arXiv:2601.14907v1 [math.FA] 21 Jan 2026

逆半群作用的巴拿赫代数交叉积

Krzysztof Bardadyn 和 Bartosz K. Kwa´sniewski

摘要。 我们对巴拿赫代数上的逆半群作用的协变表示理论进行了自包含且简化的介绍；该理论最近在 [2]扭曲情形下被引入。本说明的主要结果是对相关巴拿赫代数交叉积的一般普适描述，从而可以将交叉积的所有表示进行分解。这样的分解在 [2] 中仅针对空间上的作用进行了研究。

数学主题分类（2010）。 47L10, 46H15, 16W22。**关键词**。 逆半群作用，交叉积，巴拿赫代数。

1. 引言

正如群这一概念的创立是为了描述给定对象的全局对称性一样，逆半群的出现则是为了描述局部对称性，即它们只“看到”对象的某些部分 [10]。空间上的逆半群作用（又称由“部分对称性”给出的作用）在适当意义下等价于 ´etale 群胚 [7, 13]。这一联系对于群胚代数的研究至关重要，因为群胚代数可以被视为相应逆半群作用的交叉积。群胚 C^*代数理论对此已有相当深入的研究 [3, 7, 13, 17]。特别是，这一联系通过 Cartan 子代数 [14], 的概念，促成了如下结论：每个可分类的简单 C^*代数都有一个（扭曲的）群胚模型 [11]。受此启发， [2] 的作者最近通过首先构造逆半群作用的巴拿赫代数交叉积，然后将其与群胚卷积代数的各种完备化联系起来，引入了群胚巴拿赫代数。

在本文中，我们将更深入地考察交叉积本身。为求清晰起见，我们忽略 [2] 中讨论的扭曲。主要结果是对逆半群作用于近似含幺巴拿赫代数所得的巴拿赫代数交叉积给出一个普适描述，从而在该交叉积的表示与

该作用的协变表示（定理 28）之间建立一一对应。这里的难点在于找到协变表示的恰当概念，并证明每个全局作用都能“分解”为该作用的表示。在 [2] 中，利用群胚模型证明了交换 C^*代数上的作用 $C_0(X)$），这类作用等价于局部紧豪斯多夫空间上的作用 X。我们为非交换巴拿赫代数上的作用给出一个直接的一般性证明。

2. 序言：群作用及其交叉积

为了解释其中的细微之处，我们先讨论群作用；相关理论要简单得多，也为专家所熟知。一个离散群的作用 G在巴拿赫代数 A 上，是一个群同态 $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$，其中 $\mathrm{Aut}(A)$ 是 A 的等距自同构所构成的群。出于技术上的原因，我们假设 A 是近似含幺的，即 A 含有一个压缩双边近似单位。我们将这样的作用记为 $\alpha : G \curvearrowright A$。于是，巴拿赫代数交叉积是巴拿赫空间

$$A \rtimes_\alpha G := \ell^1(G, A) = \{a : G \to A : \|a\|_1 := \sum_{g\in G} \|a(g)\| < \infty\}$$

其乘法定义如下：

$$(a * b)(g) := \sum_{h\in G} a(h)\alpha_h(b(h^{-1}g)), \qquad g \in G,\ a, b \in \ell^1(G, A).$$

代数 $A \rtimes_\alpha G$ 可用表示作如下描述。所谓一个巴拿赫代数在另一巴拿赫代数中的表示，是指一个压缩代数同态。当目标代数是巴拿赫空间 E 上所有有界算子构成的巴拿赫代数 $B(E)$时，我们称之为巴拿赫空间 E上的表示。 α 在巴拿赫空间上的协变表示是一个二元组 (π, v)，其中 $\pi : A \to B(E)$ 是一个表示，且在（空间）非退化的意义下满足 $\pi(A)E = E$；而 $v : G \to \mathrm{Iso}(E)$ 是一个群同态，其取值于可逆等距变换群 $\mathrm{Iso}(E)$，并且这些变换作用于 E，使得

$$v_g\pi(a) = \pi(\alpha_g(a))v_g, \qquad \text{for all } a \in A,\ g \in G. \tag{1}$$

以下命题已在 [18, Propositions 2.7,2.8] 的 C^* 代数框架中证明，并在 [1, Lemma 2.8] 中针对 $A = C_0(X)$ 证明，但该证明适用于一般的近似含幺巴拿赫代数。

命题1。设 $\alpha : G \curvearrowright A$ 是巴拿赫代数 A 上的群作用。对于 α 的任意协变表示 (π, v)，公式

$$\pi \rtimes v(a) = \sum_{g\in G} \pi(a(g))v_g, \qquad a \in A \rtimes_\alpha G, \tag{2}$$

其中该级数范数收敛，定义了 $\pi \rtimes v$ $A \rtimes_\alpha G$ 的一个表示，并且 $A \rtimes_\alpha G$ 的每个非退化表示都具有这种形式。

上述命题表明， $A \rtimes_\alpha G$ 是满足协变表示所给关系的一个万有巴拿赫代数。这一性质在等距同构的意义下唯一确定 $A \rtimes_\alpha G$ 。为阐明这一点，我们引入如下概念：巴拿赫代数 B 中 α 的一个协变表示是指一对 (π, v)，其中 $\pi\colon A \to B$ 是一个表示，并且它在（代数意义上）是非退化的，即 $\pi(A)B = B$； $v\colon G \to \mathcal{UM}(B)$ 是到乘子代数 $\mathcal{M}(B)$ 中可逆等距变换群的一个群同态，且交换关系 (1) 成立。以下结论可由命题1推得，但也可由定理28推出，见下文的推论29。

定理 2. 设 $\alpha\colon G \curvearrowright A$ 是巴拿赫代数 A 上的一个群作用。那么，巴拿赫代数交叉积 $A \rtimes_\alpha G$ 具有以下两个性质：
(1) 存在 α 在 $A \rtimes_\alpha G$ 中的一个协变表示 (ι, u)，使得 $A \rtimes_\alpha G = \text{张成}\{\iota(a)u_g\colon \ a \in A, g \in G\}$;(2) 对于 α 在巴拿赫代数 B 中的任意协变表示 (π, v)，都存在唯一表示 $\pi \rtimes v\colon A \rtimes_\alpha G \to B$，使得

$$\pi \rtimes v(\iota(a)u_g) = \pi(a)v_g \quad \text{for all } a \in A, g \in G.$$

任何满足上述 (1) 和(2) 的巴拿赫代数都与 $A \rtimes_\alpha G$ 等距同构。

请注意，我们以上使用的表示的两种非退化性概念有所不同。具体而言，$\pi : A \to B$(E 的代数非退化性会迫使 A和 π 含单位元，而空间非退化性则弱得多（例如考虑紧算子的恒等嵌入）。我们将这些非退化性假设视为归一化条件。与这些条件相关的微妙问题，在逆半群情形下更加棘手，因为我们需要处理理想、“局部乘子”及其表示。特别是，我们需要确定归一化条件应当是什么（这可能取决于具体语境）。值得注意的是，即使在 C^*-代数情形下，协变表示也已有两种相互竞争的定义：一种使用希尔伯特空间 [17]，另一种使用包络 W^*-代数 [3]。我们的理论阐明了如何从一种表示转到另一种，因此所得代数相同（推论 30）。

