稀疏化路线仍有其优点，因为与单子稳定类相比，我们对有界扩张图类上的 FO 的理解要稳健得多。具体而言，有界扩张图类上的 FO允许采用可在固定参数时间内执行的量词消去过程（关于该结果的不同表述，见 [15, 21, 32] ）。这使得我们能够获得与FO相关的各种问题的算法结果，超越基础模型检验，例如：

- 统计 FO 查询的解以及评估各种聚合查询 [24, 35];
- 支持以常数时间回答 FO 查询的部分动态数据结构 [15, 35];
- 以常数延迟枚举 FO 查询，在部分动态场景下亦然 [24, 35]；以及
- 可用 FO [14]表达的单调最大化问题的常数因子近似算法。与模型检验问题类似，定理 1可用于自动将所有这些结果推广到任意结构有界扩张图类，但需要进行 $\mathcal{O}(n^4)$时间的预处理。我们指出，这些结果均未在结构处处稠密或单子稳定类的普遍性范围内得到确立；事实上，预计它们只能在较差的复杂度保证下成立（所有常数上界都被顶点数的次多项式函数取代）。因此，上文提到的定理 1 的所有算法推论都是全新的发现。

最后，我们想指出定理 1的一个实用特性：稀疏化后的图类 $\mathscr{D}$ 可以由给定的图类 $\mathscr{C}$转导得到。这意味着，如果我们对 $\mathscr{C}$有更多了解，例如知道它具有某种性质 $\mathcal{P}$，且该性质在应用转导后仍保持，那么 $\mathscr{D}$ 也具有 $\mathcal{P}$。将 $\mathcal{P}$ 替换为具有有界线性团宽、有界团宽和有界双宽度这一性质（这些性质在转导下均保持，参见例如 [30]），即可得出：

- 如果 $\mathscr{C}$是一个具有有界线性团宽的单子稳定类，那么 $\mathscr{D}$ 具有有界路径宽度；
- 如果 $\mathscr{C}$是一个具有有界团宽的单子稳定类，那么 $\mathscr{D}$ 具有有界树宽；并且
- 如果 $\mathscr{C}$是一个具有有界孪生宽度的单子稳定类，那么 $\mathscr{D}$ 具有有界稀疏孪生宽度。

（这里我们利用这样一个事实：同时具有有界扩张和有界线性团宽的类实际上具有有界路径宽度，其他两个概念也同样如此；参见 [30]。此外，任何具有有界（线性）团宽或有界孪生宽度的类都具有内在线性邻域复杂度 [3, 34]。）由于$\mathscr{C}$可以通过解释 $\mathscr{D}$ 从 I转导回来，我们可以立即从定理 1推出文献中已知的以下三个结果：

- 每个具有有界线性团宽的单子稳定图类都可从一个具有有界路径宽度的类转导得到 [29]。
- 每个具有有界团宽的单子稳定图类都可从一个具有有界树宽的类可转导 [28]。

[3]这里我们指出，Braunfeld 等人的稀疏化结果 [4] 很大程度上依赖于 [7, 9, 18] 中为处理单子稳定图类上的一阶逻辑模型检验问题而开发的技术。

- 每个具有有界孪生宽度的单子稳定图类都可从一个具有有界稀疏孪生宽度的类可转导 [20]。

技术贡献。先前的稀疏化结果 [4, 8] 通过结合*Flipper* 游戏与 [18] 邻域覆盖，为图 G构造稀疏表示。图的邻域覆盖是 $\mathcal{X}$由 $V(G)$ 的子集组成的集合，这些子集称为簇，并满足：对于每个 $v \in V(G)$，存在 $X \in \mathcal{X}$使得$N_G[v] \subseteq X$。如果存在$\mathcal{P}$对 $V(G)$ 的划分，使得（i）对于每个 $P \in \mathcal{P}$，存在 $u \in V(G)$ 满足 $P \subseteq N_G[u]$；并且（ii）对于每个 $X \in \mathcal{X}$，都有 $X = N_G[P]$，其中某个 $P \in \mathcal{P}$满足该条件，那么我们称邻域覆盖 $\mathcal{X}$是紧致的。此外，如果每个顶点v 至多属于 $\mathcal{X}$中的 k 个簇，我们就称邻域覆盖 $\mathcal{X}$ 的重叠至多为 k。

众所周知，结构有界扩张类具有重叠度为常数的紧致邻域覆盖 [22],，因此，定理 1的非算法版本（针对 $\mathscr{C}$ 具有结构有界扩张这一特殊情形）可由现有工作轻易推出 [4, 8]。然而，迄今为止，高效计算紧致邻域覆盖一直是证明定理 1关键算法性质的主要瓶颈。对于具有重叠度为 k的紧致邻域覆盖的图类，我们目前只知道如何计算重叠度为 $k \cdot \log^{\mathcal{O}(1)} n$ [9, 7]的紧致邻域覆盖，这只能让我们计算阶为 $k \cdot \log^{\mathcal{O}(1)} n$的稀疏性参数。这不足以满足上述任何结构性或算法性应用的需求。本文填补了这一空白：

引理 3. 设 $\mathscr{C}$ 是一个具有内在线性邻域复杂度的单子稳定图类。那么存在一个常数 $k \in \mathbb{N}$ 和一种算法，可对任意 $G \in \mathscr{C}$ 在 $\mathcal{O}(|G|^4)$时间内计算出重叠度为 k 的紧邻域覆盖。

尽管文献中尚未对这一引理作出恰当记录，但将它与此前关于灌木和翻转游戏的研究结合起来，经验丰富的读者便可以证明定理 1。然而，这样的证明会依赖许多非平凡的外部结果，例如 Flipper 游戏 [18],；而该游戏本身又依赖于诸如翻转平坦性 [10]等其他非平凡结果。本文采用更直接的方法。我们用以下引理取代邻域覆盖，这是我们的核心技术贡献。

主引理 （引理 12的简化版本）。设 $\mathscr{C}$ 是一个具有线性邻域复杂度的二分图单子稳定类。那么存在一个整数 $k^* \in \mathbb{N}$ 以及一种算法，其运行时间为 $\mathcal{O}(|G|^4)$，该算法对于任意给定的 $G = (A, B, E)$，其中来自 $\mathscr{C}$且没有孤立顶点，都能计算出 $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots, P_{|\mathcal{F}|}\}$ 的一个划分，并给出 B 中的顶点 ℓ_1，……，$\ell_{|\mathcal{F}|}$，它们来自 A，使得：

- $P_i \subseteq N_G(\ell_i)$ 对于每个 $i \in \{1, \ldots, |\mathcal{F}|\}$，并且
- 每个 $v \in A$ 在 $\mathcal{F}$ 的至多 k^* 个部分中拥有邻点，即 $|\{P \in \mathcal{F} \mid N_G(v) \cap P \neq \emptyset\}| \leqslant k^*$。

每个顶点 ℓ_i 被称为部分 P_i的领导顶点。

很容易证明（第 4.4 节），引理 12蕴含引理 3。引理 12本身的证明出人意料地简短且自洽。其唯一的外部依赖是 Haussler 的装箱引理 [23]，以及关于排除半图的图中近孪生关系的一个简单传递性陈述 [19,引理 23]。为了从引理 12推导出定理 1，我们将文献中已有的 Flipper 博弈方法 [4, 8]替换为反复应用引理 12以及基本的基于半图的论证。

结构安排。在第 2 节中，我们简要概述定理 1 的证明所涉及的技术内容，重点介绍其中的关键思想。在定理 1中。第 3 节中，我们确立相关术语，回顾有关解释和转导的关键定义，并证明一些辅助引理。第 4 节专门用于证明主要技术结论引理 12，该引理刻画了稀疏化过程中的单个步骤。随后，在第 5 节中，我们展示如何迭代应用这一引理，从而证明定理 1。

最后，在A 节中，我们说明该方法也可用于复现 Braunfeld 等人的稀疏化结果。 [4]：通过将我们的过程应用于任意单子稳定图类，我们可以将其稀疏化为几乎处处稀疏类（正式表述见定理41）。

2 技术概述

出于技术上的原因，使用二分图会更为方便。这不会损失一般性，因为对于任意图 G，都可以计算出一个二分图 G'，使得如果我们能够高效地对 G'进行稀疏化，那么也能够对原图 G进行稀疏化。从 G构造 G' 本质上归结为复制每个顶点；对于一对相邻顶点 u， v，使 u 的第一个副本与 v 的第二个副本相邻，反之亦然。因此，在本节余下部分中，我们将使用一个具有内在线性邻域复杂度的单子稳定二分图类 $\mathscr{C}$。此外，我们可以假设 $\mathscr{C}$ 是遗传的，并且在二分图补图运算下封闭，因为如果将 $\mathscr{C}$ 扩充为对诱导子图和二分图补图运算均封闭，这两个性质仍会保留。

结果描述。 我们的目标是针对任意 $G \in \mathscr{C}$高效计算一个稀疏图 H，使得对于某个仅取决于 $\mathscr{C}$的固定解释 I，有 $G = I(H)$。我们将计算的图 H 具有特殊形式，由两部分组成：它包含原图 G 的所有顶点，但这些顶点之间没有任何连接它们的边；同时还包含一棵有根树 T， G 的顶点将以适当方式与该树相连。关键在于，树 T 具有有界高度（其界仅取决于 $\mathscr{C}$）。下文中，我们将把 T 的顶点称为节点。我们将证明，每个 $v \in V(G)$仅与 T中的有界数量节点相邻（其界 d 仅取决于 $\mathscr{C}$）。这将保证 H 是稀疏的——特别地，它是 d-退化的（即每个子图都含有一个度至多为 d的顶点）。因此，由我们的稀疏化过程计算得到的所有图 H 组成的图类 $\mathscr{D}$ 是 d-退化的。退化性是一种比有界扩张弱得多的稀疏性概念；然而，我们将能够证明， $\mathscr{D}$ 实际上具有有界扩张。

从 H恢复 G 。现在我们将说明如何从 H恢复原图 G 。 T 和 H 的构造将保证：对于 H中的 G 的任意两个顶点 u、 v，总存在一个节点 p，使得 u 和 v 都与 p相邻，但 p 的任何子节点 p' 都不具备这一性质。要确定 v 和 u 在 G中是否相邻，只需计算从 p 到T的根节点的路径上的节点数。如果该数为偶数，则它们相邻；否则，它们不相邻（另见图 1）。这一性质，加上 T 具有有界高度这一事实，使我们能够通过一个一阶公式从 H 恢复G 的邻接关系。需要指出的是，对于任意 u、 $v \in V$（G）， T 中可能存在多个不同的节点具有上述性质，但 T 和 H 的构造将保证，对任意此类节点进行奇偶性检查都会得到相同的结果。

我们指出，上文所述图 H 的形式，以及从 G中恢复 H 的机制，很大程度上受到 Dreier 等人在灌木和准灌木概念的启发。 [8]。我们可以调整算法，使其生成符合 [8], 中定义的灌木或准灌木；不过，上文所述图 H 的形式稍简单一些，更适合用于证明中的论证。

构造 T 和 H。构造 T 和 H 的关键，是由我们的主要技术结论直接得到的以下简单推论：引理 12。

对于任意一个没有孤立顶点的 $G = (A, B, E) \in \mathscr{C}$，我们都可以高效地计算出一组 G 的诱导子图 $G_1, \ldots, G_m$ （此处 m 不受限制），使其满足以下条件。

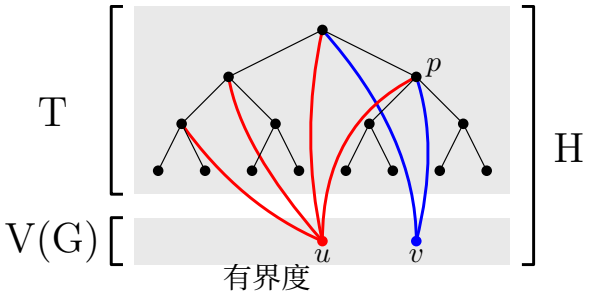

图 1：对于给定的顶点 $u, v \in V(G)$，我们在 H 中展示一个同时与二者相邻的节点 p，且 p 的任何子节点都不同时与二者相邻。从根节点到 p 的路径上有偶数个顶点，因此 u, v 在 G 中相邻。

1. 每个 $v \in V(G)$ 至少属于 G_1、...、G_m 中的一个图，且至多属于其中的 k^* 个图，其中 k^* 是一个仅取决于 $\mathscr{C}$ 的整数。2. G 的每条边都至少包含于一个 G_i 中。3. 根据我们应用引理 12 的方向，将强制满足以下条件之一：(a) 所有图 G_i 都包含一个来自 $A \cap V(G_i)$ 的顶点，该顶点与来自 $B \cap V(G_i)$ 的所有顶点相邻。(b) 所有图 G_i 都包含一个来自 $B \cap V(G_i)$ 的顶点，该顶点与来自 $A \cap V(G_i)$ 的所有顶点相邻。

我们将把这一组诱导子图 G_1、...、G_m（属于 G）称为 左分支 或 右分支，属于 G，具体取决于我们强制满足（3a）还是（3b）。

根据前面介绍的 引理 12，可以通过设置 G 来获得 $m := |\mathcal{F}|$，$G_i := G[N(P_i) \setminus P_i]$，并选择将（3a）中的支配顶点设为 ℓ_i。若要获得右分支，只需交换 A 和 B 的角色。

现在我们来描述树 T。作为构造的一部分，每个节点 p 都会被分配一个图 $G(p)$，它要么是 G 的诱导子图（如果 p 处于偶数深度），要么是 G 的某个诱导子图的二分图补图（如果 p 处于奇数深度）。要构造 T，我们先创建一个根节点 r，并令$G(r) := G$。然后，从 $G(r)$ 中移除所有孤立顶点，并对所得图计算一个左分支 $G_1, \ldots, G_m$。对于每个分支 G_i，我们创建一个新的子节点 p_i，使其成为 r的子节点，并将 $G(p_i)$ 设为 G_i的二分图补图。接着，我们对 r 的每个子节点 p_i 递归执行此过程，并以类似方式处理 $G(p_i)$：同样移除每个 $G(p_i)$ 中的所有孤立顶点，但这次对所得图使用右分支。对于每个分支，我们再次创建一个节点，并将该分支的二分图补图分配给这个子节点。总之，一般构造如下：对于任意节点 p 和图 $G(p)$，我们从 $G(p)$ 中移除所有孤立顶点（如果存在），并根据 p 处于偶数深度还是奇数深度，对 $G(p)$ 计算左分支或右分支 $G_1, \ldots, G_m$。然后，对于每个分支 G_i，我们创建一个新的子节点 p_i，使其成为 p 的子节点，并将 $G(p_i)$ 设为 G_i 的二分图补图，然后递归处理每个 p_i。当 $G(p)$ 为无边图时，递归终止。

对于任意 $G \in \mathscr{C}$，我们将 G 的 梯子指数定义为包含在 G 中、作为诱导子图的半图的最大阶。由于 $\mathscr{C}$ 是单子稳定的，因此存在一个有限上界 t，该上界仅取决于 $\mathscr{C}$，用于限制来自 $\mathscr{C}$ 的图的梯子指数。梯子指数是衡量我们算法进展的一个方便参数：在我们选择的 $G(p)$ 中，G 的诱导子图与 G 的诱导子图的补图之间的交替，以及左分支与右分支之间的交替，会导致梯子指数在构造的每第二步中下降。更准确地说——不难证明，如果 p 和 p'' 是 T 的节点，且 p 是 T 中 p'' 的祖父节点，那么 $G(p'')$ 的梯子指数小于 $G(p)$ 的梯子指数。由于来自 $\mathscr{C}$ 的任意图的梯子指数都被 t 所界定，因此 T 的高度也被 $2t$ 所界定。

从 G 计算出树 T 后，我们通过将 G 的顶点集加入 T（但不加入任何边），并针对每个将 v 与 T 的所有节点 p 相连的 $v \in V(G)$，加入 $v \in V(G(p))$，从而完成 H 的构造。T 的深度上界，以及每个顶点所包含的每个节点对应的分支数上界，确保每个 $v \in V(G)$ 的度都有界。

证明 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张。 证明 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张，可以分为三个部分。首先，证明 $\mathscr{D}$ 弱稀疏，也就是说，存在一个数 h，使得没有$H \in \mathscr{D}$ 包含 $K_{h,\,h}$ 作为子图。这直接源于这样一个事实：对于某个仅取决于 $\mathscr{C}$ 的 d，$\mathscr{D}$ 是 d-退化的，因此我们可以设 $h := d$。

其次，我们证明 $\mathscr{D}$ 可由 $\mathscr{C}$ 转导得到。这在技术上是证明中最具挑战性的部分，但最终可由这样一个事实推出：我们不仅能高效地计算输入图的（左或右）分支，而且算法计算出的分支在适当意义下也可由一阶公式定义。

