arXiv:2601.14928v1 [math.MG] 21 Jan 2026

分解最优传输中的重心

JUN KITAGAWA 和 ASUKA TAKATSU

Abstract. 我们证明了经典蒙日–康托罗维奇重心在一大类度量空间中的存在性与对偶性，并证明了其在任意连通、完备的黎曼流形（无论是否带边界）上的唯一性。特别是，这是首个且唯一一个除连通性与完备性外，对流形的几何结构没有任何限制的唯一性结果。我们通过证明与一类新的二参数测度度量族相关的重心问题的相应结果，得到了这些结论。该度量族定义在一般度量纤维丛上的概率测度空间中，称为 *disintegratedMonge–Kantorovich metrics*（此前由作者提出）。

1. Introduction

首先，给定一个完备可分度量空间（X，d_X），我们用 $\mathcal{P}(X)$ 表示其上的博雷尔概率测度空间；对于 $1 \leq p < \infty$，记 $\mathcal{P}_p(X)$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 中具有有限 p 阶矩的测度所组成的子集。接着，MK_p^X 表示由最优传输定义在 $\mathcal{P}_p(X)$上的 p-蒙日–康托罗维奇度量（有时也称为 p-*Wasserstein* 度量）。也就是说，对于 $\mu,\nu \in \mathcal{P}_p(X)$，定义

$$\Pi(\mu,\nu) := \{\gamma \in \mathcal{P}(X \times X) \mid \gamma(A \times X) = \mu(A), \gamma(X \times A) = \nu(A) \text{ for any Borel } A \subset X\},$$

$$\mathrm{MK}_p^X(\mu,\nu) := \inf_{\gamma \in \Pi(\mu,\nu)} \|\mathrm{d}_X\|_{L^p(\gamma)} = \inf_{\gamma \in \Pi(\mu,\nu)} \left(\int_{X \times X} \mathrm{d}_X(x,y)^p d\gamma(x,y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

根据 [21, 定理 4，1] 上面的下确界总能取到，这样的极小化子称为一个 p-最优耦合，对应于 μ 和 ν。我们还将 $K \geq 2$记作

$$\Lambda_K := \left\{ (\lambda_k)_{k=1}^K \in (0,1)^K \;\middle|\; \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1 \right\}.$$

概率单纯形。最后，若 X 是一个局部紧 Hausdorff 空间，则其上的实值函数ϕ在 X 无穷远处消失，如果

$$\left\{ x \in X \;\middle|\; |\phi(x)| \geq \varepsilon \right\}$$

对于所有 $\varepsilon > 0$ 都是紧的；我们用 $C_0(X)$ 表示在 X 上无穷远处消失的连续函数空间，并赋予其上确界范数。

那么，我们的第一个主要结果涉及关于这些经典 MK_p^X度量的重心，内容如下。

定理 1.1。固定 $K \in \mathbb{N}$、$K \geq 2$、$(\lambda_k)_{k=1}^K \in \Lambda_K$、$1 \leq p < \infty$。设 $(Y、\mathrm{d}_Y)$ 为一个完备可分度量空间，并固定某个子集 $\{\mu_k\}_{k=1}^K \subset \mathcal{P}_p(Y)$。
(1) 若(Y,d_Y) 满足海涅–博雷尔性质，则对于任意 $\kappa > 0$，函数存在一个极小化子

$$\nu \mapsto \sum_{k=1}^K \lambda_k \, \mathrm{MK}_p^Y(\mu_k,\nu)^\kappa \quad \text{in } \mathcal{P}_p(Y). \tag{1.1}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 49Q22, 49Q20, 28A50.*Key words and phrases.* 最优传输、对偶性、重心、纤维丛、测度分解。

(2) 若(Y,d_Y)是局部紧的，

$$\inf_{\nu\in\mathcal{P}_p(Y)}\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\,\mathrm{MK}_p^Y(\mu_k,\nu)^p=\sup\left\{-\sum_{k=1}^{K}\int_Y\phi_k^{\lambda_k\,\mathrm{d}_Y^p}d\mu_k\;\middle|\;\frac{|\phi_k|}{1+\mathrm{d}_Y(y_0,\cdot)^p}\in C_0(Y),\ \sum_{k=1}^{K}\phi_k\equiv 0\right\}.$$

(3) 若 $p>1$、 $\kappa=p$，并且 Y是一个完备、连通的黎曼流形（可能带边界），且 μ_k 相对于 Y 上的黎曼体积测度对某个$1\le k\le K$是绝对连续的，那么在 $\mathcal{P}_p(Y)$ 中，函数 (1.1) 存在唯一的极小化子。

作为一个直接应用，定理 1.4 为各种各样的空间中的经典 MK_p^Y-重心给出了结果。上述结果将 Agueh 和 Carlier 在 [1,命题 22] 中的对偶性结果推广到了任意局部紧度量空间，并将唯一性结果推广到了 所有 完备、连通的黎曼流形，无论是否带边界，且对黎曼几何没有任何限制 （例如，对单射半径或曲率界没有限制）。特别地，唯一性结果是第一个也是唯一一个不对几何结构施加限制的此类结果。

该定理由下文的定理 1.4推出，而后者是定理 1.1 在 分解 *Monge–Kantorovich* 度量 $\mathcal{MK}_{p,\,q}^{\sigma}$ 框架下的结果。这是一族定义在 度量纤维丛 上的概率测度空间上的双参数度量族，由作者在[13] 中引入（见定义1.3）。我们注意到，相应的唯一性结果定理 1.4 （3）（因此定理 1.1 （3）同样如此）在 $p>1$ 和 $q<\infty$方面的限制是严格的，如例 2.4和 2.5所示。此外，用于证明唯一性结果的技术本身也具有独立价值，并很可能有助于分析其他变分问题。在下一节中，我们将给出必要的预备定义，然后陈述定理1.4。

1.1. 符号与预备定义。 我们首先回顾本文的主要研究对象——度量纤维丛。给定一个度量空间 (X,d_X)，我们用 $\mathrm{Isom}(X)$ 表示X的等距群。回想一下，子群 G 对 X 上的作用称为有效的，如果对所有 $x\in X$， $gx=x$ 都蕴含g 是 G中的单位元。

定义 1.2。 度量纤维丛 是由三个度量空间 (E,d_E)、$(\Omega,\mathrm{d}_\Omega)$ 和 (Y,d_Y)，以及一个连续满射 $\pi:E\to\Omega$ 构成的三元组，其中存在 Ω 的一个开覆盖 $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ 和映射 $\Xi_j\colon U_j\times Y\to\pi^{-1}(U_j)$（局部平凡化），使得对每个 $j\in\mathcal{J}$，

(1) Ξ_j 是 $U_j\times Y$（赋予乘积度量）与 $\pi^{-1}(U_j)$（赋予 d_E 的限制）之间的同胚。(2) 对所有 $(\omega,y)\in U_j\times Y$， $\pi(\Xi_j(\omega,y))=\omega$。(3) 记 $\Xi_{j,\omega}(y):=\Xi_j(\omega,y)$，其中 $\omega\in U_j$。那么，对于满足 $U_j\cap U_{j'}\neq\emptyset$ 的 $j'\in\mathcal{J}$，存在 $\mathrm{Isom}(Y)$ 的一个子群 G （称为结构群），它在 Y 上有效作用，并且存在一个映射 $g_j^{j'}\colon U_j\cap U_{j'}\to G$（该映射定义良好，因为 G 是有效的），使得

$$\Xi_{j',\omega}^{-1}(\Xi_{j,\omega}(y))=g_j^{j'}(\omega)y\quad\text{for }(\omega,y)\in(U_j\cap U_{j'})\times Y.$$

(4) 对于 $\omega\in U_j$，映射 $\Xi_{j,\,\omega}\colon Y\to\pi^{-1}(\{\omega\})$ 是等距映射。

读者应牢记 $E=\Omega\times Y$ 是平凡丛的情形： G 是平凡群，并且只有一个局部平凡化映射，其覆盖 Ω 的覆盖由一个集合构成。我们通常将度量纤维丛记为 $(E,\ \Omega\ \pi,\ Y)$。

在本文余下部分中，我们固定一个度量纤维丛 $(E,\ \Omega\ \pi,\ Y)$，其中 $(E,\ \mathrm{d}_E)$ 和 $(\Omega,\ \mathrm{d}_\Omega)$ 是度量空间，且 E 完备且可分，Ω 完备。在这些条件下，存在 $\{U_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ 的一个可数局部有限子覆盖 $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，其局部平凡化为$\{\Xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，并且我们可以找到从属于 $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的连续单位分解 $\{\chi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$。我们还作出如下技术性假设，

$$\text{for each } y\in Y,\text{ the orbit } \{gy\mid g\in G\}\text{ is a bounded subset of } Y. \tag{1.2}$$

这适用于平凡丛、任何配备佐佐木度量的 n 维黎曼流形的切丛（见 [20, 第 3] 节），其中 $G = O(n)$，当然也适用于任何满足以下条件的丛：其 Y 直径有限，或 G 紧。

然后我们固定 Ω 上的一个博雷尔概率测度 σ，并记作

$$\mathcal{P}^{\sigma}(E) := \left\{ \mathfrak{m} \in \mathcal{P}(E) \;\middle|\; \pi_{\sharp}\mathfrak{m} = \sigma \right\};$$

$\pi_{\sharp}\mathfrak{m} \in \mathcal{P}(\Omega)$ 是由 $\pi_{\sharp}\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(\pi^{-1}(A))$ 定义的推前测度，其中任意博雷尔 $A \subset \Omega$。我们将

现在需要一个关于测度分解的结果（见 [4,第三章第 70 节和 72]
).

解体定理。设 X、Ω 是完备可分度量空间，$\pi: X \to \Omega$ 是一个博雷尔映射，且 $\mathfrak{m} \in \mathcal{P}(X)$。则存在一个映射 $\mathfrak{m}^{\bullet}: \Omega \to \mathcal{P}(X)$，其在 $\pi_{\sharp}\mathfrak{m}$-几乎处处唯一确定，使得对于任意 $A \subset X$ 博雷尔集，实值函数

$$\omega \mapsto \mathfrak{m}^{\omega}(A)$$

在Ω上是博雷尔的，并且

$$\mathfrak{m}(A) = \int_{\Omega} \mathfrak{m}^{\omega}(A) d\pi_{\sharp}\mathfrak{m}(\omega).$$

此外，对于$\pi_{\sharp}\mathfrak{m}$-几乎处处的 ω，

$$\mathfrak{m}^{\omega}(X \setminus \pi^{-1}(\{\omega\})) = 0.$$

这就是关于 π 的解体 $\mathfrak{m}$，记作 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\bullet} \otimes (\pi_{\sharp}\mathfrak{m})$。于是，对于$1 \le p < \infty$，在我们的度量纤维丛 $(E, \Omega\ \pi, Y)$ 上定义，

$$\mathcal{P}_p^{\sigma}(E) := \{\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\bullet} \otimes \sigma \in \mathcal{P}^{\sigma}(E) \mid \mathfrak{m}^{\omega} \in \mathcal{P}_p(\pi^{-1}(\{\omega\})) \text{ for } \sigma\text{-a.e. } \omega\},$$

其中解体是相对于投影映射 π 进行的。

我们还固定一些 $y_0 \in Y$，并对任意博雷尔 $A \subset E$，定义

$$(\delta^{\bullet}_{E,y_0} \otimes \sigma)(A) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} \chi_j(\omega) (\Xi_{j,\omega})_{\sharp} \delta^{Y}_{y_0}(A) d\sigma(\omega). \tag{1.3}$$

若 $\delta^{\omega}_{E,y_0} \in \mathcal{P}(E)$ 对 σ-几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 有定义，则

$$\delta^{\omega}_{E,y_0} := \sum_{j \in \mathbb{N}} \chi_j(\omega) (\Xi_{j,\omega})_{\sharp} \delta^{Y}_{y_0},$$

根据 [13, 引理 2。5]，，式（1.3）中的泛函属于 $\mathcal{P}_p^{\sigma}(E)$，且其关于$\pi$ 的解体由 $\delta^{\bullet}_{E,y_0} \otimes \sigma$ 给出。此外，定义

$$\mathrm{d}^{p}_{E,y_0}(\omega, u) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \chi_j(\omega)\, \mathrm{d}_E(\Xi_{j,\omega}(y_0), u)^p \quad \text{for } (\omega, u) \in \Omega \times E.$$

接下来回顾分解 Monge–Kantorovich 度量。

定义 1.3（[13, 定义 1。2]）。设 $1 \le p < \infty$ 和 $1 \le q \le \infty$。给定 $\mathfrak{m}$，$\mathfrak{n} \in \mathcal{P}_p^{\sigma}(E)$，定义 分解的（$p$，$q$）-蒙日–康托罗维奇度量 为

$$\mathcal{MK}^{\sigma}_{p,q}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) := \left\| \mathrm{MK}^{E}_{p}(\mathfrak{m}^{\bullet}, \mathfrak{n}^{\bullet}) \right\|_{L^q(\sigma)}.$$

我们还定义

$$\mathcal{P}^{\sigma}_{p,q}(E) := \left\{ \mathfrak{m} \in \mathcal{P}^{\sigma}_{p}(E) \;\middle|\; \mathcal{MK}^{\sigma}_{p,q}(\delta^{\bullet}_{E,y_0} \otimes \sigma, \mathfrak{m}) < \infty \right\}.$$

根据 [13, 引理 2.5 和 2.6]，集合 $\mathcal{P}^{\sigma}_{p,\,q}(E)$ 与所选的 $y_0 \in Y$、$\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$、关联的局部平凡化 $\{\Xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 以及单位分解 $\{\chi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 无关。在 [13, 定理 1.5] 中证明了 $(\mathcal{P}^{\sigma}_{p,\,q}(E)\mathcal{MK}^{\sigma}_{p,\,q})$ 是一个完备度量空间；当 $q<\infty$ 时它是可分的，并且在一些附加假设下是一个测地空间。此外，还证明了在某些情况下，$\mathcal{MK}^{\sigma}_{p,\,q}$ 存在对偶表示。

对于一般的拓扑空间 X，我们用 $C_b(X)$ 表示其上有界连续函数构成的空间，并赋予上确界范数。我们还定义函数空间

$$\mathcal{X}_p := \left\{ \xi \in C(E) \;\middle|\; \frac{\xi}{1+\mathrm{d}^p_{E,y_0}(\pi,\cdot)} \in C_0(E) \right\} \text{ with } \|\xi\|_{\mathcal{X}_p} := \sup_{u\in E} \frac{|\xi(u)|}{1+\mathrm{d}^p_{E,y_0}(\pi(u),u)},$$
$$\mathcal{Z}_{r',\sigma} := \left\{ \zeta \in C_b(\Omega) \;\middle|\; \|\zeta\|_{L^{r'}(\sigma)} \le 1,\ \zeta>0 \right\} \text{ for } r' \in [1,\infty];$$

空间 $\mathcal{X}_p$ 不依赖于 $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$、$\{\Xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$、$\{\chi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $y_0 \in Y$ 的选择，如引理 2.15] 中的 [13, 所示。最后，对于 $\lambda\in(0,1]$ 和 $\xi\in\mathcal{X}_p$，我们定义 $S_{\lambda,\,p}\xi\colon\ E\to(-\infty,\ \infty]$，其定义为

$$S_{\lambda,p}\xi(u) := \sup_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})} \left(-\lambda\,\mathrm{d}_E(u,v)^p - \xi(v)\right) \quad \text{for } u\in E.$$

由于它是连续函数的上确界，$S_{\lambda,\,p}\xi$ 对任意 $\xi\in\mathcal{X}_p$ 都是 E 上的博雷尔函数。若无混淆可能，我们将省略下标 p，并在 $S_{\lambda,\,p}$ 时将 S_λ 记作

有了这些定义，我们可以陈述关于相对于解体蒙日–康托罗维奇度量的重心的主要结果，内容如下。

定理 *1.4.* 任取 $K\in\mathbb{N}$ *with* $K\ge 2$, $(\lambda_k)_{k=1}^K \in \Lambda_K$, $1\le p<\infty$, *and* $p\le q\le\infty$。另设 $(E,\,\Omega\ \pi,\,Y)$ 为满足条件 *(1.2)* 的度量纤维丛，其中 $(E,\,d_E)$ 完备且可分，$(\Omega,\,d_\Omega)$ 完备，并令 $\sigma\in\mathcal{P}(\Omega)$。此外，假设 $(E,\,d_E)$ 局部紧。再固定子集 $\{\mathfrak{m}_k\}_{k=1}^K \subset \mathcal{P}^{\sigma}_{p,q}(E)$。

(1) 若(Y,d_Y) 具有海涅–博雷尔性质，那么对于 $\kappa>0$，函数存在一个极小化子

$$\mathfrak{n}\mapsto \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}^{\sigma}_{p,q}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^{\kappa} \quad \textit{in } \mathcal{P}^{\sigma}_{p,q}(E). \tag{1.4}$$

(2) 有

$$\inf_{\mathfrak{n}\in\mathcal{P}^{\sigma}_{p,q}(E)} \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}^{\sigma}_{p,q}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^p$$
$$= \sup\left\{ -\sum_{k=1}^K \int_\Omega \zeta_k(\omega)\int_E S_{\lambda_k}\xi_k\, d\mathfrak{m}^{\omega}_k\, d\sigma(\omega) \;\middle|\; (\zeta_k,\xi_k)\in\mathcal{Z}_{r',\sigma}\times\mathcal{X}_p \textit{ such that } \sum_{k=1}^K \zeta_k\xi_k\equiv 0 \right\},$$

其中 r' 是 $r:=q/p$ 的 *H¨older* 共轭。

(3) 假设 $p>1$，$q<\infty$，$\kappa=p$，并设 Y 为完备、连通的黎曼流形，可能带有边界。此外，假设对于某个指标 $1\le k\le K$，对于 σ-几乎处处的 ω，存在 $j\in\mathbb{N}$ 满足 $\omega\in U_j$，使得测度 $(\Xi_j,\,\omega)_\sharp\mathfrak{m}^{\omega}_k$ 相对于 Y上的黎曼体积测度绝对连续。则函数 (1.4) 在，() 中的极小化子若存在则唯一。

备注 1.5. 当 $p=q$ (等价地，$r'=\infty$) 时，定理 1.4 (2) 中的最大值在 $\zeta_k\equiv 1$ 对所有 k均成立时取得。这可以从证明中看出：证明通过命题 2.3运用了对偶性结果 [13, 定理 1.5 (3)], ，这里同样有类似的说明。