3. 逆半群作用的协变表示

一个逆半群是满足如下条件的半群 S ：对每个 $t \in S$，都存在唯一的“广义逆”，即存在 $t^* \in S$，使得 $t = tt^*t$ 且 $t^* = t^*tt^*$。这一唯一性等价于 S 中的幂等元彼此交换，因此它们构成一个交换半群 $E(S) := \{e \in S\colon \ e^2 = e\}$。群 G 是仅有一个幂等元的逆半群，而该幂等元必然是单位元。 S 中的幂等元在 S 上诱导出一个偏序：对于任意 s， $t \in S$，若 $s = ts^*s$，我们便记作 $s \le t$；这等价于对于某个 $e \in E$，有 $s = te$ (S)。更多细节请参阅 [7, 10, 13]。

例。集合 X 上的一个部分双射是两个子集 U，$\theta(U)$ 之间的双射 $\theta: U \to \theta(U) \subseteq X$。我们在复合有意义的最大定义域上复合部分双射 $\theta: U \to \theta(U)$ 和 $\vartheta: V \to \vartheta(V)$。因此

$$\theta \circ \vartheta : \vartheta^{-1}(U \cap \vartheta(V)) \to \theta(U \cap \vartheta(V)).$$

在此运算下，所有定义在 X 上的部分双射构成的集合 PBij(X) 成为一个逆半群，其中 $\theta^* = \theta^{-1}: \theta(U) \to U$ 是 θ的逆，而幂等元 $E(S) = \{\theta : \theta = id|_U$ 对于某个 $U \subseteq X\}$，可视为 X的子集。此外，$\theta \leq \vartheta$ 当且仅当 θ 是映射ϑ 在 θ的定义域上的限制。这个例子具有普遍性，因为每个逆半群 S 都可以视为某个 PBij(X) 的逆子半群，其中 X取某个 X（事实上，这里可以取 $X = S$）。

在巴拿赫代数中，理想 始终指闭的双边理想。巴拿赫代数 A上的部分自同构 是两个理想 I, J 之间的等距代数同构 $\alpha: I \to J$，它们都是 A的理想。A 的部分自同构构成的集合 PAut(A) 在部分映射的复合运算下构成一个逆半群。当 $A = C_0(X)$ 时，对于局部紧豪斯多夫空间X，A中的理想与开集相对应，而部分同构则由与部分同胚的复合给出。特别地，我们有半群的自然同构 PAut($C_0(X)$) $\cong$ PHomeo(X)，其中 PHomeo(X) 是部分同胚构成的逆半群。

定义 3. 巴拿赫代数上的逆半群作用 S A是一个半群同态 $\alpha: S \to$ PAut(A)，且其为“近似”含单位元的。更确切地说，$\alpha = \{\alpha_t\}_{t\in S}$ 是由部分自同构组成的族$\alpha_t : I_{t^*} \to I_t$，作用于 A，并满足

(PA1) $\alpha_s \circ \alpha_t = \alpha_{st}$（作为部分映射）对所有 s，$t \in S$均成立；(PA2) 每个理想 $I_t, t \in S$ 都有一个近似单位，且并集$\bigcup_{e\in E(S)} I_e$在线性意义下稠密于 A。

如果 S 有零元，那么我们还假设 $I_0 = \{0\}$。我们将这样的逆半群作用记作 $\alpha: S \curvearrowright A$。

注 4。如果 S 含单位元，那么在满足(PA1) 的前提下，(PA2) 的第二部分等价于假设 α 含单位元，即 $\alpha_1 =$恒等映射$_A$。

注记 5。当 A 是一个 C^*-代数时，上述定义最早出现在 Sieben 的著作 [17, 定义 31] 中（一个 C^*-代数中的每个理想都自动具有近似单位）。对于巴拿赫代数上的扭曲作用，这一定义是在 [2]中引入的。要求半群律在 (PA1)中保持不变会带来许多推论。特别地，对于任意作用 $\alpha: S \curvearrowright A$，对所有$s$，$t \in S$ 以及 $e \in E(S)$，都有

$$\alpha_s(I_{s^*} \cap I_t) = I_{st}, \quad I_t = I_{tt^*}, \quad \alpha_e = \mathrm{id}|_{I_e}, \quad \alpha_{t^*} = \alpha_t^{-1},$$

并且当 $s \leq t$ 时有 $I_s \subseteq I_t$。我们将不加说明地使用这些关系。

例。逆半群在 α 上的作用 $A = C_0(X)$，其中 X 是一个局部紧豪斯多夫空间，对应于逆半群在 θ 上的作用 X，其定义如下

定义为 [7], 其中 $\alpha_t\colon\ C_0(X_{t^*}) \to C_0(X_t)$ 由 $\alpha_t(a) = a\circ\theta_{t^*}$ 对$a\in C_0(X_{t^*})$ 定义，且 $\theta_{t*}\colon\ X_t\to X_{t^*}$ 是一个部分同胚，定义在 X上。

例子。若 $S = G$ 是一个群，且 A 是一个巴拿赫代数，则 S 在 A 上的逆半群作用与 G 在 A上的群作用相同。

下面的定义是对相应 C^*代数概念 [17, 定义 3。4], 以及第2节中我们使用的群作用的巴拿赫代数定义的直接推广。对于任意巴拿赫代数 B，我们用 $B_1 := \{b\in B\colon\ \|b\|\le 1\}$ 表示其闭单位球。

定义 6。设 $\alpha\colon\ S\curvearrowright A$是一个逆半群作用。$\alpha$ 在巴拿赫空间 E 上的一个协变表示是一个对(π, v)，其中 $\pi\colon\ A\to B(E)$是一个表示，而 $v : S\to B(E)_1$ 是一个取值于压缩算子的半群同态，使得

(SCR1) $v_t\pi(a) = \pi(\alpha_t(a)))v_t$ for all $a\in I_{t^*}$, $t\in S$;
(SCR2) $v_tE = \overline{\pi(I_t)E}$ for $t\in S$.

注 7。由于对所有 $t\in S$，以及 S 中的所有幂等元都具有 tt^*的形式，我们看到，(SCR2)等价于假设与幂等元 $e\in E(S)$对应的压缩投影 v_e 的值域为$\pi(I_e)E$。这一条件与(SCR1)以及对所有 $e\in E(S)$都有 $\alpha_e = \mathrm{id}_{I_e}$这一事实，意味着对所有 $a\in I_e$, $e\in E(S)$，都有 $\pi(a) = v_e\pi(a) = \pi(a)v_e$。

上述定义中的算子 $\{v_t\}_{t\in S}$ 是 Mbekhta [12], 意义下的偏等距算子，因为它们是压缩算子并且

$$v_tv_{t^*}v_t = v_t,\qquad v_{t^*}v_tv_{t^*} = v_{t^*},\qquad t\in S.$$

特别地，对于希尔伯特空间上的表示，我们必然有 $v_{t^*} = v_t^*$。对于作用在 C^*-代数上的作用，或者更一般地，当作用中出现的理想具有厄米近似单位时，算子 $\{v_t\}_{t\in S}$ 必然是摩尔－彭若斯部分等距算子，参见 [2,推论 3.20]。