第三步利用前两步，并结合 Dvoˇr´ak [13] 的一个结果，证明$\mathscr{D}$ 具有有界扩张。该结果指出，如果 $\mathscr{D}$ 是一个弱稀疏图类，那么要证明 $\mathscr{D}$具有有界扩张，只需证明对于每个 $r \geqslant 1$，来自 $\mathscr{D}$的图不包含任意稠密图作为诱导$(\leqslant r)$-细分。我们按如下方式运用这一结果。由于 $\mathscr{D}$可由 $\mathscr{C}$转导得到，我们知道它也具有内在线性邻域复杂度。现在我们采用反证法，假设对于某个固定的$r \geqslant 1$，来自 $\mathscr{D}$的图包含任意稠密图作为诱导$(\leqslant r)$-细分。结合这一点以及 $\mathscr{D}$ 弱稀疏这一假设，我们可以论证存在一个转导T，它从 $\mathscr{D}$ 转导出一个图类，其中包含任意稠密图作为1-细分。显然，这样的图类不可能具有线性邻域复杂度，由此便得到矛盾。

主引理。接下来讨论主引理（引理 12）的证明思路。我们将依赖 Haussler 的装箱引理的以下推论（关于集合系统中打包的一个组合结果）：设$\mathscr{C}$是具有线性邻域复杂度的二分图类。那么存在 k，使得如果 $G = (A, B, E)$是 $\mathscr{C}$中的一个二分图，且在 B中没有孪生点，那么 A 中存在两个顶点u, v，它们是 k-近孪生点。这里，称 u, v是 k-近孪生点，意指它们与 B的邻接关系在除至多 k 个顶点外都一致。需要说明的是，本陈述中使用的数值 k 与主引理中声称的数值 k^* 不同，但我们将看到，k^* 与 k密切相关。

现在我们描述计算 $\mathcal{F}$的算法。令 $n := |A|$。我们设 $G_0 := G$，并按以下方式进行 n 轮。为了从 G_{i-1}得到 G_i，我们首先消去 G_{i-1} 右侧的所有孪生点（每个孪生类恰好保留一个顶点，并删除其余顶点），从而得到图 G'_{i-1}。然后，我们在 G'_{i-1} 中找到一对 u、v，它们是k-近孪生点，并移除其中一个以得到 G_i。我们还将被移除的顶点记作 a_i。如此继续，最终我们会消去整个图，并得到 A的一个序 a_1、.....、a_n。接着，我们按如下方式定义主引理中声称的划分 $\mathcal{F}$：对于每个 $i \in [n]$，令 S_i 为 B 中满足以下条件的顶点 v 的集合：i 是使得 a_i 为 v的邻点的最大指标。然后，我们将 $\mathcal{F}$定义为所有非空集合 S_i组成的集合，并选取 a_i 作为 S_i的领导顶点。

为证明 $\mathcal{F}$ 具有所需性质，我们按如下方式进行。容易看出，$\mathcal{F}$ 的每个部分都包含在其领导顶点的邻域中，因此我们只需证明，A 中的每个顶点至多与 $\mathcal{F}$的 k^* 个部分中的顶点相邻。我们定义二分图 $G(A, \mathcal{F})$，其两侧分别为 A和 $\mathcal{F}$；若 v 在 P中有一个邻点，则对 $v \in A$ 和 $P \in \mathcal{F}$，图中存在一条边 vP。为完成主引理的证明，我们将证明，A 中的每个顶点在 $G(A, \mathcal{F})$中至多有 k^* 个邻点。为此，我们证明 $G(A, \mathcal{F})$具有以下两个性质：

(i) $G(A, \mathcal{F})$的梯子指数有一个仅依赖于 $\mathscr{C}$的常数上界。注意，这并非显然：虽然由于 $\mathscr{C}$是单子稳定的，G 不可能以诱导子图的形式包含一个大的半图，但 $G(A, \mathcal{F})$也不包含大的半图，这一点并非立刻显而易见。

(ii) 对于每个 a_i（满足 $i < n$），都存在一个 a_j（满足 $j > i$），它是 G 中 a_i 的一个 k-近孪生体（A, $\mathcal{F}$ ）.

接下来我们考虑图 K，其顶点集为 $V(G)$，且任意一对k-近孪生点（在 $G(A, \mathcal{F})$中）之间都有边。根据上述性质 (ii)，对于每个 a_i，在 a_n 中都存在一条路径通向 K。特别地，来自 A 的所有顶点都属于 K的同一个连通分量。接着，我们应用 [19]中的结果，该结果

指出，如果 G 是一个梯子指数至多为 t 的图，且 K 是 G的 k-近孪生点图，那么 K 中任意两个属于同一连通分量的顶点都是 G的 k'-近孪生点，其中某个 k' 取决于 t和 k。根据 $\mathcal{F}$的构造可知， a_n 在 $G(A,\mathcal{F})$中的度至多为 1，因此 A中的所有顶点在 $G(A,\mathcal{F})$中的度至多为 $k^* := k'+1$。至此，主引理的证明概要完成。

我们指出，计算划分的算法 $\mathcal{F}$的表述与第4节给出的表述不同。这里的表述更加简洁，而第4节给出的表述更适用于证明中的论证。不过，不难看出，这两种算法表述是等价的。

3 预备知识

对于一个非负整数 k，我们记作 $[k] := \{1,\dots,k\}$。

3.1 图

我们讨论的所有图都是有限的、简单的无向图。我们采用标准的图论术语和记号，下面简要回顾其中一部分。对于图 G 和顶点 $v \in V(G)$，我们用 $N_G(v)$ 表示 v 在 G中的邻点集合。如果 S 是 $V(G)$ 的子集，我们用 $G[S]$ 表示由 S 诱导的 G 的子图。我们定义 $|G| := |V(G)|$ 和 $\|G\| := |E(G)|$。有根树是指一个连通的无环图，其中指定了一个顶点，称为其根节点。树 T 的高度是其任意一条叶到根路径所含边数的最大值。树 T 中顶点 v 的深度是从v 到 T的根节点的唯一路径所含的边数。

设 H 是一个图。 H 的$(\leqslant r)$-细分是指通过将 H 的每条边 uv 替换为一条连接 u 和 v 且至多含有 r 个内部顶点的路径（可以为 0 个，这意味着边保持不变），从 H 得到的任意图。

我们称 H 的原始顶点为$(\leqslant r)$-细分的主顶点，并称各路径的内部顶点为细分顶点。

我们的主要技术引理将针对二分图。对于二分图 $G = (A, B, E)$，我们定义 $L(G) = A$ 和 $R(G) = B$。对于 $X \subseteq A$ 和 $Y \subseteq B$，我们定义 $G[X,Y]$ 为图$\widetilde{\ }(X, Y, E \cap (X \times Y))$。我们将 $G = (A, B, E)$的二分图补图定义为图 $G := (A, B, E')$，其中 $E' := \{uv \in A \times B \mid uv \notin E\}$。

3.2 逻辑

逻辑与图。 我们假设读者熟悉一阶逻辑（FO）。

我们将研究图，并将其建模为定义在一个签名上的结构。该签名由一个二元谓词 adj 组成，用来表示顶点之间的邻接关系。我们的图的顶点通常会标记有（可能彼此重叠的）颜色，每种颜色都由一个额外的一元谓词建模。于是，我们称之为带颜色的 图；如果带颜色的 G' 是通过添加一些一元谓词从 G得到的，那么 G' 就是 G的一种一元着色。明确为二分图的图会配备额外的一元谓词 L 和 R，以区分它们的两侧。

转导与解释。令 $k \in \mathbb{N}$，并令 G为一个图。 G的一个 k-副本是签名 $\{\mathsf{adj}、\mathsf{cp}\}$ 下、论域为 $V(G) \times [k]$ 的结构 G^+，其中二元关系 adj_{G^+} 和 cp_{G^+} 按如下方式定义：$(u, i)(v, j) \in \mathsf{adj}_{G^+}$ 当且仅当 $i = j$且 $uv \in E(G)$；并且 $(u, i)(v, j) \in \mathsf{cp}_{G^+}$当且仅当 $u = v$。直观地说， G^+由 k个 G的不相交副本组成，其中我们可以通过谓词 cp 判断两个顶点是否对应于原图中的同一个顶点。

从图到图的一阶转导由一个数 k、一个有限的一元谓词集合 Λ 以及签名 $\{\mathrm{adj}、\mathrm{cp}\} \cup \Lambda$上的一阶公式 $\psi(x, y)$ 决定。如果 $\mathsf{T} = (k, \Lambda, \psi)$ 是一个转导，且 G 和 H 是图，我们称 T 从 G转导出 H，记作 $H \in \mathsf{T}(G)$，如果 H 可以通过以下步骤从 G 得到：

1. 首先，创建一个 k-副本 G^+ of G。2. 然后，任意地用来自 Λ 的一元谓词标记 G^+ 中的顶点，从而得到 G^+的一个一元着色 G^* 。3. 我们将图 $\psi(G^*)$定义为顶点集为 $V(G^*)$的图，其中当且仅当 $G^* \models \psi(u, v)$时， u, v 之间有一条边。4. 最后，我们将 $\psi(G^*)$的一个任意诱导子图作为所得图 H 。

如果 $\mathscr{C}$是一个图类，我们定义 $\mathsf{T}(\mathscr{C}) := \bigcup_{G \in \mathscr{C}} \mathsf{T}(G)$。于是，如果对于某个转导 T，有 $\mathscr{D} \subseteq \mathsf{T}(\mathscr{C})$，我们就称图类 $\mathscr{D}$ 可由 $\mathscr{C}$ 转导得到。

转导可以复合——如果 S 和 T 是两个转导，我们用$\mathsf{S} \circ \mathsf{T}$表示它们的复合，它仍然是一个转导。有关转导及其性质的更详细概述，请参阅 [17, 30] 。

从图到图的一阶解释由两个公式 $\psi(x, y)$ 和 $\nu(x)$ 组成。如果 $I = (\psi, \nu)$ 是一种解释，且 G 是一个图，我们定义图 $I(G)$ 如下。$I(G)$ 的顶点集是集合 $\{v \in V(G) \mid G \models \nu(v)\}$，而 $I(G)$ 的边集定义为 $\{uv \in V(G) \times V(G) \mid G \models \psi(u, v)\}$。

3.3 图类

图类就是一个图的集合，通常是无限集。我们需要以下标准定义。

定义4. 若存在 $h \in \mathbb{N}$，使得没有图 $G \in \mathscr{C}$包含$K_{h,\, h}$ 作为子图，则称图类 $\mathscr{C}$ 为弱稀疏。

定义 5. 若图 G 的每个子图都包含一个度至多为 d 的顶点，则称图 G 为 d-退化的。若存在 d，使得类 $\mathscr{C}$ 中的每个 $G \in \mathscr{C}$ 都是 d-退化的，则称图类 $\mathscr{C}$ 为退化的。

众所周知，对于每个 d-退化图，都存在一种正常着色，使其顶点使用$d+1$ 种颜色。此外，容易看出，每个退化图类都是弱稀疏的。

定义 6。 阶为 t 的半图，记为 H_t，是一个顶点集为 $\{u_1, \ldots, u_t, v_1, \ldots, v_t\}$ 且边集为 $\{u_i v_j : 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant t\}$ 的图。

We n请注意，阶为 t 的半图在文献中通常也称为阶为 t 的梯子图 .

注 7。 我们经常在二分图的背景下研究半图。容易看出，如果一个具有两侧 A 和 B 的二分图 G 包含一个以 v_1、…、v_n、u_1、…、u_n 为顶点的 H_t 作为诱导子图，那么要么有 v_1、…、$v_n \in A$ 和 u_1、…、$u_n \in B$，要么有 v_1、…、$v_n \in B$ 和 u_1、…、$u_n \in A$。在某些论证中，选择上述两个选项中的哪一个成立会对我们有所便利。这不会造成问题，因为如果 v_1、…、$v_n \in A$ 和 u_1、…、$u_n \in B$，那么我们可以适当地重新命名顶点，使得 v_1、…、$v_n \in B$ 和 u_1、…、$u_n \in A$ 成立，即交换 v_1 和 u_n、v_2 和 u_{n-1} 等顶点的名称。

定义 8。 如果所有半图构成的类都不能从 $\mathscr{C}$ 转导得到，则称图类 $\mathscr{C}$ 为单子稳定 。

定义 9. 我们称图类 $\mathscr{C}$ 具有线性邻域复杂度，如果存在 c，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$ 以及每个非空的 $S \subseteq V(G)$，我们都有

$$|\{N(v) \cap S \,:\, v \in V(G)\}| \leqslant c \cdot |S|.$$

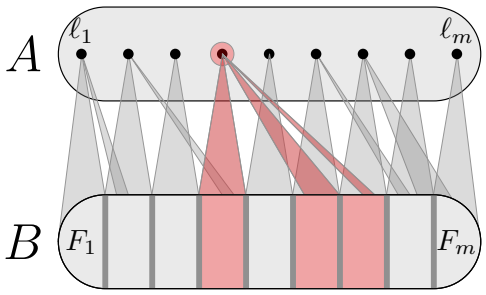

图 2：引理 12的输出示意图。我们可以选取 $k^* = 3$ 并验证，例如，红色顶点至多与 $\mathcal{F}$ 中的 3 个部分相邻，它们也标记为红色。

我们称 $\mathscr{C}$ 具有内在线性邻域复杂度，如果对于每个转导T，类T($\mathscr{C}$)都具有线性邻域复杂度。

我们称图 G 中的两个顶点 u和v 是 k-近孪生点，如果 $|N_G(v) \triangle N_G(u)| \leqslant k$，也就是说，它们的邻域至多有 k 个例外时相同。下面的断言是 Haussler 的打包引理 [23]的一个直接推论。将打包引理从集合系统（Haussler 使用的表述）转述为二分图的表述（例如，见 [5, 引理 3。1]），即可得到以下结论。

引理10。设 $\mathscr{C}$ 是一个具有线性邻域复杂度的二分图遗传类。那么存在一个数 k，使得以下结论成立：对于每个图 $G = (A, B, E) \in \mathscr{C}$，若其在 B 中不含孪生点对且满足 $|A| \geqslant 2$，则集合 A 中包含一对 k-近孪生点。

最后，有界扩张的概念由 Ne$\check{\text{s}}$et$\check{\text{r}}$il 和 Ossona de Mendez [26] 提出。我们不采用其原始定义，而是使用 Dvo$\check{\text{r}}$´ak [13] 给出的以下刻画。

引理 11 ([13]). 图类 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张，当且仅当 $\mathscr{D}$ 是弱稀疏的，并且对于每个 $r \in \mathbb{N}$，都存在 $d \in \mathbb{N}$，使得满足以下条件：若 H 是一个图，且某个 $G \in \mathscr{D}$ 包含一个 H 的$(\leqslant r)$细分作为诱导子图，则 $\frac{\|H\|}{|H|} \leqslant d$。

4 主引理

本节中，我们将证明以下陈述的主技术引理。其结果如图 2所示。

引理 12. 设 $\mathscr{C}$ 是一个具有线性邻域复杂度的二分图单子稳定类。那么，存在一个数 k^* 和一种算法，其运行时间为 $\mathcal{O}(|G|^4)$，该算法对任意给定的、来自 $\mathscr{C}$ 且不含孤立顶点的图 $G = (A, B, E)$，计算 B 的一个划分 $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots, P_{|\mathcal{F}|}\}$ 以及属于 A 的顶点 $\ell_1, \ldots, \ell_{|\mathcal{F}|}$，使得：

- $P_i \subseteq N_G(\ell_i)$，对于每个 $i \in \{1, \ldots, |\mathcal{F}|\}$；并且
- 每个 $v \in A$ 至多在 $\mathcal{F}$ 的 k^* 个部分中有一个邻点，即 $|\{P \in \mathcal{F} \mid N_G(v) \cap P \neq \emptyset\}| \leqslant k^*$.