1.2. **技术与文献讨论。** 经典 $\mathrm{MK}_2^{\mathbb{R}^n}$ - 重心的相应结果归功于 Agueh 和 Carlier [1]。测度分解在弱收敛下的不稳定性意味着我们无法通过直接的紧性方法证明 $\mathcal{MK}^\sigma_{p,q}$-重心的存在性，因此我们采用在解体度量情形下利用对偶性来证明重心存在。唯一性结果依赖于从对偶问题中的极大化序列提取适当的极限，这无疑是本文最复杂的证明。该证明依赖于一系列新颖的技术，我们希望这些技术也能用于其他变分问题。最后，定理 1.1 是将 Ω 取为单点空间后，快速应用定理 1.4 中的相应结果得到的。我们指出，定理 Y 为黎曼流形这一要求，在定理 1.4 (3) 和定理 1.1中实际上仅对得到引理 2.6 和 2.7是必要的；若 Y 是一个具有特定测度类的空间，且该类中的左边缘分布所对应的所有 p- 最优耦合都支撑在几乎处处单值映射的图上，并且该映射可由对偶势唯一确定，则证明的其余部分仍然成立。类似情形下关于重心的一些现有结果包括 [10–12, 18]中的结果。我们指出，非流形情形下的现有结果涉及其他几何限制（例如亚历山德罗夫曲率界），而我们的结果虽限于光滑情形，却没有这类限制。

我们首先证明定理 1.4，其证明分为若干小节；随后，定理 1.1 将作为推论得出。

2. Disintegrated barycenters

本节中，我们证明关于 $\mathcal{MK}^\sigma_{p,q}$-重心的若干结论。为后续使用，我们在此回顾˜（见 [13, (2.4)]）：存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\int_E \mathrm{d}^p_{E,y_0}(\omega, v)d\mathfrak{m}^\omega(v) \le 2^{p-1}(\widetilde{C} + \mathrm{MK}^E_p(\delta^\omega_{E,y_0}, \mathfrak{m}^\omega)^p) \tag{2.1}$$

对于任意 $\mathfrak{m} \in \mathcal{P}^\sigma_{p,\ q}(E)$。

2.1. 解体重心的存在性。 我们首先证明定理 1.4(1)，即证明 $\mathcal{MK}^\sigma_{p,\ q}$-重心的存在性。与 $_p$style id='18'>、$_q$-重心来自切片度量的情形（见 [14, Main Theorem (5)], 相比，我们缺少应用直接方法所需的连续性，因此必须借助 $\mathcal{MK}^\sigma_{p,\ q}$ 的对偶问题来证明其存在性。应用对偶性结果 [13, 定理 1.5 (3)], 时，我们要求纤维 $(Y、\mathsf{d}_Y)$ 是局部紧的，但实际上需要更强的海涅–博雷尔性质，即 $(Y、\mathsf{d}_Y)$ 具有海涅–博雷尔性质。注意，在完备可分度量空间上，海涅–博雷尔性质严格强于局部紧性：度量空间 $(\mathbb{R}、\min\{1, d_{\mathbb{R}}\})$ 与 $\mathbb{R}$ 上通常的欧几里得拓扑相同，且完备、局部紧，但半径为 2 的球就是整个 $\mathbb{R}$，因此并不紧。

定理的证明 *1.4* (1)。 由于每个 $\mathfrak{m}_k \in \mathcal{P}^\sigma_{p,q}(E)$ 和

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m}_k, \cdot)^\kappa \ge 0 \quad \text{on } \mathcal{P}^\sigma_{p,q}(E),$$

it 的下确界有限，因此我们可以取一个极小化序列 $(\mathfrak{n}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$，即

$$\lim_{\ell\to\infty}\sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m}_k, \mathfrak{n}_\ell)^\kappa = \inf_{\mathfrak{n}\in\mathcal{P}^\sigma_{p,q}(E)}\sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m}_k, \mathfrak{n})^\kappa \quad \text{and} \quad \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m}_k, \mathfrak{n}_\ell)^\kappa < \infty.$$

由于我们有

$$\lambda_1 \mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{n}_\ell, \mathfrak{m}_1)^\kappa \le \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m}_k, \mathfrak{n}_\ell)^\kappa$$

且有 $\lambda_1 > 0$，因此我们有

$$\begin{aligned}\sup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\delta_{E,y_0}^{\bullet}\otimes\sigma,\mathfrak{n}_\ell)^\kappa &\le 2^\kappa\left(\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\delta_{E,y_0}^{\bullet}\otimes\sigma,\mathfrak{m}_1)^\kappa+\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{n}_\ell,\mathfrak{m}_1)^\kappa\right)\\ &\le 2^\kappa\left(\lambda_1^{-1}\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n}_\ell)^\kappa+\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\delta_{E,y_0}^{\bullet}\otimes\sigma,\mathfrak{m}_1)^\kappa\right).\end{aligned}\tag{2.2}$$

现在证明 $(\mathfrak{n}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ 是紧的。固定一个 $\varepsilon>0$，由于 σ 是博雷尔测度，因此存在一个紧集 $K_\Omega\subset\Omega$，使得 $\sigma(\Omega\setminus K_\Omega)<\varepsilon/2$。若 $q<\infty$，利用下文第二行中的詹森不等式，由 (2.1) 和 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}\left(\int_E \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v),v)d\mathfrak{n}_\ell(v)\right)^{\frac{\kappa}{p}} &= \left[\int_\Omega\left(\int_E \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v),v)d\mathfrak{n}_\ell^{\bullet}(v)\right)d\sigma\right]^{\frac{q}{p}\cdot\frac{\kappa}{q}}\\ &\le \left\|\left(\int_E \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v),v)d\mathfrak{n}_\ell^{\bullet}(v)\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_{L^q(\sigma)}^{\kappa}\\ &= \left\|2^{\frac{p-1}{p}}\left(\widetilde{C}^{\frac{1}{p}}+\mathrm{MK}_p^E(\delta_{E,y_0}^{\bullet},\mathfrak{n}_\ell^{\bullet})\right)\right\|_{L^q(\sigma)}^{\kappa}\\ &\le 2^{\frac{p-1}{p}\kappa}\left(\widetilde{C}^{\frac{\kappa}{p}}+\mathcal{MK}_p^{\sigma}(\delta_{E,y_0}^{\bullet}\otimes\sigma,\mathfrak{n}_\ell)^\kappa\right)\end{aligned}$$

根据 ($\ell\in\mathbb{N}$ 2.2)，该式有一个关于 $\ell\in\mathbb{N}$ 一致的有限上界。若 $q=\infty$，则可使用平凡不等式

$$\left(\int_\Omega\int_E \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v),v)d\mathfrak{n}_\ell^{\bullet}(v)d\sigma\right)^{\frac{\kappa}{p}} \le \left\|\int_E \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v),v)d\mathfrak{n}_\ell^{\bullet}(v)\right\|_{L^\infty(\sigma)}^{\frac{\kappa}{p}}$$

以替代詹森不等式，从而得到一个一致的上界。因此，无论哪种情况，根据切比雪夫不等式，当 $R>0$ 足够大时，我们有

$$\mathfrak{n}_\ell\left(\left\{v\in E\;\middle|\;\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v),v)>R\right\}\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此，定义

$$K_E\coloneqq\left\{v\in\pi^{-1}(K_\Omega)\;\middle|\;\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v),v)\le R\right\},$$

我们有

$$\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\mathfrak{n}_\ell(E\setminus K_E)<\frac{\varepsilon}{2}+\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\mathfrak{n}_\ell(\pi^{-1}(\Omega\setminus K_\Omega))=\frac{\varepsilon}{2}+\sigma(\Omega\setminus K_\Omega)<\varepsilon.$$

现在证明 K_E 是 E的一个紧子集。取 K_E 中的任意序列 $(v_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$，并记$\omega_\ell\coloneqq\pi(v_\ell)$。由 K_Ω的紧性，可取一个收敛子列 $(\omega_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$（不重新标记），其极限为 $\omega_\infty\in K_\Omega$。由 $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的局部有限性，并再取一个子列，可假设所有 ω_ℓ 都属于 ω_∞ 的一个开邻域，且该邻域只与有限多个集合$\{U_{j_i}\}_{i=1}^I$相交。再取一个子列（并可能增大 I），还可假设所有ω_ℓ 都属于某个共同的集合 $U_{j_{i_0}}$，其中某个 $1\le i_0\le I$ 和 $\chi_{j_{i_0}}(\omega_\ell)\ge I^{-1}$。于是，对于任意$\ell\in\mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{I}\,\mathrm{d}_Y(y_0,\Xi_{j_{i_0},\omega_\ell}^{-1}(v_\ell))^p &= \frac{1}{I}\,\mathrm{d}_E(\Xi_{j_{i_0}}(\omega_\ell,y_0),v_\ell)^p\\ &\le \sum_{j\in\mathbb{N}}\chi_j(\omega_\ell)\,\mathrm{d}_E(\Xi_j(\omega_\ell,y_0),v_\ell)^p=\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v_\ell),v_\ell)\le R,\end{aligned}$$

因此，$(\Xi_{j_{i_0},\,\omega_\ell}^{-1}(v_\ell))_{\ell\in\mathbb{N}}$ 是 Y中的有界序列。由于 Y 满足海涅–博雷尔性质，我们可以再取一个子列，假设$\Xi_{j_{i_0},\,\omega_\ell}^{-1}(v_\ell)$收敛到 Y中的某个点。因此，由

$\Xi_{j_{i_0}}$ 的连续性可知， v_ℓ 收敛到 E中的某个点，而该点根据连续性又属于 K_E。因此，我们看到 K_E 是紧的。

现在，根据普罗霍罗夫定理，我们可以取一个子列，并假设 $(\mathfrak{n}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ 弱收敛于某个 $\mathfrak{n}$，属于 $\mathcal{P}^\sigma(E)$。由于 Y 是局部紧的，我们可以应用 [13, 定理 1.5 (3)]，对于任意 $\zeta\in\mathcal{Z}_{r',\sigma}$ 以及 $(\Phi,\Psi)\in C_b(E)^2$，可得 $-\Phi(u)-\Psi(v)\le \mathrm{d}_E(u,v)^p$，只要 $\pi(u)=\pi(v)$，

$$\begin{aligned}-\int_E(\zeta\circ\pi)\Phi d(\delta^\bullet_{E,y_0}\otimes\sigma)-\int_E(\zeta\circ\pi)\Psi d\mathfrak{n}&=\lim_{\ell\to\infty}\left(-\int_E(\zeta\circ\pi)\Phi d(\delta^\bullet_{E,y_0}\otimes\sigma)-\int_E(\zeta\circ\pi)\Psi d\mathfrak{n}_\ell\right)\\&\le\liminf_{\ell\to\infty}\mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\delta^\bullet_{E,y_0}\otimes\sigma,\mathfrak{n}_\ell)^p,\end{aligned}$$

其中，最后一项由 (2.2) 知在 ζ 中一致有界。因此，对 $\zeta\in\mathcal{Z}_{r'}$、σ 以及所有满足 $-\Phi(u)-\Psi(v)\le \mathrm{d}_E(u,v)^p$ 的 $(\Phi,\Psi)\in C_b(E)^2$ 取上确界，并再次应用 [13, 定理 1.5 (3)]，可得 $\mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\delta^\bullet_{E,y_0}\otimes\sigma,\mathfrak{n})<\infty$，于是 $\mathfrak{n}\in\mathcal{P}^\sigma_{p,q}(E)$。

最后，我们可以应用 [13,推论 2.24]来得到

$$\sum_{k=1}^K\lambda_k\mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^\kappa\le\liminf_{\ell\to\infty}\sum_{k=1}^K\lambda_k\mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n}_\ell)^\kappa.$$

□

2.2. **关于 $\mathcal{MK}^\sigma_{p\text{的}q}$重心的对偶性。** 现在，我们将着手研究解体重心的对偶性，其思路类似于经典蒙日–康托罗维奇情形下在 $\mathbb{R}^n$ 上、具有 $p=2$的 [1, 命题 2.2] 。在本节中，我们始终假设 $1\le p<\infty, 1\le q\le\infty$。回顾 $r=p/q$，以及 r' 是其 H¨older 共轭。

众所周知（参见 [6, 定理 7.17]），如果 X 是一个局部紧 Hausdorff 空间，则配备上确界范数的 $C_0(X)$的对偶空间中的元素，可以与通过 $\mathcal{M}(X)$中的元素进行积分来识别； $\mathcal{M}(X)$是 X上的（带符号）Radon 测度空间。此外，全变差范数等于算子范数。于是我们可以看到

$$\mathcal{X}_p^*=\{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}(E)\mid(1+\mathrm{d}^p_{E,y_0}(\pi,\cdot))\mathfrak{m}\in\mathcal{M}(E)\},$$

这是一个赋范空间。

定义 2.1。 设 $\mathfrak{m}\in\mathcal{P}^\sigma(E)$ 和 $\lambda\in(0,1]$. 对于 $\eta\in\mathcal{X}_p$，我们定义

$$H_{\lambda,\mathfrak{m}}(\eta):=\inf\left\{\int_\Omega\zeta\left(\int_E S_\lambda\xi d\mathfrak{m}^\bullet\right)d\sigma\;\middle|\;(\zeta,\xi)\in\mathcal{Z}_{r',\sigma}\times\mathcal{X}_p,\ \eta=(\zeta\circ\pi)\xi\right\}.$$

尽管$H_{\lambda,\ \mathfrak{m}}$ 也取决于 p和 q，但由于这些都是固定的，我们在记号中省略它们。

引理 2.2。 对于 $\lambda\in(0,1],$ ，任意 $\mathfrak{m}\in\mathcal{P}^\sigma_{p,\ 1}(E)$ 函数 $H_{\lambda,\ \mathfrak{m}}$ 在 $\mathcal{X}_p$ 上是真且凸的。

证明。 我们首先证明 $H_{\lambda,\ \mathfrak{m}}$ 是真。由于 $H_{\lambda,\ \mathfrak{m}}(0)\le 0$，我们看到 $H_{\lambda,\ \mathfrak{m}}$ 并非恒等于 ∞。此外，对于任意 $\xi\in\mathcal{X}_p$ 和 $\zeta\in\mathcal{Z}_{r',\ \sigma}$ 我们有 $\eta=(\zeta\circ\pi)\xi\in\mathcal{X}_p$，并在下面第三行中使用 (2.1)，

$$\begin{aligned}\int_\Omega\zeta\int_E S_\lambda\xi(u)d\mathfrak{m}^\bullet(u)d\sigma&\ge\int_\Omega\zeta\int_E(-\xi(u))d\mathfrak{m}^\bullet(u)d\sigma=-\int_E\eta d\mathfrak{m}\\&\ge-\|\eta\|_{\mathcal{X}_p}\int_E\left(1+\mathrm{d}^p_{E,y_0}(\pi(u),u)\right)d\mathfrak{m}(u)\\&=-2^{p-1}\|\eta\|_{\mathcal{X}_p}\left(\widetilde{C}+\mathcal{MK}^\sigma_{p,1}(\delta^\bullet_{E,y_0}\otimes\sigma,\mathfrak{m})\right)>-\infty,\end{aligned}$$

因此$H_{\lambda,\ \mathfrak{m}}$ 是真。

接下来我们证明 $H_{\lambda,\ \mathfrak{m}}$是凸的。固定 $\eta_0,\ \eta_1\in\mathcal{X}_p$，并对 $i=0,\ 1$，令 $(\zeta_i,\ \xi_i)\in\mathcal{Z}_{r',\ \sigma}\times\mathcal{X}_p$ 满足$\eta_i=(\zeta_i\circ\pi)\xi_i$。对于 $\tau\in(0,\ 1)$，令

$$\zeta:=(1-\tau)\zeta_0+\tau\zeta_1,\qquad\xi:=\frac{1}{(\zeta\circ\pi)}\cdot[(1-\tau)(\zeta_0\circ\pi)\xi_0+\tau(\zeta_1\circ\pi)\xi_1],$$

然后 $(1-\tau)\eta_0+\tau\eta_1 = (\zeta\circ\pi)\xi$。此外，显然 $\zeta \in \mathcal{Z}_{r',\sigma}$ 且 $\xi \in C(E)$。由于 ce

$$|\xi| = \left|\frac{(1-\tau)(\zeta_0\circ\pi)\xi_0 + \tau(\zeta_1\circ\pi)\xi_1}{(1-\tau)(\zeta_0\circ\pi)+\tau(\zeta_1\circ\pi)}\right| \le \max\{|\xi_0|, |\xi_1|\}$$

我们也有 $\xi \in \mathcal{X}_p$。由此可得

$$\begin{aligned}
H_{\lambda,\mathfrak{m}}((1-\tau)\eta_0+\tau\eta_1) &\le \int_\Omega \zeta \left(\int_E S_\lambda \xi d\mathfrak{m}^\bullet\right) d\sigma \\
&= \int_\Omega \int_E \sup_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})} \left(-\lambda\, \mathrm{d}_E(u,v)^p(\zeta\circ\pi) - \xi(v)(\zeta\circ\pi)\right) d\mathfrak{m}^\bullet(u) d\sigma \\
&= \int_\Omega \int_E \sup_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})} \{-\lambda\, \mathrm{d}_E(u,v)^p \left[(1-\tau)(\zeta_0\circ\pi)+\tau(\zeta_1\circ\pi)\right] \\
&\quad - \left[(1-\tau)(\zeta_0\circ\pi)\xi_0(v) + \tau(\zeta_1\circ\pi)\xi_1(v)\right]\} d\mathfrak{m}^\bullet(u) d\sigma \qquad (2.3) \\
&\le (1-\tau)\int_\Omega \zeta_0 \int_E \sup_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})} \left(-\lambda\, \mathrm{d}_E(u,v)^p - \xi_0(v)\right) d\mathfrak{m}^\bullet(u) d\sigma \\
&\quad + \tau\int_\Omega \zeta_1 \int_E \sup_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})} \left(-\lambda\, \mathrm{d}_E(u,v)^p - \xi_1(v)\right) d\mathfrak{m}^\bullet(u) d\sigma \\
&= (1-\tau)\int_\Omega \zeta_0 \left(\int_E S_\lambda \xi_0 d\mathfrak{m}^\bullet\right) d\sigma + \tau\int_\Omega \zeta_1 \left(\int_E S_\lambda \xi_1 d\mathfrak{m}^\bullet\right) d\sigma.
\end{aligned}$$

对可行的 ζ_i, ξ_i 取下确界，即可证明 $H_{\lambda,\mathfrak{m}}$ 的凸性。 □

对于 $\mathfrak{n} \in \mathcal{X}_p^*$，回顾一下，$H_{\lambda,\mathfrak{m}}$ 的勒让德–芬切尔变换 定义为

$$H^*_{\lambda,\mathfrak{m}}(\mathfrak{n}) := \sup_{\eta\in\mathcal{X}_p} \left(\int_E \eta d\mathfrak{n} - H_{\lambda,\mathfrak{m}}(\eta)\right).$$