可以直接采用为逆半群作用[17] 构造 C^*-交叉积的方法，构造出一个巴拿赫代数，使其具有如下普适性：作用的每个协变表示（π，v）都可积分为该代数的一个表示 $\pi\rtimes v$。但在涉及分解时，情况会微妙得多。一般来说，我们将使用巴拿赫代数 B的双对偶 B''。原因在于，“局部乘子”位于B'' 中，而不在 B 中，甚至也不在 $\mathcal{M}(B)$中。此外，我们还需要某种弱拓扑，而 B'' 具有由 B'诱导的弱* 拓扑，我们将其称为 B'-拓扑。回忆一下，B'' 自然地仍是一个巴拿赫代数，具有任一种阿伦斯积，其中 B 作为一个 B'-弱稠密的巴拿赫代数嵌入其中。具体而言，对于 a，$b\in B''$，第一阿伦斯积 定义为

$$a\square b = B'\text{-}\lim_\alpha B'\text{-}\lim_\beta a_\alpha b_\beta$$

其中，$\{a_\alpha\}_\alpha$、$\{b_\beta\}_\beta$ 分别是收敛到 a、b的 B'网。类似地，第二*Arens*积 定义为

$$a\cdot b = B'\text{-}\lim_\beta B'\text{-}\lim_\alpha a_\alpha b_\beta.$$

巴拿赫空间 B'' 在上述任一乘积下都是巴拿赫代数。一般来说，这些乘积彼此不同。如果两个乘积相同，则 B称为 ***Arens*** 正则，详见 [4] 。为清晰起见，本文将只使用第二***Arens***积。这一选择是任意的；无论如何，我们主要关注满足以下条件的乘积 $av \in B$ ，其中$a \in B$ 且 $v \in B''$，此时第一和第二Arens积总是一致的。此外，回顾一下，每个 C^*-代数都是 Arens 正则的。

对于任意表示 $\pi\colon\ A \to B$ ，二重伴随 $\pi''\colon\ A'' \to B''$ 是一个 B'-弱连续表示，它扩张了 π；并且当 π 是等距的时， π'' 也是等距的。特别地，对于每个巴拿赫子代数 $A \subseteq B$ ，我们可以将 A'' 视为 B'' 的一个巴拿赫子代数。此外， A 中的任意近似单位 $\{\mu_i\}$ 都 A'- 弱收敛到 A'' 中的一个左单位元 1_A （也是 A'' 中第一阿伦斯积的右单位元），它还是乘子代数 $\mathcal{M}(A) := \{b \in A''\colon\ ba, ab \in A$ 中的单位元，对所有 $a \in A\} \subseteq A''$ 均成立，参见 [4, 命题 2.9.16 和定理 2.9.49]。特别地，对于 A 中每个具有近似单位的理想 I ，我们将采用如下同一视为法： $I \subseteq \mathcal{M}(I) \subseteq I'' \subseteq A''$。

定义 8。设 $\alpha\colon\ S \curvearrowright A$是一个逆半群作用。 α 的协变表示 α 在巴拿赫代数 B 中是一个二元组（π， v），其中 $\pi\colon\ A \to B$是一个表示，而 $v\colon\ S \to (B'')_1$ 是满足以下条件的映射

(CR1) $v_t\pi(a) = \pi(\alpha_t(a))v_t \in B$ 对所有 $a \in I_{t^*}$成立；
(CR2) $\pi(a)v_sv_t = \pi(a)v_{st}$ 对所有 $a \in I_{st}$、 s、 $t \in S$成立；
(CR3) $\pi(a)v_e = \pi(a)$ 对所有 $a \in I_e$、 $e \in E(S)$ 成立。

这样的协变表示（π， v）称为非退化的，如果 $\pi(A)B = B$。我们将 $B(\pi, v) := \overline{\operatorname{span}}\{\pi(a)v_t\colon\ a \in I_t,\ t \in S\}$ 称为（π， v）的值域。

注 9。条件 (CR1) 等价于 $\pi(a)v_t = v_t\pi(\alpha_{t^*}(a)) \in B$ 对所有 $a \in I_t$、 $t \in S$成立。注意，该条件包含两层含义。首先，这是一个交换关系。其次，它要求所考虑的乘积属于 B，而不是属于 B''。特别地，它意味着 $B(\pi, v) \subseteq B$。条件 (CR1) 和 (CR3) 蕴含，对于所有 $a \in I_e$、$e \in E(S)$，有 $v_e\pi(a) = \pi(a)$ （注意 $\alpha_e = \mathrm{id}_{I_e}$）。由于 $I_t = I_{tt^*}$，(CR2) 和 (CR3) 蕴含，对于所有 $a \in I_t$，有 $\pi(a)v_t^*v_t = \pi(a)v_{t^*t} = \pi(a)$。再利用 (CR1)，我们得到

$$v_t\pi(a)v_{t^*} = \pi\big(\alpha_t(a)\big) \qquad \text{for all } a \in I_{t^*},\ t \in S. \tag{3}$$

引理 10。设$(\pi、 v)$ 是 α 在巴拿赫代数B中的一个协变表示。其值域 $B(\pi、 v)$ 是 B的巴拿赫子代数。空间 $A_t = \{\pi(a_t)v_t\colon\ a_t \in I_t\}$、 $t \in S$，构成 $B(\pi、 v)$ 关于逆半群 S 的一个分次，其含义是

$$B(\pi, v) = \overline{\operatorname{span}}\{A_t : t \in S\}, \qquad A_sA_t \subseteq A_{st}, \qquad s \le t \ \textit{implies}\ A_s \subseteq A_t,$$

对所有 s、 $t \in S$均成立。事实上，对于所有 $a_t \in I_t$、 $a_s \in I_s$、 s、 $t \in S$，我们有

(1) $\pi(a_s)v_s \cdot \pi(a_t)v_t = \pi\big(\alpha_s(\alpha_{s^*}(a_s)a_t)\big)v_{st}$ 以及 $\alpha_s\big(\alpha_{s^*}(a_s)a_t\big) \in I_{st}$；
(2) $s \le t$ 蕴含 $I_s \subseteq I_t$ 以及 $\pi(a_s)v_s = \pi(a_s)v_t$。

证明。(1). 对任意 $a_t \in I_t$， $a_s \in I_s$， s， $t \in S$，有 $\alpha_{s^*}(a_s)a_t \in I_{s^*}I_t = I_{s^*} \cap I_t$ 因此 $\alpha_s(\alpha_{s^*}(a_s)a_t) \in I_{st}$ 因为 $\alpha_s(I_{s^*} \cap I_t) = I_{st}$，见备注 5。

利用(CR1) 可得

$$\pi(a_s)v_s\cdot\pi(a_t)v_t = v_s\pi\big(\alpha_{s^*}(a_s)\big)\cdot\pi(a_t)v_t = v_s\pi\big(\alpha_{s^*}(a_s)a_t\big)v_t$$
$$= \pi\Big(\alpha_s\big(\alpha_s^*(a_s)a_t\big)\Big)v_{st}.$$

(2)。若 $s\le t$，则 $I_s\subseteq I_t$ 根据注 5。由 (CR3) 和 (CR2)，对 $a\in I_s$，我们得到 $\pi(a)v_t=\pi(a)v_{ss^*}v_t=\pi(a)v_{ss^*t}=\pi(a)v_s$. □

注意，定义 v_t 中的元素8 不要求是部分等距算子，尤其是一般而言，它们并不构成半群。不过，这总可以通过“归一化”来实现。根据目标代数 B 的结构，这种归一化可以有不同的方式。一般来说，在对 B一无所知的情况下，我们总可以使用 B'的 -拓扑，如下所示。 B''

定义11。令 $\alpha:S\curvearrowright A$ 为一个逆半群作用。若 Banach 代数 B 中的 α 的协变表示 (π,v) 是归一化的，则

$$v_t = B'\text{-}\lim_i(\pi(\mu_i^t)v_t) \text{ for an an approximate unit } \{\mu_i^t\}_i \text{ in } I_t,\ t\in S. \quad (4)$$