此外，B 的划分 $\mathcal{F}$ 可按以下意义定义：存在一个一阶公式 领导顶点(x, y)，它仅取决于 $\mathscr{C}$；以及一个图 G^+，它由 G 通过用一元谓词标记顶点而得到，使得对于任意 $u \in A, v \in B$，当且仅当 $u = \ell_i$ 且存在某个 $i \in \{1, \ldots, |\mathcal{F}|\}$ 使得 $G^+ \models$ 领导顶点(u, v) $v \in P_i$ 时，$G^+ \models$成立。

在本节剩余部分中，我们固定一个具有线性邻域复杂度的二分图单子稳定图类 $\mathscr{C}$，并且只研究该图类中的图。不妨假设$\mathscr{C}$是遗传的；这一假设不失一般性，因为单子稳定以及具有线性邻域复杂度这两个性质在将图类对诱导子图取闭包后仍然保持不变。

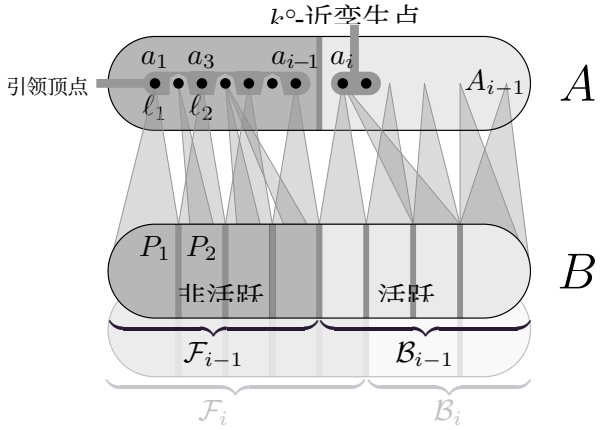

图3：算法第 i 步的可视化。如图所示，每个集合 P_j 都与a_j完全相邻，且与a_{j+1}完全不相邻，a_{j+2}等。顶点 a_i 及其高亮显示的伙伴是1-近孪生点，它们仅在 B_{i-1}从左起第一个集合上存在差异。正如底部的淡化示意所示，$\mathcal{B}_i$ 是通过移除第一个集合（因为 a_i 是其唯一的邻点），并合并第二个和第三个集合（因为 a_i 是其唯一的区分顶点）而从 $\mathcal{B}_{i-1}$ 得到的。

4.1 算法

在继续描述算法之前，我们先介绍一些术语和记号。对于 B的任意集合 $A' \subseteq A$ 和由 B的不相交子集组成的集族 $\mathcal{B}$，我们定义一个二分图 G（A'，$\mathcal{B}$），其两侧分别为A' 和 $\mathcal{B}$；当且仅当 v 在 P中有一个邻点时，$v \in A'$ 与 $P \in \mathcal{B}$ 之间才存在一条边。

设 $A' \subseteq A$。现在假设 $\mathcal{B}$ 是图 $G[A', B]$ 中 B 的孪生类划分，并注意到 $G(A', \mathcal{B})$ 具有以下有用性质。首先，图 $G(A', \mathcal{B})$ 完整编码了 G 中 A' 与 B 之间的连接关系。更确切地说，如果 $v \in A$ 与 $P \in \mathcal{B}$ 之间有一条边，那么在 G 中，v 与 P 的所有顶点都相邻；如果 $v \in A$ 与 $P \in \mathcal{B}$ 之间没有边，那么在 G 中，v 与 P 的任何顶点都不相邻。其次，$G(A', \mathcal{B})$ 是 G 的一个诱导子图（同构意义下），因为它可以通过从 $\mathcal{B}$ 的每个部分中恰好保留一个顶点而从 $G[A', B]$ 得到。最后，注意在 $G(A', \mathcal{B})$ 中不存在互为孪生点的 P 和 $P' \in \mathcal{B}$。因此，由引理10可知，存在一个仅取决于 $\mathscr{C}$ 的 k°，使得在 $G(A', \mathcal{B})$ 中存在 k°- 近孪生点 u 和 $v \in A'$。在本章中，我们始终用 k° 表示引理 10 中的近孪生常数。

现在我们开始描述算法，其可视化展示见 图3。令 $G = (A, B, E)$ 为来自 $\mathscr{C}$的一个输入图。我们令 $n := |A|$。在算法中，我们将计算一个集合序列 $A = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n = \emptyset$，也就是说，每一步都恰好从 A_{i-1} 中移除一个顶点，以得到A_i；这个顶点称为 a_i。

算法的输出将是 $\mathcal{F}$的一个划分 B 以及顶点 ℓ_1、……、$\ell_{|\mathcal{F}|}$，如引理 12的陈述所规定；此外还有一个序 a_1、……、a_n，其作用对象为 A；在证明 $\mathcal{F}$和 ℓ_1、……、$\ell_{|\mathcal{F}|}$ 具有所需性质时，这个序将发挥作用。

我们初始化 $A_0 := A$ 以及 $\mathcal{F}_0 := \emptyset$。对于 $i := 1$ 至 n，我们执行以下操作：

1. 若顶点 v 属于 B，则称其在集合 $A' \subseteq A$ 上是活跃的，当且仅当 v 在 A' 中有一个邻点；否则称 v 为非活跃。令 $\mathcal{B}_{i-1}$ 表示 $G[A_{i-1}, B]$ 中相对于 A_{i-1} 的活跃顶点划分得到的孪生类。找出 $G(A_{i-1}, \mathcal{B}_{i-1})$ 中两个属于 k°-近孪生点的顶点 u，$v \in A_{i-1}$。令 $a_i := u$ 和 $A_i := A_{i-1} \setminus \{u\}$。

2. 若 $P \in \mathcal{B}_{i-1}$ 是一个部分，且 a_i 是 P 在 $G(A_{i-1}, \mathcal{B}_{i-1})$ 中唯一的邻点，则令 $\mathcal{F}_i := \mathcal{F}_{i-1} \cup \{P\}$。此时称 P 在时间 i 被冻结，并称 a_i 为 P 的领导顶点。否则，令 $\mathcal{F}_i := \mathcal{F}_{i-1}$。

令 $\mathcal{F} := \mathcal{F}_n$。按冻结时间对 $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots, P_{|\mathcal{F}|}\}$ 升序排列，并将对应的引领顶点记为 ℓ_1、……、$\ell_{|\mathcal{F}|}$。

该算法的运行时间可由 $\mathcal{O}(|G|^4)$ 界定——算法需要进行 $n \leqslant |G|$ 次迭代，并且每次迭代中寻找一对 k°-近孪生点都可以在立方时间内完成。其余操作

在任意一次迭代中都可以轻松地在立方时间内完成。

我们首先注意到， $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$ 确实是 B的一个划分。

引理 13. 对于每个 $i \in \{0, \ldots, n\}$， $\mathcal{F}_i$ 都是 A_i上非活跃顶点的一个划分。特别地， $\mathcal{F}_n$ 是 B的一个划分。

证明。 对 i使用归纳法。对于 $i = 0$，不存在非活跃顶点（因为我们假设 G 没有孤立顶点），因此空划分 $\mathcal{F}_0$ 具有所需的性质。对于 $i > 0$，如果在第 i次迭代中有顶点变为非活跃（也就是说，如果存在 P，其在 $G\left(A_{i-1}, \mathcal{B}_{i-1}\right)$ 中只有 a_i 作为邻点），那么就将包含所有这些顶点的部分加入 $\mathcal{F}_i$。否则，从 $i-1$ 到 i时，非活跃顶点集合保持不变，此时算法使用相同的划分。 □

备注 14. 我们注意到， $\mathcal{F}$ 还有一种更静态的定义，由此可以立即看出它是 B的一个划分。设 $a_1, \ldots, a_n$ 是算法给出的 A 的顶点顺序。那么对于每个 $i \in [n]$，令 S_i 由所有满足 $va_i \in E(G)$ 但对所有 $j > i$都满足 $va_j \notin E(G)$ 的顶点 $v \in B$ 组成（换言之， i 是使 a_i 成为 v的邻点的最大指标）。然后我们设 $\mathcal{F} := \{S_i : \ S_i \neq \emptyset\}$，并且对于每个 $S_i \in \mathcal{F}$，称 a_i 为其领导顶点。

由于 $\mathcal{F}$ 是一个划分，并且根据构造，对于每个 $P_i \in \mathcal{F}$，都有 $P_i \subseteq N_G(\ell_i)$，因此引理的第一条断言得证。本节余下内容将用于证明引理的第二条断言，具体表述如下。

引理 15。存在仅取决于 $\mathscr{C}$ 的 k^*，使得在图 $G(A, \mathcal{F})$ 中， A 的每个顶点的度至多为 k^*。

4.2 引理 15的证明

引理 15是以下三个引理的简单推论。我们将引理16和17 的技术性证明推迟到4.2.1 节和4.2.2，并先说明它们如何推出引理 15。

回顾一下， k° 是引理10中的常数，算法中用到了它。

引理16。设 $G \in \mathscr{C}$，并设 a_1、……、 a_n 为算法从 A 计算得到的顶点顺序。那么，对于每个 $i < n$，存在 $j > i$，使得 a_j 是图 $G(A, \mathcal{F})$ 中 a_i 的一个 k°-近孪点。

引理17。 存在 $t \in \mathbb{N}$，使得对于所有满足 $G = (A, B, E)$的 $G \in \mathscr{C}$，图 $G(A, \mathcal{F})$ 都不含有阶为 t的半图作为诱导子图。

第三个引理归功于 Gajarsk´y 和 McCarty [19]。为陈述该引理，我们需要一些术语。对于每个图 G 和一个非负整数 k，我们定义 k-近孪生图 为图 G，其顶点集为$V(G)$，其中顶点 u与 v之间存在一条边，当且仅当 u与 v是 k在 G中的近孪生点。

引理18 ([19, 引理 23])。 存在一个函数 $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$，使得对于任意 $k, t \in \mathbb{N}$，若 G 是一个不含阶为 t 的半图作为半诱导 [4]

子图的图，且 u 与 v 是 G的 k-近孪生图中同一连通分支内的顶点，则 u 与 v是 G中的 $h(k, t)$-近孪生点。

引理15的证明。令 H 为 $G(A, \mathcal{F})$ 的 k°-近孪生图。根据引理16，每个满足 $i < n$ 的顶点 a_i 都与某个满足 $j > i$ 的 a_j 在 H 中相邻。因此，从每个 a_i 都有一条路径通向 H 中的 a_n，所以 A 中的所有顶点都位于 H 的同一个连通分量 C 中。由于根据引理17，图

[4]半诱导子图的精确定义对我们来说并不重要，但例如可以在 [20]中找到。我们只需注意，对于每个 $t \geqslant 1$ 以及每个二分图 G，以下结论成立： G 包含 H_t 作为半诱导子图，当且仅当G 包含 H_t 作为诱导子图。

根据引理18，由于 $G(A,\mathcal{F})$ 不包含阶为 t 的半图作为诱导子图，C 中的所有顶点在 $G(A,\mathcal{F})$ 中两两互为 $h(k^\circ,t)$-近孪生点。由于从 $G(A,\mathcal{F})$ 的构造中很容易看出，a_n 在 $G(A,\mathcal{F})$ 中的度为 1，因此 C 中的每个顶点在 $G(A,\mathcal{F})$ 中的度至多为 $h(k^\circ,t)+1$。由于 A 中的每个顶点都属于 C，引理的结论得证。□

4.2.1 证明引理16

回顾一下，算法会计算集合 $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n$，并且对于每个 i，我们考虑了活跃顶点在 A_i上的划分$\mathcal{B}_i$。根据引理 13，每个 $\mathcal{F}_i$ 都是非活动顶点在 A_i上的划分。因此，我们可以为每个 i 定义一个 $\mathcal{P}_i$ 的划分 B，定义方式如下：$\mathcal{P}_i := \mathcal{B}_i \cup \mathcal{F}_i$。于是有以下结论。

引理 19。 对于每个 $i \in \{1,\ldots,n\}$，$\mathcal{P}_i$ 都是 $\mathcal{P}_{i-1}$ 的粗化。

证明。任取 $P \in \mathcal{P}_{i-1}$。我们将说明，$P \in \mathcal{F}_i$ 或 P是某个 $P' \in \mathcal{B}_i$的子集。若$P \in \mathcal{F}_{i-1}$，则显然有 $P \in \mathcal{F}_i$。若 $P \in \mathcal{B}_{i-1}$，且 a_i 是 P在 G中唯一的邻点（A_{i-1}，$\mathcal{B}_{i-1}$），那么同样有$P \in \mathcal{F}_i$。最后，若 $P \in \mathcal{B}_{i-1}$，且 P在 G中的邻域（A_{i-1}，$\mathcal{B}_{i-1}$）是一个非空集合 S，且不同于 $\{a_i\}$，那么令 $P' := \{v \in B \mid N_G(v) \cap A_i = S \setminus \{a_i\}\}$。于是 $P \subseteq P'$且 $P' \in B_i$，证毕。□

我们还将使用以下引理。

引理 20. 设 $G=(A,B,E)$ 是一个二分图，并设 $\mathcal{P},\mathcal{P}'$ 是 B 的划分，且 $\mathcal{P}'$ 是 $\mathcal{P}$的粗化。假设 $u,v \in A$ 是 $G(A,\mathcal{P})$中的 k-近孪生点。那么，u,v 是 $G(A,\mathcal{P}')$中的 k-近孪生点。

证明。设 P是 $\mathcal{P}'$ 的任意一个部分，使得 u 和 v 与 P的邻接关系在 $G(A,\mathcal{P}')$ 中不同。那么必定存在一个部分 $Q \in \mathcal{P}$，使得 $Q \subseteq P$，并且 u 和 v 与 Q 的邻接关系在 $G(A,\mathcal{P})$ 中不同。由于 $\mathcal{P}$中这样的部分至多有 k 个，因此如上所述的不同部分 $P \in \mathcal{P}'$ 至多有 k 个。□

引理 16 的证明。固定任意一个 $i \in \{1,\ldots,n-1\}$。我们知道 $a_i = u$，其中 u,v是在算法的第 i 次迭代中找到的 $G(A_{i-1},\mathcal{B}_{i-1})$ 的 k°-近孪生点。在这次迭代中，a_i 从集合A_{i-1} 中移除，从而得到 A_i，但 v 仍留在集合 A_i中。因此，我们知道 v 在之后的某次迭代中从 G中移除，即作为某个 $j>i$的a_j。

由于 a_i、a_j 是 G（A_{i-1}、$\mathcal{B}_{i-1}$）中的 k°-近孪生点，并且 a_i、a_j 都与从 $\mathcal{F}_{i-1}$ 开始的所有部分不相邻（因为这些部分由 $G[A_{i-1},B]$ 中的孤立顶点组成），因此这两个顶点在 G（A_{i-1}、$\mathcal{P}_{i-1}$）中也互为 k°-近孪生点。随后，由于用 A 替换 A_{i-1} 不会影响 a_i、a_j 与图右侧的邻接关系，a_i、a_j 在 G（A、$\mathcal{P}_{i-1}$）中也互为 k°-近孪生点。结合引理 19 和 20，并反复应用它们，我们得到 a_i 和 a_j 在 G（A、$\mathcal{P}_i$）G（A、$\mathcal{P}_{i+1}$）.....G（A、$\mathcal{P}_n$）中也互为 k°-近孪生点。由于 $\mathcal{P}_n = \mathcal{B}_n \cup \mathcal{F}_n$ 和 $\mathcal{B}_n = \emptyset$，我们有 $\mathcal{P}_n = \mathcal{F}_n$。然后，由于 $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$，结论成立。□

4.2.2 证明引理17

在证明引理17之前，我们注意到，完全图的诱导1-细分既是单子稳定性的障碍，也是线性邻域复杂度的障碍。

引理 21. 设 $\mathscr{C}$ 为一个图类，使得对于每个 $t \in \mathbb{N}$，K_t 的1-细分都是 $\mathscr{C}$中某个图的诱导子图。那么，$\mathscr{C}$ 不是单子稳定的。

证明。要看出 $\mathscr{C}$不是单子稳定的，只需注意，存在一个固定的无复制转导，它能从 K_{2t} 的一个 1-细分 G 转导出半图 H_t，方法如下：考虑 G的 $2t$ 个主顶点，将它们记为 u_1、.....、u_t、v_1、.....、v_t，并用一个一元谓词 Q标记它们。然后，对每个 $i \leqslant j$，用一个一元谓词 P标记路径 u_i 与v_j 之间的细分顶点。将所得的着色图记为 G^*。该转导的公式 ψ 在任意两个顶点 x 和 y 之间建立一条边，当且仅当

它们都被 Q 标记，且它们有一个被 P标记的公共邻点。这样恰好在满足 $i \leqslant j$的顶点$u_i v_j$ 之间生成边。所得图便是 $\psi(G^*)$中由谓词 Q标记的顶点所诱导的子图。

□

在引理17 的证明中，我们需要下面这个辅助类 Ramsey 引理。

引理 22. 存在一个函数 $\beta\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，具有如下性质。设 $G(A,B,E)$ 是一个满足 $A=\{\ell_1,\dots,\ell_m\}$ 的二分图。设 $\mathcal{P}=\{P_1,\dots,P_m\}$ 是 B 的一个划分，使得

- 对于每个 $i\in[m]$ 我们有 $P_i\subseteq N_G(\ell_i)$，并且
- 对于每个 $i\in[m]$，我们有 $N_G(\ell_i)\cap P_j=\emptyset$ 对所有 $j<i$ 以及 $N_G(\ell_i)\cap P_j\neq\emptyset$ 对所有 $j>i$。

进一步假设，对于某些 a、$b\in\mathbb{N}$，有 $m>\beta(a,b)$。那么，G 包含 H_a（阶为 a 的半图）作为诱导子图，或者包含 K_b 的一个1-细分作为诱导子图，且其中所有主顶点都属于 A。

证明。对于 $a=1$ 或 $b=1$，我们令 $\beta(1,n)=\beta(n,1)=1$。对于 $a>1$ 和 $b>1$，我们令

$$\beta(a,b):=(\beta(a-1,b)+\beta(a,b-1))^2+1.$$

我们对 $a+b$ 使用归纳法证明该结论。在基例中，当 $a+b=2$ 时，我们有 $a=b=1$；根据该引理的假设（取 $m=1$），图 G 中存在一条边，连接 ℓ_1 和 P_1中的某个顶点，因此包含 H_1 作为诱导子图。