命题 2.3. 设 $\mathfrak{m} \in \mathcal{P}^\sigma_{p,q}(E)$ 且 $\lambda \in (0,1]$。若 (E, d_E) 是局部紧的，对于 $\mathfrak{n} \in \mathcal{X}_p^*$，

$$H^*_{\lambda,\mathfrak{m}}(-\mathfrak{n}) := \begin{cases} \lambda \mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})^p, & \text{if } \mathfrak{n} \in \mathcal{P}^\sigma_{p,q}(E), \\ \infty, & \text{else.} \end{cases}$$

证明。 首先假设 $\mathfrak{n} \in \mathcal{P}^\sigma(E)$，则根据 [13, 定理 1.5 (3)],

$$\begin{aligned}
H^*_{\lambda,\mathfrak{m}}(-\mathfrak{n}) &= \sup_{\eta\in\mathcal{X}_p} \left(-\int_E \eta d\mathfrak{n} - H_{\lambda,\mathfrak{m}}(\eta)\right) \\
&= \sup_{\eta\in\mathcal{X}_p} \sup_{\substack{(\zeta,\xi)\in\mathcal{Z}_{r',\sigma}\times\mathcal{X}_p, \\ \eta=(\zeta\circ\pi)\xi}} \int_\Omega \left(-\int_E \eta(v) d\mathfrak{n}^\bullet(v) - \zeta\int_E S_\lambda\xi(u) d\mathfrak{m}^\bullet(u)\right) d\sigma \\
&= \sup_{\substack{(\zeta,\xi)\in\mathcal{Z}_{r',\sigma}\times\mathcal{X}_p, \\ \eta=(\zeta\circ\pi)\xi}} \left[-\int_\Omega \zeta\cdot\left(\int_E \xi(v) d\mathfrak{n}^\bullet(v) + \int_E S_\lambda\xi(u) d\mathfrak{m}^\bullet(u)\right) d\sigma\right] = \lambda\mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})^p,
\end{aligned}$$

注意，由于 $\mathfrak{m} \in \mathcal{P}^\sigma_{p,q}(E)$，我们有 $\mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m},\ \mathfrak{n}) = \infty$ 如果 $\mathfrak{n} \notin \mathcal{P}^\sigma_{p,q}(E)$。

现在我们处理 $\mathfrak{n} \notin \mathcal{P}^\sigma(E)$ 的情形。首先假设 $\mathfrak{n} \in \mathcal{X}_p^*$ 和 $\pi_\sharp\mathfrak{n} \neq \sigma$。在这种情况下，存在某个 $\phi \in C_b(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega \phi d\sigma \neq \int_E \phi(\pi(v)) d\mathfrak{n}(v).$$

对于 $C \in \mathbb{R}$，通过 $\eta_{C\phi}(u) := -C\phi(\pi(u))$ 定义 $\eta_{C\phi} \in \mathcal{X}_p$。于是我们有

$$\begin{aligned} S_\lambda \eta_{C,\phi}(u) &= \sup_{v \in \pi^{-1}(\{\pi(u)\})} (-\lambda \, \mathrm{d}_E(u,v)^p + C\phi(\pi(v))) \\ &= \sup_{v \in \pi^{-1}(\{\pi(u)\})} (-\lambda \, \mathrm{d}_E(u,v)^p + C\phi(\pi(u))) = C\phi(\pi(u)). \end{aligned}$$

由于我们可以分解 $\eta_{C,\,\phi} = (\zeta \circ \pi)\xi$，其中 $\zeta \equiv 1$ 且 $\xi = \eta_{C,\,\phi}$，因此我们计算得

$$\begin{aligned} H^*_{\lambda,\mathfrak{m}}(-\mathfrak{n}) &\geq \sup_{C \in \mathbb{R}} \left(-\int_E \eta_{C\phi} d\mathfrak{n} - \int_\Omega \int_E S_\lambda \eta_{C\phi} d\mathfrak{m}^\omega d\sigma(\omega) \right) \\ &= \sup_{C \in \mathbb{R}} C \left(\int_E \phi(\pi(v)) d\mathfrak{n}(v) - \int_E \phi(\pi(u)) d\mathfrak{m}(u) \right) \\ &= \sup_{C \in \mathbb{R}} C \left(\int_E \phi(\pi(v)) d\mathfrak{n}(v) - \int_\Omega \phi d\sigma \right) = \infty. \end{aligned}$$

现在假设 $\mathfrak{n} \in \mathcal{X}_p^*$ 不是非负的。这里，若对于任意可测集 $E' \subset E$，都有 $\mathfrak{n}(E') \geq 0$，则称 $\mathfrak{n}$ 为非负的；因此，存在某个 $\eta \in \mathcal{X}_p$ 使得 $\eta \geq 0$ 处处成立，并且

$$-\int_E \eta d\mathfrak{n} > 0.$$

由定义显然可知，对于任意常数 $C > 0$，$-S_\lambda(C\eta) \geq 0$ 在 E 上成立，因此我们可以再次计算得

$$H^*_{\lambda,\mathfrak{m}}(-\mathfrak{n}) \geq \sup_{C>0} \left(-\int_E C\eta d\mathfrak{n} - \int_\Omega \int_E S_\lambda(C\eta) d\mathfrak{m}^\omega d\sigma(\omega) \right) \geq \sup_{C>0} \left(-C \int_E \eta d\mathfrak{n} \right) = \infty.$$

□

现在我们准备证明关于 $\mathcal{MK}^\sigma_{p,\,q}$-重心的对偶性结果。

*Pr*定理 *1.4* (2)的证明。 设 $\mathfrak{n} \in \mathcal{P}^\sigma_{p,\,q}(E)$ 和 $(\eta_k)_{k=1}^K$ 是 $\mathcal{X}_p$ 中的一个集合，使得 t

$$\sum_{k=1}^K \eta_k \equiv 0.$$

对于每个 k，固定 $(\zeta_k,\ \xi_k) \in \mathcal{Z}_{r',\,\sigma} \times \mathcal{X}_p$ 使得 $\eta_k = (\zeta_k \circ \pi)\xi_k$ (这总是可行的，例如取 $\zeta_k \equiv 1$，$\xi_k \equiv \eta_k$)。由于 $\mathrm{MK}_p^E(\delta^\omega_{E,\,y_0},\ \mathfrak{n}^\omega) < \infty$ 对于 σ-几乎处处的 ω，对所有 k，利用 (2.1) 可得

$$\left| \int_E \xi_k(u) d\mathfrak{n}^\omega(u) \right| \leq \|\xi_k\|_{\mathcal{X}_p} \int_E \left(1 + \mathrm{d}^p_{E,y_0}(\pi(u),u)^p \right) d\mathfrak{n}^\omega(u)$$

$$\leq \|\xi_k\|_{\mathcal{X}_p} (1 + 2^{p-1}(\widetilde{C} + \mathrm{MK}_p^E(\delta^\omega_{E,y_0}, \mathfrak{n}^\omega)^p)) < \infty.$$

那么，对于这样的 $\omega \in \Omega$ 和 $1 \leq k \leq K$，我们可以先对不等式进行积分

$$\lambda_k \, \mathrm{d}_E(u,v)^p \geq -S_{\lambda_k}\xi_k(u) - \xi_k(v)$$

该式对任意满足 $\pi(u) = \pi(v)$ 的 u、$v \in E$ 都成立。相对于 $\mathfrak{m}_k^\omega$ 与 $\mathfrak{n}^\omega$ 之间的一个 p-最优耦合，将两边乘以 $\zeta_k(\omega)$，并对 ω 关于 σ 积分，得到

$$\begin{aligned} \lambda_k \mathcal{MK}^\sigma_{p,q}(\mathfrak{m}_k, \mathfrak{n})^p \geq \lambda_k \int_\Omega \zeta_k \, \mathrm{MK}_p^E(\mathfrak{m}_k^\bullet, \mathfrak{n}^\bullet)^p d\sigma &\geq -\int_\Omega \zeta_k \int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma - \int_\Omega \zeta_k \int_E \xi_k d\mathfrak{n}^\bullet d\sigma \\ &= -\int_\Omega \zeta_k \int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma - \int_E \eta_k d\mathfrak{n}. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{k=1}^K \eta_k \equiv 0$，对所有这样的配对 $(\zeta_k,\ \xi_k)$ 取上确界，再对上述不等式中的 $1 \le k \le K$ 求和，得到

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^p \ge -\sum_{k=1}^K H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}(\eta_k) - \int_E \sum_{k=1}^K \eta_k d\mathfrak{n} = -\sum_{k=1}^K H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}(\eta_k).$$

由此可得

$$\inf_{\mathfrak{n}\in\mathcal{P}_{p,q}^{\sigma}(E)} \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^p \ge \sup\left\{ -\sum_{k=1}^K H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}(\eta_k) \,\middle|\, \sum_{k=1}^K \eta_k \equiv 0,\ \eta_k \in \mathcal{X}_p \right\}. \tag{2.4}$$

现在来证明反向不等式。由命题2.3可得

$$\inf_{\mathfrak{n}\in\mathcal{P}_{p,q}^{\sigma}(E)} \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^p = \inf_{\mathfrak{n}\in\mathcal{P}_{p,q}^{\sigma}(E)} \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^p = \inf_{\mathfrak{n}\in\mathcal{P}_{p,q}^{\sigma}(E)} \sum_{k=1}^K H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}^*(-\mathfrak{n}).$$

定义函数 H 在 $\mathcal{X}_p$ 上为 $\{H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}\}_{k=1}^K$的下确界卷积，即对 $\eta \in \mathcal{X}_p$定义为

$$H(\eta) := \inf\left\{ \sum_{k=1}^K H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}(\eta_k) \,\middle|\, \sum_{k=1}^K \eta_k \equiv \eta,\ \eta_k \in \mathcal{X}_p \right\}.$$

那么，(2.4)意味着

$$\inf_{\mathfrak{n}\in\mathcal{P}_{p,q}^{\sigma}(E)} \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^p \ge -H(0). \tag{2.5}$$

注意， H 是凸的，因为根据引理 $\{H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}\}_{k=1}^K$ 中的每个函数都是真凸函数2.2，再由 [2, 引理 4.4。15] 的勒让德–芬切尔变换 H 满足

$$H^*(\mathfrak{n}) = \sum_{k=1}^K H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}^*(\mathfrak{n}) \quad \text{for } \mathfrak{n} \in \mathcal{X}_p^*. \tag{2.6}$$

令 $\mathcal{X}_p^{**}$为 $\mathcal{X}_p^*$的对偶空间，并通过自然等距嵌入将 $\mathcal{X}_p$视为 $\mathcal{X}_p^{**}$的子集。对于 $\mathfrak{f} \in \mathcal{X}_p^{**}$， H^*在 $\mathcal{X}_p^{**}$上的勒让德–芬切尔变换为

$$H^{**}(\mathfrak{f}) := \sup_{\mathfrak{n}\in\mathcal{X}_p^*} \left(\mathfrak{f}(\mathfrak{n}) - H^*(\mathfrak{n})\right).$$

然后，由命题 2.3和（2.6）可知

$$-H^{**}(0) = \inf_{\mathfrak{n}\in\mathcal{X}_p^*} H^*(-\mathfrak{n}) = \inf_{\mathfrak{n}\in\mathcal{X}_p^*} \sum_{k=1}^K H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}^*(-\mathfrak{n}) = \inf_{\mathfrak{n}\in\mathcal{P}_{p,q}^{\sigma}(E)} \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^p. \tag{2.7}$$

因此，根据（2.5）和（2.7），只需证明 $H^{**}(0) = H(0)$。

为此，首先注意到，由命题 2.3 结合（2.6）可得

$$H^*(-\delta_{E,y_0}^{\bullet} \otimes \sigma) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\delta_{E,y_0}^{\bullet} \otimes \sigma, \mathfrak{m}_k) < \infty.$$

因此，由于其勒让德–芬切尔变换并非恒等于 ∞，可知 H 永远不会取值 $-\infty$。同时，利用 $H_{\lambda,\ \mathfrak{m}}(0) \le 0$,

$$H(0) \le \sum_{k=1}^K H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}(0) \le 0,$$

因此 H 并非恒等于 ∞，特别是它为真。

回想一下，根据假设，每个 λ_k 都严格为正。假设 $\eta \in \mathcal{X}_p$ 满足

$$\|\eta\|_{\mathcal{X}_p} \le 2^{1-p} \cdot K \cdot \min_{1\le k\le K} \lambda_k.$$

然后，利用

$$2^{1-p}\, \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\omega, v) - \mathrm{d}_E(u,v)^p \le \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\omega, u),$$

在下面的计算中代入（2.1）后，

$$\begin{aligned}
H(\eta) &\le \sum_{k=1}^K H_{\lambda_k,\mathfrak{m}_k}(K^{-1}\eta) \\
&\le \sum_{k=1}^K \int_\Omega \int_E S_{\lambda_k}\left(K^{-1}\eta\right) d\mathfrak{m}_k^\omega d\sigma(\omega) \\
&\le \sum_{k=1}^K \int_\Omega \int_E \sup_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})} \left(-\lambda_k\, \mathrm{d}_E(u,v)^p + K^{-1}\, \|\eta\|_{\mathcal{X}_p}\, (1+\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v),v))\right) d\mathfrak{m}_k^\omega(u) d\sigma(\omega) \\
&\le \sum_{k=1}^K \lambda_k \int_\Omega \int_E \sup_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})} \left(-\mathrm{d}_E(u,v)^p + 2^{1-p}(1+\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v),v))\right) d\mathfrak{m}_k^\omega(u) d\sigma(\omega) \\
&\le \sum_{k=1}^K \lambda_k \int_\Omega \int_E \sup_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})} \left(2^{1-p} + \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(v),u)\right) d\mathfrak{m}_k^\omega(u) d\sigma(\omega) \\
&\le \sum_{k=1}^K \lambda_k \left[2^{1-p} + 2^{p-1}\left(\widetilde{C} + \mathcal{MK}_{p,q}^\sigma(\delta_{E,y_0}^\bullet \otimes \sigma, \mathfrak{m}_k)^p\right)\right] < \infty,
\end{aligned}$$

证明 H 在 0 的某个邻域内有上界。因此，根据 [2, 命题 4.1.4 和命题 4.4.2 (a)], ，我们得到 $H^{**}(0) = H(0)$，从而完成证明。□

2.3. 解体重心的唯一性。 在最后这个小节中，我们证明，当纤维 Y 是黎曼流形时，在某些绝对连续条件下，$\mathcal{MK}_{p,q}^\sigma$-重心是唯一的，其中 $p > 1$ 且 $q < \infty$。本小节将是最为复杂的。

我们首先指出，在 $q = \infty$的情况下，可以构造许多例子，使得$\mathcal{MK}_{p,\infty}^\sigma$-重心并不唯一；接下来的例子涵盖了所有以下情形： σ 不是狄拉克测度，且纤维 Y 是任意类型的连通完备黎曼流形（有边界或无边界）。

此时，我们定义由两两不相交的博雷尔集组成的集合 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$：

$$V_1 := \{\omega \in \Omega \mid \chi_1(\omega) > 0\}, \quad V_j := \{\omega \in \Omega \mid \chi_j(\omega) > 0\} \setminus \bigcup_{j'=1}^{j-1} V_{j'},\ j \ge 2, \tag{2.8}$$

根据构造， $\chi_j > 0$ 在 V_j 上，且对每个 $j \in \mathbb{N}$， $V_j \subset U_j$。由于 $\{\chi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是单位分解，我们可知 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 覆盖 Ω。这个不相交覆盖也将在唯一性的证明中发挥作用。

例 2.4. 设 $1 < p < \infty$ (情形 $p = 1$ 可能因其他原因而出现非唯一性，参见下文的例 2.5)，作出与定理 1.4 (1) 相同的假设，并且还假设 (Y,d_Y) 是任意测地空间。再取两个不同的元素 $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_p(Y)$，并假设存在一个

可测的 $\Omega' \subset \Omega$，使得 $0 < \sigma(\Omega') < 1$，并对任意博雷尔 $A \subset E$ 定义，

$$(\mathfrak{m}_k^\bullet \otimes \sigma)(A) := \begin{cases} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j} (\Xi_{j,\bullet})_\sharp \mu_0(A) d\sigma, & \text{if } 1 \le k \le K-1, \\ \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\int_{V_j\cap\Omega'} (\Xi_{j,\bullet})_\sharp \mu_0(A) d\sigma + \int_{V_j\setminus\Omega'} (\Xi_{j,\bullet})_\sharp \mu_1(A) d\sigma \right), & \text{if } k = K, \end{cases}$$

这里我们回顾一下 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 由（2.8）定义。根据 [13, 引理 2.5], ，这些元素均属于$\mathcal{P}^\sigma_{p,\ \infty}(E)$，其关于 π 的解体由 $\mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_k^\bullet \otimes \sigma$ 给出，其中

$$\mathfrak{m}_k^\omega := \begin{cases} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)(\Xi_{j,\omega})_\sharp \mu_0, & \text{if } 1 \le k \le K-1, \\ \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)(\Xi_{j,\omega})_\sharp \left(\mathbb{1}_{\Omega'}(\omega)\mu_0 + \mathbb{1}_{\Omega\setminus\Omega'}(\omega)\mu_1 \right), & \text{if } k = K. \end{cases}$$

对于任意 $\mathfrak{n} \in \mathcal{P}^\sigma_{p,\ \infty}(E)$、 $\kappa > 0$ 和 $(\lambda_k)_{k=1}^K \in \Lambda_K$，我们计算

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}^\sigma_{p,\infty}(\mathfrak{m}_k, \mathfrak{n})^\kappa &= (1-\lambda_K)\mathcal{MK}^\sigma_{p,\infty}(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n})^\kappa + \lambda_K \mathcal{MK}^\sigma_{p,\infty}(\mathfrak{m}_K, \mathfrak{n})^\kappa \\ &\ge (1-\lambda_K) \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\notin\Omega'} \mathrm{MK}^E_p(\mathfrak{m}_1^\omega, \mathfrak{n}^\omega)^\kappa + \lambda_K \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\notin\Omega'} \mathrm{MK}^E_p(\mathfrak{m}_K^\omega, \mathfrak{n}^\omega)^\kappa. \end{aligned}$$