注记 12. 由于出现在 $\pi(\mu_i^t)v_t$ 中的元素 4) 属于 $B(\pi,v)\subseteq B(\pi,v)''\subseteq B''$ 的单位球中，巴拿赫-阿劳格鲁定理表明，若 $B(\pi,v)''$ 中的极限存在，则它属于该空间。因此，(4) 等价于

$v_t = B(\pi,v)'$- 极限$_i$ $(\pi(\mu_i^t)v_t)$，其中 $\{\mu_i^t\}_i$是 I_t, $t\in S$中的一个近似单位。

记号 13. 我们用 1_t 表示 $\mathcal{M}(I_t)\subseteq I_t''\subseteq A''$中的单位元。注意，对所有 $t\in S$, $1_t=1_{tt^*}$ 且 $1_{t^*}=1_{t^*t}$，因为 $I_t=I_{tt^*}$ 且 $I_{t^*}=I_{t^*t}$。

命题14。一对 (π,v) 是α 的 B'-归一化协变表示，当且仅当 $\pi:A\to B$ 是一个表示，并且 $v:S\to(B'')_1$ 是一个半群同态，满足 $\pi(a)v_t\in B$，其中 $a\in I_t$、 $t\in S$，且

(1) $v_t\pi(a)v_{t^*}=\pi(\alpha_t(a))$ 对所有 $a\in I_{t^*}$, $t\in S$;
(2) $v_e=\pi''(1_e)$ 对所有 $e\in E(S)$。

此外，对于 α 在 B 中的任意协变表示(π,v)，令

$$\tilde v_t = B'\text{-}\lim_i(\pi(\mu_i^t)v_t) = v_t\pi''(1_{t^*}),\qquad t\in S,$$

该对$(\pi,\tilde v)$ 是唯一的 B'-归一化协变表示，满足$\pi(a)v_t=\pi(a)\tilde v_t$，对所有 $a\in I_t$ 和 $t\in S$均成立。特别地， $B(\pi,v)=B(\pi,\tilde v)$。

证明。设（π， v）是一对具有断言中所述性质的对象。对于每个 $t\in S$ 和 $a\in I_{t^*}$，都有 π（a）π''（1_{t^*}），$=\pi$（a），因此同时利用 （2）和 （1）可得

$$v_t\pi(a) = v_t\pi(a)\pi''(1_{t^*}) = v_t\pi(a)v_t^*v_t = \pi\big(\alpha_t(a)\big)v_t,$$

这就是 (CR1)。我们假设 v 是半群同态，这显然比 (CR2)更强。利用半群律和 (2) 可得

$$v_t = v_{tt^*t} = v_tv_{t^*}v_t = \pi''(1_t)v_t,$$

由此得到（4）。将半群律和 (2) 应用于幂等元 $e \in E(S)$，可得 $v_e = v_{ee} = v_e v_e = \pi''(1_e)$，这意味着 (CR3)。因此，$\pi$，$v$）是 B'-归一化协变表示 α。

现在，令 (π, v) 为任意 B'-归一化协变表示。对于每个$t \in S$，取 $I_t = I_{tt^*}$ 中的一个近似单位 $\{\mu_i^t\}_i$。对于 $a \in I_{t^*}$，我们得到

$$v_t \pi(a) v_{t^*} = \pi\big(\alpha_t(a)\big) v_t v_{t^*} = \pi(\alpha_t(a)) v_{tt^*} = \pi(\alpha_t(a)),$$

这就是 (1)。若 $e \in E(S)$，则由归一化条件 (4) 和 (CR3) 可得

$$v_e = B'\text{-}\lim_i (\pi(\mu_i^e) v_e) = B'\text{-}\lim_i \pi(\mu_i^e) = \pi''(1_e),$$

这就是 (2)。现在任取 $s, t \in S$。回忆一下，$\alpha_s(I_{s^*} \cap I_t) = I_{st}$，因此$\{\alpha_s(\alpha_{s^*}(\mu_j^s)\mu_i^t)\}_{i,j}$ 是 中的一个近似单位 I_{st}。利用这一点、归一化条件 (4) 以及引理 10(1)，可得

$$\begin{aligned} v_s v_t &= v_s B'\text{-}\lim_i [\pi(\mu_i^t) v_t] = B'\text{-}\lim_i [v_s \pi(\mu_i^t) v_t] \\ &= B'\text{-}\lim_i B'\text{-}\lim_j [\pi(\mu_j^s) v_s \pi(\mu_i^t) v_t] \\ &= B'\text{-}\lim_i B'\text{-}\lim_j [\pi\big(\alpha_s(\alpha_{s^*}(\mu_j^s)\mu_i^t)\big) v_{st}] = v_{st}. \end{aligned}$$

因此，(π, v) 满足断言中的所有性质。

现在令 (π, v) 为 B 中的 (α, u) 的任意协变表示。利用(CR1) 可得

$$\begin{aligned} B'\text{-}\lim_i \big(\pi(\mu_i^t) v_t\big) &= B'\text{-}\lim_i \big(v_t \pi(\alpha_{t^*}(\mu_i^t))\big) = v_t B'\text{-}\lim_i \pi\big(\alpha_{t^*}(\mu_i^t)\big) \\ &= v_t \pi''(1_{t^*}), \end{aligned}$$

因为 $\{\alpha_{t^*}(\mu_i^t)\}_i$ 是 I_{t^*} 中的一个近似单位，且在 B'意义下收敛到1_{t^*}。因此，极限 $\tilde{v}_t := B'\text{-}\lim_i (\pi(\mu_i^t) v_t) = v_t \pi''(1_{t^*})$ 存在，且不依赖于 I_t中的近似单位 $\{\mu_i^t\}_i$ 的选取，$t \in S$。显然，如果 $(\pi, \tilde{v})$ 是满足 $\pi(a) v_t = \pi(a) \tilde{v}_t$（对所有 $a \in I_t$ 和 $t \in S$成立）的 B'-归一化协变表示，那么每个 $\tilde{v}_t$ 都必须由这样的极限给出。对于$a \in I_{t^*}$，我们得到

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t \pi(a) &= v_t \pi''(1_{t^*}) \pi(a) = v_t \pi(a) = \pi\big(\alpha_t(a)\big) v_t \\ &= \lim_i \pi\big(\alpha_t(a)\big) \pi(\mu_i^t) v_t = \pi\big(\alpha_t(a)\big) \tilde{v}_t. \end{aligned}$$

这表明 $(\pi, \tilde{v})$ 满足 (CR1)，且 $\pi(a) v_t = \pi(a) \tilde{v}_t$（对所有 $a \in I_t$ 和$t \in S$成立）。利用这一点，我们得到 $\pi(a) \tilde{v}_e = \pi(a) v_e = \pi(a)$（对所有 $a \in I_e$, $e \in E(S)$ 成立），因此 (CR3) 成立。最后，对于所有 $s, t \in S$ 和 $a \in I_{st}$，计算得

$$\pi(a) \tilde{v}_s \tilde{v}_t = v_s \pi\big(\alpha_{s^*}(a)\big) \tilde{v}_t = \pi(a) v_s v_t = \pi(a) v_{st} = \pi(a) \tilde{v}_{st}$$

给出了 (CR2)。由于 $\tilde{v}$ 按构造满足（4），因此可得（π，$\tilde{v}$）是所需的 B'-归一化协变表示 α。□

注15。上述命题表明，对于任意协变表示（π，v），归一化条件（4）等价于假设$v_t = v_t \pi''(1_{t^*})$，对所有 $t \in S$均成立；并且这意味着 $v_t = \pi''(1_t)\, v_t$，对所有 $t \in S$均成立。当 B 是 Arens 正则时，后一蕴含可以反向成立。一般而言