对于 $a+b>2$，我们区分两种可能：

1. 存在一个顶点 $v\in P_m$，它与 $\{\ell_1,\dots,\ell_{m-1}\}$ 中至少 $\sqrt{m-1}$ 个顶点相邻。在这种情况下，令 $\{\ell_{i_1},\dots,\ell_{i_t}\}$ 为 v 的这些邻点。注意，$t\geqslant\sqrt{m-1}\geqslant\beta(a-1,b)$。我们令 $A':=\{\ell_{i_1},\dots,\ell_{i_t}\}$，并令 $B':=P_{i_1}\cup\ldots\cup P_{i_t}$。图 $G'=G[A',B']$ 连同划分$\mathcal{P}':=\{P_{i_1},\dots,P_{i_t}\}$ 满足该引理关于 $\beta(a-1,b)$ 的假设，因此根据归纳法，G'包含 H_{a-1} 或 K_b 的一个 1-细分作为诱导子图。后一种情况便得证；而在前一种情况下，G' 中 H_{a-1} 的副本与 ℓ_m 和 v 一起，在 G 中构成一个诱导 H_a（回顾注 7，H_{a-1} 的副本以“良好”的方式嵌入 G' 中，因此 ℓ_m 和 v 确实将H_{a-1} 延伸至 H_a）。

2. 每个 $v\in P_m$在 $\{\ell_1,\dots,\ell_{m-1}\}$中相邻的顶点少于 $\sqrt{m-1}$。在这种情况下，令$M\subseteq P_m$为支配 $\{\ell_1,\dots,\ell_{m-1}\}$的最小集合，即满足 $\{\ell_1,\dots,\ell_{m-1}\}\subseteq\bigcup_{v\in M}N_G(v)$。由于每个 $v\in P_m$在 $\{\ell_1,\dots,\ell_{m-1}\}$中的邻点少于 $\sqrt{m-1}$，因此我们有$|M|\geqslant\sqrt{m-1}\geqslant\beta(a,\ b-1)$。

   此外，对于每个 $v\in M$，存在指标 $i(v)\in[m-1]$，使得 $\ell_{i(v)}$与 v相邻，且与 $M\setminus\{v\}$中的任何顶点都不相邻。因此，集合 M与集合 $N:=\{\ell_{i(v)}\colon v\in M\}$构成了 G中阶至少为 $\beta(a,b-1)$ 的诱导匹配。现在我们考虑由 $A':=N$ 和 $B':=\bigcup_{v\in M}P_{i(v)}$在 G 中诱导出的G' 的子图。图 G' 连同其划分$\mathcal{P}'=\{P_{i(v)}\colon v\in M\}$ 满足引理对 $\beta(a,b-1)$ 的假设，因此根据归纳法，G'包含 H_a 或一个作为诱导子图的 K_{b-1} 的 1-细分。如果 G' 包含一个诱导的 H_a，则结论成立。否则，G' 包含一个作为诱导子图的 K_{b-1} 的 1-细分，其中所有主顶点都属于 A'。然后，加入 ℓ_m 和 M 后，我们得到 G 的一个诱导子图，它是 K_b 的 1-细分，且所有主顶点都属于 A。

□

引理17的证明。反设存在某个 t，使得对于每个 $G\in\mathscr{C}$，都有某个 H_t，阶为 t 的半图是 $G(A,\mathcal{F})$ 的诱导子图。令 $\{x_1,\dots,x_t\}$ 和 $\{y_1,\dots,y_t\}$ 为这个诱导子图的两侧。对于每个 $i\in[t]$，x_i和 y_i 中必有一个属于 $\mathcal{F}$，因为 $x_iy_i\in E(H_t)$ 和 $G(A,\mathcal{F})$ 是二分图。因此，$\mathcal{F}$ 中有 t 个部分是 H_t的诱导副本的顶点；将这些部分按冻结时间升序排列，

记为 P_1、……、P_t，并令 ℓ_1、……、ℓ_t 为它们的引领顶点。注意，由于 P_1、……、P_t 按冻结时间排列，对于任意 $i < j$，我们有 $P_i \cap N_G(\ell_j) = \emptyset$，因为部分 P_i 冻结时（设时间为 τ），它与 A_τ 中的顶点之间没有边；并且我们知道 $\ell_j \in A_\tau$，因为部分 P_j 在部分 P_i 之后冻结。

我们构造一个辅助图 K，其顶点集为 $[t]$；当且仅当 $N_G(\ell_i) \cap P_j \neq \emptyset$ 时，i与 j 之间存在边 $i < j$。根据拉姆齐定理，图 K 包含一个大小至少为 $\frac{1}{2}\log_2 t$ 的团或独立集。我们分两种情况讨论：

1. K 包含一个大小为 $m \geqslant \frac{1}{2}\log_2 t$ 的团。设该团的顶点为 $i_1, \ldots, i_m$。那么，顶点$\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_m}$和集合 $P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}$ 满足引理 22 的假设。因此，对于任意满足$m > \beta(p,p)$的 p，图 G 都包含 H_p 或 K_p 的一个 1-细分作为诱导子图。由于我们假设 t 可以任意大，且$m \geqslant \frac{1}{2}\log t$，我们知道 m 可以任意大。因此，对于任意选择的 p，我们都可以得到 $m > \beta(p,p)$，由此可知，来自 $\mathscr{C}$的图包含任意大的半图或团的任意大 1-细分作为诱导子图。因此，根据定义或引理 21，$\mathscr{C}$不是单子稳定的，这就产生了矛盾。

2. K 包含一个大小为$m \geqslant \frac{1}{2}\log_2 t$的独立集。设 $i_1, \ldots, i_m$ 为该独立集的顶点。根据本证明开头所作的假设，对于 $\mathcal{F}' := \{P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}\}$，图$G(A, \mathcal{F}')$包含 H_m 作为诱导子图。设 $v_1, \ldots, v_m$ 为该 H_m 中属于 A的顶点。现在我们将论证，存在一个不依赖于 G（仅取决于 $\mathscr{C}$）的一阶公式 $\psi(x, y)$，以及对 G 中顶点的一种标记，使得$\psi(G)$的诱导子图为 H_m。我们先说明标记方式。我们用一元谓词 U标记引领顶点$\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_m}$，并用一元谓词 Q标记$P_{i_1} \cup \ldots \cup P_{i_m}$ 中的所有顶点。在 $P_{i_1} \cup \ldots \cup P_{i_m} \cup \{\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_m}\}$所诱导的 G 的子图中，每个部分 P_{i_j} 恰好是 ℓ_{i_j}的邻域。因此，公式

$$\mathsf{samepart}(x, y) := Q(x) \wedge Q(y) \wedge \exists z \big(U(z) \wedge \mathsf{adj}(x, z) \wedge \mathsf{adj}(y, z)\big).$$

表达的是，两个顶点 u、v 在某个 P_{i_j} 对应的同一部分中，其中 j。

现在，我们将 $\psi(x, y)$ 定义为公式 $\exists z(\mathsf{samepart}(y, z) \wedge \mathsf{adj}(x, z))$ 的对称版本。该公式会在 $\psi(G)$ 中的任意 $v \in A$与 P_{i_j} 的所有顶点之间添加边，只要存在 $u \in P_{i_j}$ 使得 vu 是 G 的一条边。因此，特别地，在 $\psi(G)$ 中，顶点 v_1 与 $P_{i_1} \cup \ldots \cup P_{i_m}$ 中的所有顶点相邻，顶点 v_2 与 $P_{i_2} \cup \ldots \cup P_{i_m}$ 中的所有顶点相邻；一般而言，顶点 v_j 与来自 $P_{i_j} \cup \ldots \cup P_{i_m}$ 的所有顶点相邻。这意味着 $\psi(G)$ 包含一个阶为 m 的半图作为诱导子图（对于每个 $j \in [m]$，我们只需从 P_{i_j} 中任意选取一个顶点 u_{i_j}）。由于我们假设 t 可以任意大，且 $m \geqslant \frac{1}{2}\log_2 t$，因此图 $\psi(G)$ 包含任意大的半图作为诱导子图。对 G 的标记与公式 ψ 一起，因而确定了一个从 $\mathscr{C}$ 出发的（非复制）转导 T，使得 T($\mathscr{C}$) 包含任意大的半图，这与 $\mathscr{C}$ 是单子稳定的假设矛盾。□

4.3 $\mathcal{F}$的可定义性

还需证明，该划分 $\mathcal{F}$ 按照引理 12所述的意义是可定义的。为此，我们提供一个公式 领导顶点(x, y)，并说明如何为每个 $G \in \mathscr{C}$的顶点定义适当的标记。

我们从标记 G 的顶点开始。令 $\mathcal{F}$ 为算法计算得到的 B 的划分，并令 $m := |\mathcal{F}|$。令 $P_1, \ldots, P_m$ 为 $\mathcal{F}$ 的部分，并令 $\ell_1, \ldots, \ell_m$ 为相应的领导顶点。定义一个辅助图 K，其顶点集为 $[m]$；当且仅当 ℓ_i 在 P_j 中有一个邻点，或 ℓ_j 在 P_i 中有一个邻点时，ij 是一条边。由于顶点 $\ell_1, \ldots, \ell_m$ 均属于 A，并且（根据引理 15）每个

属于 A 的顶点至多与 $\mathcal{F}$ 中的 k^* 个部分中的顶点相邻，因此图 K 至多有 k^*m 条边。所以， K 中存在一个度至多为 $2k^*$ 的顶点。此外，根据 K 的定义，如果 S 是 $[m]$ 的子集，那么 $K[S]$ 至多有 $k^*|S|$ 条边，因此同样存在一个度至多为 $2k^*$ 的顶点。由此可知， K 是 $2k^*$-退化的，因此存在一个使用至多 $2k^*+1$ 种颜色的正常着色 λ，它对 $[m]$ 进行着色。令 C 表示该着色所用颜色的集合。我们引入 $2k^*+1$ 个一元谓词 M_c，每种颜色 $c \in C$ 对应一个。对于每个 $i \in [m]$，用一元谓词 M_c 标记 ℓ_i 以及 P_i 中的所有顶点，其中 $c = \lambda(i)$。这一构造保证：每当某个 ℓ_i 与某个满足相同谓词 M_c 的 $v \in B$ 相邻时，就有 $v \in P_i$。显然，反过来也成立——如果 $v \in P_i$，那么它与 ℓ_i 相邻，并且带有相同的一元谓词标记。

于是我们可以定义

$$\mathsf{leader}(x,y) := \bigvee_{c \in C} (L(x) \wedge M_c(x) \wedge M_c(y) \wedge \mathsf{adj}(x,y)).$$

这个公式首先检查 x 是否位于 G的左侧，然后检查上述条件是否成立。至此，引理12的证明完成。

4.4 邻域覆盖

本节证明引理 3。为方便起见，我们回顾相关定义及引理的陈述。图 G 的邻域覆盖是由 $V(G)$ 的子集组成的集合 $\mathcal{X}$，这些子集称为簇，并满足：对于每个 $v \in V(G)$，都存在 $X \in \mathcal{X}$ 使得 $N_G[v] \subseteq X$。如果存在 $V(G)$ 的一个划分 $\mathcal{P}$，满足 (i) 对每个 $P \in \mathcal{P}$，都存在 $u \in V(G)$，使得$P \subseteq N_G[u]$；并且 (ii) 对每个 $X \in \mathcal{X}$，都有 $X = N_G[P]$ 对某个 $P \in \mathcal{P}$ 成立，那么我们称邻域覆盖 $\mathcal{X}$ 是紧致的。此外，如果每个顶点 v 至多属于 $\mathcal{X}$ 的 k 个簇，我们就称邻域覆盖 $\mathcal{X}$ 的重叠为 k。

引理 3. 设 $\mathscr{C}$ 是一个具有内在线性邻域复杂度的单子稳定图类。那么存在一个常数 $k \in \mathbb{N}$ 和一种算法，可以在时间 $\mathcal{O}(|G|^4)$内为任意 $G \in \mathscr{C}$ 计算重叠度为 k 的紧邻域覆盖。

证明。对于一个图 G，我们定义 Double(G) 为二分图 (A, B, E)，其两侧分别为 $A = V(G) \times \{0\}$ 和 $B = V(G) \times \{1\}$，边集为 $E = \{(u,0)(v,1) : uv \in E(G)\} \cup \{(u,0)(u,1): u \in V(G)\}$。因此，Double($G$) 是图的标准“二分化”，并且我们还在每个顶点的两个副本之间添加一条边。此外，令 ρ 为一个函数，将 Double(G) 中的顶点映射到原图 G 中的顶点。也就是说，对于所有 $v \in V(G)$，我们设 $\rho((v,0)) = \rho((v,1)) := v$。对于顶点集$S \subseteq V$(Double($G$))，我们定义 $\rho(S) := \{\rho(v) : v \in S\}$。

很容易看出，$\{\text{Double}(G) : G \in \mathscr{C}\}$ 可由 $\mathscr{C}$可转导，因此也具有单子稳定性和内在线性邻域复杂度。于是，我们可以将引理 12 中的算法应用于此类。令 $k^* \in \mathbb{N}$ 为引理中所述的相应常数。

令 $G \in \mathscr{C}$。注意，Double(G) 根据构造不含任何孤立顶点。我们将引理 12 中的算法应用于 Double(G)。由此得到 $\mathcal{F}$对 B的划分，以及顶点 $\ell_1, \ldots, \ell_{|\mathcal{F}|}$，它们具有所述性质。

接着，我们令 $\mathcal{X} := \{N_G[\rho(P)] : P \in \mathcal{F}\}$，并声称这是原图 G的一个紧邻域覆盖，重叠为 $k := k^*$。为此，令 $\mathcal{P} := \{\rho(P) : P \in \mathcal{F}\}$。显然，这是 $V(G)$的一个划分，并且每个 $X \in \mathcal{X}$都具有 $N_G[Q]$的形式，其中 $Q \in \mathcal{P}$。

由于对于每个 $i \in \{1, \ldots, |\mathcal{F}|\}$，在 Double($G$) 中都有 $P_i \subseteq N(\ell_i)$，因此我们知道，$\rho(P_i)$ 中的每个顶点要么是 G 中 $\rho(\ell_i)$ 的邻点，要么就是 $\rho(\ell_i)$ 本身。因此，对于每个 i，我们有 $\rho(P_i) \subseteq N_G[\rho(\ell_i)]$，这意味着 $\mathcal{X}$ 紧致的要求 (i) 得以满足。根据定义，要求 (ii) 也得以满足。这证明了 $\mathcal{X}$ 是紧致的。最后，还需证明每个 $v \in V(G)$ 至多属于 $\mathcal{X}$ 的 $k^* = k$ 个簇。由于 $\mathcal{X}$ 的每个部分 X 都具有 $N_G[Q]$ 的形式，其中某个 $Q \in \mathcal{P}$，我们需要证明

v 至多属于这种形式的 k^* 个集合。对于每个满足 $v \in N_G[Q]$ 的 Q，我们有 $v \in Q$ 或 $v \in N_G(Q)$，接下来将根据这两种情况统计包含 v 的簇的数量。首先，由于 $\mathcal{P}$ 是 $V(G)$ 的一个划分，我们知道 $\mathcal{P}$ 中恰有一个部分 Q 满足 $v \in Q$；我们将此部分记为 Q_v。其次，由引理 12 可知，$v' := (v, 0)$ 至多在 $\mathcal{F}$ 的 k^* 个部分 P 中有邻点。因此，对于 $\mathcal{P}$ 中至多 k^* 个部分 $Q = \rho(P)$，我们有 $v \in N_G(Q)$。结合上述关于 $v \in Q$ 和 $v \in N_G(Q)$ 的两种情况，可得 v 至多包含在 $\mathcal{X}$ 的 $k^* + 1$ 个簇中。然而，容易验证，满足 $Q_v = \rho(P)$ 的部分 $P \in \mathcal{F}$ 是 $(v, 0)$ 有邻点的 k^* 个部分之一（我们有 $(v, 1) \in P$，且这是 $(v, 0)$ 的一个邻点），因此簇 $N_G[Q_v]$ 已计入其中。于是，v 至多属于 $\mathcal{X}$ 的 k^* 个簇。

□

5 高效稀疏化

在本节中，我们证明定理 1，为方便起见，下面重新陈述该定理。

定理 1。设 $\mathscr{C}$ 是一个具有内在线性邻域复杂度的单子稳定图类。那么存在一个 $\mathscr{C}$ 可转导的有界扩张图类 $\mathscr{D}$、一个算法 $\mathcal{A}$ 和一个一阶解释 I，使得以下结论成立：对于任意一个有 n 个顶点的输入图 $G \in \mathscr{C}$，算法 $\mathcal{A}$ 可在 $\mathcal{O}(n^4)$ 时间内计算出一个着色图 $H \in \mathscr{D}$，使得 $G = I(H)$。

本节余下部分将用于证明定理 1。首先，在第 5.1 节中，我们证明只需在二分图的情形下证明定理 1。在第 5.2 节中，我们介绍一种有用的工具，它允许我们递归分解输入图。随后，在第 5.3 节中，我们描述算法 $\mathcal{A}$，该算法针对每个 $G \in \mathscr{C}$ 计算一个符合定理 1 所述要求的图 H。我们将这个图记作 $S(G)$，并定义图类 $\mathscr{D} := \{S(G) : G \in \mathscr{C}\}$。接下来的各节将分析图 $S(G)$ 的性质（第 5.4 节），界定 $\mathcal{A}$ 的运行时间（第 5.5 节），并定义一个合适的解释 I（第5.6节）。此后，还需证明第 5.3 节中定义的图类 $\mathscr{D}$ 确实具有有界扩张。这是定理 1 证明中技术上最具挑战性的部分，分为两步：先证明 $\mathscr{D}$ 可由 $\mathscr{C}$ 转导得到（第 5.7 节），然后利用这一点，最终在第 5.8 节证明该结果。