令 $\nu \in \mathcal{P}_p(Y)$ 为 $(1-\lambda_K)$ 的一个极小化子 $\mathrm{MK}^Y_p(\mu_0, \cdot)^\kappa + \lambda_K \mathrm{MK}^Y_p(\mu_1, \cdot)^\kappa$，则对每个 $\omega \notin \Omega'$，若j_0 是满足 $\omega \in V_{j_0}$的唯一指标，

$$\begin{aligned} &(1-\lambda_K)\,\mathrm{MK}^E_p(\mathfrak{m}_1^\omega, \mathfrak{n}^\omega)^\kappa + \lambda_K\,\mathrm{MK}^E_p(\mathfrak{m}_K^\omega, \mathfrak{n}^\omega)^\kappa \\ &= (1-\lambda_K)\,\mathrm{MK}^Y_p(\mu_0, (\Xi^{-1}_{j_0,\omega})_\sharp \mathfrak{n}^\omega)^\kappa + \lambda_K\,\mathrm{MK}^Y_p(\mu_1, (\Xi^{-1}_{j_0,\omega})_\sharp \mathfrak{n}^\omega)^\kappa \\ &\ge (1-\lambda_K)\,\mathrm{MK}^Y_p(\mu_0, \nu)^\kappa + \lambda_K\,\mathrm{MK}^Y_p(\mu_1, \nu)^\kappa \end{aligned}$$

因此，若 $\mu \in \mathcal{P}_p(Y)$ 满足

$$\mathrm{MK}^Y_p(\mu_0, \mu)^\kappa \le (1-\lambda_K)\,\mathrm{MK}^Y_p(\mu_0, \nu)^\kappa + \lambda_K\,\mathrm{MK}^Y_p(\mu_1, \nu)^\kappa,$$

测度

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\Xi_{j,\bullet})_\sharp \left(\mathbb{1}_{\Omega'}\mu + \mathbb{1}_{\Omega\setminus\Omega'}\nu \right) \otimes \sigma,$$

（根据 [13, 引理 2.5]，它属于 $\mathcal{P}^\sigma_{p,\ q}(E)$）是

$$\mathfrak{n} \mapsto \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}^\sigma_{p,\infty}(\mathfrak{m}_k, \mathfrak{n})^\kappa \quad \text{on } \mathcal{P}^\sigma_{p,q}(E).$$

因此，由于 $\lambda_K \neq 0$，1，这就产生了无穷多个可能的极小化子。

此外，我们可以看到，由于 MK^Y_1-重心的非唯一性，$\mathcal{MK}^\sigma_{1,q}$-重心可能并不唯一。回顾一下，对于任意一对集合 X和 Y, $c\colon X\times Y \to (-\infty,\infty]$，以及 $\phi\colon X \to (-\infty,\infty]$，$c$的 -变换是由下式定义的函数 : $(, \infty]$

$$\phi^c(y) := \sup_{x\in X}(-c(x,y) - \phi(x)).$$

例 2.5。 设 $(\mu_k)_{k=1}^K \in \mathcal{P}_p(Y)^K$ 待定，并定义测度 $\mathfrak{m}_k \in \mathcal{P}_{p,q}^\sigma(E)$，其中$1 \le k \le K$ 满足

$$\mathfrak{m}_k := \left\{ \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\Xi_{j,\bullet}) \right)_\sharp \mu_k \right\} \otimes \sigma.$$

对于 $(\lambda_k)_{k=1}^K \in \Lambda_K$，由 $L^q(\sigma)$ 范数的凸性可知，对于任意 $\mathfrak{n} \in \mathcal{P}_{p,\ q}^\sigma(E)$，我们有

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}_{p,q}^\sigma(\mathfrak{m}_k, \mathfrak{n}) \ge \left\| \lambda_k \sum_{k=1}^K \mathrm{MK}_p^E \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\Xi_{j,\bullet})_\sharp \mu_k, \mathfrak{n}^\bullet \right) \right\|_{L^q(\sigma)}.$$

对于任意形如以下形式的测度

$$\mathfrak{n} := \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\Xi_{j,\bullet})_\sharp \nu_0 \right) \otimes \sigma$$

其中 $\nu_0 \in \mathcal{P}_p(Y)$，若 j_0 是满足 $\omega \in V_{j_0}$ 的唯一指标，则我们有

$$\mathrm{MK}_p^E \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\Xi_{j,\omega})_\sharp \mu_k, \mathfrak{n}^\omega \right) = \mathrm{MK}_p^E((\Xi_{j_0,\bullet})_\sharp \mu_k, (\Xi_{j_0,\bullet})_\sharp \nu_0)) = \mathrm{MK}_p^Y(\mu_k, \nu_0).$$

因此，若 ν_0 是一个 MK_p^Y-重心，我们可知 $\mathfrak{n}$ 将是一个 $\mathcal{MK}_{p,\ q}^\sigma$-重心。因此，若 $(\mu_k)_{k=1}^K$ 的选取方式能够使 MK_p^Y-重心不唯一，则这也会导致$\mathcal{MK}_{p,\ q}^\sigma$-重心的非唯一性。

对于 $p = 1$，我们强烈怀疑，对于各种 $(\lambda_k)_{k=1}^K$，都存在能产生非唯一重心的此类配置。我们给出一个 $Y = \mathbb{R}$ 的例子，其中测度 μ_k绝对连续，且 $\lambda_k \equiv K^{-1}$，其中 K 为偶数；顺带一提，该例子依赖于我们的对偶性结果定理 1.1。令 $\mathcal{H}^1$ 为一维豪斯多夫测度，并定义

$$\nu_0 := \mathcal{H}^1|_{[-2,-1]}, \qquad \nu_1 := \mathcal{H}^1|_{[1,2]}, \qquad \mu_k := \begin{cases} \nu_0, & \text{if } k \text{ even}, \\ \nu_1, & \text{if } k \text{ odd}. \end{cases}$$

然后我们计算

$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^K \mathcal{MK}_{1,q}^\sigma(\mathfrak{m}_k, \nu_0 \otimes \sigma) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^K \mathrm{MK}_1^{\mathbb{R}}(\mu_k, \nu_0) \le \frac{1}{K} \sum_{k \text{ odd}} \int_1^2 |t - (t-3)|\, dt = \frac{3}{2},$$
$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^K \mathcal{MK}_{1,q}^\sigma(\mathfrak{m}_k, \nu_1 \otimes \sigma) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^K \mathrm{MK}_1^{\mathbb{R}}(\mu_k, \nu_1) \le \frac{1}{K} \sum_{k \text{ even}} \int_{-2}^{-1} |t - (t+3)|\, dt = \frac{3}{2}.$$

现在定义 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$\phi(t) := \begin{cases} -4 - t, & \text{if } -4 \le t < -2, \\ t, & \text{if } -2 \le t < 2, \\ 4 - t, & \text{if } 2 \le t \le 4, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

由于 ϕ 是 1-Lipschitz，经典结果表明 $\phi^{\mathrm{d}_{\mathbb{R}}} = -\phi$，那么如果我们定义

$$\phi_k(t) := \begin{cases} -\dfrac{\phi(t)}{K}, & \text{if } k \text{ even}, \\ \dfrac{\phi(t)}{K}, & \text{if } k \text{ odd}, \end{cases}$$

我们有

$$\sum_{k=1}^{K} \phi_k \equiv 0,$$

$$-\sum_{k=1}^{K} \int_{\mathbb{R}} \phi_k^{\lambda_k \mathrm{d}_{\mathbb{R}}} d\mu_k = -\sum_{k \text{ even}} \int_{-2}^{-1} \frac{\phi(t)}{K} dt + \sum_{k \text{ odd}} \int_{1}^{2} \frac{\phi(t)}{K} dt = \frac{1}{2}\left(\int_1^2 t dt - \int_{-2}^{-1} t dt \right) = \frac{3}{2}.$$

根据定理 1.1 (2)，我们看到 ν_0 和 ν_1 都是 $\mathsf{MK}_1^{\mathbb{R}}$-重心。

本节余下部分中，Y 将是一个完备、连通的黎曼流形，可能带有边界；d_Y（分别地，Vol_Y）表示黎曼距离函数（分别地，体积测度）。我们还记

$\mathsf{inj}_1(y) := \min\left\{1,\ \sup\left\{ r>0 \,\middle|\, \exp^y \text{在以 } 0 \in T_y \text{ 为中心、半径为 } r \text{ 的开球上是一个微分同胚} \right\}\right\}$，其中 $y \in Y \setminus \partial Y$，$\mathsf{inj}(A) := \inf_{y\in A} \mathsf{inj}_1(y)$，其中 $A \subset Y \setminus \partial Y$.

我们将用 $B_r(y)$ 和 $B_r(y)$ 分别表示以 为中心、半径为 的开球和闭球 $r>0$。$y \in Y \setminus \partial Y$本文中我们只考虑空间 Y 中的球。尽管 $Y \setminus \partial Y$可能不完备，但根据 [3, 引理 10.90 和 10.91],，我们有 $\mathsf{inj}(K) > 0$，对于任意紧 $K \subset Y \setminus \partial Y$。

首先，我们证明一个关于覆盖测地球边界的非常简单的引理。

引理 2.6. 对于任意紧集 $K \subset Y \setminus \partial Y$ 和 $0 < r < \mathrm{inj}(K)/2$，存在一个仅依赖于 K 和 r 的 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $y \in K$，都存在一组点 $\{y_i\}_{i=1}^N \subset B_{5r/4}(y) \setminus B_{3r/4}(y)$，使得 $\{B_{r/2}(y_i)\}_{i=1}^N$ 是 $\partial B_r(y)$的覆盖。

证明。假设该引理不成立，则存在一个序列 $(\tilde{y}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset K$，使得无法用 ℓ 个或更少个半径为 $r/2$、中心位于 $B_{5r/4}(\tilde{y}_\ell) \setminus B_{3r/4}(\tilde{y}_\ell)$ 的开球覆盖$\partial B_r(\tilde{y}_\ell)$。由 K的紧性，我们可以取一个收敛子列 $(\tilde{y}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$（不再重新标记），其极限为 $\tilde{y}_\infty \in K$。此外，同样由紧性，存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得有一个覆盖 $\{B_{r/2}(y_i)\}_{i=1}^N$，覆盖$B_{9r/8}(\tilde{y}_\infty) \setminus B_{7r/8}(\tilde{y}_\infty)$，且对于 $1 \le i \le N$，有 $y_i \in B_{9r/8}(\tilde{y}_\infty) \setminus B_{7r/8}(\tilde{y}_\infty)$。由于 $r < \mathsf{inj}(K)/2$ 且$\tilde{y}_\ell \in K$，我们可知 $y \in \partial B_r(\tilde{y}_\ell)$ 意味着 $\mathsf{d}_Y(\tilde{y}_\ell, y) = r$。于是，根据三角不等式，对于满足 $\mathsf{d}_Y(\tilde{y}_\ell, \tilde{y}_\infty) < r/8$ 的 $\ell > N$，我们有

$$\partial B_r(\tilde{y}_\ell) \subset \overline{B}_{9r/8}(\tilde{y}_\infty) \setminus B_{7r/8}(\tilde{y}_\infty)$$

而每个 $y_i \in \overline{B_{5r/4}}(\tilde{y}_\ell) \setminus B_{3r/4}(\tilde{y}_\ell)$，这就产生了矛盾。 □

众所周知，局部有界的 $\lambda \mathsf{d}_Y^p$-凸函数可推出利普希茨界。为了证明定理 1.4 (2) 中析取重心对偶问题的极大化序列收敛，我们需要考虑由该极大化序列构造的 平均值 序列。当 $p=2$ 时，$\mathsf{d}^2_{\mathbb{R}^n}$-变换的平均值仍是 $\mathsf{d}^2_{\mathbb{R}^n}$-变换，但对于 $p \neq 2$ 或更一般的流形 Y，这一性质并不成立。因此，在下一个引理中，我们将证明，在某些条件下，d_Y^p-变换平均值的局部利普希茨性也可由有界性推出。下面的引理比后续所需的情形更一般。

引理 2.7。 固定 $\lambda \in (0,1]$, $R>0$，并设 $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是一个序列，使得函数$f_m := g_m^{\lambda \mathrm{d}_Y^p}$ 在 $m\in\mathbb{N}$ 上关于 $B_R(y_0)$一致有界。若存在一个递增序列$(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$，且 $\lambda_{\ell,m}\geq 0$ 对每个 $\ell\in\mathbb{N}$ 和 $1\leq m\leq M_\ell$ 均成立，并且存在 $C_1, C_2>0$ 使得

$$\sup_{\ell\in\mathbb{N}} \frac{1}{M_\ell}\sum_{m=1}^{M_\ell}\lambda_{\ell,m}\leq C_1, \qquad \sup_{t\in\overline{B}_R(y_0)}\frac{1}{M_\ell}\sum_{m=1}^{M_\ell}\lambda_{\ell,m}\,|f_m(t)|\leq C_2,$$

那么该序列

$$\left(\frac{1}{M_\ell}\sum_{m=1}^{M_\ell}\lambda_{\ell,m}f_m\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$$

在 $\{y\in B_{R/2}(y_0) \mid \mathrm{d}_Y(y,\partial Y)\geq 2R^{-1}\}$上一致利普希茨。

证明。 我们可以假设 $\lambda=1$ as

$$g_m^{\lambda \mathrm{d}_Y^p} = \lambda(\lambda^{-1}g_m)^{\mathrm{d}_Y^p}.$$

由于该结论由 [19, 命题 3。1] 在 $p=1$成立时得出，因此假设 $1<p<\infty$。令 $N\in\mathbb{N}$ 由引理2.6 在选取集合

$$K := \left\{y\in\overline{B}_R(y_0) \mid \mathrm{d}_Y(y,\partial Y)\geq 2R^{-1}\right\},$$

在 $Y\setminus\partial Y$ 中紧，且 $r := \mathsf{min}\{\mathsf{inj}(K)\ R\}/2$。现在我们写作

$$\widehat{B} := \left\{y\in\overline{B}_{R/2}(y_0) \mid \mathrm{d}_Y(y,\partial Y)\geq 2R^{-1}\right\}.$$

^固定 $t\in B$ 和 $\varepsilon>0$，那么由于每个 f_m 在 $B_R(\overline{y_0})$ 上有限，对每个 m，存在 $s_{m,\,t}\in Y$使得

$$f_m(t)\leq -\mathrm{d}_Y(t,s_{m,t})^p - g_m(s_{m,t})+\varepsilon.$$

那么，对于任意 $t'\in Y$，我们有

$$\begin{aligned} f_m(t')+\varepsilon &\geq -\mathrm{d}_Y(t',s_{m,t})^p - g_m(s_{m,t})+\varepsilon \\ &\geq -\mathrm{d}_Y(t',s_{m,t})^p + \mathrm{d}_Y(t,s_{m,t})^p + f_m(t) \\ &\geq p\,\mathrm{d}_Y(t',s_{m,t})^{p-1}(\mathrm{d}_Y(t,s_{m,t})-\mathrm{d}_Y(t',s_{m,t}))+f_m(t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

现在，令 $\{B_{r/2}(y_i)\}_{i=1}^N$ 为 $\partial B_r(t)$ 的一个覆盖，其中 $y_i\in B_{5r/4}(t)\setminus B_{3r/4}(t)$；由上文引理 2.6 的应用可知，这样的覆盖存在。由完备性和连通性可知，至少存在一条最短的单位速测地线 $\gamma_{m,t}$，从 t 到 $s_{m,t}$。对于 $1\leq i\leq N$，定义

$$B_i := \begin{cases} B_{r/2}(y_1), & \text{if } i=1,\\ B_{r/2}(y_i)\setminus\bigcup_{i'=1}^{i-1}B_{r/2}(y_{i'}), & \text{if } 2\leq i\leq N, \end{cases} \qquad I_i := \{m\in\mathbb{N} \mid \gamma_{m,t}(r)\in B_i \text{ and } s_{m,t}\notin B_{2r}(t)\}.$$

那么对于 $m\in I_i$，利用 $r<\mathsf{inj}(K)/2$ 和 $t\in K$，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_Y(t,s_{m,t})-\mathrm{d}_Y(y_i,s_{m,t}) &\geq \mathrm{d}_Y(t,s_{m,t})-\mathrm{d}_Y(\gamma_{m,t}(r),s_{m,t})-\mathrm{d}_Y(\gamma_{m,t}(r),y_i) \\ &\geq \mathrm{d}_Y(t,\gamma_{m,t}(r))-\frac{r}{2}=\frac{r}{2}. \end{aligned}$$

利用这一点，我们可以对每个 $1 \le i \le N$，通过在（2.9）中取，并注意到每个$y_i \in B_R(y_0)$，

$$
\begin{aligned}
C_2 + \varepsilon &\ge \frac{1}{M_\ell} \sum_{m=1}^{M_\ell} \lambda_{\ell,m} \, |f_m(y_i)| + \varepsilon \\
&\ge \frac{1}{M_\ell} \sum_{\substack{1 \le m \le M_\ell, \\ m \in I_i}} \lambda_{\ell,m} \left[p \, \mathrm{d}_Y(y_i, s_{m,t})^{p-1} \left(\mathrm{d}_Y(t, s_{m,t}) - \mathrm{d}_Y(y_i, s_{m,t}) \right) + f_m(t) \right] \\
&\ge \frac{pr}{2M_\ell} \sum_{\substack{1 \le m \le M_\ell, \\ m \in I_i}} \lambda_{\ell,m} \, \mathrm{d}_Y(y_i, s_{m,t})^{p-1} - \frac{1}{M_\ell} \sum_{m=1}^{M_\ell} \lambda_{\ell,m} \, |f_m(t)| \\
&\ge \frac{pr}{2M_\ell} \sum_{\substack{1 \le m \le M_\ell, \\ m \in I_i}} \lambda_{\ell,m} \left[2^{-p+1} \, \mathrm{d}_Y(t'', s_{m,t})^{p-1} - \mathrm{d}_Y(t'', y_i)^{p-1} \right] - C_2 \\
&\ge \frac{pr}{2M_\ell} \sum_{\substack{1 \le m \le M_\ell, \\ m \in I_i}} \lambda_{\ell,m} \left[2^{-p+1} \, \mathrm{d}_Y(t'', s_{m,t})^{p-1} - (2R)^{p-1} \right] - C_2
\end{aligned}
$$