这一点并不明确。这种不对称源于我们任意选择在 B''中使用第二 Arens 乘积。

推论 16. 保留引理 *10*中的假设和记号。进一步假设 A 和 B 都是 C^*-代数。那么

$$(\pi(a_t)v_t)^* = \pi\big(\alpha_{t^*}(a_t^*)\big)v_{t^*} \qquad for\ all\ a_t \in I_t,\ t \in S,$$

因此 $A_t^* = A_{t^*}$，且 $\{A_t\}_{t\in S}$ 是 $B(\pi, v)$ 关于 S 的饱和分次，符合 [9,定义 6。15], 另见 [7, 定义 7。1]。

证明。若 B 是一个 C^*-代数，则 B'' 仍是一个 C^*-代数—— B的包络 W^*-代数。 C^*-代数之间的压缩同态 $\pi: A \to B$ 必然保持 $*$。通过转到命题 14中所述的归一化协变表示 $(\pi, \tilde{v})$，我们看到，对于每个 $t \in S$，算子 $\tilde{v}_t := \pi''(1_t)v_t = v_t\pi''(1_{t^*})$ 是一个部分等距算子，其在 B'' 中的伴随为 $\tilde{v}_{t^*} = \pi''(1_{t^*})v_{t^*} = v_{t^*}\pi''(1_t)$。因此，对于 $a_t \in I_t, t \in S$，得到

$$\big(\pi(a_t)v_t\big)^* = \big(\pi(a_t)\tilde{v}_t\big)^* = \tilde{v}_{t^*}\pi(a_t^*) = \pi(\alpha_{t^*}(a_t^*))\tilde{v}_{t^*} = \pi(\alpha_{t^*}(a_t^*))v_{t^*}. \quad \square$$

备注17. 如果每个 $I_t, t \in S$ 都含单位元，即 $1_t \in A, t \in S$，那么对于 α 在 B 上的任意协变表示 (π, v)，其 B'-归一化 $\tilde{v}_t = \pi(1_t)v_t, t \in S$ 根据 (CR1) 都取值于 B。因此，在这种情况下，无须改变协变表示的值域，就可以完全避免讨论 B''。此时，命题14可以不借助二重对偶代数 B'' 和扩展表示 π'' 来表述。也就是说，当每个 $I_t, t \in S$ 都含单位元时， α 的归一化协变表示是一个二元组 (π, v)，其中$\pi: A \to B$ 是一个表示，且 $v: S \to B_1$ 是一个半群同态，满足

(1) $v_t\pi(a)v_{t^*} = \pi(\alpha_t(a))$ 对所有 $a \in I_{t^*}, t \in S$ 都成立；(2) $v_e = \pi(1_e)$ 对所有 $e \in E(S)$ 都成立。

当逆半群作用 $\alpha: S \curvearrowright A$ 是任意的时，只要 B 具有前对偶Banach 空间 B_*，我们就可以将映射的取值限制在 B 中（而非 B''中）。于是有典范嵌入 $B_* \subseteq B_*'' = B'$ （若 B 不是自反的，则包含关系为真包含），因此 B'' 上的 B_*-拓扑弱于 B'-拓扑。然而，这两种拓扑在 B的有界子集上相同：

引理18. B 中的元素构成的有界网在 B_*下收敛，当且仅当它在 B'下收敛；此时极限属于 B ，而非 B''。

证明。设 $\{b_i\}_i$ 是 B 中元素的一个有界网。由于 $B_* \subseteq B'$，若 $\{b_i\}_i$ 按 B' 收敛到 $b \in B''$，则 $\{b_i\}_i$ 也按 B_* 收敛到 b，于是巴拿赫-阿劳格鲁定理可推出 $b \in B$ （因为网 $\{b_i\}_i$ 包含在 B 的一个闭球中）。反过来，假设 $\{b_i\}_i$ 按 B_* 收敛到 b （必然属于 B）。由于网 $\{b_i\}_i$ 包含在 B'' 的一个闭球中，巴拿赫-阿劳格鲁定理可推出 $\{b_i\}_i$ 的每个子网都包含一个按 B' 收敛的子网，而该子网必收敛到 b（因为 B_* 拓扑弱于 B' 拓扑）。这意味着 $\{b_i\}_i$ 按 B' 收敛到 b。$\square$

推论 19。若巴拿赫代数 B 有巴拿赫空间前对偶 B_*，则 α 在 B 中的协变表示 (π, v) 是归一化的，当且仅当

$$v_t = B_*\text{-}\lim_i(\pi(\mu_i^t)v_t),\ \textit{for an approximate unit}\ \{\mu_i^t\}_i\ \textit{in}\ I_t,\ t \in S, \tag{5}$$

因此我们必然有 $\{v_t\}_{t\in S} \subseteq B$ （无需考虑 B''）。

当 B 是对偶巴拿赫代数时，归一化协变表示的描述甚至可以进一步简化。回顾一下，对偶巴拿赫代数是一个二元组（B， B_*），其中 B 是一个巴拿赫代数， B_* 是 B 的前对偶巴拿赫空间，并且 B 中的乘法是 B_*弱分别连续的，见 [5, 15]。对偶巴拿赫代数的例子包括所有带有其唯一前对偶的 W^*代数，以及反身巴拿赫空间 B（E）上所有有界算子构成的代数， E并配备典范前对偶巴拿赫空间 $E'\widehat{\otimes}E$。我们使用以下结果，它是 [8, 定理 56]的推论。

命题 20（Ilie-Stokke）。设 A 是一个具有近似单位的巴拿赫代数。每个映射到对偶*Banach*代数 (B, B_*) 的表示 $\pi : A \to B$ ，都有唯一延拓为表示 $\pi : \mathcal{M}(A) \to B$ ，且该延拓是严格-B_*-连续的；对任意 $m \in \mathcal{M}(A)$ 及任意 A 中的近似单位 $\{\mu_i\}_i$ ，其定义为 $\pi(m) := B_*\text{-}\lim_i \pi(m\mu_i)$ 。

推论 21。设 (B, B_*) 是一个对偶*Banach*代数。当且仅当 $\pi : A \to B$ 是一个表示，且 $v : S \to (B)_1$ 是一个半群同态并满足下述条件时，数对 (π, v) 才是作用 $\alpha : S \curvearrowright A$ 在 B 中的归一化协变表示

(1) 对所有 $a \in I_{t^*}$, $t \in S$， $v_t\pi(a)v_{t^*} = \pi(\alpha_t(a))$；*(2)* 对所有 $e \in E(S)$，$v_e = \pi_e(1_e)$，其中 $\overline{\pi}_e : \mathcal{M}(I_e) \to B$ 是 $\pi|_{I_e}$ 的唯一严格-B_*-连续延拓，由命题 *20* 给出。

此外，对于任意协变表示 (π, v) *of* α *in* B ，令

$$\tilde{v}_t = B_*\text{-}\lim_i \pi(\mu_i^t)v_t = \overline{\pi}_{tt^*}(1_{t^*t})v_t = v_t\overline{\pi}_{t^*t}(1_{t^*t}), \qquad t \in S,$$

这一对 $(\pi, \tilde{v})$ 是唯一的 B_*-归一化协变表示，使得$\pi(a)v_t = \pi(a)\tilde{v}_t$ 对所有 $a \in I_t$ 和 $t \in S$均成立。特别地， $B(\pi, v) = B(\pi, \tilde{v})$。