5.1 二分图

对我们来说，研究二分图会更加方便。为了说明聚焦于二分图并不会限制我们结果的适用范围，下面我们论证：如果定理 1 在附加假设 $\mathscr{C}$ 下对一类二分图成立，那么一般形式的定理 1 也成立。

令 $\mathscr{C}$ 因此为满足定理 1 假设的（不一定是二分）图类。对于每个 $G \in \mathscr{C}$，我们定义图 $B(G)$ 如下。$B(G)$ 的顶点集为 $V(G) \times \{L, R, P_1, P_2\}$。$B(G)$ 的边集由以下边组成：对于每对满足 $uv \in E(G)$ 的顶点 u、v，$B(G)$ 中都有边 $(u, L)(v, R)$ 和 $(v, L)(u, R)$。此外，对于每个 $u \in V(G)$，$B(G)$ 中都有边构成路径 $(u, L)(u, P_1)(u, P_2)(u, R)$。容易验证，$B(G)$ 是一个二分图——一侧由 $V(G) \times \{L, P_2\}$ 中的顶点构成，另一侧由 $V(G) \times \{R, P_1\}$ 中的顶点构成。接着，我们定义 $\mathscr{C}' := \{B(G) : G \in \mathscr{C}\}$。我们论证存在一个解释 J，使得对于任意 G，都存在一种通过一元谓词对 $B(G)$ 进行标记的方式，使得 $G = J(B(G))$。该解释首先使用 L、R、P_1- 和 P_2-谓词识别每个顶点的四个副本，然后在 (u, L) 与 (v, R) 相邻时连接两个顶点 (u, L) 和 (v, L)，最后仅输出 L-顶点。还要注意，$\mathscr{C}'$ 可由 $\mathscr{C}$ 转导得到，并且对于每个 $G \in \mathscr{C}$，我们都可以在二次时间内轻松计算出 $B(G)$。由于 $\mathscr{C}'$ 可由 $\mathscr{C}$ 转导得到，它也满足定理 1 的假设。因此，我们可以将定理 1 应用于 $\mathscr{C}'$，从而得到算法 $\mathcal{A}'$、解释 I' 以及有界扩张图类 $\mathscr{D}'$，并具备定理中所述的性质。下面通过指定所需的算法 $\mathcal{A}$、解释 I 和图类 $\mathscr{D}$，论证定理 1 对图类 $\mathscr{C}$ 也成立。我们令 $\mathscr{D} := \mathscr{D}'$。算法 $\mathcal{A}$ 接收输入图

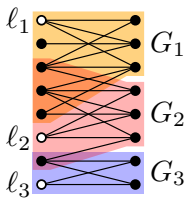

图4：将二分图左分支为三个分支G_1，G_2，G_3，其领导顶点分别为 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3。如要求的那样，每条边至少属于一个分支，每个右侧顶点恰好属于一个分支。每个左侧顶点至多属于两个分支，因此该分支的重叠度为二。

$G \in \mathscr{C}$，计算 $B(G)$，将算法 $\mathcal{A}'$ 应用于 $B(G)$，并返回其输出结果 H。解释 I通过将 J 与 I'复合而实现，即先将 I' 应用于 H以得到 $B(G)$，然后将 J 应用于$B(G)$以得到 G。I' 和 J所使用的 H 和 $B(G)$的标记可以按照某种方式组合，从而确实有 $G = (J \circ I)(H)$。

这表明，只需证明定理 1 对于二分图这一特殊情形成立即可。在本节剩余部分，我们固定一个满足$\mathscr{C}$定理 1假设的二分图单子稳定类。为方便起见，我们假设 $\mathscr{C}$ 在诱导子图和二分图补图运算下封闭。这不会损失一般性，因为如果将 $\mathscr{C}$ 对诱导子图和二分图补图运算封闭，单子稳定性和具有内在线性邻域复杂度这两个性质仍然保持不变。

5.2 分支

现在我们给出 分支 在 第 2 节 中概述的精确定义，并根据 引理 12 推导出重叠较小的分支的存在性。这类分支是构造 $S(G)$ 的关键要素。

定义 23。 设 $G \in \mathscr{C}$。 G 的一个左分支 是由 G的诱导子图 $G_1, \ldots, G_m$ 组成的集合，满足以下条件：

1. $L(G)$中存在互不相同的顶点 $\ell_1, \ldots, \ell_m$，使得对每个 $i \in [m]$，都有 $\ell_i \in L(G_i)$，且ℓ_i 在 G_i 中支配 $R(G_i)$（也就是说，$R(G_i) \subseteq N_{G_i}(\ell_i)$）。*2.* 对于每个 $uv \in E(G)$，都存在一个 $i \in [m]$，使得 $u, v \in V(G_i)$。*3.* 集合 $R(G_1), \ldots, R(G_m)$ 构成 $R(G)$ 的一个划分。

图 G_1、……、G_m 称为分支，顶点 ℓ_1、……、ℓ_m 称为它们的引领顶点。如果 G 的每个顶点至多属于 G_1、……、G_m 中的 k 个图，则称该分支的重叠为 k。G 的右分支定义类似，只需交换 $R(G)$ 和 $L(G)$ 的角色。

图4 说明了定义 23。以下引理是引理 12的一个简单推论。

引理 24. 存在 $k \in \mathbb{N}$，以及一个运行时间为 $\mathcal{O}(|G|^4)$ 的算法，该算法可为任意 $G \in \mathscr{C}$ 计算重叠至多为 k 的左（或右）分支。

此外，存在一个一阶公式分支(x, y)，使得对于任意 $G \in \mathscr{C}$ 以及由该算法计算出的分支 G_1、……、G_m，存在 G 的一元着色 G^+，使得对于任意 $u, v \in V(G)$，有 $G^+ \models$ 分支(u, v) 当且仅当 u 是某个 $i \in [m]$ 的 G_i 的引领顶点，且 $v \in V(G_i)$。

证明。我们关注左分支，因为右分支的情形是类似的。令 k^* 为引理 12 提供的常数；我们将证明该命题对 $k := k^*$ 成立。我们将引理 12 中的算法应用于 G，得到集合 P_1、……、$P_m \subseteq R$（G）以及顶点 ℓ_1、……、ℓ_m。对于每个 $i \in [m]$，我们令 $G_i := G[N$（P_i） $P_i]$。根据分支的定义，引理 12 保证了第一和第三个性质。第二个性质成立，是因为 P_1、……、P_m 构成 R（G）的一个划分，且这些集合的邻域包含于 G_1、……、G_m 中。因此，G 的每条边都至少包含在这些图中的一个图内。最后，R（G）中的每个顶点恰好属于一个 G_i。根据引理 12 的度数上界，L（G）中的每个顶点至多属于 k 个图，这些图来自 G_1、……、G_m。因此，该分支的重叠至多为 k。 □

下面这个简单的观察将在下一小节中派上用场。

引理 25。令 $G \in \mathscr{C}$。如果 G_1、……、G_m 是 G 的左（分别为右）分支，那么对于每个 $i \in [m]$，G_i 的二分图补图 $\widetilde{G_i}$ 在 $L(G_i)$（分别在 $R(G_i)$）中包含一个孤立顶点。

证明。 G_i 的领导顶点在补图中变成一个孤立顶点，因为它与 G_i另一侧的所有顶点都相邻。

□

5.3 $\mathscr{D}$的算法与定义

对于任意输入图 $G \in \mathscr{C}$， $S(G)$的构造分两个阶段进行。我们首先计算一棵树$T(G)$，用于编码 G 的边关系的性质。然后在 $V(G)$与 $T(G)$之间添加额外的边，从而得到 $S(G)$。

现在我们描述计算树 $T(G)$的算法。对于 $T(G)$的每个节点 p，我们关联一个图 $G(p)$，它要么是 G 的一个诱导子图，要么是 G的一个诱导子图的二分图补图。我们首先创建根顶点 r，并令 $G(r) := G$。然后，我们通过对每个先前添加的节点 p应用以下扩展规则，递归地创建$T(G)$的其余部分。

1. 如果 $G(p)$ 不是无边图且处于奇数深度，我们会移除其中所有的孤立顶点（如果有），并计算其左分支 G_1、……、G_m。对于每个分支 G_i，我们创建一个子节点 p_i，并将 $G(p_i)$ 设置为 G_i 的二分图补图。

2. 如果 $G(p)$ 不是无边图且处于偶数深度，我们会移除其中所有的孤立顶点（如果有），并计算其右分支 G_1、……、G_m。对于每个分支 G_i，我们创建一个子节点 p_i，并将 $G(p_i)$ 设置为 G_i 的二分图补图。

3. 如果 $G(p)$ 是无边图，那么 p 没有子节点。

我们注意到，根据 引理 25，每个内部节点 T（G）（根节点可能除外）都包含一个孤立顶点。因此，在每个递归步骤中，我们处理的图都会变小，所以递归会在有限步之后结束。

我们按如下方式构造图 $S(G)$。 $S(G)$ 的顶点集为 $V(T(G)) \cup V(G)$。

$T(G)$ 的顶点称为节点，我们用字母 p, q, r, s 来表示它们。 $S(G)$ 的边集由 $T(G)$ 的边以及所有满足 $p \in V(T(G))$ 且 $v \in V(G(p)) \subseteq V(G)$ 的边 vp 组成。最后，我们用一元谓词 U 标记 $T(G)$ 的根节点，用一元谓词 L 标记来自 $L(G)$ 的顶点，并用一元谓词 R 标记来自 $R(G)$ 的顶点。我们将 $S(G)$ 的高度定义为 $T(G)$ 的高度。最后，我们定义 $\mathscr{D} := \{S(G) : G \in \mathscr{C}\}$。

5.4 $T(G)$ 具有有界高度

引理 26。设 $G \in \mathscr{C}$，并设 $T(G)$ 为算法计算出的树。设 p 和 p'' 是 $T(G)$ 的节点，且 p 是 p'' 的祖父节点。假设 $G(p'')$ 包含一个阶为 t 的诱导半图。那么 $G(p)$包含一个阶为 $t+1$ 的诱导半图。

证明。设 $v_1, \ldots, v_t \in L(G(p''))$ 和 $u_1, \ldots, u_t \in R(G(p''))$ 是 $G(p'')$ 中一个阶为 t 的半图的顶点（回想一下，根据注 7，我们可以假设半图以这种方式包含在 $G(p'')$ 中）。首先注意到，由于 $G(p'')$ 是 $G(p)$ 的诱导子图，这些顶点也在 $G(p)$ 中诱导出一个阶为 t 的半图。现在我们说明如何通过找到顶点 $v_{t+1} \in L(G(p))$ 和 $u_{t+1} \in R(G(p))$ 将阶增加一，使得 v_{t+1} 与 $u_1, \ldots, u_{t+1}$ 相邻，而 u_{t+1} 与 $v_1, \ldots, v_t$ 不相邻。

我们假设 p 处于偶数深度；奇数深度的论证类似。设 $G_1, \ldots, G_{m_1}$ 是 $G(p)$ 的（左侧）分支（移除孤立顶点后）。设 p' 是 p 的子节点，且是 p'' 的父节点。设 $i \in [m_1]$ 满足 $G(p')$ 是 G_i 的二分图补图，并设 ℓ_i 是 G_i 的领导顶点。注意，在图 G_i 中，ℓ_i 与 $R(G_i)$ 的所有顶点相邻，而在 $G(p')$ 中是孤立的。设 $G'_1, \ldots, G'_{m_2}$ 是 $G(p')$ 的分支（移除孤立顶点后），并设 G'_j 是满足 $G(p'')$ 是 G'_j 的二分图补图的那个分支。设 ℓ'_j 是 G'_j 的领导顶点。那么 ℓ'_j 在 $G(p'')$ 中是孤立的。我们断言，$v_{t+1} \coloneqq \ell_i$ 和 $u_{t+1} \coloneqq \ell'_j$ 具有所需的性质。显然，由于 ℓ'_j 在 $G(p'')$ 中是孤立的，且 $G(p'')$ 是 $G(p)$ 的诱导子图，顶点 u_{t+1} 与顶点 $v_1, \ldots, v_t$ 不相邻。此外，由于 $u_1, \ldots, u_t$ 中的每个顶点都与 $v_1, \ldots, v_t$ 中至少一个顶点相邻，我们知道 u_{t+1} 必须与所有顶点 $u_1, \ldots, u_t$ 不同。对于 $v_{t+1} = \ell_i$，我们知道它与 $R(G(p'))$ 中的所有顶点相邻。由于 $u_1, \ldots, u_{t+1} \in R(G(p'))$，因此我们知道 v_{t+1} 与这些顶点全都相邻。此外，由于 ℓ_i 在 $G(p')$ 中是孤立的，它在分支前就已从其中移除，因此它不是 $G(p'')$ 的顶点。因此，v_{t+1} 与所有顶点 $v_1, \ldots, v_t$ 都不同。 □

引理 27. 存在一个仅取决于 $\mathscr{C}$ 的 $h \in \mathbb{N}$，使得对每个 $G \in \mathscr{C}$，$T(G)$ 的高度至多为 h。

证明。由于 $\mathscr{C}$ 是单子稳定的，存在 $t \in \mathbb{N}$，使得没有图 $G \in \mathscr{C}$ 包含阶大于 t 的诱导半图。反设对于某个 $G \in \mathscr{C}$，树 $T(G)$ 的高度大于 $2t$。那么在 $T(G)$ 中，$T(G)$ 存在一个深度为 $2t$ 的非叶节点 p。由于 p 不是叶节点，图 $G(p)$ 含有一条边，因此包含一个阶为 1 的半图。应用引理 26 t 次后，我们便在 $G(r) = G$ 中得到一个阶为 $t+1$ 的半图，矛盾。 □

5.5 运行时间分析

Lem理 28. 对于每个 $G \in \mathscr{C}$，计算 $T(G)$ 和 $S(G)$ 的运行时间为 $\mathcal{O}(|G|^4)$.

证明。令 h 表示算法计算得到的 $T(G)$ 高度。我们将证明，算法的运行时间为 $\mathcal{O}_h(|G|^4)$，其中下标 h 在 $\mathcal{O}$-记号中隐去了依赖于 h的常数因子。根据引理 27，高度 h 有常数上界，因此引理的结论成立。

若 $h = 0$，则算法只需检查 G 是否没有边，这显然可以在时间 $\mathcal{O}(\|G\|) \leqslant \mathcal{O}(|G|^4)$内完成。若 $h > 0$，则算法会移除所有孤立顶点，计算 G的分支，然后递归处理每个分支（的二分图补图）。根据引理 24，G 中的每个顶点至多属于 k 个分支 $G_1, \ldots, G_m$，因此 $\sum_{i=1}^{m} |G_i| \leqslant k|G|$。根据引理 24，分支的计算可在时间 $\mathcal{O}(|G|^4)$ 内完成。因此，由归纳法可将运行时间界定为

$$\mathcal{O}(|G|^4) + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{h-1}(|G_i|^4) \leqslant \mathcal{O}(|G|^4) + \mathcal{O}_{h-1}\left(\sum_{i=1}^{m} |G_i|\right)^4 \leqslant \mathcal{O}(|G|^4) + \mathcal{O}_{h-1}(k|G|)^4 \leqslant \mathcal{O}_h(|G|^4). \quad \square$$

5.6 解释 I

引理 29. 存在一种解释 I，使得 $G = I(S(G))$ 对每个 $G \in \mathscr{C}$ 都成立。

证明。首先证明以下断言。设 $u \in L(G)$ 和 $v \in R(G)$ 是两个顶点，且 p 是 $T(G)$ 的一个节点，满足 $u, v \in V(G(p))$，并且 p 的子节点中没有任何一个满足 $u, v \in V(G(q))$。那么，当且仅当从 p 到 $T(G)$ 的根节点的路径上的顶点数为偶数时，$uv \in E(G)$ 成立。

我们通过对 d 进行归纳来证明这一结论。若 $d = 1$，则 p 是 $T(G)$ 的根节点。若 p 没有子节点，则 G 是无边图，结论成立。否则，p 有子节点，这些子节点是通过左分支 G_1、……、G_m生成的。反设 $uv \in E(G)$。根据定义 23，存在$i \in [m]$ 使得 $uv \in E(G_i)$，因此 u 和 v 都属于 $V(G(p_i))$，这与假设 p 没有具有此性质的子节点矛盾。

归纳步骤中，假设 $d > 1$。令 q 为根节点的子节点，且位于从根节点到 p的路径上。注意， $G(q)$是 G 的一个诱导子图的二分图补图，该诱导子图同时包含 u 和 v。此外，以 p 为根节点的 $T(G)$ 的子树满足我们的断言在 $d' = d - 1$下的假设。由于 u 与 v 之间的邻接关系在根图和 $G(q)$之间发生反转，且 d' 的奇偶性与 d的奇偶性相反，结论得证。