对于任意 $t'' \in B$。因此，对于 t_1，$t_2 \in B$，我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{M_\ell} \sum_{m=1}^{M_\ell} \lambda_{\ell,m} f_m(t_1) - \frac{1}{M_\ell} \sum_{m=1}^{M_\ell} \lambda_{\ell,m} f_m(t_2) &\le \frac{1}{M_\ell} \sum_{m=1}^{M_\ell} \lambda_{\ell,m} \left(\mathrm{d}_Y(t_2, s_{m,t_1})^p - \mathrm{d}_Y(t_1, s_{m,t_1})^p + \varepsilon \right) \\
&\le \frac{p}{M_\ell} \sum_{m=1}^{M_\ell} \lambda_{\ell,m} \max\{ \mathrm{d}_Y(t_1, s_{m,t_1})^{p-1}, \mathrm{d}_Y(t_2, s_{m,t_1})^{p-1} \} \\
&\quad \cdot |\mathrm{d}_Y(t_2, s_{m,t_1}) - \mathrm{d}_Y(t_1, s_{m,t_1})| + \varepsilon C_1 \\
&\le \frac{2^p}{r} (2C_2 + \varepsilon + 2^{p-2} pr R^{p-1} C_1) \, \mathrm{d}_Y(t_1, t_2) + \varepsilon C_1,
\end{aligned}
$$

因此令 ε 趋于 0，再交换 t_1 和 t_2 的角色，可得 B上的一致 Lipschitz 界。□

上述引理还立即给出了 [7, 推论 C.5] 的一个类似结论，稍后我们将用到它。

推论 2.8. 固定 $\lambda \in (0, 1]$ 并假设 $R > 0$。对于定义在 Y上的函数 g，若 $f := g^{\lambda \, \mathrm{d}_Y^p}$在 $B_r(y_0)$上有界，则它在集合 $\{ y \in B_{R/2}(y_0) \mid \mathrm{d}_Y(y, \partial Y) \ge 2R^{-1} \}$上是一致利普希茨的。

证明。 直接应用引理 2.7 并取 $f_m \equiv f$ 和 $\lambda_{\ell,m} \equiv 1$即可。 □

接下来我们将证明一个紧性结果，该结果将应用于 $\mathcal{MK}_p^\sigma$ 的对偶问题中的极大化序列，其中涉及q-重心，如定理 1.4 (2) 所述。回顾一下，$\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 是由（2.8）定义的 Ω 的博雷尔集划分。

引理 2.9。 对于每个 $1 \le k \le K$，设 $(\xi_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ 和 $(\zeta_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ 分别是 $\mathcal{X}_p$ 和 $\mathcal{Z}_{r'}$ 中的序列σ，记 $\eta_{k,m}(v)$:$= \zeta_{k,m}(\pi(v))\xi_{k,m}(v)$，并假设:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_j \mathbb{1}_{V_j} \xi_{k,m}(\Xi_j(\cdot, y_0)) = 0, \qquad \text{for } 1 \le k \le K-1 \text{ and } m \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \eta_{k,m} \equiv 0, \qquad \text{for } m \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

$$\xi_{k,m} = S_{\lambda_k}(S_{\lambda_k}\xi_{k,m}), \qquad \text{for } 1 \le k \le K-1 \text{ and } m \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} \left(-\sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega} \zeta_{k,m}(\omega) \int_{E} S_{\lambda_k}\xi_{k,m} d\mathfrak{m}_k^{\omega} d\sigma(\omega) \right) > -\infty, \tag{2.13}$$

$$\zeta_{k,m} \xrightarrow{m\to\infty} \zeta_k \quad \text{in } L^{r'}(\sigma), \qquad \text{for } 1 \le k \le K-1. \tag{2.14}$$

此外，如果 $p = q$，则假设对于所有 $1 \le k \le K$ 和 $m \in \mathbb{N}$，$\zeta_{k,\,m} \equiv 1$ 。那么存在一个博雷尔集 $\Omega' \subset \Omega$，满足 $\sigma(\Omega') = 1$；并且对于每个 $1 \le k \le K$，存在 $(\eta_{k,\,m})_{m\in\mathbb{N}}$ 和 $(\zeta_{k,\,m})_{m\in\mathbb{N}}$ 的子列（不重新标记），使得存在一个博雷尔函数 η_k： $E \to \mathbb{R}$，其在 $\pi^{-1}(\{\omega\})$ 上的限制对于所有 $\omega \in \Omega'$ 都是连续的，并记

$$\eta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(v) := \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \eta_{k,m}(v), \qquad \zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(\omega) := \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \zeta_{k,m}(\omega),$$

对于每个 $1 \le k \le K$，有

$$\lim_{M\to\infty} \eta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(v) = \eta_k(v), \qquad \text{对于所有 } v \in \pi^{-1}(\Omega'), \tag{2.15}$$

$$\lim_{M\to\infty} \zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(\omega) = \zeta_k(\omega), \qquad \text{对于所有 } \omega \in \Omega', \tag{2.16}$$

$$\lim_{M\to\infty} \|\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}} - \zeta_k\|_{L^{r'}(\sigma)} = 0, \tag{2.17}$$

and

$$\sum_{k=1}^{K} \eta_k \equiv 0. \tag{2.18}$$

此外，$\eta_{k\,M}^{\mathrm{avg}}$，到 η_k 的收敛在集合

$$\overline{B}_{\omega,\ell} := \left\{ \Xi_j(\omega, y) \mid y \in \overline{B}_\ell(y_0),\ \mathrm{d}_Y(y, \partial Y) \ge 2\ell^{-1} \right\},$$

对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \Omega'$，其中 $j \in \mathbb{N}$ 是满足 $\omega \in V_j$ 的唯一指标。

证明。 对于任意 $1 \le k \le K$， $m \in \mathbb{N}$，以及固定的 $u \in E$，由（2.10）可得

$$\begin{aligned} -S_{\lambda_k}\xi_{k,m}(u) &= \inf_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})} (\lambda_k\, \mathrm{d}_E(u,v)^p + \xi_{k,m}(v)) \\ &\le \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_j(\pi(u)) \mathbb{1}_{V_j}(\pi(u)) \left(\lambda_k\, \mathrm{d}_E(u, \Xi_{j,\pi(u)}(y_0))^p + \xi_{k,m}(\Xi_{j,\pi(u)}(y_0)) \right) \\ &\le \lambda_k\, \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u), u), \end{aligned} \tag{2.19}$$

因此，对于任意 $m\in\mathbb{N}$ 和 $1\le k\le K$，利用（2.1），

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq k}\left(-\int_\Omega\zeta_{i,m}\int_E S_{\lambda_i}\xi_{i,m}d\mathfrak{m}_i^\bullet d\sigma\right)&\le\sum_{i\neq k}\lambda_i\left(\int_\Omega\zeta_{i,m}\int_E \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\cdot,u)d\mathfrak{m}_i^\bullet(u)d\sigma\right)\\&\le\sum_{i\neq k}\lambda_i\left\|\zeta_{i,m}\right\|_{L^{r'}(\sigma)}\left\|2^{p-1}(\widetilde{C}+\mathrm{MK}_p^E(\delta_{E,y_0}^\bullet,\mathfrak{m}_i^\bullet)^p\right\|_{L^r(\sigma)}\\&\le 2^{p-1}\sum_{i\neq k}\lambda_i\left(\widetilde{C}+\mathcal{MK}_p^\sigma(\delta_{E,y_0}^\bullet\otimes\sigma,\mathfrak{m}_i)^p\right).\end{aligned}$$

因此，对于任意 $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega\zeta_{k,m}\int_E S_{\lambda_k}\xi_{k,m}d\mathfrak{m}^\bullet d\sigma\\&\ge-\sum_{k'=1}^K\int_\Omega\zeta_{k',m}\int_E S_{\lambda_{k'}}\xi_{k',m}d\mathfrak{m}^\bullet d\sigma-\sum_{i\neq k}\left(-\int_\Omega\zeta_{i,m}\int_E S_{\lambda_i}\xi_{i,m}d\mathfrak{m}_i^\bullet d\sigma\right)\\&\ge-\sum_{k'=1}^K\int_\Omega\zeta_{k',m}\int_E S_{\lambda_{k'}}\xi_{k',m}d\mathfrak{m}^\bullet d\sigma-2^{p-1}\sum_{i\neq k}\lambda_i\left(\widetilde{C}+\mathcal{MK}_p^\sigma(\delta_{E,y_0}^\bullet\otimes\sigma,\mathfrak{m}_i)^p\right)\\&=:C,\end{aligned}\tag{2.20}$$

此处 C 并非 $-\infty$ 且独立于 $m\in\mathbb{N}$ 由（2.13）得。

现在，固定 $\omega\in\Omega$ 和 u、$v\in\pi^{-1}(\{\omega\})$，我们可以对该不等式积分

$$\begin{aligned}\eta_{k,m}(v)&\ge-\zeta_{k,m}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}(u)-\lambda_k\zeta_{k,m}(\omega)\,\mathrm{d}_E(u,v)^p\\&\ge-\zeta_{k,m}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}(u)-2^{p-1}\zeta_{k,m}(\omega)(\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\omega,u)+\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\omega,v))\end{aligned}\tag{2.21}$$

关于 $\mathfrak{m}_k^\omega\otimes\mathfrak{n}^\omega$（$u$，$v$）积分，其中任意 $\mathfrak{n}\in\mathcal{P}_{p,\,q}^\sigma(E)$，再对 σ 关于 ω积分，并利用每个 $\mathfrak{n}^\omega$ 均非负且总质量为一，以及（2.1）和（2.20），由此得到

$$\begin{aligned}\int_E\eta_{k,m}d\mathfrak{n}&\ge-\int_\Omega\zeta_{k,m}\int_E S_{\lambda_k}\xi_{k,m}d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma\\&\quad-2^{p-1}\left(\int_\Omega\zeta_{k,m}\left[\int_E\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\cdot,u)d\mathfrak{m}_k^\bullet(u)d\sigma+\int_E\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\cdot,v)d\mathfrak{n}^\bullet(v)\right]d\sigma\right)\\&\ge C-2^{2p-2}\left\|\zeta_{k,m}\right\|_{L^{r'}(\sigma)}\left\|2\widetilde{C}+\mathrm{MK}_p^E(\delta_{E,y_0}^\bullet,\mathfrak{m}_k^\bullet)^p+\mathrm{MK}_p^E(\delta_{E,y_0}^\bullet,\mathfrak{n}^\bullet)^p\right\|_{L^r(\sigma)}\\&\ge C-2^{2p-2}\left(2\widetilde{C}+\max_{1\le i\le K}\mathcal{MK}_{p,q}^\sigma(\delta_{E,y_0}^\bullet\otimes\sigma,\mathfrak{m}_i)^p+\mathcal{MK}_{p,q}^\sigma(\delta_{E,y_0}^\bullet\otimes\sigma,\mathfrak{n})^p\right).\end{aligned}$$

结合（2.11），存在一个常数 $C'>0$，它独立于 $m\in\mathbb{N}$、$1\le k\le K$ 和$\mathfrak{n}\in\mathcal{P}_{p,\,q}^\sigma(E)$，使得

$$\left|\int_E\eta_{k,m}d\mathfrak{n}\right|\le C'(1+\mathcal{MK}_{p,q}^\sigma(\delta_{E,y_0}^\bullet\otimes\sigma,\mathfrak{n})^p).\tag{2.22}$$

现在，对 $\delta>0$、$1\le k\le K$、j、$m\in\mathbb{N}$ 和 $\omega\in\Omega$ 定义，

$$I_{k,\ell,m}^{\delta,\omega}:=\left\{t\in\overline{B}_\ell(y_0)\,\middle|\,\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t))\ge\sup_{t'\in\overline{B}_\ell(y_0)}\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t'))-\delta\right\}.$$

由于

$$t\mapsto\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t))$$

对于任意固定的 ω，在 Y 上是连续的，因此我们必有 $\mathrm{Vol}_Y(I^{\delta,\omega}_{k,\ell,m}) > 0$，于是可以定义

$$\mu^{\omega}_{\delta,k,\ell,m} := \frac{\mathbb{1}_{I^{\delta,\omega}_{k,\ell,m}}}{\mathrm{Vol}_Y(I^{\delta,\omega}_{k,\ell,m})}\,\mathrm{Vol}_Y \in \mathcal{P}(Y).$$

由每个 Ξ_j 和 $\eta_{k,m}$ 的连续性可知，集合

$$\left\{(\omega,t) \in \Omega \times Y \mid t \in I^{\delta,\omega}_{k,\ell,m}\right\}$$

是 $\Omega \times Y$ 的博雷尔子集。因此，函数

$$(\omega,t) \mapsto \mathbb{1}_{I^{\delta,\omega}_{k,\ell,m}}(t)$$

在 $\Omega \times Y$ 上是博雷尔函数。根据托内利定理，函数 $\omega \mapsto \mathrm{Vol}_Y(I^{\delta,\omega}_{k,\ell,m})$ 在 Ω 上是博雷尔函数。现在任取一个博雷尔 $A \subset E$，则作为博雷尔函数 $\mathbb{1}_A$ 与连续映射 Ξ_j 的复合，函数 $(\omega, t) \mapsto \mathbb{1}_A(\Xi_{j,\omega}(t))$ 在 $U_j \times Y$（赋予子空间度量）上是博雷尔函数，因此函数

$$(\omega,t) \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)\cdot \mathbb{1}_{I^{\delta,\omega}_{k,\ell,m}}(t)\cdot \mathbb{1}_A(\Xi_{j,\omega}(t))$$

在 $\Omega \times Y$ 上是博雷尔函数。因此，综合以上结果，若定义

$$\mathfrak{n}^{\omega}_{\delta,k,\ell,m} := \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)(\Xi_{j,\omega})_\sharp \mu^{\omega}_{\delta,k,\ell,m}$$

再根据托内利定理可知，对于任意博雷尔 $A \subset E$，$\omega \mapsto \mathfrak{n}^{\omega}_{\delta,k,\ell,m}(A)$ 在 Ω 上是博雷尔函数，因此$\mathfrak{n}_{\delta,k,j,\ell,m} := \mathfrak{n}^{\bullet}_{\delta,k,j,\ell,m} \otimes \sigma$ 定义良好，并根据 [16, 推论 1]属于 $\mathcal{P}^{\sigma}(E)$。此外，若对于某个 $j_0 \in \mathbb{N}$，有 $\omega \in V_{j_0}$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MK}^E_p(\delta^{\omega}_{E,y_0}, \mathfrak{n}^{\omega}_{\delta,k,\ell,m})^p \\
&\le \sum_{j'\in\mathbb{N}} \chi_{j'}(\omega)\,\mathrm{MK}^E_p((\Xi_{j',\omega})_\sharp \delta^Y_{y_0}, (\Xi_{j_0,\omega})_\sharp \mu^{\omega}_{\delta,k,\ell,m})^p \\
&\le 2^{p-1}\sum_{j'\in\mathbb{N}} \chi_{j'}(\omega)\Big(\mathrm{MK}^E_p((\Xi_{j',\omega})_\sharp \delta^Y_{y_0}, (\Xi_{j_0,\omega})_\sharp \delta^Y_{y_0})^p + \mathrm{MK}^E_p((\Xi_{j_0,\omega})_\sharp \delta^Y_{y_0}, (\Xi_{j_0,\omega})_\sharp \mu^{\omega}_{\delta,k,\ell,m})^p\Big) \\
&= 2^{p-1}\sum_{j'\in\mathbb{N}} \chi_{j'}(\omega)\left(\mathrm{d}_Y(y_0, g^{j'}_{j_0}(\omega)y_0)^p + \mathrm{Vol}_Y(I^{\delta,\omega}_{k,\ell,m})^{-1}\int_{I^{\delta,\omega}_{m,k,\ell}} d_{y_0}(t)^p d\,\mathrm{Vol}_Y(t)\right) \\
&\le 2^{p-1}\left(\sum_{j'\in\mathbb{N}} \chi_{j'}(\omega)\,\mathrm{d}_Y(y_0, g^{j'}_{j_0}(\omega)y_0)^p + \ell^p\right),
\end{aligned} \tag{2.23}$$

它有界，且与 ω 和 j_0 无关（由1.2），因此 $\mathfrak{n}_{\delta,k,\ell,m} \in \mathcal{P}^{\sigma}_{p,q}(E)$。接下来我们发现

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sup_{t\in\overline{B}_\ell(y_0)} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t))\right) d\sigma(\omega) - \delta \\
&\le \int_\Omega \frac{1}{\mathrm{Vol}_Y(I^{\delta,\omega}_{k,\ell,m})}\int_{I^{\delta,\omega}_{k,\ell,m}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t))\,d\,\mathrm{Vol}_Y(t)d\sigma(\omega) = \int_\Omega\int_E \eta_{k,m}d\mathfrak{n}^{\omega}_{\delta,k,\ell,m}d\sigma(\omega) \\
&\le C_\ell
\end{aligned}$$

对于某个与 k、m 和 δ 无关的 $C_\ell > 0$，根据（2.22）和（2.23），我们可以在 $I^{\delta,\omega}_{k,m,\ell}$ 的定义中将 max 替换为 min，并改变不等式的方向，然后将上面的 sup 替换为 inf

从而得到相应的不等式

$$\int_\Omega \inf_{t\in\overline{B}_\ell(y_0)} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t))\right) d\sigma(\omega) + \delta \geq -C_\ell.$$

对于固定的 $\omega\in\Omega$，若 $j_0\in\mathbb{N}$ 是唯一满足条件的指标 $\omega\in V_{j_0}$，利用（2.10）

$$0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_j(\omega)\mathbb{1}_{V_j}(\omega)\xi_{k,m}(\Xi_j(\omega,y_0)) = \chi_{j_0}(\omega)\xi_{k,m}(\Xi_{j_0}(\omega,y_0)),$$

由于根据 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$的构造，$\chi_{j_0}(\omega) > 0$，我们必有

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)\xi_{k,m}(\Xi_j(\omega,y_0)) = \xi_{k,m}(\Xi_{j_0}(\omega,y_0)) = 0. \tag{2.24}$$

特别地,

$$\inf_{t\in\overline{B}_\ell(y_0)} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t))\right) \leq 0 \leq \sup_{t\in\overline{B}_\ell(y_0)} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t))\right)$$

对任意 $\omega\in\Omega$以及 m、 $\ell\in\mathbb{N}$均成立。因此令上面得到的两个不等式中的 δ 趋于 0，并利用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left\| \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)(\eta_{k,m}\circ\Xi_{j,\omega}) \right\|_{L^2(\overline{B}_\ell(y_0))} d\sigma(\omega) \\
&\leq \mathrm{Vol}_Y(\overline{B}_\ell(y_0))^{\frac{1}{2}} \int_\Omega \sup_{t\in\overline{B}_\ell(y_0)} \left| \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t)) \right| d\sigma(\omega) \\
&\leq C_\ell \,\mathrm{Vol}_Y(\overline{B}_\ell(y_0))^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{2.25}$$