证明。利用推论 19 和命题 2 ，将命题 14 0. □

现在回到巴拿赫空间上的协变表示 E，如定义 6所述，我们注意到，它们可以看作代数 $B(E)$ 中借助强拓扑“归一化”的协变表示。但如果 E 是自反的，那么它们实际上与 B_*中的（ $B(E)$ B_* -）归一化协变表示一致，其中 $B(E)$ 是典范前对偶。

引理 22。设 (π, v) 是 $\alpha : S \curvearrowright A$ 在巴拿赫空间 E上的协变表示。那么，(π, v) 是巴拿赫代数 $B(E)$ 中的协变表示，并且每个 $v_e \in B(E)$、$e \in E(S)$都是$\{\pi(\mu_i^e)\}_i$的强极限，其中 $\{\mu_i^e\}_i$是 I_e中的压缩近似单位。

证明。 显然，(π, v) 是巴拿赫代数 $B(E)$ 中的协变表示，见注记7。注意，对于 $e \in E(S)$，(E) 是到 $\pi(I_e)E$ 上的投影，并且与 $\pi(I_e)$ 中的元素交换。这意味着 v_e 是 $\{\pi(\mu_i^e)\}_i$的强极限。 □

回想一下，若 E 是自反巴拿赫空间，则射影张量积巴拿赫空间 $E' \hat{\otimes} E$ 自然是 $B(E)$ 的预对偶，从而使其成为对偶Banach代数。这里，我们将简单张量 $\xi \otimes f \in E\hat{\otimes}E'$ 与泛函 $\xi \otimes f \in B(E)'$ 相对应，该泛函由 $\xi \otimes f(T) := f(T\xi)$， $T \in B(E)$ 给出。

命题23。 假设 E 是自反巴拿赫空间。那么， α 在巴拿赫代数 $B(E)$ 中的归一化协变表示，与 α 在巴拿赫空间 E上的协变表示一致。

证明。我们将 $B(E)$ 视为对偶Banach代数，其预对偶为 $B_* := E' \hat{\otimes} E$。假设 (π, v) 是 $B(E)$ 中的归一化协变表示，因此 $\{v_t\}_{t\in S} \subseteq B(E)$ 是偏等距，其对应的广义逆为 $\{v_t^*\}_{t\in S} \subseteq B(E)$，并满足推论 21 中所述的关系。由于它是协变表示，因此满足 (SCR1)，在此情形下即为 (CR1)。对任意 $e \in E(S)$，有 $v_e = \pi_e(1_e) = B_*\text{-}\lim \pi(\mu_i^e)$，其中 $\{\mu_i^e\}_i$ 是 I_e 中的近似单位。将此 B_*-收敛明确写出，即表示对所有 $\xi \in E$ 和 $f \in E'$，均有 $f(v_e\xi) = \lim_i f(\pi(\mu_i^e)\xi)$。这意味着对任意 $\xi \in E$， $v_e\xi$ 都属于 $\pi(I_e)E$ 的弱闭包。由于凸集的弱闭包与范数闭包相同，这意味着 v_e 的值域包含于 $\pi(I_e)E$ 中。反向包含显然成立，因此对每个 $e \in E(S)$，都有 $v_eE = \pi(I_e)E$ 。这等价于 (SCR2)，参见注 7。

反过来，假设 (π, v) 是 E 上依定义 6 的协变表示。显然，它也是依定义 8 在 $B(E)$ 中的协变表示。因此，我们只需证明它是规范化的。设 $e \in E(S)$。根据引理 22， $\{\pi(\mu_i^e)\}_i$ 强收敛到 v_e，而根据构造， $\{\pi(\mu_i^e)\}_i$ B_* 收敛到 $\pi_e(1_e)$。强收敛比 B_* 收敛更强。因此， $v_e = \pi_e(1_e)$。对任意 $t \in S$ 运用这一结论，可得

$$v_t = v_{tt^*}v_t = \overline{\pi}_{tt^*}(1_{tt^*})v_t,$$

这等价于（5）。 □

推论 24。 若 E 是自反的，则对于 α 在 $B(E)$ 中的任意协变表示 (π, v)，都存在唯一的协变表示 $(\pi, \tilde{v})$ 定义在 E 上，使得对所有 $a \in I_b$, $t \in S$，均有 $\pi(a)v_t = \pi(a)\tilde{v}_t$。

证明。 由命题 23 以及推论21 的第二部分，所需的对 $(\pi, \tilde{v})$ 是 $E'\hat{\otimes}E$-正规化得到的：(π, v)。 □

注记 25。 如果空间 E 有预对偶，但不是自反的，那么 B 具有前对偶Banach空间 B_*，但不一定是对偶Banach代数。于是推论 19 适用于 $B(E)$ 中的归一化协变表示，但它们与 E 上的协变表示之间的关系尚不清楚。

4. 逆半群作用的交叉积

固定一个逆半群作用 $\alpha: S \curvearrowright A$ 于巴拿赫代数 A上。按照 [17], ，我们考虑理想 ℓ^1-直和 $\{I_t\}_{t\in S}$ ，它是巴拿赫空间

$$\ell^1(\alpha) := \{f \in \ell^1(S, A) : f(t) \in I_t, t \in S\}$$

其范数为 $\|f\|_1 = \sum_{t\in S} \|f(t)\|$。我们在 $\ell^1(\alpha)$ 中定义乘法如下:

$$(f * g)(r) := \sum_{st=r} \alpha_s(\alpha_{s^*}(f(s))g(t)), \qquad r \in S.$$

该定义是良定的，因为对于 f， $g \in \ell^1(\alpha)$，我们有

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &= \sum_r \| \sum_{st=r} \alpha_s(\alpha_{s^*}(f(s))g(t))\| \\ &\le \sum_r \sum_{st=r} \|f(s)\|\|g(t))\| = \sum_{s,t} \|f(s)\|\|g(t))\| = \|f\|_1\|g\|_1.\end{aligned}$$

[17,命题 4.1] 的证明表明，这一乘法满足结合律。证明利用了这样的假设: 每个理想 I_t, $t \in S$ 都有近似单位。事实上，若没有这一假设，这种部分卷积乘积可能不满足结合律；关于这一问题的更多详情，参见 [6] 。这也是在逆半群作用的定义中纳入近似单位存在性条件的原因之一。

因此， $\ell^1(\alpha)$ 是一个巴拿赫代数。设 (π, v) 是 α 在巴拿赫代数 B 中的一个协变表示。对于任意 $f \in \ell^1(\alpha)$，级数

$$\pi \times v(f) := \sum_{t\in S} \pi(f(t))v_t$$

在 B和 $\|\pi \times v\| \le \sum_{t\in S} \|\pi(f(t))v_t\| \le \|f\|_1$中范数收敛。因此$\pi \times v: \ell^1(\alpha) \to B$ 是一个压缩线性映射。利用引理 10(1)可轻易看出， $\pi \times v$ 也是乘法的。因此， $\pi \times v$是一个表示。显然， $\pi \times v(\ell^1(\alpha)) = B(\pi, v)$。注意，通常 $\pi\times v$ 并非单射。事实上，记 $a\delta_t$为: 对于任意 $a \in I_t$, $t \in S$ ，满足$a\delta_t(s) = 0$ 的 $\ell^1(\alpha)$中的元素，其中 $s \ne t$ 且 $a\delta_t(t) = a$ 。由此可得，$\operatorname{span}\{a\delta_t : a \in I_t, t \in S\}$ 是 $\ell^1(\alpha)$中的一个稠密子代数。记

$$\mathcal{N} := \overline{\operatorname{span}}\{f(a\delta_s - a\delta_t)g : f, g \in \ell^1(\alpha), a \in I_s, s, t \in S, s \le t\}$$

由差值生成的 $\ell^1(\alpha)$ 中的理想 $a\delta_s - a\delta_t$ 对于 $a \in I_s$ 和 s， $t \in S$满足 $s \le t$。由引理 10(2) 可知，对于任意协变表示（π， v），我们有

$$\mathcal{N} \subseteq \ker(\pi \times v).$$

So $\pi \times v$可因子化为商巴拿赫代数 $\ell^1(\alpha)/\mathcal{N}$ 的一个表示 .