现在我们描述一种解释 I，它从 $S(G)$ 重构出 G。用于确定 x 与 y 之间邻接关系的公式 $\psi(x, y)$ 如下：它检查 x 和 y 是否为 G 中满足 $L(x)$ 和 $R(y)$ 的顶点，并找出 $T(G)$ 中的一个节点 z，该节点在 $S(G)$ 中同时与 x 和 y 相邻，且 z 的任何子节点在 $S(G)$ 中都不会同时与 x 和 y 相邻。随后，它统计 $T(G)$ 中从 z 到根节点的路径上的顶点数。由于引理 27 将 $T(G)$ 的高度限制在一个常数以内，并且根节点以及 G 的两侧在 $S(G)$ 中分别由不同的一元谓词标记，因此所有这些条件都可以很容易地用一阶逻辑表达。 □

5.7 $\mathscr{D}$ 可由 $\mathscr{C}$ 转导

引理 30. 存在一种转导 S，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$， $S(G) \in \mathsf{S}(G)$。

在 引理 30 的证明中，我们将使用以下引理，它说明由我们的算法计算得到的分支中各图的交图是稀疏的。

引理 31. 存在 $d \in \mathbb{N}$，具有以下性质。对于任意 $G \in \mathscr{C}$，设 $G_1, \ldots, G_m$ 是由算法计算得到的 G 的分支，且设 $\ell_1, \ldots, \ell_m$ 是各分支的引领顶点。定义交图 $K(G)$，其顶点集为 $\{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$；当且仅当 $V(G_i) \cap V(G_j) \neq \emptyset$时， ℓ_i与 ℓ_j之间存在一条边 $i \neq j$。则 $K(G)$ 是 d-退化的，因此特别地，它存在一个正常的$(d+1)$-着色。

证明。我们反设，对于任意 d，类 $\{K(G) : G \in \mathscr{C}\}$ 都不是 d-退化的，并证明这与我们的假设矛盾：$\mathscr{C}$ 具有内在线性邻域复杂度。

任取 $d \in \mathbb{N}$。为导出矛盾，选取 $G \in \mathscr{C}$ 使得 $K(G)$ （其定义如引理陈述所述）不是 d-退化的。令 k 为引理 24 中的数，它界定了所考虑分支 G_1、……、G_m的重叠。由对称性，不妨假设该分支是左分支。为简化记号，令 $A := L(G)$ 以及 $B := R(G)$。该分支的引领顶点 ℓ_1、……、ℓ_m 都属于 A。

由于 $K(G)$ 不是 d-退化的，我们知道其顶点集包含一个子集 S，使得在 $K(G)[S]$中，每个顶点的度都大于 d。因此， $K(G)[S]$中的边数大于$d|S|/2$。对于 $K(G)[S]$ 的每条边 $\ell_i\ell_j$ 和一个顶点 $v \in A$，如果 $v \in V(G_i) \cap V(G_j)$，我们称 v 对 $\ell_i\ell_j$ 负责。注意，根据 $K(G)$ 的边的定义，对于 $K(G)[S]$的每条边， A 中至少有一个顶点对其负责（每个满足 $v \in V(G_i) \cap V(G_j)$ 的顶点 v 都必须属于 A，因为根据定义 23， B 中的每个顶点恰好属于一个 G_i）。我们注意到，每条边可能有多个负责顶点，而每个顶点也可能对多条边负责。然而，由于每个 $v \in A$ 至多属于 k 个分支，每个顶点至多对 $\binom{k}{2}$ 条边负责。令 P 为按包含关系极小的顶点集合，使得对于 $K(G)[S]$ 的每条边 $\ell_i\ell_j$，都有某个对 $\ell_i\ell_j$ 负责的顶点 $v \in P$。由于 $K(G)[S]$ 中至少有 $d|S|/2$ 条边，且每个顶点至多对 $\binom{k}{2}$ 条边负责，我们得到$|P| \geqslant d|S|/\left(2\binom{k}{2}\right)$。

令 H 为顶点集 A、边按如下方式构造的图：对于每个 $i \in [m]$，我们在 ℓ_i 与每个满足 $v \neq \ell_i$ 且 $v \in V(G_i)$的 顶点之间添加一条边。由于分支可按照引理 12所述的方式定义，因此存在一个转导 T (仅取决于 $\mathscr{C}$)，使得 $H \in \mathsf{T}(G)$。注意，在u、$v \in P \setminus S$ 中，任意两个顶点在 S（图 H）中的邻域都不相同，否则将与 P的极小性矛盾。

因此，在 H 中， $P \setminus S$ 中的每个顶点都与 S中的不同邻域相邻。由于 $P \setminus S$ 中至少有 $d|S|/\left(2\binom{k}{2}\right) - |S| = (d/(2\binom{k}{2}) - 1)|S|$ 个顶点，并且常数 d 可以

任意取大，而 $H \in \mathsf{T}(\mathscr{C})$，这与我们关于 $\mathscr{C}$ 具有内在线性邻域复杂度的假设相矛盾。 □

引理 32. 存在一个有限的颜色集合 C，使得每个 $G \in \mathscr{C}$ 都存在一种着色 $\lambda\colon V(T(G)) \to C$，其中所有颜色相同的节点 p, q 都满足 $V(G(p)) \cap V(G(q)) = \emptyset$。

证明。令 $C_0 := \{0\}$，并令 $C_{i+1} := C_i \times [d+1]$，其中 d 是 引理 31中的常数。令$C := C_0 \cup \ldots \cup C_h$，其中 h 是 引理 27中的常数。

将 $T(G)$ 的根节点染为颜色 0，然后向下为其余顶点着色。设p 是一个已着色、但其子节点尚未着色的节点，并设 c是 p的颜色。设$G_1, \ldots, G_m$ 为通过算法计算出的 $G(p)$ 的分支。令 $\alpha\colon \{\ell_1, \ldots, \ell_m\} \to [d+1]$ 为 $K(G(p))$ 的一种正常着色，该着色由引理 31 给出。对每个 $i \in [m]$，将 p 中与 G_i（的二分图补图）对应的子节点 p_i 染为颜色 $\lambda(p_i) := (c, \alpha(\ell_i)) \in C_i$。对深度 δ进行归纳，容易验证：距离根节点不超过 δ 的顶点都按引理所述进行了着色。 □

下面的引理使我们能够将公式相对化到由 引理 32给出的每个颜色类 .

引理 33。 对于每一对公式 $\nu(x, y)$ 和 $\varphi(y, z)$，存在一个公式 $\psi(x, y, z)$，使得以下结论成立。考虑一个图 S 和一个顶点集 $P \subseteq V(S)$，其中每个 $p \in P$ 都与 S 的一个诱导子图 $G(p)$相关联，使得

- 图 $G(p)$ 在 $p \in P$ 下两两顶点不相交，并且
- 对于所有 $p \in P$和 $v \in V(S)$，都有 $v \in V(G(p)) \Leftrightarrow S \models \nu(p, v)$。

对于每个 $p \in P$，令 $G^+(p)$ 由 $G(p)$ 通过添加一些颜色得到，并令 S^+ 为将每个不相交子图 $G^+(p)$ 的颜色添加到 S上所得到的图。于是对于所有 $p \in P$和 $u, v \in V(S)$，

$$[u, v \in V(G^+(p)) \text{ and } G^+(p) \models \varphi(u, v)] \qquad \text{if and only if} \qquad S^+ \models \psi(p, u, v).$$

证明。我们选择 $\psi(x, y, z) := \nu(x, y) \wedge \nu(x, z) \wedge \varphi'(x, y, z)$，其中 φ' 是通过借助 ν 对 φ 中的所有量词进行相对化而得到的。更准确地说，如果 $\exists a\, \xi(a)$ 是 $\varphi(y, z)$ 的一个子公式，那么在 $\varphi'(x, y, z)$ 中，它将被替换为 $\exists a\, \nu(x, a) \wedge \xi(a)$；全称量词也同理。 □

引理 30 的证明。对于 $0 \leqslant d \leqslant h$，我们将 $S_d(G)$ 定义为由 $S(G)$ 得到的图：在深度为 d 的所有节点上标记一元谓词 T_d，删除 $T(G)$ 中深度大于 d 的所有节点，在 G 的顶点上标记另一个一元谓词，并添加 G 的所有边。（由于 $V(G) \subseteq V(S(G))$，最后两个步骤是良定义的。）令 h 为引理 27 的高度界。那么特别地，$S_0(G)$ 由 G 以及一个与 G 的所有顶点都相邻的单个顶点组成，而 $S_h(G)$ 则是通过向 $S(G)$ 添加 G 的边得到的图。

显然，可以通过固定的转导 S_0 从 G 得到图 $S_0(G)$。我们声称，对于每个$1 \leqslant d \leqslant h$，都存在一个转导 S_d，可以从 $S_{d-1}(G)$ 转导得到 $S_d(G)$。证明这一点后，引理便可通过复合这些转导得出，即令 $\mathsf{S} = \mathsf{E} \circ \mathsf{S}_h \circ \ldots \circ \mathsf{S}_0$,，其中 E 是一个转导，它会从 $S_h(G)$ 中移除 G 副本的所有边。

固定 $0 \leqslant d < h$，并描述一种从 $S_d(G)$ 构造 $S_{d+1}(G)$ 的转导。根据 $S_d(G)$ 的定义，可以轻易定义一个公式 $\nu(x, y)$，使得对于所有 $p, v \in V(S_d(G))$，都有 $S_d(G) \models \nu(p, v)$ 当且仅当 $p \in T_d$ 且 $v \in V(G(p))$。对于每个 $p \in T_d$，引理 24 给出 $G(p)$ 的一个着色 $G^+(p)$ 以及一个分支结构，使得对于所有 $u, v \in V(G(p))$，都有 $G^+(p) \models$ 分支(u, v) 当且仅当 u 是包含 v 的某个分支的领导顶点。

令 $\lambda\colon T_d \to C$ 为引理 32 中 $T(G)$ 的着色，限制在 T_d 上。对于每种颜色 $c \in C$，我们应用引理 33，其中 $\varphi(y, z) :=$ 分支(y, z)、$S = S_d(G)$、$P := \{p \in T_d\colon \lambda(p) = c\}$，以及 $G^+(p)$ 分别是上文为每个 $p \in P$ 定义的图 $G(p)$ 的着色。由引理 32 可知，这些图两两顶点不相交。因此，我们得到一个公式 $\psi^c(x, y, z)$ 和一个 $S_d(G)$ 的一元着色 S^c，使得

对于颜色为 c 的每个 $p \in T_d$ 和 u，$v \in V(S_d(G))$，$S^c \models \psi^c(p, u, v)$ 当且仅当 u，$v \in V(G(p))$ 且 $G^+(p) \models$ 分支(u, v)。

通过对所有 $c \in C$ 上的这些公式和着色进行汇总，我们得到单个公式 $\psi(x, y, z)$ 以及 $S_d(G)$ 的着色 $S_d^+(G)$，使得对于每个 $p \in T_d$ 和 u，$v \in V(S_d(G))$，当且仅当 u、$v \in V(G(p))$ 且 $G^+(p) \models \mathrm{branch}(u, v)$ 时，有 $S_d^+(G) \models \psi(p, u, v)$。也就是说，$\psi(p, u, v)$ 成立，当且仅当在 $G(p)$ 的分支结构中，u 是包含 v 的分支的领导顶点。

现在考虑以下过程，并注意到它构造出了 $S_{d+1}(G)$：

- 从图 $S_d(G)$ 开始，并使用有界数量的颜色对其进行着色，从而得到 $S_d^+(G)$。
- 对于 $V(G)$ 中的每个顶点 u 以及每种颜色 $c \in C$，如果存在一个节点 $p \in T_d$（根据引理 32，该节点是唯一的），满足 $\lambda(p) = c$，且 u 是 $G(p)$ 的分支结构中的领导顶点；也就是说，如果 $S_d^+(G) \models \exists z \psi(p, u, z)$，那么将 u 的副本 (u, c) 作为 p 的子节点添加到树中。
- 对于每个属于 $V(G)$ 的顶点 v，以及每种颜色 $c \in C$，如果树中存在一个叶节点 (u, c)，其父节点为 p，且 v 位于以 u 为领导顶点的 p 的分支中，也就是说，如果 $S_d^+(G) \models \psi(p, u, v)$，那么就在 v 和 (u, c) 之间添加一条边。

很容易看出，这个过程可以通过一种转导来执行：(1) 首先为 $S_d(G)$ 着色，然后 (2) 为每个顶点额外创建至多 $|C|$ 个副本，接着 (3) 应用一个固定的解释，最后 (4) 移除未使用的副本。这表明 $S_{d+1}(G)$ 确实可以通过一个固定的转导从 $S_d(G)$ 得到。

□

5.8 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张

回顾一下，$\mathscr{C}$ 具有内在线性邻域复杂度。根据引理 30，图类 $\mathscr{D}$ 可由 $\mathscr{C}$ 转导得到，因此 $\mathscr{D}$ 也具有内在线性邻域复杂度。再结合 $\mathscr{D}$ 是弱稀疏的这一事实（下文将予以证明），即可得出 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张。

引理 34。 *$\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}$ 所决定的某个 τ-τ 退化图。特别地，$\mathscr{D}$ 是弱稀疏的。*

证明。任取 $G \in \mathscr{C}$。我们将证明，在 $S(G)$ 中，属于 $V(G)$ 的每个顶点的度至多为 $\tau := \sum_{d=0}^{h} k^d$，其中 h 是由引理 27 得到的 $T(G)$ 高度上界，而 k 是引理 24 中的分支重叠。注意，这意味着 G 是 τ-退化的，理由如下。任取 H，使其为 $S(G)$ 的子图。我们分两种情况讨论。首先，如果 H 包含一个来自 $V(G)$ 的顶点 v，那么 H 包含一个度至多为 τ 的顶点。其次，如果 H 不包含来自 $V(G)$ 的顶点，那么 H 是 $T(G)$ 的子图，因此 H 包含一个度至多为 1 的顶点。两种情况下，H 都包含一个度至多为 τ 的顶点，这意味着 $S(G)$ 是 τ-退化的。此外，注意到由 $S(G)$ 的 τ-退化性可立即推出，$S(G)$ 不可能以 $K_{\tau+1,\tau+1}$ 为子图。

由于 τ 仅取决于 $\mathscr{C}$，且 G 是从 $\mathscr{C}$ 中任意选取的，这意味着 $\mathscr{D}$ 是 τ-退化且弱稀疏的，正如所需。

为了证明上文关于 τ 的断言，我们将对 d 使用归纳法证明以下命题：在 $S(G)$中，每个顶点 $v \in V(G)$在 $T(G)$中深度为 d的节点里至多有 k^d 个邻点。对于$d = 0$，v在 $T(G)$中恰有 $k^0 = 1$ 个邻点，即 $T(G)$的根节点。对于 $d > 0$，令 N为 v在 $T(G)$中深度为 $d - 1$处的邻点集合。由归纳假设可知 $|N| \leqslant k^{d-1}$。根据 $T(G)$的构造，我们知道 $T(G)$中深度为 d且与 v相邻的所有节点，都是 N中节点的子节点。对于任意 $p \in N$，令 G_1、……、G_m为构造 $T(G)$时所用的 $G(p)$的分支。由于该分支的重叠至多为 k，我们知道 v 至多属于 p的 k个子节点，因此在 $S(G)$中，v 至多与 p的 k 个子节点相邻。这意味着，在 $T(G)$中深度为 d且在 $S(G)$中与 v相邻的节点至多有$k \cdot |N| \leqslant k \cdot k^{d-1} = k^d$个，证毕。

□

引理 35。 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张。

证明。反设结论不成立。那么，由于 $\mathscr{D}$ 根据前一个引理是弱稀疏的，依据 引理 11，存在 $r \in \mathbb{N}$ 使得对于每个 $d \in \mathbb{N}$，都存在 H满足 $\frac{\|H\|}{|H|} > d$，且某个 $G \in \mathscr{D}$ 包含一个 $(\leqslant r)$-细分 H'，它是 H 的一个诱导子图。我们固定这样的 r，以用于证明的其余部分。我们将证明，这会与 $\mathscr{D}$ 具有内在线性邻域复杂度这一假设矛盾。

我们首先证明，若考虑上述的 G、H 和 H'，那么 H 中至少有 $|H|(d-\tau)$ 条边在 H' 中至少被细分一次。为此，先注意到 H 至少有 $|H|d$ 条边。接着，令 K 为 H' 中由 H 的顶点诱导的子图。那么 K 恰好包含 H 中在 H' 里未被细分的边。注意，K 是 G 的子图，并且根据前一个引理，G 是 τ-退化的，因此我们有 $\frac{\|K\|}{|K|} \leqslant \tau|K| = \tau|H|$。所以，由于 H 中在 H' 里未被细分的边至多有 $\tau|H|$ 条，H 中剩余的 $|H|(d-\tau)$ 条边在 H' 中至少被细分一次。

我们现在按如下方式继续。再次令 G、H 和 H' 如上所述，并令 H^* 为从 H 中移除所有在 H' 中未至少被细分一次的边后得到的图。注意 $|H| = |H^*|$，因此根据上面的论证，我们有 $\frac{\|H^*\|}{|H^*|} > d - \tau$。现在我们描述一个转导 T，它

从 G 转导出 H^* 的 1-细分。该转导不使用复制，T 所用的标记方式如下所述。设 H' 表示 G 的一个诱导子图，它是 H 的一个（$\leqslant r$）-细分。用一元谓词 P 标记 H' 中 H 的所有主顶点。然后，对每个 $uv \in E(H^*)$，用一元谓词 Q 标记 H' 中连接 u 和 v 的路径上的所有内部顶点，该路径对应于 H 中的边 uv；此外，还用一元谓词 R 标记该路径上恰好一个任意顶点。该转导所用的公式只需将谓词 R 标记的每个顶点，与通过一条长度至多为 r 的路径从 R 可达、且由 Q 标记的两个顶点相连。于是，对任意大的 d，$\mathsf{T}(\mathscr{D})$ 都包含图 H^* 的 1- 细分 H''，其中 $\frac{\|H^*\|}{|H^*|} > d - \tau$。令 S 为 H'' 的主顶点集合。由于 H'' 的每个细分顶点都对应于 H^* 的一条边 e，且其邻点为该边的端点，因此 H'' 中 $|S|$ 至少有 $\|H^*\|$ 个不同的邻域。因此，对 $\mathscr{D}$ 的 $H'' \in$，有 $|N_{H''}(v) \cap S\colon \quad v \in V(H'')| > (d-\tau) \cdot |S|$，如所需。由于 d 可以任意大，$\mathsf{T}(\mathscr{D})$ 不具有线性邻域复杂度。 □

5.9 定理 1 的证明

现在我们完成定理 1的证明。根据第 5.1 节，只需对二分输入证明该结论。给定 $G \in \mathscr{C}$，第 5.3 节的算法 $S(G)$ 首先通过连续进行左／右分支（定义 23 和引理 24）构造树 $T(G)$，然后将 $T(G)$ 附加到 G。此前建立的辅助结果验证了定理 1的四项要求：

- 引理 28 将运行时间限制为 $\mathcal{O}(|G|^4)$。
- 引理 29 给出了一个解释 I，使得 $G = I(S(G))$ 对每个 $G \in \mathscr{C}$都成立。
- 引理 30 表明 $\mathscr{D} := \{S(G)\colon \quad G \in \mathscr{C}\}$ 可由 $\mathscr{C}$转导得到。
- 引理 35 推出 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张。

参考文献

[1] H. Adler 和 I. Adler. 将处处稠密图类解释为模型论中的一个经典概念。*EuropeanJournal of Combinatorics*, 36:322–330, 2014.[2] M. Bonamy 和 C. Geniet. χ-有界性与有界合并宽度图的邻域复杂度。*CoRR*, abs/2504.08266, 2025.