其中， $L^2(B_\ell(y_0))$ 上的参考测度为 $\overline{\mathrm{Vol}}_Y$。这意味着对于每个 $\ell\in\mathbb{N}$ 和 $1\leq k\leq K$，序列

$$\left(\omega \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)(\eta_{k,m}\circ\Xi_{j,\omega})\right)_{m\in\mathbb{N}} \tag{2.26}$$

在博赫纳–勒贝格空间 $L^1(\sigma;L^2(B_\ell(y_0)))$ 中有界。由于空间$\overline{\ }L^2(B_\ell(y_0))$ 是希尔伯特空间,$\overline{\ }$我们可以反复应用 [9, 定理 3。1]，并结合对角化论证，得到（2.26）的一个子列（不重新标记该子列），使其具有如下性质: 存在一个函数

$$\tilde{\eta}_k : \Omega\times Y\to\mathbb{R} \quad \text{with} \quad \omega\mapsto \tilde{\eta}_k(\omega,\cdot)|_{\overline{B}_\ell(y_0)} \in L^1(\sigma;L^2(\overline{B}_\ell(y_0)))$$

对于每个 $\ell\in\mathbb{N}$，对于任意进一步（不另行标记）的子列，都存在一个 σ-零测博雷尔集 $\mathcal{N}_1\subset\Omega$，使得对所有 $\ell\in\mathbb{N}$ 和 $\omega\in\Omega\setminus\mathcal{N}_1$,

$$\lim_{M\to\infty} \left\| \tilde{\eta}^{\mathrm{avg}}_{k,M}(\omega,\cdot) - \tilde{\eta}_k(\omega,\cdot) \right\|_{L^2(\overline{B}_\ell(y_0))} = 0, \quad \text{where} \quad \tilde{\eta}^{\mathrm{avg}}_{k,M}(\omega,t) := \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t)). \tag{2.27}$$

根据（2.25），并且由于

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|\zeta_{k,m}\|_{L^1(\sigma)} \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\zeta_{k,m}\|_{L^{r'}(\sigma)} \leq 1$$

我们也可以对每个 ′应用实值的 Koml [15, os' 定理（见]定理 1a $1 \le k \le K$ ），并对序列$\ell \in \mathbb{N}$ 应用该定理

$$\left(\omega \mapsto \sup_{t' \in \overline{B}_\ell(y_0)} \left| \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega) \eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t')) \right| \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

以及 $(\zeta_{k,\ m})_{m\in\mathbb{N}}$，并再次使用对角化论证，假设存在一个 σ-零测博雷尔集 $\mathcal{N}_2$，使得对所有 $\ell \in \mathbb{N}$、$1 \le k \le K$ 和 $\omega \in \mathcal{N}_2$,

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \sup_{t' \in \overline{B}_\ell(y_0)} \left| \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\omega) \eta_{k,m}(\Xi_{j,\omega}(t')) \right| \text{ converges,}$$

并且（2.16）成立。若 $p < q$，根据 Banach–Saks定理，我们可以取$\zeta_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ 的另一个子列，使得$\zeta_{k\,M}^{\mathrm{avg}}$，也在 $L^{r'}(\sigma$中收敛；根据（ ζ_k，其极限必为2.14）。而若 $p = q$，我们已经有$\zeta_k^{\mathrm{avg}}{}_{,\ M} \equiv 1$ 对所有 M均成立，从而证明了（2.17）。

现在固定一个任意的递增序列 $(M_{\ell'})_{\ell'\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ 并

$$\omega \in \Omega' := \Omega \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2),$$

其中 Ω′ 是博雷尔集。根据（2.27），我们可以再取一个子列，假设对于某个 Vol_Y-零测集 $\mathcal{N}(\omega)$ $\subset Y$,

$$\lim_{\ell'\to\infty} \tilde{\eta}_{k,M_{\ell'}}^{\mathrm{avg}}(\omega,t) = \tilde{\eta}_k(\omega,t), \quad \text{for all } t \in Y \setminus \mathcal{N}(\omega).$$

若 j_0 是唯一满足 $\omega \in V_{j_0}$ 的指标，并定义集合

$$\overline{B}_\ell := \{y \in \overline{B}_\ell(y_0) \mid \mathrm{d}_Y(y, \partial Y) \ge 2\ell^{-1}\},$$

对于 $\ell \in \mathbb{N}$，由 (2.12)，我们可以应用引理 2.7，其中 $f_m = \xi_{k,\ m}(\Xi_{j_0}(\omega,\cdot))$ 以及与 $\ell' \in \mathbb{N}$ 无关的 λ_ℓ、$_{m'} = \zeta_k$、$_m(\omega)$ （由于序列 $(\zeta_{k\,M}^{\mathrm{avg}}(\omega))_{M\in\mathbb{N}}$ 收敛，因此也一致有界），取 $1 \le k \le K-1$，从而得到 $(\tilde{\eta}_k^{\mathrm{avg}}{}_{,M_{\ell'}}(\omega,\cdot))_{\ell'\in\mathbb{N}}$ 在 B_ℓ 上对每个 $\ell \in \mathbb{N}$ 都是一致利普希茨的。由 (2.24) 可知，对于所有 k，$\tilde{\eta}_k^{\mathrm{avg}}{}_{,M_{\ell'}}(\omega,y_0) = 0$，因此 $(\tilde{\eta}_k^{\mathrm{avg}}{}_{,M_{\ell'}}(\omega,\cdot))_{\ell'\in\mathbb{N}}$ 在 B_ℓ 上也有界，我们可以应用 Arzelá–Ascoli 定理，得到 $\tilde{\eta}_k^{\mathrm{avg}}{}_{,M_{\ell'}}(\omega,\cdot)$ 的一个子列，该子列在 B_ℓ 上一致收敛，且必然收敛到 $\tilde{\eta}_k(\omega,\cdot)$。通过另一个对角化论证可知，对于每个 $\omega \in \Omega'$，$\tilde{\eta}_k(\omega,\cdot)$ 存在一个定义在整个 Y 上的连续延拓；我们仍将此延拓记为 $\tilde{\eta}_k(\omega,\cdot)$。由于我们一开始取的是任意递增序列 $(M_{\ell'})_{\ell'\in\mathbb{N}}$，因此可得（对于原来的整个序列），对任意固定的 $\omega \in \Omega'$，当 $M \to \infty$ 时，$\tilde{\eta}_{k\,M}^{\mathrm{avg}}(\omega,t)$ 收敛到 $\tilde{\eta}_k(\omega,t)$；并且将其限制在 B_ℓ 上时，对于任意 $\ell \in \mathbb{N}$，此收敛关于 t 一致。由 (2.11) 得

$$\sum_{k=1}^{K} \tilde{\eta}_{k,M}^{\mathrm{avg}} \equiv 0,$$

因此，我们看到同样的一致收敛结论对 $(\tilde{\eta}_K^{\mathrm{avg}}{}_{,\ M}(\omega,\ \cdot))_{M\in\mathbb{N}}$ 也成立。最后，由于 V_j互不相交，

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\pi(v)) \tilde{\eta}_{k,M}^{\mathrm{avg}}(\Xi_j^{-1}(v)) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\pi(v)) \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \sum_{j'\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_{j'}}(\pi(v)) \eta_{k,m}(\Xi_{j'}(\Xi_j^{-1}(v))) \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\pi(v)) \eta_{k,m}(v) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \eta_{k,m}(v) = \eta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(v),\end{aligned}$$

因此定义

$$\eta_k(v) := \mathbb{1}_{\pi^{-1}(\Omega')}(v) \cdot \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{V_j}(\pi(v))\tilde{\eta}_k(\Xi_j^{-1}(v))$$

我们看到 η_k 是博雷尔的，满足 (2.15)，并且关于 $(\eta_{k\,M}^{\mathrm{avg}})_{M\in\mathbb{N}}$ 的一致收敛结论成立。最后，这种一致收敛意味着 η_k 限制在任意 $\omega\in\Omega'$的 $\pi^{-1}(\{\omega\})$ 上时是连续的。□

作为最后一个引理，我们证明由引理 2.9得到的极限函数所构造的某些函数具有可测性。

引理 2.10。 在与引理 *2.9*相同的假设和记号下，对于 $1\le k\le K$，定义（约定 $0/0=0$）

$$\Omega_k := \{\omega\in\Omega' \mid \zeta_k(\omega)\neq 0\}, \qquad \xi_k(v) := \frac{\eta_k(v)}{\zeta_k(\pi(v))}\mathbb{1}_{\Omega_k}(\pi(v)) \quad \textit{for } v\in E.$$

那么，对于任意 $\varepsilon\in(0,\sigma(\Omega_k))$，存在一个博雷尔集 $\Omega_{k,\varepsilon}\subset\Omega\setminus\Omega_k$，使得 $\sigma(\Omega_{k,\varepsilon})<\varepsilon$ 满足 $\zeta_{k\,M}^{\mathrm{avg}}$，在 $\Omega\setminus(\Omega_k\cup\Omega_{k,\varepsilon})$上一致收敛到零；并且对于任意 $\mathfrak{n}\in\mathcal{P}^{\sigma}_{p,q}(E)$，定义在 Ω 上的函数为

$$\omega\mapsto -\mathbb{1}_{\Omega'}(\omega)\,\hat{}\int_E \eta_k d\mathfrak{n}^{\omega}, \tag{2.28}$$

$$\omega\mapsto\left[-\zeta_k(\omega)\mathbb{1}_{\Omega_k}(\omega)\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^{\omega}+\mathbb{1}_{\Omega\setminus(\Omega_k\cup\Omega_{k,\varepsilon})}(\omega)\inf_{\pi^{-1}(\{\omega\})}\eta_k\right]\mathbb{1}_{\Omega'}(\omega) \tag{2.29}$$

是 $\mathcal{B}_\sigma$-可测的。

证明。 固定 $1\le k\le K$。对于任意 $\varepsilon>0$，根据叶戈罗夫定理，存在一个博雷尔集 $\Omega_{k,\,\varepsilon}\subset\Omega\setminus\Omega_k$ 使得$\sigma(\Omega_{k,\,\varepsilon})<\varepsilon$ 满足：$\zeta_{k\,M}^{\mathrm{avg}}$，在 $\Omega\setminus(\Omega_k\cup\Omega_{k,\,\varepsilon})$ 上一致收敛于零。

我们首先证明 (2.28) 的可测性。由于 η_k 是博雷尔的，因此根据解体定理，其正部和负部分别对 $\mathfrak{n}^{\omega}$ 的积分在 ω上均为博雷尔函数。因此，要证明 (2.28) 的可测性，只需证明对于 σ-几乎处处的 $\omega\in\Omega$，该积分有有限的下界。为此，对每个 $1\le k\le K$，$\omega\in\Omega'$，以及 u，$v\in\pi^{-1}(\{\omega\})$，如同 (2.21) 中的计算，我们必有

$$\begin{aligned}
\eta_k(v) &= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\eta_{k,m}(v)\\
&\ge \limsup_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\Big[-\zeta_{k,m}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}(u)-2^{p-1}\zeta_{k,m}(\omega)\left(\mathrm{d}^p_{E,y_0}(\omega,u)+\mathrm{d}^p_{E,y_0}(\omega,v)\right)\Big]\\
&\ge \limsup_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\zeta_{k,m}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}(u)\right)-2^{p-1}\zeta_k(\omega)\left(\mathrm{d}^p_{E,y_0}(\omega,u)+\mathrm{d}^p_{E,y_0}(\omega,v)\right).
\end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{m}_k^{\omega}$和 $\mathfrak{n}^{\omega}$支撑于 $\pi^{-1}(\{\omega\})$，对 $(\mathfrak{m}_k^{\omega}\otimes\mathfrak{n}^{\omega})$ $(u,\ v)$进行积分并使用（2.1）可得

$$\begin{aligned}
\int_E \eta_k d\mathfrak{n}^{\omega} &\ge \int_E \limsup_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\zeta_{k,m}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}\right)d\mathfrak{m}_k^{\omega}\\
&\quad -2^{2p-2}\zeta_k(\omega)\left(2\widetilde{C}+\mathrm{MK}_p^E(\delta^{\omega}_{E,y_0},\mathfrak{m}_k^{\omega})^p+\mathrm{MK}_p^E(\delta^{\omega}_{E,y_0},\mathfrak{n}^{\omega})^p\right)\\
&\ge \limsup_{M\to\infty}\int_E\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\zeta_{k,m}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}\right)d\mathfrak{m}_k^{\omega}\\
&\quad -2^{2p-2}\zeta_k(\omega)\left(2\widetilde{C}+\mathrm{MK}_p^E(\delta^{\omega}_{E,y_0},\mathfrak{m}_k^{\omega})^p+\mathrm{MK}_p^E(\delta^{\omega}_{E,y_0},\mathfrak{n}^{\omega})^p\right);
\end{aligned} \tag{2.30}$$

此处我们可以应用法图引理得到最终的不等式，这是因为根据（2.19），有

$$-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\zeta_{k,m}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}(u)\le\left(\sup_{M'\in\mathbb{N}}\zeta_{k,M'}^{\mathrm{avg}}(\omega)\right)\cdot\lambda_k\,\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u),u),$$

其中右侧的表达式属于 $L^1(\mathfrak{m}_k^\omega)$，对 σ-几乎处处成立；由 (2.1) 与 $\mathfrak{m}_k\in\mathcal{P}_{p,\,q}^{\sigma}(E)$ 结合可得。再利用 (2.1)，

$$\int_E\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\zeta_{k,m}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}\right)d\mathfrak{m}_k^\omega\le 2^{p-1}\lambda_k\left(\sup_{M'\in\mathbb{N}}\zeta_{k,M'}^{\mathrm{avg}}(\omega)\right)\left(\widetilde{C}+\mathrm{MK}_p^E(\delta_{E,y_0}^\omega,\mathfrak{m}_k^\omega)^p\right)$$

并且右侧的表达式属于 $L^1(\sigma)$，这同样是因为 $\mathfrak{m}_k\in\mathcal{P}_{p,\,q}^{\sigma}(E)$。因此，我们可以将 (2.30) 中的最后一个表达式对 σ 积分，并应用法图引理和 H¨older 不等式，得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left[\limsup_{M\to\infty}\int_E\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(\zeta_{k,m}\circ\pi)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}\right)d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma\right]\\
&\quad-2^{2p-2}\int_\Omega\left[\zeta_k\cdot\left(2\widetilde{C}+\mathrm{MK}_p^E(\delta_{E,y_0}^\bullet,\mathfrak{m}_k^\bullet)^p+\mathrm{MK}_p^E(\delta_{E,y_0}^\bullet,\mathfrak{n}^\bullet)^p\right)\right]d\sigma\\
&\ge\limsup_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\int_\Omega\zeta_{k,m}\int_E S_{\lambda_k}\xi_{k,m}d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma\right)\\
&\quad-2^{2p-2}\left\|\zeta_k\right\|_{L^{r'}(\sigma)}\left(2\widetilde{C}+\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\delta_{E,y_0}^\bullet\otimes\sigma,\mathfrak{m}_k^\omega)^p+\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\delta_{E,y_0}^\bullet\otimes\sigma,\mathfrak{n}^\omega)^p\right)\\
&>-\infty,
\end{aligned}\tag{2.31}$$

其中有限性可由 (2.20) 中相同的论证得出，并利用 $\mathfrak{n},\,\mathfrak{m}_k\in\mathcal{P}_{p,q}^{\sigma}(E)$。因此

$$\int_E\eta_k d\mathfrak{n}^\bullet$$

对每个 σ-几乎处处有有限的下界，从而得到 ($1\le k\le K$ 的 $\mathcal{B}_\sigma$-可测性。2.28)

接下来我们证明 (2.29) 的可测性。由于 Y 是可分的，且对每个 $\omega\in U_j$，函数 $\eta_k\circ\Xi_{j,\omega}$ 在 Y 上连续，因此存在一个 Y 的可数子集 D （与 ω 无关），使得

$$\inf_{v\in\pi^{-1}(\{\omega\})}\eta_k(v)=\inf_{t\in Y}\eta_k(\Xi_{j,\omega}(t))=\inf_{t\in D}\eta_k(\Xi_{j,\omega}(t)),$$

因此，函数

$$\omega\mapsto\mathbb{1}_{\Omega'}(\omega)\inf_{\pi^{-1}(\{\omega\})}\eta_k$$

在 $\mathcal{B}_\sigma$ 上可测 ω。同样，由于 $S_{\lambda_k}\xi_k$ 是博雷尔函数，根据解体定理，此时只需证明

$$-\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^\omega<\infty\quad\text{for }\sigma\text{-a.e. }\omega.$$

将 2.19 中的 ξ_k 换成 $\xi_{k\,,\,m}$，再应用（2.1），通过类似的计算即可得到这一结论：

$$-\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^\omega\le\lambda_k\int_E\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u),u)d\mathfrak{m}_k^\omega(u)\le\lambda_k 2^{p-1}(\widetilde{C}+\mathrm{MK}_p^E(\delta_{E,y_0}^\omega,\mathfrak{m}_k^\omega)^p),$$

由于 $\mathfrak{m}_k\in\mathcal{P}_{p,\,q}^{\sigma}(E$，最后一个表达式对 σ-几乎处处的 ω 都是有限的。因此，如所声称的，对 $1\le k\le K$，式（ $\mathcal{B}_\sigma$2.29）是可测的。 □

我们不　我们准备在适当条件下证明$\mathcal{MK}_{p,\,q}^{\sigma}$-重心的唯一性　.