定义26。 设 $\alpha : S \curvearrowright A$ 是一个逆半群作用。我们用$A\times_\alpha S$表示 $\ell^1(\alpha)$ 关于次乘性半范数的豪斯多夫完备化

$$\|f\|_{\max} := \sup\{\|\pi \times v(f)\| : (\pi, v) \text{ 是 } \alpha\}.\text{的协变表示}$$

我们将由此得到的巴拿赫代数 $A \rtimes_\alpha S$ 称为 α 的（泛）巴拿赫代数交叉积。更一般地，如果 $\mathcal{R}$ 是 α 的某类协变表示，我们将 α 的 $\mathcal{R}$-交叉积定义为 $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{R}} S$，它是在半范数下对 $\ell^1(\alpha)$进行的豪斯多夫完备化

$$\|f\|_{\mathcal{R}} = \sup\{\|\pi \times v(f)\| : (\pi, v) \in \mathcal{R}\}.$$

特别地，任意 $(\pi, v) \in \mathcal{R}$ 都可积分为一个 $\pi \rtimes v$ 的表示 $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{R}} S$，它将 $a\delta_t$ 的像映为 $\pi(a)v_t$，其中 $a \in I_t, t \in S$。

注 27. 如上所述，我们可以不取 $\ell^1(\alpha)$ 的完备化，而考虑商代数 $\ell^1(\alpha)/\mathcal{N}$ 的完备化。事实上，半范数 $\|\cdot\|_{\max}$ 在 $\ell^1(\alpha)$ 上通常会在 $\ell^1(\alpha)/\mathcal{N}$ 上成为范数（尽管我们并不知道这是否普遍成立）。甚至可能有 $A \rtimes_\alpha S = \ell^1(\alpha)/\mathcal{N}$。

现在我们证明本文的主要结果，它给出了 $A \rtimes_\alpha S$ 的一个普适刻画，并且根据相关的协变表示对 $A \rtimes_\alpha S$ 的表示进行“分解”。这一结果在 [2] 中并未出现。

定理28。设 $\alpha : S \curvearrowright A$ 是巴拿赫代数 A 上的逆半群作用。交叉积 $A \rtimes_\alpha S$ 具有以下性质

(1) 存在 α 在 $A \rtimes_\alpha S$ 中的一个协变表示(ι, u)（我们可以假设它是归一化的），使得 $A \rtimes_\alpha S = B(\iota, u)(2)$ 对于任意巴拿赫代数 B 中的协变表示(π, v)，存在唯一表示 $\pi \rtimes v : A \rtimes_\alpha S \to B$，使得

$$\pi \rtimes v(\iota(a)u_t) = \pi(a)v_t \quad \text{for all } a \in I_t,\ t \in S.$$

任何满足上述条件(1)和(2)的巴拿赫代数，都与 $A \rtimes_\alpha S$典范等距同构。此外，

(a) 表示 $\Psi : A \rtimes_\alpha S \to B$ 与 α 在 B 中的归一化协变表示(π, v) 之间存在一一对应，其中

$$\Psi(\iota(a)u_t) = \pi(a)v_t \quad \text{for all } a \in I_t,\ t \in S. \tag{6}$$

若 (B, B_*) 是一个对偶*Banach*代数，则 在 B 中的归一化协变表示的描述可简化为推论 *21(b)* 若 E 是一个自反*Banach*空间，则 (6) 建立了表示 $\Psi : A \rtimes_\alpha S \to B(E)$ 与协变表示 (π, v) 之间的一一对应，该协变表示对应于 α 在 E 上。

证明。根据构造，对于每个 $a \in \ell^1(\alpha)$和 $\varepsilon > 0$，都存在一个协变表示(π, v)，使得 $\|a\|_{\max} < \|\pi \times v(a)\| + \varepsilon$。因此，存在一个族 $\{(\pi^i, v^i)\}_{i\in I}$，其中$(\pi^i, v^i)$是 α 在一个巴拿赫代数 B_i 中的协变表示，并且对每个 $a \in \ell^1(\alpha)$都有 $\|a\|_{\max} = \sup_{i\in I} \|\pi \times v(a)\|$。现在我们用这些表示的 ℓ^∞-和来表示它。也就是说，令

$$B := \oplus_{i\in I}^{\ell^\infty} B_i'' = \{f : I \to \bigsqcup_i B_i'' : f(i) \in B_i'', i \in I, \|f\|_\infty = \sup \|f(i)\| < \infty\}.$$

我们定义代数同态 $\iota : A \to B$，使得 $\iota(a) = \oplus_{i\in I}^{\ell^\infty} \pi_i(a)$，$a \in A$；并定义半群同态 $u : S \to B$，使得 $u_t := \oplus_{i\in I}^{\ell^\infty} v_t^i, t \in S$。显然，

(ι, u) 是 B 中的 α 的协变表示，满足 $\iota \times u = \oplus_{i\in I}^{\ell^\infty} \pi^i \times v_t^i$，因此对于 $a \in \ell^1(\alpha)$，有 $\|\iota \times u(a)\| = \|a\|_{\max}$。由此，它诱导出 $A \rtimes_\alpha S$ 的一个等距表示 $\iota \rtimes u$，因此我们可以将其值域与 $A \rtimes_\alpha S$ 等同。于是，(ι, u) 是 $A \rtimes_\alpha S$ 中的一个协变表示，满足 $A \rtimes_\alpha S = B(\iota, u)$。由构造可知，性质（2）显然成立。若 $C = B(\tilde{\iota}, \tilde{u})$ 是满足（2）的类似条件的协变表示 $(\tilde{\iota}, \tilde{u})$ 的值域，则 $\iota \rtimes u$ 和 $\tilde{\iota} \rtimes \tilde{u}$ 互为逆表示。因此它们是等距的，且 $A \rtimes_\alpha S \cong C$。

对于 (a)，令 $\Psi : A \rtimes_\alpha S \to B$ 为一个表示，并考虑表示 $\Psi'' : (A \rtimes_\alpha S)'' \to B''$。那么 $(\Psi'' \circ \iota, \Psi'' \circ u)$ 是 B 中的一个定义良好的协变表示，且 $\Psi = (\Psi'' \circ \iota) \rtimes (\Psi'' \circ u)$。通过进行 B'-正规化，见命题14，可得 (a)。根据命题23，(b) 是 (a) 的一个特例。□

推论29。设 $\alpha : G \curvearrowright A$ 是群 G 的一个作用（因此它也是一个逆半群作用）。那么，群交叉积 $\ell^1(G, A)$、代数 $\ell^1(\alpha)$和逆半群交叉积 $A \rtimes_\alpha G$ 彼此相同。