[3] E. Bonnet、E. J. Kim、A. Reinald、S. Thomass´e 和 R. Watrigant. 孪生宽度与多项式核。Algorithmica, 84(11):3300–3337, 2022.[4] S. Braunfeld、J. Ne˘set˘ril、P. Ossona de Mendez 和 S. Siebertz. 分解视界与稳定图遗传类的刻画。European Journal of Combinatorics, 129:104130, 2025.[5] J. Davies、M. Hatzel、K. Knauer、R. McCarty 和 T. Ueckerdt. 具有线性邻域复杂度的图的奇着色。CoRR, abs/2506.08926, 2025.[6] J. Dreier. Lacon、shrub 与奇偶分解：有界扩张类转导的刻画。Logical Methods Computer Science, 19(2), 2023.[7] J. Dreier、I. Eleftheriadis、N. M¨ahlmann、R. McCarty、M. Pilipczuk 和 S. Toru´nczyk. 单子稳定图类上的一阶模型检验。载于第 65 届 IEEE 计算机科学基础年会（FOCS 2024），第 21–30 页。IEEE，2024.[8] J. Dreier、J. Gajarsk´y、S. Kiefer、M. Pilipczuk 和 S. Toru´nczyk. 稀疏图转导的树状分解。载于第 37 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会年会（LICS 2022），第 31:1–31:14 页。ACM，2022.[9] J. Dreier、N. M¨ahlmann 和 S. Siebertz. 结构稀疏图类上的一阶模型检验。载于第 55 届 ACM 计算理论研讨会年会（STOC 2023），第 567–580 页。ACM，2023.[10] J. Dreier、N. M¨ahlmann、S. Siebertz 和 S. Toru´nczyk. 单子稳定类和单子 NIP 类中的不可区分序列与平坦性。载于第 50 届国际自动机、语言与编程研讨会（ICALP 2023），LIPIcs 第 261 卷，第 125:1–125:18 页。Schloss Dagstuhl — Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2023.[11] J. Dreier 和 S. Toru´nczyk. 合并宽度与一阶模型检验。载于第 57 届 ACM 计算理论研讨会年会（STOC 2025），第 1944–1955 页。ACM, 2025.[12] Z. Dvo˘r´ak. 组合对象的渐近结构。博士论文，查理大学数学与物理学院，2007.[13] Z. Dvo˘r´ak. 诱导细分与有界扩张。European Journal of Combinatorics, 69:143–148, 2018.[14] Z. Dvo˘r´ak. 有界扩张类的近似元定理。载于第 18 届斯堪的纳维亚算法理论研讨会（SWAT 2022），LIPIcs 第 227 卷，第 22:1–22:17 页。Schloss Dagstuhl — Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2022.[15] Z. Dvo˘r´ak、D. Kr´al’ 和 R. Thomas. 稀疏图子类的一阶性质检验。Journal of the ACM, 60(5):36:1–36:24, 2013.[16] J. Gajarsk´y、P. Hlin˘en´y、J. Obdr˘z´alek、D. Lokshtanov 和 M. S. Ramanujan. 稠密图类的一阶模型检验新视角。ACM Transactions on Computational Logic, 21(4):28:1–28:23, 2020.[17] J. Gajarsk´y、S. Kreutzer、J. Ne˘set˘ril、P. Ossona de Mendez、M. Pilipczuk、S. Siebertz 和 S. Toru´nczyk. 有界扩张类的一阶解释。ACM Transactions on Computational Logic, 21(4):29:1–29:41, 2020.

[18] J. Gajarsk´y, N. M¨ahlmann, R. McCarty, P. Ohlmann, M. Pilipczuk, W. Przybysze wski, S. Siebertz, M. Sokołowski 和 S. Toru´nczyk。《单子稳定图类的 Flipper 博弈》。载于第 50 届国际自动机、语言与编程研讨会（ICALP 2023），LIPIcs 第 261 卷，页码 128:1–128:16。Schloss Dagstuhl — Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2023 年。[19] J. Gajarsk´y 和 R. McCarty。《关于有界树秩类、其解释及高效稀疏化》。载于第 51 届国际自动机、语言与编程研讨会（ICALP 2024），LIPIcs 第 297 卷，页码 137:1–137:20。Schloss Dagstuhl — Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2024 年。[20] J. Gajarsk´y、M. Pilipczuk 和 S. Toru´nczyk。《有界孪生宽度的稳定图》。载于第 37 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会（LICS 2022），页码 39:1–39:12。ACM，2022 年。[21] M. Grohe 和 S. Kreutzer。《算法元定理的方法》。载于 M. Grohe 和 J. Makowsky 编，《有限组合学中的模型论方法》，当代数学第 558 卷，页码 181–206。美国数学会，2011 年。[22] M. Grohe、S. Kreutzer、R. Rabinovich、S. Siebertz 和 K. Stavropoulos。《处处稀疏图的着色与覆盖》。SIAM 离散数学杂志，32(4):2467–2481，2018 年。[23] D. Haussler。《具有有界 Vapnik–Chervonenkis 维数的布尔 n立方体子集的球装填数》。组合理论杂志 A 辑，69(2):217–232，1995 年。[24] W. Kazana 和 L. Segoufin。《有界扩张结构类上的一阶查询》。逻辑方法与计算机科学，16(1)，2020 年。[25] R. Motwani 和 M. Sudan。《计算图的根是困难的》。离散应用数学，54(1):81–88，1994 年。[26] J. Ne˘set˘ril 和 P. Ossona de Mendez。《Grad 与有界扩张类 I：分解》。European Journal of Combinatorics，29(3):760–776，2008 年。[27] J. Ne˘set˘ril 和 P. Ossona de Mendez。《稀疏性——图、结构与算法》，算法与组合学第 28 卷。施普林格，2012 年。[28] J. Ne˘set˘ril、P. Ossona de Mendez、M. Pilipczuk、R. Rabinovich 和 S. Siebertz。《秩宽度与稳定性相遇》。载于 2021 年 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA 2021），页码 2014–2033。SIAM，2021 年。[29] J. Ne˘set˘ril、P. Ossona de Mendez、R. Rabinovich 和 S. Siebertz。《低复杂度图类：有界线性秩宽度类的情形》。European Journal of Combinatorics，91:103223，2021 年。[30] M. Pilipczuk。《从逻辑视角看图类》。CoRR，abs/2501.04166，2025 年。[31] M. Pilipczuk、S. Siebertz 和 S. Toru´nczyk。《稀疏图中的类型数量》。载于第 33 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会（LICS 2018），页码 799–808。ACM，2018 年。[32] M. Pilipczuk、S. Siebertz 和 S. Toru´nczyk。《稀疏结构上模型检验的参数化电路复杂性》。载于第 33 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会（LICS 2018），页码 789–798。ACM，2018 年。

[33] Ma. Pilipczuk、Mi. Pilipczuk 和 S. Siebertz。华沙大学数学、信息学与力学学院“稀疏性”课程讲义，课程于 2017/18 和 2019/20 冬季学期开设。在线获取地址：https://www.mimuw.edu.pl/ mp248287/sparsity2。

[34] W. Przybyszewski. 有界孪生宽度图的远离组合工具。载于第 *38* 届 *ACM/IEEE* 逻辑与计算机科学研讨会，*LICS 2023*，第 1–13 页。IEEE，2023 年。

[35] S. Toru´nczyk。稀疏数据库上的聚合查询。载于第 *39* 届 *ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI* 数据库系统原理研讨会，*PODS 2020*，第 427–443 页。ACM，2020 年。

单子稳定类的稀疏化

A.1 补充预备知识

几乎处处稀疏性。我们首先回顾几乎处处稀疏图类的概念。为此，我们需要一些关于浅层子式的标准定义。

回顾一下，如果图 H 可由图 G 的某个子图通过收缩半径至多为 r 的两两不相交连通子图得到，那么图 H 就是图 G 的一个深度-r 子式。我们定义以下参数：

$$\nabla_r(G) := \max\left\{\frac{\|H\|}{|H|} : H \text{ is a depth-}r \text{ minor of } G\right\}.$$

正如 Dvo˘r´ak [12], 所证明的，参数 $\nabla_r(\cdot)$ 在处处稀疏类中以次多项式方式有界，具体如下。

定理 36 （Dvo˘r´ak [12]）。 设 $\mathscr{C}$ 是一个图的处处稀疏类。则对于任意图 $G \in \mathscr{C}$ 以及任意$r \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\nabla_r(G) \leqslant \mathcal{O}_{r,\varepsilon}(|G|^{\varepsilon}).$$

非 几乎处处稀疏性的定义将 定理 36 的结论作为其定义 n:

定义 37。 若对于每个 $r \in \mathbb{N}$、 $\varepsilon > 0$以及图 $G \in \mathscr{C}$，都有，则图的一个类 $\mathscr{C}$几乎处处稀疏

$$\nabla_r(G) \leqslant \mathcal{O}_{r,\varepsilon}(|G|^{\varepsilon}).$$

根据 定理 36，每个处处稀疏类都是几乎处处稀疏的。对于遗传类，逆命题成立，但一般情况下并不成立。已知（例如参见 [27, 33]），许多图参数——深度为 r 的拓扑次式中的最大边密度、弱 r-着色数、强 r-着色数以及 r-可容许性——都通过多项式不等式与参数 $\nabla_r(\cdot)$ 相关。因此，在几乎处处稀疏性的定义中，用这些族中的任意一个替换参数 $\nabla_r(\cdot)$ 都会得到完全相同的概念。由于本文不会使用这些联系，我们省略细节。

分解。 现在我们回顾 Braunfeld、Ne˘set˘ril、Ossona de Mendez 和 Siebertz 提出的图类分解概念 [4]。这一概念受到稀疏性领域中经典的低树深度着色概念的启发（例如参见 [27, 33]）。

定义 38 ([4, 定义 14]). 设 Π 是图类的一种性质。如果存在图类 $\mathscr{D}_1$、 $\mathscr{D}_2$、 $\mathscr{D}_3$、……，且它们都具有性质 Π，使得以下条件成立：对于每个图 $G \in \mathscr{C}$、 $t \in \mathbb{N}$和 $\varepsilon > 0$，都存在一种顶点着色 λ: $V(G) \to C$，其中某个集合 C 由 $\mathcal{O}_{t,\varepsilon}(|G|^{\varepsilon})$ 种颜色组成，使得

$$G[\lambda^{-1}(X)] \in \mathscr{D}_t \qquad \textit{for each } X \subseteq C \textit{ with } |X| \leqslant t.$$

请注意，Braunfeld 等人最初的表述讨论的是顶点集的划分，而不是顶点着色，但这与上述表述等价。

我们将依赖 Braunfeld 等人的以下观察：几乎处处稀疏性在准有界大小分解下保持不变。

引理39 ([4, 引理 34])。 设图类 $\mathscr{C}$ 存在准有界大小的几乎处处稀疏分解。那么 $\mathscr{C}$ 本身也几乎处处稀疏。

单子依赖性与处处稀疏性。 回顾一下，图类 $\mathscr{C}$ 是单子依赖的，当且仅当所有图组成的类都不能从 $\mathscr{C}$ 可转导；图类 $\mathscr{D}$ 是弱稀疏的，当且仅当存在 $h \in \mathbb{N}$，使得 $\mathscr{D}$ 的任何成员都不包含 $K_{h,h}$ 作为子图。正如 [29, 推论 2.3], 中所指出的，以下结论可由 Adler 和 Adler [1] 以及 Dvo˘r´ak [13]的结果推出。

定理 40 (由 [1, 13]推出)。 任何弱稀疏的单子依赖图类实际上都是处处稀疏的。

注意，由于每个单子稳定图类也是单子依赖的，定理 40 的结论同样适用于弱稀疏的单子稳定类：事实上，它们是处处稀疏的。

A.2 稀疏 将单子稳定图类稀疏化为几乎处处稀疏类 s

现在我们说明，将论文正文中介绍的稀疏化过程应用于 G 任意单子稳定图类中的图 $\mathscr{C}$，即使不假设其具有内在线性邻域复杂度，也能将 G 其稀疏化为图 H，使其属于一个几乎处处稀疏图类。具体而言，我们证明定理 1的以下变体。

定理 41。 设 $\mathscr{C}$ 是一个单子稳定图类。那么存在一个几乎处处稀疏图类 $\mathscr{D}$、一个算法 $\mathcal{A}$和一个一阶解释 I，使得以下结论成立：对于任意具有 n 个顶点且满足 $\varepsilon > 0$的输入图$G \in \mathscr{C}$，算法 $\mathcal{A}$ 在时间 $\mathcal{O}_\varepsilon(n^{4+\varepsilon})$ 内计算出一个着色图 $H \in \mathscr{D}$，使得 $G = I(H)$。

正如我们提到的，Braunfeld 等人证明了如下这类结论： [4, 定理 59]。其中，图 H 和解释 I 具有由拟灌木这一概念所刻画的具体形式；该概念由 Dreier 等人提出。 [8]本节旨在说明，本文提出的方法可用于为这一结果提供另一种证明。虽然我们并未严格遵循 [8], 中给出的拟灌木的形式化定义，但事实上，我们的稀疏化过程所得结果在理念上非常相似。

本节余下部分将用于证明定理 41。我们假定读者熟悉定理 1的证明，该证明见于第 4 节和第 5节。这里，我们仅概述如何调整论证以得到定理 41。

为了替换关于线性邻域复杂度的假设，我们将采用 Dreier、Eleft- heriadis、M¨ahlmann、McCarty、Pilipczuk 和 Toru´nczyk [7] 的结果：单子稳定类具有近线性邻域复杂度。

定理 42 ([7])。 设 $\mathscr{C}$ 为一个固定的单子稳定图类，且令 $\varepsilon > 0$。那么，对于每个图$G \in \mathscr{C}$和非空顶点子集 $S \subseteq V(G)$，我们有

$$|\{N(v) \cap S \colon v \in V(G)\}| \leqslant \mathcal{O}_\varepsilon(|S|^{1+\varepsilon}).$$

注意到，由于从单子稳定类可转导出的任何类仍然是单子稳定的，因此 定理 42 中提出的界限也适用于从 $\mathscr{C}$可转导出的每个图类。

引理 12 的类似结果引理 12。 第一步是得到主要技术引理的类似结果，即引理 12。具体而言，我们论证如下命题。

引理 43。 固定一个单子稳定的二分图类 $\mathscr{C}$。那么存在一种运行时间为 $\mathcal{O}(|G|^4)$ 的算法，对于给定的任意一个来自 $\mathscr{C}$ 且不含孤立顶点的图 $G=(A,B,E)$，计算出 B 的一个划分 $\mathcal{F}=\{P_1,\ldots,P_{|\mathcal{F}|}\}$ 以及属于 A 的顶点 $\ell_1,\ldots,\ell_{|\mathcal{F}|}$，使得：

- $P_i \subseteq N_G(\ell_i)$，对每个 $i\in\{1,\ldots,|\mathcal{F}|\}$均成立；并且
- 每个 $v\in A$ 与 $\mathcal{F}$中至多 k^* 个部分中的某个部分有邻点，其中 $k^\star$ 是满足 $k^\star \leqslant \mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$的整数，对任意 $\varepsilon>0$均成立。也就是说，我们有 $|\{P\in\mathcal{F}\mid N_G(v)\cap P\neq\emptyset\}|\leqslant k^*$.