定理 *1.4* (3) 的证明。 由定理 1.4 (2)，对于 $1 \le k \le K$ 和 $m \in \mathbb{N}$，我们可以选取满足以下条件的元素 $(\zeta_{k,m}, \hat{\xi}_{k,m})_{k=1}^K \in (\mathcal{Z}_{r',\sigma} \times \mathcal{X}_p)^K$

$$\sum_{k=1}^K (\zeta_{k,m} \circ \pi)\hat{\xi}_{k,m} = 0,$$

$$-\sum_{k=1}^K \int_\Omega \zeta_{k,m} \left(\int_E S_{\lambda_k} \hat{\xi}_{k,m} d\mathfrak{m}_k^\bullet \right) d\sigma \le -\sum_{k=1}^K \int_\Omega \zeta_{k,m+1} \left(\int_E S_{\lambda_k} \hat{\xi}_{k,m+1} d\mathfrak{m}_k^\bullet \right) d\sigma$$

$$\xrightarrow{m\to\infty} \inf_{\mathfrak{n} \in \mathcal{P}_{p,q}^\sigma(E)} \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathcal{MK}_{p,q}^\sigma (\mathfrak{m}_k, \mathfrak{n})^p,$$

其中，该极限也是定理 1.4 (2) 中对偶问题的上确界值。定义

$$\tilde{\xi}_{k,m} := \begin{cases} S_{\lambda_k}(S_{\lambda_k}\hat{\xi}_{k,m}), & \text{if } 1 \le k \le K-1, \\ -\dfrac{1}{(\zeta_{K,m} \circ \pi)} \displaystyle\sum_{i=1}^{K-1} (\zeta_{i,m} \circ \pi)\tilde{\xi}_{i,m}, & \text{if } k = K, \end{cases}$$

then

$$\sum_{k=1}^K (\zeta_{k,m} \circ \pi)\tilde{\xi}_{k,m} \equiv 0. \tag{2.32}$$

对于 $1 \le k \le K-1$，众所周知，

$$S_{\lambda_k}\tilde{\xi}_{k,m} = S_{\lambda_k}(S_{\lambda_k}(S_{\lambda_k}\hat{\xi}_{k,m})) = S_{\lambda_k}\hat{\xi}_{k,m},$$

$$\hat{\xi}_{k,m} \ge \tilde{\xi}_{k,m} \ge -S_{\lambda_k}\hat{\xi}_{k,m}. \tag{2.33}$$

由此可得

$$\tilde{\xi}_{K,m} = -\frac{1}{(\zeta_{K,m} \circ \pi)} \sum_{k=1}^{K-1} (\zeta_{k,m} \circ \pi)\tilde{\xi}_{k,m} \ge -\frac{1}{(\zeta_{K,m} \circ \pi)} \sum_{k=1}^{K-1} (\zeta_{k,m} \circ \pi)\hat{\xi}_{k,m} = \hat{\xi}_{K,m},$$

因此 $-S_{\lambda_K}\xi_{K,m} \ge -S_{\lambda_K}\xi_{K,m}$。 对于 $1 \le k \le K-1$，由于 (2.33) 成立且 $\xi_{k,m} \in \mathcal{X}_p$，根据 [13, 引理 2.18]，我们可知，当 $\omega \in \Omega$ 固定时，m 在 $\pi^{-1}(\{\omega\})$的有界子集上有界。因此，将 $\tilde{\xi}$ 与 Ξ_j, ω 复合，其中 j适当选取，根据推论 2.8，我们有 $\xi_{k,m}|_{\pi^{-1}(\{\omega\})}$ 对所有$1 \le k \le K-1$ 和 $\omega \in \Omega$ 都连续，这也意味着 $\xi_{K,m}|_{\pi^{-1}(\{\omega\})}$ 也连续。最后，根据 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的定义，我们可知

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_j \mathbb{1}_{V_j} > 0 \quad \text{on } \Omega,$$

因此，对于 $1 \le k \le K$ 和 $v \in E$，我们可以定义

$$\xi_{k,m}(v) := \tilde{\xi}_{k,m}(v) - \frac{1}{\sum_{j'\in\mathbb{N}} \chi_{j'}(\pi(v))\mathbb{1}_{V_{j'}}(\pi(v))} \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_j(\pi(v))\mathbb{1}_{V_j}(\pi(v))\tilde{\xi}_{k,m}(\Xi_j(\pi(v), y_0)),$$

$$\eta_{k,m}(v) := \zeta_{k,m}(\pi(v))\xi_{k,m}(v),$$

then

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_j(\omega)\mathbb{1}_{V_j}(\omega)\xi_{k,m}(\Xi_j(\omega, y_0)) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_j(\omega)\mathbb{1}_{V_j}(\omega)\eta_{k,m}(\Xi_j(\omega, y_0)) = 0$$

对于所有 k、 m 和 $\omega \in \Omega$，我们可以计算

$$S_{\lambda_k}\xi_{k,m}(u) = S_{\lambda_k}\tilde{\xi}_{k,m}(u) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_j(\pi(u))\mathbb{1}_{V_j}(\pi(u))\tilde{\xi}_{k,m}(\Xi_j(\pi(u), y_0)), \qquad \sum_{k=1}^{K}\eta_{k,m} \equiv 0,$$

对所有 m。由于（利用（2.32）得到下文的最后一行）

$$\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega}\zeta_{k,m}\left(\int_{E} S_{\lambda_k}\xi_{k,m}d\mathfrak{m}^{\bullet}\right)d\sigma \\
&= -\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega}\zeta_{k,m}\int_{E}\left(S_{\lambda_k}\tilde{\xi}_{k,m} + \frac{1}{\sum_{j'\in\mathbb{N}}\chi_{j'}\mathbb{1}_{V_{j'}}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\chi_j\mathbb{1}_{V_j}\tilde{\xi}_{k,m}(\Xi_j(\cdot, y_0))\right)d\mathfrak{m}^{\bullet}d\sigma \\
&= -\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega}\zeta_{k,m}\int_{E} S_{\lambda_k}\tilde{\xi}_{k,m}d\mathfrak{m}^{\bullet}d\sigma,
\end{aligned}$$

我们看到

$$\limsup_{m\to\infty}\left(-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega}\zeta_{k,m}\left(\int_{E} S_{\lambda_k}\xi_{k,m}d\mathfrak{m}_k^{\bullet}\right)d\sigma\right) \geq \inf_{\mathcal{P}^{\sigma}_{p,q}(E)}\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\mathcal{MK}^{\sigma}_{p,q}(\mathfrak{m}_k,\cdot)^p. \tag{2.34}$$

因此，我们可以取一个子列，并假设

$$\inf_{m\in\mathbb{N}}\left(-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega}\zeta_{k,m}(\omega)\int_{E} S_{\lambda_k}\xi_{k,m}d\mathfrak{m}_k^{\omega}d\sigma(\omega)\right) \geq \inf_{\mathcal{P}^{\sigma}_{p,q}(E)}\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\mathcal{MK}^{\sigma}_{p,q}(\mathfrak{m}_k,\cdot)^p - 1 > -\infty.$$

若 $p < q$，则有 $1 < r' < \infty$，因此 $L^{r'}(\sigma)$ 是自反的。由于对于每个 $1 \leq k \leq K$，$(\zeta_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ 在 $L^{r'}(\sigma)$ 中有界，我们可以取一个子列，并假设它在 $L^{r'}(\sigma)$ 中弱收敛到某个 ζ_k。若 $p = q$，则根据备注 1.5，我们可以假设每个 $\zeta_{k,m} \equiv 1$。因此，我们可以将引理 2.9 和 2.10 应用于 $(\xi_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ 和 $(\zeta_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$；令 η_k、 ξ_k 和 Ω_k 为应用这些引理所得；我们继续使用记号 $\eta^{\mathrm{avg}}_{k\,M}$，和 $\zeta^{\mathrm{avg}}_{k\,M}$。

现在假设 $\mathfrak{n} \in \mathcal{P}^{\sigma}_{p,q}(E)$ 是 $\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\mathcal{MK}^{\sigma}_{p,q}(\mathfrak{m}_k,\cdot)^p$ 的极小化子，并且对于 $1 \leq k \leq K$, $j \in \mathbb{N}$令 $\Omega_{k,j}$ 为由引理 2.10 得到的集合，其中 $\varepsilon = j^{-1}\sigma(\Omega_k)$ 若 $\sigma(\Omega_k) > 0$，否则为空集。若记作

$$\xi^{\mathrm{avg}}_{k,M} := \frac{\eta^{\mathrm{avg}}_{k,M}}{(\zeta^{\mathrm{avg}}_{k,M}\circ\pi)},$$

那么，由于 $\xi^{\mathrm{avg}}_{k\,M,}(v) \to \xi_k(v)$ 当 $M \to \infty$ 时成立，只要 $\pi(v) \in \Omega_k$，对于所有 $\omega \in \Omega_k$ 和 $u \in \pi^{-1}(\{\omega\})$，我们都有

$$\begin{aligned}
\limsup_{M\to\infty}\left(-\zeta^{\mathrm{avg}}_{k,M}(\omega)S_{\lambda_k}\xi^{\mathrm{avg}}_{k,M}(u)\right) &= \limsup_{M\to\infty}\left[\zeta^{\mathrm{avg}}_{k,M}(\omega)\inf_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})}\left(\lambda_k\,\mathrm{d}_E(u,v)^p + \xi^{\mathrm{avg}}_{k,M}(v)\right)\right] \\
&\leq \inf_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})}\limsup_{M\to\infty}[\zeta^{\mathrm{avg}}_{k,M}(\omega)(\lambda_k\,\mathrm{d}_E(u,v)^p + \xi^{\mathrm{avg}}_{k,M}(v))] \\
&= -\zeta_k(\omega)S_{\lambda_k}\xi_k(u),
\end{aligned} \tag{2.35}$$

其中我们利用了

$$\limsup_{\ell\to\infty}(a_\ell b_\ell) = \left(\lim_{\ell\to\infty} a_\ell\right)\left(\limsup_{\ell\to\infty} b_\ell\right)$$

对于任意满足 $(a_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ 收敛到一个正数的序列 $(a_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$，$(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$。同时，对于$\omega\in\Omega'\setminus\Omega_k$ 和 $u\in\pi^{-1}(\{\omega\})$，我们有

$$\begin{aligned}\limsup_{M\to\infty}\left(-\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,M}^{\mathrm{avg}}(u)\right)&\le\inf_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})}\limsup_{M\to\infty}\left(\lambda_k\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(\omega)\,\mathrm{d}_E(u,v)^p+\eta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(v)\right)\\&=\inf_{v\in\pi^{-1}(\{\pi(u)\})}\eta_k(v).\end{aligned}\tag{2.36}$$

由于$\zeta_{k\,M}^{\mathrm{avg}}$，收敛于 σ-几乎处处，因此它在 σ-几乎处处有界，并且由（2.19），

$$-\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,M}^{\mathrm{avg}}(u)\le\left(\sup_{M'\in\mathbb{N}}\zeta_{k,M'}^{\mathrm{avg}}(\omega)\right)\cdot\lambda_k\,\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u),u)$$

对于 σ-几乎处处的 ω。再次由于$\mathfrak{m}_k\in\mathcal{P}_{p,\,q}^{\sigma}(E)$，由（2.1）可得

$$\int_E\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u),u)d\mathfrak{m}_k^\bullet(u)\in L^r(\sigma)\subset L^1(\sigma),\tag{2.37}$$

因此我们可以使用法图引理得到

$$\limsup_{M\to\infty}\int_E\left(-\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,M}^{\mathrm{avg}}\right)d\mathfrak{m}_k^\omega\le\int_E\limsup_{M\to\infty}\left(-\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(\omega)S_{\lambda_k}\xi_{k,M}^{\mathrm{avg}}\right)d\mathfrak{m}_k^\omega\tag{2.38}$$

对于 σ-几乎处处的 ω。由于 σ 具有有限总测度，$L^{r'}(\sigma)$-收敛的$\zeta_{k\,M}^{\mathrm{avg}}$，意味着限制序列 $(\zeta_k^{\mathrm{avg}},{}_M\mathbb{1}_{\Omega_k})_{M\in\mathbb{N}}$在 $L^1(\sigma)$ 中收敛，并且必然收敛到 $\zeta_k\mathbb{1}_{\Omega_k}=\zeta_k$。

接下来设$\|\zeta_k\|_{L^1(\sigma)}>0$，则对所有 M充分大的 s，都有 $\left\|\zeta_k^{\mathrm{avg}},{}_M\mathbb{1}_{\Omega_k}\right\|_{L^1(\sigma)}>0$，并且

$$\left\|\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}\mathbb{1}_{\Omega_k}\right\|_{L^1(\sigma)}^{-1}\int_{\Omega'}\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}\mathbb{1}_{\Omega_k}d\sigma\xrightarrow{M\to\infty}\|\zeta_k\|_{L^1(\sigma)}^{-1}\int_{\Omega'}\zeta_k d\sigma$$

对于任意 $\Omega'\in\mathcal{B}_\sigma$。因此我们可以将

$$\left(\left\|\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}\mathbb{1}_{\Omega_k}\right\|_{L^1(\sigma)}^{-1}\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}\mathbb{1}_{\Omega_k}\sigma\right)_{M\in\mathbb{N}}$$

作为 $\mathcal{P}(\Omega)$ 中的一个序列，它在集函数意义下收敛到概率测度$\|\zeta_k\|_{L^1}^{-1}{}_{(\sigma)}\,\zeta_k\sigma$。因此，由（2.37）并利用（2.1），回顾 $(\zeta_k^{\mathrm{avg}},{}_M\mathbb{1}_{\Omega_k})_{M\in\mathbb{N}}$到 ζ_k 的 $L^1(\sigma)$-收敛和 $L^{r'}(\sigma)$-收敛，可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{M\to\infty}\int_{\Omega_k}\frac{\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}}{\left\|\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}\mathbb{1}_{\Omega_k}\right\|_{L^1(\sigma)}}\int_E\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u),u)d\mathfrak{m}_k^\bullet(u)d\sigma\\&=\frac{1}{\|\zeta_k\|_{L^1(\sigma)}}\limsup_{M\to\infty}\int_{\Omega_k}\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}\int_E\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u),u)d\mathfrak{m}_k^\bullet(u)d\sigma\\&=\frac{1}{\|\zeta_k\|_{L^1(\sigma)}}\int_{\Omega_k}\zeta_k\int_E\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u),u)d\mathfrak{m}_k^\bullet(u)d\sigma\\&\le\frac{2^{p-1}}{\|\zeta_k\|_{L^1(\sigma)}}\int_\Omega\zeta_k\left(\widetilde{C}+\mathrm{MK}_p^E(\delta_{E,y_0}^\bullet,\mathfrak{m}_k^\bullet)^p\right)d\sigma\\&\le\frac{2^{p-1}}{\|\zeta_k\|_{L^1(\sigma)}}\|\zeta_k\|_{L^{r'}(\sigma)}\cdot\left(\widetilde{C}+\mathcal{MK}_{p,q}^\sigma(\delta_{E,y_0}^\bullet\otimes\sigma,\mathfrak{m}_k)^p\right)<\infty.\end{aligned}$$

由于

$$-\int_E S_{\lambda_k}\xi_{k,M}^{\mathrm{avg}}d\mathfrak{m}_k^\omega\le\lambda_k\int_E\mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u),u)d\mathfrak{m}_k^\omega(u)$$

我们可以对概率测度序列应用法图引理， [5, 定理 4。1], 取

$$\mu_n = \frac{\zeta_{k,n}^{\mathrm{avg}} \mathbb{1}_{\Omega_k} \sigma}{\left\| \zeta_{k,n}^{\mathrm{avg}} \mathbb{1}_{\Omega_k} \right\|_{L^1(\sigma)}}, \qquad g_n = -\lambda_k \int_E \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u), u) d\mathfrak{m}_k^\bullet(u), \qquad f_n = \int_E S_{\lambda_k} \xi_{k,n}^{\mathrm{avg}} d\mathfrak{m}_k^\bullet$$

在参考文献中，由此可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_k} \limsup_{M\to\infty} \int_E \left(-(\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}} \circ \pi) S_{\lambda_k} \xi_{k,M}^{\mathrm{avg}} \right) d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma \\
&= \|\zeta_k\|_{L^1(\sigma)} \int_{\Omega_k} \frac{\zeta_k}{\|\zeta_k\|_{L^1(\sigma)}} \limsup_{M\to\infty} \left(- \int_E S_{\lambda_k} \xi_{k,M}^{\mathrm{avg}} d\mathfrak{m}_k^\bullet \right) d\sigma \\
&\geq \|\zeta_k\|_{L^1(\sigma)} \limsup_{M\to\infty} \left(- \int_{\Omega_k} \frac{\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}}{\left\| \zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}} \mathbb{1}_{\Omega_k} \right\|_{L^1(\sigma)}} \int_E S_{\lambda_k} \xi_{k,M}^{\mathrm{avg}} d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma \right) \\
&= \limsup_{M\to\infty} \left(- \int_{\Omega_k} \zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}} \int_E S_{\lambda_k} \xi_{k,M}^{\mathrm{avg}} d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma \right);
\end{aligned} \tag{2.39}$$

上文中我们已使用了

$$\lim_{M\to\infty} \zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}} > 0 \quad \text{on } \Omega_k.$$

若 $\|\zeta_k\|_{L^1(\sigma)} = 0$，则我们有 $\sigma(\Omega_k) = 0$ 且同样的不等式（2.39）成立。通过与（2.3）类似的计算，对任意 $M \in \mathbb{N}$ 我们有

$$-(\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}} \circ \pi) S_{\lambda_k} \xi_{k,M}^{\mathrm{avg}} \geq -\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\zeta_{k,m} \circ \pi) S_{\lambda_k} \xi_{k,m}, \tag{2.40}$$

因此，将上述结果与（2.38）和（2.39）结合，我们看到

(2.41)

$$\int_{\Omega_k} \int_E \limsup_{M\to\infty} \left(-(\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}} \circ \pi) S_{\lambda_k} \xi_{k,M}^{\mathrm{avg}} \right) d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma \geq \limsup_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_k} \zeta_{k,m} \int_E S_{\lambda_k} \xi_{k,m} d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma \right).$$

现在，由于 $(\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}})_{M\in\mathbb{N}}$ 在 $\Omega \setminus (\Omega_k \cup \Omega_{k,j})$ 上一致收敛于 0，故对所有充分大的 M，我们有

$$-\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}}(\pi(u)) S_{\lambda_k} \xi_{k,M}^{\mathrm{avg}}(u) \leq \lambda_k \, \mathrm{d}_{E,y_0}^p(\pi(u), u) \quad \text{for } u \in \pi^{-1}(\Omega \setminus (\Omega_k \cup \Omega_{k,j})).$$

由于右端表达式关于 $\mathfrak{m}_k$ 的积分有限，由法图引理及（2.40），我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus(\Omega_k\cup\Omega_{k,j})} \int_E \limsup_{M\to\infty} \left(-(\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}} \circ \pi) S_{\lambda_k} \xi_{k,M}^{\mathrm{avg}} \right) d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma \\
&\geq \limsup_{M\to\infty} \int_{\Omega\setminus(\Omega_k\cup\Omega_{k,j})} \int_E \left(-\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\zeta_{k,m} \circ \pi) S_{\lambda_k} \xi_{k,m} d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma \right),
\end{aligned}$$

因此结合（2.41），我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus\Omega_{k,j}} \int_E \limsup_{M\to\infty} \left(-(\zeta_{k,M}^{\mathrm{avg}} \circ \pi) S_{\lambda_k} \xi_{k,M}^{\mathrm{avg}} \right) d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma \\
&\geq \limsup_{M\to\infty} \int_{\Omega\setminus\Omega_{k,j}} \int_E \left(-\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\zeta_{k,m} \circ \pi) S_{\lambda_k} \xi_{k,m} \right) d\mathfrak{m}_k^\bullet d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