此外，α 如第 3 页所定义的协变表示，与将 α 视为逆半群作用时的非退化归一化协变表示相同。

证明。第一部分显然。对于第二部分，只需证明：若 (π, v) 是 α 在 B 上的一个非退化归一化协变表示 (π, v)，则半群同态 $v : G \to (B'')_1$ 的取值必然属于群 $\mathcal{UM}(B)$。但根据协变表示的定义，我们有 $v_g \pi(a) = \pi(\alpha_g(a)) v_g \in B$ 且 $\pi(a) v_g \in B$，其中 $g \in G$ 和 $a \in A$。由于 $\pi(A)B = B = B\pi(A)$，由 π 的非退化性可知，这意味着 $v_g B \subseteq B$ 和 $B v_g \subseteq B$。因此 $\{v_g\}_{g\in G} \subseteq \mathcal{M}(B)$。根据 B'-归一化，v_1 是 $\mathcal{M}(B)$中的单位元。因此，由于它们是压缩算子且可逆，$\{v_g\}_{g\in G} \subseteq \mathcal{UM}(B)$。□

最后，我们来谈谈 C^*-代数交叉积。设 A 是一个C^*-代数。那么，巴拿赫代数 $\ell^1(\alpha)$ 自然是一个巴拿赫 $*$-代数，其对合定义为

$$f^*(t) := \alpha_{t^*}(f(t^*)^*), \qquad t \in S.$$

如果 (π, v) 是 α 在巴拿赫代数 B 中的协变表示，那么推论 16 表明，表示 $\pi \times v : \ell^1(\alpha) \to B$ 自动是一个 $*$-同态。Sieben [17, 定义 4.4] 通过将 $\ell^1(\alpha)$ 关于来自希尔伯特空间上协变表示 (π, v) 的 $*$-同态 $\pi \times v$ 取完备化，定义了 C^*-代数交叉积，正如我们在定义 6 中所述。Buss 和 Exel [3, 第 257] 页通过使用满足命题14中性质的 C^*-代数中的协变表示 (π, v)，定义了 C^*-代数交叉积；这些性质刻画了我们所称的归一化协变表示。借助归一化过程，我们现在可以说明这两种不同的构造为何一致。

推论 30。设 $\alpha : S \curvearrowright A$ 是逆半群 S 的一个作用，其中 A 是一个 C^*-代数。设 $\mathcal{R}_{C^*}$ 是某个

C^*-代数上的所有协变表示 $\mathcal{R}_H$ 的类，而 $\mathcal{R}_H$ 是 α 在某个希尔伯特空间上的所有协变表示的类。那么

$$A \rtimes_{\alpha,\mathcal{R}_{C^*}} S = A \rtimes_{\alpha,\mathcal{R}_H} S.$$

该代数是一个 C^*-代数，它与 [17] 和 [3]中引入的交叉积一致。

证明。由于 $\mathcal{R}_{\mathrm{H}} \subseteq \mathcal{R}_{C^*}$，我们得到 $\|\cdot\|_{\mathcal{R}_{\mathrm{H}}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{R}_{C^*}}$。这是等式，因为对于 C^*-代数 B中的任意协变表示 $(\pi, v) \in \mathcal{R}_{C^*}$，我们可以假设其包络 W^*-代数 B'' 在希尔伯特空间H上忠实表示。于是，由推论 24，归一化协变表示 $(\pi, \tilde{v})$ 是 α 在 H上的协变表示，因此 $(\pi, \tilde{v}) \in \mathcal{R}_{\mathrm{H}}$，并且对所有 $f \in \ell^1(\alpha)$，$\pi \times v(f) = \pi \times \tilde{v}(f)$。因此 $\|\cdot\|_{\mathcal{R}_{\mathrm{H}}} = \|\cdot\|_{\mathcal{R}_{C^*}}$。由推论 16，这是定义在 $\ell^1(\alpha)$上的一个 C^*-半范数，与 [17] 和 [3]中使用的半范数一致。□

致谢

我们感谢匿名审稿人的意见。第二位署名作者获得了波兰国家科学中心通过 WEAVE-UNISONO 项目资助（项目编号：2023/05/Y/ST1/00046 ）。

参考文献

[1] K. Bardadyn 和 B. K. Kwa´sniewski, *Topologically free actions and ideals in twisted Banach algebra crossed products*, 《爱丁堡皇家学会会刊，A辑：数学》156（2026年），第1期，157–187页。[2]K. Bardadyn、B. K. Kwa´sniewski 和 A. McKee, *Banach algebras associated to twisted étale groupoids: Inverse semigroup disintegration and representations on L^p-spaces*, 《函数分析杂志》289（2025年），第12期，论文编号111163。MR4948043[3] A. Buss 和 R. Exel, *Twisted actions and regular Fell bundles over inverse semi-groups*, 《伦敦数学会会刊》（第3辑）103（2011年），第2期，235–270页。MR2821242[4] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, 《伦敦数学会专著·新系列》第24卷，The Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，2000年。牛津科学出版物。MR1816726[5] M. Daws, *Multipliers, self-induced and dual Banach algebras*, 《数学论文集》470（2010年），62页。MR2681109[6] M. Dokuchaev 和 R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, 《美国数学会汇刊》357（2005年），第5期，1931–1952页。MR2115083[7] R. Exel, *Inverse semigroups and combinatorial C^*-algebras*, 《巴西数学会通报》（新系列）39（2008年），第2期，191–313页。MR2419901[8] M. Ilie 和 R. Stokke, *Weak*-continuous homomorphisms of Fourier–Stieltjes alge-bras*, 《剑桥哲学学会数学会刊》145（2008年），第1期，107–120页。MR2431642[9] B. K. Kwa´sniewski 和 R. Meyer, *Stone duality and quasi-orbit spaces for generalisedC^*-inclusions*, 《伦敦数学会会刊》（第3辑）121（2020年），第4期，788–827页。MR4105787[10] Mark V. Lawson, *Inverse semigroups*, World Scientific Publishing Co., Inc.，美国新泽西州埃奇河，1998年。《部分对称性理论》。MR1694900[11] Xin Li, *Every classifiable simple* C*-*algebra has a Cartan subalgebra*, 《数学发明》219（2020年），第2期，653–699页。MR4054809[12] M. Mbekhta, *Partial isometries and generalized inverses*, 《塞格德数学学报》70（2004年），第3–4期，767–781页。MR2107540

参考文献

[13]A. L. T. Paterson, *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, 《数学进展丛书》第170卷，Birkh¨auser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1999年。MR1724106[14] Jean Renault, *Cartan subalgebras in C*-algebras*, 《爱尔兰数学学会通报》**61**（2008年），29–63页。MR2460017[15] V. Runde, *Lectures on amenability*, 《数学讲义》第1774卷，Springer-Verlag，柏林，2002 1874893 。MR Raymond A. Ryan,
[16]
Introduction to tensor products of Banach spaces, 《数学专著丛书》，Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2002 1888309 。MR N.
[17] *C*-crossed products by partial actions and actions of inverse semigroups*
Sieben, ，《澳大利亚数学会杂志A辑》**63**（1997年），第1期，32–46页。MR1456588[18] Georges
Zeller-Meier, *d'automorphismes* **263** 1966 20 23 199734 ，《巴黎科学院通报》A-B辑（），A–A。MR

Krzysztof Bardadyn 数学系 比亚韦斯托克大学 Cio-lkowskiego 1M 15-245 比亚韦斯托克 波兰 电子邮件：kbardadyn@math.uwb.edu.pl

Bartosz K. Kwa´sniewski 数学系 比亚韦斯托克大学 Cio-lkowskiego 1M 15-245 比亚韦斯托克 波兰 电子邮件：b.kwasniewski@uwb.edu.pl