此外，划分 $\mathcal{F}$ *of* B 在以下意义下几乎可定义：存在一种着色 μ： $\mathcal{F}\to D$，其颜色集合为 D，满足 $|D|\leqslant\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$，对任意 $\varepsilon>0$均成立；并且对每种颜色 $c\in D$，存在 G 上的一种一元着色 G_c^+以及一个公式 领导顶点$_c(x,y)$，其长度有通用常数界（即与 G 或 $\mathscr{C}$无关），使得对任意 $u\in A$ 和 $v\in B$，我们有

$G_c^+ \models$ 领导顶点$_c(u,\ v)$ 当且仅当存在 $i\in\{1,\ldots,|\mathcal{F}|\}$ 使得 $\mu(P_i)=c$、$u=\ell_i$和 $v\in P_i$.

总之，引理 12 与引理 43 之间的区别如下：

- 在引理 12中，k^* 是一个仅取决于 $\mathscr{C}$的常数。在引理 43中，我们允许该参数为超常数，但其大小受限于所考虑图 G的大小的次多项式级别。
- 引理 12 中所断言的可定义性被近似可定义性取代。本质上，我们不再要求领导关系由单个公式完全定义，而是要求其能够“分块”定义： $\mathcal{F}$ 可以划分为 $\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$ 种颜色，从而可以分别在每种颜色内定义领导性质。

现在我们来说明，为了得到引理 43的证明，需要对引理 12的证明作哪些修改。回顾一下，引理 12的证明包括：构造划分 $\mathcal{F}$的算法（见第 4.1 节）；引理 15的证明（见第 4.2 节），该证明给出了 k^*的上界；以及可定义性性质的证明（见第 4.3 节）。

至于算法，我们使用与以下算法完全相同的算法来计算 $\mathcal{F}$：第 4.1 节。（注意，算法本身只依赖于输入图 G，而不受 $\mathscr{C}$所来自的图类 G 的影响。）因此，计算得到的族 $\mathcal{F}=\{P_1,\ldots,P_{|\mathcal{F}|}\}$ 再次构成 B的一个划分，且每个部分 P_i 都配有一个领导顶点 $\ell_i\in A$，满足 $P_i\subseteq N_G(\ell_i)$。

对于引理 15，我们对其作出修订，使其能针对任意 $\varepsilon>0$ 给出一个界 $k^*\leqslant\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$。回顾一下，引理 15 的证明依赖于两个引理：引理16和引理17。引理17断言，对某个依赖于 $\mathscr{C}$ 的常数 t，图$G(A,\mathcal{F})$（它编码了 A 的顶点与 $\mathcal{F}$ 的各部分之间的邻接关系）不包含阶为 t 的半图作为诱导子图。该引理的证明只用到了 $\mathscr{C}$ 是单子稳定这一假设，因此在我们的情形下，该引理无需任何修改仍然成立；并且 t 是一个仅依赖于 $\mathscr{C}$ 的常数。另一方面，引理16断言，如果算法计算出的 A序为 $a_1,\ldots,a_n$，那么对每个 $i<n$，都存在 $j>i$，使得 a_i 和a_j 在 $G(A,\mathcal{F})$ 中是k°-近孪生点，其中 k° 是引理10给出的常数。回顾一下，引理10是 Haussler 的装箱引理针对具有线性邻域复杂度的集合系统的一个改写；该改写给出一对 k°-近孪生点，其中 k° 是一个常数。对于具有近似线性邻域复杂度的集合系统（其含义见定理 42），同样的改写给出一对k°-近孪生点，其中 $k^\circ\leqslant\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$。因此，若采用这一结论，我们就能得到引理16的一个变体：它只假设 $\mathscr{C}$ 是单子稳定的，并给出界 $k^\circ\leqslant\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$。最后，在引理15的证明中，引理16和引理17通过引理18结合起来，给出界 $k^*\leqslant h(k,t)+1$，其中 h 是引理18给出的函数。检查 [19] 中引理18的证明可知，事实上，对于某个函数 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，我们有$h(k,t)\leqslant f(t)\cdot(k+1)$。将此与 $k^\circ\leqslant\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$ 结合，即可得到所需的界 $k^*\leqslant\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$。

最后，我们需要论证近似可定义性。为此，我们令 $\mu(P_i) = \lambda(i)$，其中 λ 是 $[|\mathcal{F}|]$ 的着色，使用 $2k^* + 1 = \mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$ 种颜色，并在第 4.3 节中构造。对于每种颜色 c，我们令G_c^+为 G 的一元扩张，用一个额外的一元谓词标记所有属于颜色 c 的部分及其领导顶点 M_c。然后，与第 4.3 节类似，我们只需取

$$\mathsf{leader}_c(x, y) := L(x) \wedge M_c(x) \wedge M_c(y) \wedge \mathsf{adj}(x, y).$$

至此，引理 43的证明概要告一段落。

完整构造。 有了引理 43（它是引理 12的对应版本）之后，我们着手修订第 5 节中的推理。我们固定 $\varepsilon > 0$ 供整个证明使用。将问题约化到二分图情形的方法见第 5.1 节，同样可以应用。

我们采用相同的分支定义（定义 23）。引理 24 的证明稍作调整即可证明以下对应结论：

引理 44。 存在一个运行时间为 $\mathcal{O}(|G|^4)$ 的算法，对于任意 $G \in \mathscr{C}$，计算出一个左（或右）重叠至多为 k 的分支，其中 $k \leqslant \mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$。

此外，所计算出的分支 $\mathcal{B}$ 在以下意义下几乎可定义：存在一个着色 $\mu\colon \mathcal{B} \to D$，其定义在由 $\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$ 种颜色组成的集合 D 上，使得对于每个 $c \in D$，都存在一个定义在 G 上的一元着色 G_c^+，以及一个一阶公式 分支$_c(x, y)$，其长度由一个通用常数界定（与 G、$\mathscr{C}$ 或 ε 无关），并满足以下条件：$G_c^+ \models$ 分支$_c(u, v)$ 当且仅当存在 $H \in \mathcal{B}$，使得 $\mu(H) = c$，并且 $v \in V(H)$，且 u 是 H 的领导顶点。

回想一下，引理 24 是引理 12的一个简单推论，其中，由 $\mathcal{F}$ 引理 12 的算法计算得到的划分通过将 $\mathcal{F}$ 的每个部分扩展为其邻域，转化为一个分支。将引理 12 替换为引理 43，应用相同的论证，即可证明引理 44：$\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$ 计算所得分支的重叠界可直接由 $k^* \leqslant \mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$引理 43的界推出；而引理 44所断言的分支近似可定义性，则直接由引理 43所断言的近似可定义性推出。

接下来，在第 5.3 节中介绍的计算树 $T(G)$ 和图 $S(G)$ 的算法保持不变，唯一的区别是使用引理 44 而非引理 24。注意，$T(G)$ 和 $S(G)$ 的定义不依赖于 ε。因此，我们以完全相同的方式定义类 $\mathscr{D} := \{S(G) : G \in \mathscr{C}\}$。在第 5.4 节中给出的证明表明，$T(G)$ 的高度有一个仅取决于 $\mathscr{C}$ 的常数界；该证明可原样适用，因为它只依赖于排除半图，而这由单子稳定性的假设可得。我们将此常数记为 h。

至于计算 $T(G)$ 和 $S(G)$ 的算法的运行时间，根据引理28证明中的分析，可得其上界为 $\mathcal{O}(k^h \cdot |G|^4)$，其中 k 是引理 24 给出的分支重叠上界。由引理 44 所述，k 有界于 $\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$，且 h 是仅依赖于 $\mathscr{C}$ 的常数，因此我们有 $k^h \leqslant \mathcal{O}_\varepsilon(|G|^{h\varepsilon})$；将 ε 按因子 h重新缩放后，可得 $\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$。因此，该算法的运行时间为 $\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^{4+\varepsilon})$。

解释 I 满足 $G = I(S(G))$，其提出见第5.6节，可以保持不变，因为其构造仅依赖于 h。

证明的关键在于：论证所构造的类 $\mathscr{D}$ 是几乎处处稀疏的。根据引理39，只需证明 $\mathscr{D}$ 具有准有界大小的几乎处处稀疏分解。事实上，我们将证明 $\mathscr{D}$ 具有准有界大小的处处稀疏分解；根据定理 36，这就足够了。

为此，固定一个图 $G \in \mathscr{C}$并考虑图 $S(G) \in \mathscr{D}$。我们的首要目标是为 $S(G)$ 定义一种合适的顶点着色，使用 $\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$ 种颜色。回顾一下，$S(G)$ 的顶点集是 G 的顶点集与 $T(G)$ 的节点集的不交并。考虑 $T(G)$ 中任意一个非叶节点 p。回顾一下，在

构造中，我们计算了 $G(p)$ 的一个分支（去掉孤立顶点后）；记作 $\mathcal{B}(p)$。对于每个图 $G_i \in \mathcal{B}(p)$，我们构造了一个与图 $G(p_i)$ 相关联的子节点 p_i，该图定义为 G_i 的二分图补图。此外，我们有一个着色 μ_p: $\mathcal{B}(p) \to D_p$，其颜色取自某个集合 D_p，该集合包含 $\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$ 种颜色；此着色见证了分支 $\mathcal{B}(p)$ 的近似可定义性（定义见引理 44）。不妨假设，对于整个树 $T(G)$，$D_p = D$，其中颜色取自固定的集合 D，该集合包含 $\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$ 种颜色。现在定义着色 μ: $V(T(G)) \to D$，规定对每个非根节点 q，令 $\mu(q) := \mu_p(G_i)$，其中 p 是 q 的父节点，且 $G_i \in \mathcal{B}(p)$ 满足 $G(q)$ 是 G_i 的二分图补图。将 $T(G)$ 的根节点颜色设为 D 中任意一个元素。

另一方面，注意到分支 $\mathcal{B}(p)$ 的重叠有界于 $k = \mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$，我们可以重复引理 31 和 32 中的推理，找到另一种着色 ν: $V(T(G)) \to D'$，同样使用一个大小为 $\mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$ 的颜色集合 D'，并满足以下性质：对于所有 $p, q \in V(T(G))$，若 $\nu(p) = \nu(q)$，则有 $V(G(p)) \cap V(G(q)) = \emptyset$。我们定义 σ: $V(T(G)) \to D \times D'$ 为 μ 和 ν 的乘积着色：对于每个节点 p，$\sigma(p) = (\mu(p)\ \nu(p))$。于是 σ 满足上述两种性质：

- 对于 $T(G)$ 的每个非叶节点 p，将着色 σ 限制在 p 的子节点上，即可见证几乎 t $\mathcal{B}(p)$ 的可定义性。
- 对于所有 p，$q \in V(T(G))$，若 $\sigma(p) = \sigma(q)$，则有 $V(G(p)) \cap V(G(q)) = \emptyset$。

我们指出，上述第一个断言需要对一元扩张 G_c^+ 和公式 $\mathsf{branch}_c(x, y)$ 作简单调整。

最后，对于 T 的每个节点 p，我们定义

$$\lambda(p) := \sigma(p_1)\sigma(p_2)\ldots\sigma(p_\ell) \in (D \times D')^{\leqslant h},$$

其中，p_1、$p_2 \ldots$、p_ℓ 是 $T(G)$ 中从根节点到 p 的路径上的节点，其中 p_1 是根节点；$p_\ell = p$，且 $C := (D \times D')^{\leqslant h}$ 是字母表 $D \times D'$ 上长度至多为 h 的单词集合。将 ε 按因子 $2h$（这是一个仅取决于 $\mathscr{C}$ 的常数）进行缩放后，我们有 $|C| \leqslant \mathcal{O}_\varepsilon(|G|^\varepsilon)$。我们还将着色 λ 扩展到 G 的顶点，将它们全部映射到同一个新的颜色；这会使 $|C|$ 增加 1。因此，λ 是 $S(G)$ 的顶点着色。

定义了每个图 $S(G) \in \mathscr{D}$ 的着色 λ 后，我们验证这些着色表明 $\mathscr{D}$ 允许拟有界大小的处处稠密分解。为此，我们证明以下命题。

断言 45。固定 $t \in \mathbb{N}$。对于每个 $G \in \mathscr{C}$，如果我们考虑上文构造的着色 λ: $V(S(G)) \to C$，那么对于每个满足 $|X| \leqslant t$ 的颜色子集 $X \subseteq C$，我们都有以下结论：

- $S(G)[\lambda^{-1}(X)]$ 是 t-退化的，并且
- $S(G)[\lambda^{-1}(X)] \in \mathsf{S}^t(G)$，其中 S^t 是一个仅依赖于 $\mathscr{C}$ 和 t 的转导。

证明。为证明 $S(G)[\lambda^{-1}(X)]$ 是 t-退化的，注意到每个顶点 $u \in \lambda^{-1}(X) \cap V(G)$ 在 $S(G)[\lambda^{-1}(X)]$, 中的度至多为 t，因为它在 $V(T(G)) \cap \lambda^{-1}(X)$ 中的所有邻点在 σ 下具有两两不同的颜色，因此在 λ 下也具有两两不同的颜色。因此，$S(G)[\lambda^{-1}(X)]$ 的每个子图要么包含一个来自 $\lambda^{-1}(X) \cap V(G)$ 的顶点，其度至多为 t；要么是 $T(G)[\lambda^{-1}(X)$ 的子树，因而包含一个度至多为 1 的顶点。

对于第二个断言，令 X' 为在取非空前缀下 X 的闭包。也就是说，对于每种颜色 $c \in X$（回想一下，它是一个长度至多为 h 的、由 $D \times D'$ 中元素组成的词），将 c 的所有非空前缀都加入 X'。因此，$X' \supseteq X$ 且 $|X'| \leqslant ht$。由于 $S(G)[\lambda^{-1}(X)]$ 是 $S(G)[\lambda^{-1}(X')]$, 的诱导子图，只需证明存在一个仅依赖于 $\mathscr{C}$ 和 t 的固定转导 S^t，使得 $S(G)[\lambda^{-1}(X')] \in \mathsf{S}^t(G)$。为此，我们可以重复引理 30 的证明中的推理，但作如下修改：在 $S_d(G)$ 的定义中，我们还要移除所有不属于 $\lambda^{-1}(X')$ 的顶点。（这里不失一般性地假设 $V(G) \subseteq \lambda^{-1}(X')$，因此这只会移除 $V(T(G)) \setminus \lambda^{-1}(X')$ 中的一些节点。）根据定义，X' 在取非空前缀下封闭，因此我们看到，$V(S_d(G)) \cap V(T(G))$ 是 $T(G)$ 的一个前缀，也就是说，它是 $T(G)$ 中一个在取祖先下封闭的节点集合。

根据这一观察，用于从 $S_{d-1}(G)$ 转导出 $S_d(G)$ 的转导 S_d^t 可以用类似的方式构造，但需作如下调整。为了定义公式 $\psi(x,y,z)$，对于 $T(G)$ 中的每个节点 p，我们不再使用一元着色 $G^+(p)$，而是考虑所有颜色 $c \in X''$ 对应的一元着色 $G_c^+(p)$，其中 $X'' \subseteq D \times D'$ 是 X 中各元素所包含的所有颜色构成的集合（因此 $|X''| \leqslant ht$）。此外，我们不再考虑 λ 可能使用的所有颜色 $c \in C$，而只考虑颜色 $c \in X''$。然后，利用关于 $c \in X''$ 的公式 $\mathsf{branch}_c(x,y)$，我们可以拼合出一个公式 $\psi(x,y,z)$，其作用与引理 30 的证明中相同，但应用于具有有界数量一元谓词的一元着色 $G(p)$，并表达如下条件：只有在包含 z 的分支的颜色属于 X'' 这一假设下，y 才是该分支的首领。有了这样的公式 ψ 后，我们可以像引理 30 的证明中那样，得到一个转导 S_d^t，它针对每个 $p \in T_d \cap \lambda^{-1}(X')$，构造颜色属于 X' 的 p 的子节点，以及将它们与 G 的顶点相连的所有边。

与引理30的证明类似，最终的转导S^t是通过复合所有转导S_d^t得到的，其中 d 从1到 h，再加上一个清除 G所有边的转导。」

给定断言 45，我们将 $\mathscr{E}_t$ 定义为所有属于 t的$\mathsf{S}^t(\mathscr{C})$-退化图所组成的类。因此，$\mathscr{E}_t$尤其是弱稀疏的。由于 $\mathscr{E}_t$ 可由一个单子依赖（甚至是单子稳定）类 $\mathscr{C}$转导得到，因此 $\mathscr{E}_t$ 也是单子依赖的。于是，根据定理 40，我们得出$\mathscr{E}_t$ 实际上处处稠密。因此，由断言 45可知，类 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$、$\mathscr{E}_3$、.....以及着色 λ 证明了 $\mathscr{D}$ 具有拟有界大小的处处稠密分解，正如所声称的那样。至此，定理 41的证明结束。