由 $L^{r'}(\sigma)$-收敛性可知 $(\zeta_{k\,M,\,}^{\text{avg}})_{M\in\mathbb{N}}$ 在 Ω 上收敛于 $0_{k,\,j}$ 并结合（2.37），我们得到

$$\begin{aligned}
&\limsup_{M\to\infty}\int_{\Omega_{k,j}}\int_E\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(\zeta_{k,m}\circ\pi)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}\right)d\mathfrak{m}_k^{\bullet}d\sigma\\
&\leq\limsup_{M\to\infty}\left\|\zeta_{k,M}^{\text{avg}}\mathbb{1}_{\Omega_{k,j}}\right\|_{L^{r'}(\sigma)}\left\|\int_E\lambda_k\sum_{j\in\mathbb{N}}\chi_j(\pi(u))\,\mathrm{d}_E(\Xi_{j,\pi(u)}(y_0),u)^p d\mathfrak{m}_k^{\bullet}(u)\right\|_{L^r(\sigma)}=0,
\end{aligned}$$

进而得到

$$\begin{aligned}
&\limsup_{M\to\infty}\int_{\Omega\setminus\Omega_{k,j}}\int_E\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(\zeta_{k,m}\circ\pi)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}\right)d\mathfrak{m}_k^{\bullet}d\sigma\\
&\geq\limsup_{M\to\infty}\int_{\Omega}\int_E\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(\zeta_{k,m}\circ\pi)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}\right)d\mathfrak{m}_k^{\bullet}d\sigma\\
&\quad-\limsup_{M\to\infty}\int_{\Omega_{k,j}}\int_E\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(\zeta_{k,m}\circ\pi)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}\right)d\mathfrak{m}_k^{\bullet}d\sigma\\
&\geq\limsup_{M\to\infty}\int_{\Omega}\int_E\left(-\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(\zeta_{k,m}\circ\pi)S_{\lambda_k}\xi_{k,m}\right)d\mathfrak{m}_k^{\bullet}d\sigma\\
&\geq\inf_{\mathcal{P}_{p,q}^{\sigma}(E)}\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{m}_k,\cdot)^p=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^p,
\end{aligned}$$

由（2.34）可得。将其与（2.35）、（2.36）和（2.42）结合，并且由于 Ω_k 与 $\Omega_{k,j}$不相交，我们得到

$$\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n})^p\leq-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega_k}\zeta_k(\omega)\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^{\omega}d\sigma(\omega)+\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega\setminus(\Omega_k\cup\Omega_{k,j})}\inf_{\pi^{-1}(\{\omega\})}\eta_k d\sigma(\omega).$$

虽然这些元素不一定属于 $(\mathcal{Z}_{r',\,\sigma}\times\mathcal{X}_p)^{\,K}$，但确实有 $\zeta_k\in L^{r'}(\sigma)$，其中$\|\zeta_k\|_{L^{r'}(\sigma)}\leq 1$，且 ξ_k 在 $\pi^{-1}(\{\omega\})$ 上连续，对 σ-几乎处处成立。由（2.18）以及.....的可测性可知

（2.28）和（2.29），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}\left(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n}\right)^p\\
&\leq-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega_k}\zeta_k\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^{\bullet}d\sigma+\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega\setminus(\Omega_k\cup\Omega_{k,j})}\inf_{\pi^{-1}(\{\omega\})}\eta_k d\sigma(\sigma)-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega}\int_E\eta_k d\mathfrak{n}^{\bullet}d\sigma\\
&=\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega_k}\left(-\zeta_k\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^{\bullet}-\int_E\eta_k d\mathfrak{n}^{\bullet}\right)d\sigma-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega_{k,j}}\int_E\eta_k d\mathfrak{n}^{\bullet}d\sigma\\
&\quad+\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega\setminus(\Omega_k\cup\Omega_{k,j})}\int_E\left(-\eta_k+\inf_{\pi^{-1}(\{\omega\})}\eta_k\right)d\mathfrak{n}^{\bullet}d\sigma(\omega)\\
&\leq-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega_k}\zeta_k\left(\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^{\bullet}+\int_E\xi_k d\mathfrak{n}^{\bullet}\right)d\sigma-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega_{k,j}}\int_E\eta_k d\mathfrak{n}^{\bullet}d\sigma\\
&\xrightarrow{j\to\infty}-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega_k}\zeta_k\left(\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^{\bullet}+\int_E\xi_k d\mathfrak{n}^{\bullet}\right)d\sigma,
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

其中最终的极限成立，是因为 $\sigma(\Omega_{k,\ j})\ \to\ 0$ 当 $\ j\ \to\ \infty$时，而 (2.18) 与估计式 (2.30) 和 (2.31) 结合可推出每个 $\ \eta_k\in L^1(\mathfrak{n})$。由于

$$
-\zeta_k(\omega)(S_{\lambda_k}\xi_k(u)+\xi_k(v))\leq\lambda_k\zeta_k(\omega)\,\mathrm{d}_E(u,v)^p \tag{2.44}
$$

对所有 $\ \omega\in\Omega'$ 以及 $\ u,\ \ v\in\pi^{-1}(\{\omega\})$，(2.43) 蕴含

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega_k}\zeta_k\left(\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^{\bullet}+\int_E\xi_k d\mathfrak{n}^{\bullet}\right)d\sigma\\
&\geq\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\mathcal{MK}_{p,q}^{\sigma}\left(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n}\right)^p\\
&=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\left\|\mathrm{MK}_p^E(\mathfrak{m}_k^{\bullet},\mathfrak{n}^{\bullet})^p\mathbb{1}_{\Omega\setminus\Omega_k}\right\|_{L^r(\sigma)}+\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\left\|\mathrm{MK}_p^E(\mathfrak{m}_k^{\bullet},\mathfrak{n}^{\bullet})^p\mathbb{1}_{\Omega_k}\right\|_{L^r(\sigma)}\\
&\geq\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\left\|\mathrm{MK}_p^E(\mathfrak{m}_k^{\bullet},\mathfrak{n}^{\bullet})^p\mathbb{1}_{\Omega_k}\right\|_{L^r(\sigma)}\\
&\geq-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega_k}\zeta_k\left(\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^{\bullet}+\int_E\xi_k d\mathfrak{n}^{\bullet}\right)d\sigma,
\end{aligned}
$$

因此，对于任意 $\ 1\leq k\leq K$，对 $\ \sigma$-几乎处处的 $\ \omega\in\Omega\ \setminus\Omega_k$，我们有 $\mathrm{MK}_p^E(\mathfrak{m}_k^{\omega},\ \mathfrak{n}^{\omega})\ =0$，特别是 $\mathfrak{m}_k^{\omega}=\mathfrak{n}^{\omega}$。现在，上述内容还意味着

$$
-\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega_k}\zeta_k\left(\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^{\bullet}+\int_E\xi_k d\mathfrak{n}^{\bullet}\right)d\sigma=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\left\|\mathrm{MK}_p^E(\mathfrak{m}_k^{\bullet},\mathfrak{n}^{\bullet})^p\mathbb{1}_{\Omega_k}\right\|_{L^r(\sigma)},
$$

那么根据（2.44），上述不等式左侧求和中的每一项都小于或等于右侧求和中的每一项；特别地，对于每个 $\ 1\leq k\leq K$，各项都相等。

设 k 为我们假设中的指定指标。然后再次利用 $L^r(\sigma)$ 范数的对偶刻画（[6, 命题 6。13]），

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega_k}\zeta_k\left(\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^\bullet+\int_E \xi_k d\mathfrak{n}^\bullet\right)d\sigma &= \lambda_k\left\|\mathrm{MK}_p^E(\mathfrak{m}_k^\bullet,\mathfrak{n}^\bullet)^p\mathbb{1}_{\Omega_k}\right\|_{L^r(\sigma)}\\ &\geq \lambda_k\int_{\Omega_k}\zeta_k\,\mathrm{MK}_p^E(\mathfrak{m}_k^\bullet,\mathfrak{n}^\bullet)^p d\sigma\\ &\geq -\int_{\Omega_k}\zeta_k\left(\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^\bullet+\int_E\xi_k d\mathfrak{n}^\bullet\right)d\sigma.\end{aligned}$$

特别地，对于 σ-几乎处处的 $\omega\in\Omega_k$，必有

$$-\int_E S_{\lambda_k}\xi_k d\mathfrak{m}_k^\omega-\int_E\xi_k d\mathfrak{n}^\omega=\lambda_k\,\mathrm{MK}_p^E(\mathfrak{m}_k^\omega,\mathfrak{n}^\omega)^p.$$

固定一个使该等式成立的 $\omega\in\Omega_k$，其中 $\omega\in U_j$，且存在某个 $j\in\mathbb{N}$，使得测度 $(\Xi_{j,\,\omega})_\sharp\mathfrak{m}_k^\omega$ 关于 Vol_Y 绝对连续。假设 j_0 是满足 $\omega\in V_{j_0}$ 的唯一指标，那么若定义 ϕ_ω、$\psi_\omega\colon Y\to\mathbb{R}$，以及 μ_ω、$\nu_\omega\in\mathcal{P}_p(Y)$，则

$$\psi_\omega(s):=((S_{\lambda_k}\xi_k)\circ\Xi_{j_0,\omega})^{\lambda_k\,\mathrm{d}_Y^p}(s),\quad \phi_\omega(t):=\psi_\omega^{\lambda_k\,\mathrm{d}_Y^p}(t),\quad \mu_\omega:=(\Xi_{j_0,\omega}^{-1})_\sharp\mathfrak{m}_k^\omega,\quad \nu_\omega:=(\Xi_{j_0,\omega}^{-1})_\sharp\mathfrak{n}^\omega,$$

由上式可得

$$-\int_Y\phi_\omega d\mu_\omega-\int_Y\psi_\omega d\nu_\omega=\lambda_k\,\mathrm{MK}_p^Y(\mu_\omega,\nu_\omega)^p.$$

由于 $\mu_\omega=g_j^{j_0}(\omega)\sharp(\Xi_{j\,\omega,}^{-1})_\sharp\mathfrak{m}_k^\omega$，且 $g_j^{j_0}(\omega)$ 是 Y 的等距映射，我们还可知 μ_ω 关于 Vol_Y 绝对连续。令 $\gamma^\omega\in\Pi(\mu_\omega,\ \nu_\omega)$ 为 μ_ω 与 ν_ω 之间的一个 p-最优耦合。于是得到

$$-\phi_\omega(t)-\psi_\omega(s)=\lambda_k\,\mathrm{d}_Y(t,s)^p,\quad \gamma^\omega\text{-a.e. }(t,s).\tag{2.45}$$

由于

$$-\lambda_k\,\mathrm{d}_Y(y_0,t)^p-\psi_\omega(y_0)\leq\phi_\omega(t)\leq S_{\lambda_k}\xi_k(\Xi_{j_0,\omega}(t)),$$

我们看到，ϕ_ω 在 Y 的任意紧子集上有界；又由于它是某个函数的 $\lambda_k\,\mathrm{d}_Y^p$-变换，根据推论 2.8 ϕ_ω 在 $Y\setminus\partial Y$ 的任意紧子集上一致利普希茨。因此，根据拉德马赫定理，ϕ_ω 在 Y 上 Vol_Y- 几乎处处可微。取 $t\in Y\setminus\partial Y$ 为 ϕ_ω 的一个可微点，并假设存在满足 (2.45) 的 $s_t\in Y$；由于 $\mathfrak{m}_k^\omega$ 关于 Vol_Y 绝对连续，这类 t 构成一个满 $\mathfrak{m}_k^\omega$ 测度集合。记 Y 上的黎曼度量为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_Y$，并记 $|\cdot|_Y=\langle\cdot,\ \cdot\rangle_Y^{1/2}$。若函数 f 在 Y 上于 $t\in Y\setminus\partial Y$ 处可微，则

$$f(\exp_t^Y(\varepsilon V))=f(t)+\varepsilon\langle V,\nabla_Y f(t)\rangle_Y+o(\varepsilon)\quad\text{as }\varepsilon\to0$$

对于任意单位切向量 V，在 t 处从 Y 出发，其中 $\exp^Y$ 是 Y 的指数映射，$\nabla_Y f$ 是 f 的梯度。结合选择 $f=\phi_\omega$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_Y(\exp_t^Y(\varepsilon V),s_t)^p\geq-\phi_\omega(\exp_t^Y(\varepsilon V))-\psi_\omega(s_t)&=-\varepsilon\langle V,\nabla_Y\phi_\omega(t)\rangle_Y-\phi_\omega(t)-\psi_\omega(s_t)+o(\varepsilon)\\&=-\varepsilon\langle V,\nabla_Y\phi_\omega(t)\rangle_Y+\mathrm{d}_Y(t,s_t)^p+o(\varepsilon)\quad\text{as }\varepsilon\to0.\end{aligned}$$

因此，上述结果表明 $t'\mapsto\mathrm{d}_Y(t',s_t)^p$ 在 $t'=t$处次可微；而由于 $\mathrm{d}_Y^p=(\mathrm{d}_Y^2)^{p/2}$，我们看到 [17, 命题 6] 表明，当 $s_t\neq t$时具有超可微性，因此若 $s_t\neq t$，则 $t'\mapsto\mathrm{d}_Y(t',s_t)^p$ 在 $t'=t$ 处可微。由于 $p>1$，当 $s_t\neq t$ 时，对 (2.45) 关于 t求导，经过一些繁琐但常规的计算，我们得到 $\nabla_Y\phi_\omega(t)\neq0$，并且

$$s_t=\exp_t^Y\left(\left|\frac{\nabla_Y\phi_\omega(t)}{p\lambda_k}\right|_Y^{\frac{1}{p-1}}\frac{\nabla_Y\phi_\omega(t)}{|\nabla_Y\phi_\omega(t)|_Y}\right),$$

并且，若 $\nabla_Y \phi_\omega(t) = 0$ 或 ϕ_ω 在 t处不具有超可微性，则有 $s_t = t$。这表明存在一个 μ_ω-几乎处处定义的单值映射 T^ω，其定义在 Y上，使得有序对 $(t, T^\omega(t))$ 满足 (2.45) 中的等式。结合 [8, 引理 2.4]，必然有 $\gamma^\omega = (\mathrm{Id} \times T^\omega)_\sharp \mu_\omega$。映射 T^ω 完全由 ξ_k确定，因此右边缘 ν_ω 也由 σ-几乎处处的 $\omega \in \Omega_k$确定。综上，这意味着 $\mathfrak{n}^\omega$ 由 σ-几乎处处的 ω 通过 ζ_k 或 ξ_k确定，因此我们看到 $\mathcal{MK}^\sigma_{p,q}$-重心是唯一的。□

定理 *1.1*的证明。 我们可以将定理 1.4 (1)、(2) 和 (3) 应用于任意取值的 q 以及作为单点空间的 Ω，并取 σ 相应的狄拉克测度，结论便立即得出。关于对偶性结果，还可参见注 1.5。 □

致谢。 JK 的部分研究获得了美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2246606。AT 的部分研究获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号为 24K21513。

References

[1] M. Agueh 和 G. Carlier， *Barycenters in the Wasserstein space*，SIAM 数学分析杂志 43 (2011)，第 2 期，904–924。[2] J. M. Borwein 和 J. D. Vanderwerff， *Convex functions: constructions， characterizations and counterexamples*，数学及其应用百科全书，第 109 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2010。[3] N. Boumal，
An introduction to optimization on smooth manifolds，剑桥大学出版社，剑桥，2023年。[4] C. Dellacherie 和 P.-A. Meyer， *Probabilities and potential*，北荷兰数学研究丛书，第 29 卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹-纽约，1978。[5] E. A. Feinberg、P. O. Kasyanov 和 N. V. Zadoianchuk， *Fatou's lemma for weakly converging probabilities*，《概率论及其应用》58 (2014)，第 4 期，683–689。[6] G. B. Folland， *Real analysis*，第二版，纯粹与应用数学（纽约），约翰·威立父子出版公司，纽约，1999。现代技术及其应用，Wiley-Interscience出版物。[7] W. Gangbo 和 R. J. McCann，
The geometry of optimal transportation，《数学学报》177 (1996)，第 2 期，113–161。[8]
Shape recognition via Wasserstein distance，《应用数学季刊》58 (2000)，第 4 期，705–737。[9] M. Guessous，
———— *An elementary proof of Komlós-Révész theorem in Hilbert spaces* **4** 1997 2, ，《凸分析杂志》 （），第 – 期。[10] Y. Jiang， *Absolute continuity of Wasserstein barycenters over Alexandrov spaces*，《加拿大数学杂志》69 (2017)，第 5 期，1087–1108。[11] Y.-H. Kim 和 B. Pass，
Wasserstein barycenters over Riemannian manifolds，《数学进展》307 (2017)，640–683。[12]
A canonical barycenter via Wasserstein regularization，SIAM 数学分析杂志 50 (2018)，第 2 期，1817–1828。[13] J. Kitagawa 和 A. Takatsu， *Disintegrated optimal transport for metric fiber bundles* (2025年)，见 2407.01879。[14]
Sliced optimal transport: is it a suitable replacement?，已被《印第安纳大学数学杂志》接受（2025年），见 arXiv:2311.15874。[15] J. Kom´os， *A generalization of a problem of Steinhaus*，《匈牙利科学院学报》18 (1967)，217–229。[16] K. Kuratowski 和 C. Ryll-Nardzewski， *A general theorem on selectors*，《波兰科学院通报：数学、天文学与物理科学辑》13 (1965)，397–403。[17] R. J. McCann，
Polar factorization of maps on Riemannian manifolds **11** 2001 3, ，《几何与泛函分析》 （），第 – 期。[18] S.-i. Ohta， *Barycenters in Alexandrov spaces of curvature bounded below*，《几何进展》12 (2012)，第 4 期，571–587。[19] F. Santambrogio， *Optimal transport for applied mathematicians*，非线性偏微分方程及其应用进展，第 87 卷，Birkh¨auser/施普林格出版社，查姆，2015。变分法、偏微分方程与建模。[20] S. Sasaki，
On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds，《东北数学杂志》（第二辑）10 (1958)，338–354。[21] C. Villani， *Optimal transport: Old and new*，数学科学基础丛书 [《数学科学基本原理》]，第 338 卷，施普林格出版社，柏林，2009。

Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA
Email address: kitagawa@math.msu.edu

Graduate School of Mathematical Sciences The University of Tokyo Tokyo 153-8914 Japan & , ,
RIKEN Center for Advanced Intelligence Project (AIP) Tokyo 103-0027 Japan.
, ,,*Email address*: asuka-takatsu@g.ecc.u-tokyo.ac.jp