通过合并积计算融合轨道范畴上的高阶极限

Marco Praderio Bova

arXiv:2601.14983v1 [math.AT] 21 Jan 2026

摘要

我们研究由合并积实现的融合系统的中心轨道范畴上的高阶极限。为此，我们提出了一种研究 Diaz-Park 尖锐性猜想（见 [12]）的新方法，并证明了该猜想对所有 Clelland-Parker 和 Parker-Stroth 融合系统均成立（就上同调 Mackey 函子而言）。这补充了 Henke、Libmand 和 Lynd 在 [20] 中开展的工作。我们还运用所发展的方法研究 Benson-Solomon 融合系统，从而将这些系统的中心化融合轨道范畴上的高阶极限与 [1] 中所述的信号子函子联系起来。我们相信，所提出的方法未来可作为归纳论证的第一步，使我们更接近为这一猜想给出答案。

1 引言

饱和融合系统是一类范畴，最初由 Puig 引入（见 [25]），作为研究有限群的 p-子群与块之融合的通用框架。尽管融合系统最初旨在作为模表示论的工具，但如今已在代数和拓扑学的多个其他领域得到广泛应用（更详细的介绍见 [2] ）。Broto、Levi 和 Oliver 首先猜想（见 [6]），随后 Chermack 证明（见 [8]），每个饱和融合系统 $\mathcal{F}$ 都有唯一对应的“p完备化分类空间” $B\mathcal{F}$。由此可得到如下形式的 Bousfield-Kahn 谱序列

$$\lim^{i}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)} \left(H^j\left(-;\mathbb{F}_p\right)\right) \Rightarrow H^{i+j}\left(B\mathcal{F};\mathbb{F}_p\right), \tag{1}$$

其中，$\mathbb{F}_p$ 表示含有 p个元素的有限域，$\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)$是 $\mathcal{F}$的中心轨道范畴（见定义 2.1(8)）。类似地，对于每个有限群 G，我们有以下谱序列

$$\lim^{i}_{\mathcal{O}^c_p(G)} \left(H^j\left(-;\mathbb{F}_p\right)\right) \Rightarrow H^{i+j}\left(BG;\mathbb{F}_p\right). \tag{2}$$

Dwyer 在 [14, 定理 10.3]中证明，方程 (2) 的谱序列是精确的。也就是说，对于每个 $i \geq 1$，$\lim^{i}_{\mathcal{O}^c_p(G)}\left(H^j\left(-;\mathbb{F}_p\right)\right) = 0$。由此立即得到同构 $\lim_{\mathcal{O}^c_p(G)}\left(H^n\left(-;\mathbb{F}_p\right)\right) \cong H^n\left(BG;\mathbb{F}_p\right)$。我们从 [6, 定理 5.8], 中得知，类似的稳定元定理对于饱和融合系统也成立。因此，自然会问，方程 (1) 的谱序列是否也精确。这是 [2, 第 III.7] 节所列问题之一，且截至本文撰写时仍未解决。基于 Jackowsky 和 McClure 的一项先前结果（见 [21,推论 5.16]），Diaz 和 Park 在 [12] 中猜想，实际上存在一个更强的结果。

猜想 （融合系统的尖锐性）。设 S 是一个有限 p-群，$\mathcal{F}$ 是 S 上的一个饱和融合系统，且 $M = (M_*, M^*)$ 是一个以 $\mathbb{F}_p$ 为系数、定义在 $\mathcal{F}$ 上的 ***Mackey*** 函子（见 *[12, 定义 2.1]*）。那么，对每个 $n \geq 1$，都有 $\lim^{n}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\left(M^* \downarrow^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}\,\mathcal{F}^c()}\right) = 0$。

由于任何上同调函子都可以视为 Mackey 函子的逆变部分，因此上述猜想实际上比方程 (1) 中谱序列的尖锐性更强。Diaz 和 Park 在 [12, 定理 B] 中证明，当 $\mathcal{F}$ 可实现时，尖锐性猜想成立（见定义 2.1(2)）。因此，若该猜想不成立，就能提供一种方法，在不依赖有限单群分类的情况下区分可实现融合系统和奇异融合系统。这将解决 [2, 第 III.7] 节中列出的另一项未解决问题。因此，无论结果如何，该猜想的答案都会很有意思。由此，大量文章对这一问题进行了研究（例如见 [7, 12, 15, 16, 20, 33]），也就不足为奇了。有趣的是，据作者所知，截至本文撰写时，所有针对特定融合系统族证明该猜想的已知结果，都可以视为 [21, 推论 5.16] 的（间接）应用。因此，本文所述结果不仅证明了所有 Clelland-Parker 融合系统在上同调中的尖锐性（补充了 [20, 定理 1.1 和 5.2]），而且还不依赖于 [21, 推论 5.16]（提及可实现融合系统的尖锐性时除外），这也是其新颖之处。

设 B、G_1、G_2 为有限群，且 $B \leq G_1$、G_2，令 $G := G_1 *_B G_2$ 为相应的 amalgamated 积，并令 $\mathcal{T}$ 为与此合并积相关联的树（见定义 2.9）。由于 $\mathcal{T}$ 具有自然的 G-作用，因此可以对每个 $P \leq G$ 定义在 P 作用下不动的点所构成的子图 $\tilde{\mathcal{T}}^P$，以及商图 $\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G(P)$。将图自然地视为 CW-复形后，我们便可定义（见定义 2.16）

$$C_G^{p',p}(P) := H_1\left(\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G(P); \mathbb{F}_p\right).$$

取 $S' \in \mathrm{Syl}_p(B)$，并取满足 $S \in \mathrm{Syl}_p(G_1)$ 的 $S \geq S'$。假设 $p \nmid [G_2 : B]$，特别地，$S' \in \mathrm{Syl}_p(G_2)$。我们可以定义融合系统

$$\mathcal{F}_{\mathbf{1}} := \mathcal{F}_S(G_1), \qquad \mathcal{F}_{\mathbf{2}} := \mathcal{F}_{S'}(G_2),$$
$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}} := \mathcal{F}_{S'}(B), \qquad \mathcal{F} := \mathcal{F}_S(G),$$

这里我们将 G_1 和 G_2（因此也将 B、S 和 S'）视为 G 的子群。令 $\mathcal{C}$ 为 S 的 $\mathcal{F}$-中心化子群族。对于每个函子 $M\colon \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})^{\mathrm{op}} \to \mathbb{F}_p$-mod 以及每个 $x \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \boldsymbol{e}\}$，定义 $\mathbb{F}_p$-模

$$M^{\mathcal{F}_x} := \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_x)} \left(M \downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_x)}\right),$$

我们将其视为到 $M(S')$（若 $x = \mathbf{1}$，则视为到 $M(S)$）的自然投影。记 $\iota^S_{S'}$ 为从 $M^{\mathcal{F}_{\mathbf{1}}}$ 到 $M^{\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}}}$ 的泛映射，则 $\iota^S_{S'}\left(M^{\mathcal{F}_{\mathbf{1}}}\right)$ 和 $M^{\mathcal{F}_{\mathbf{1}}}$ 都是 $M^{\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}}}$ 的子群。利用谱序列以及可实现融合系统的尖锐性，我们在第 3 节证明如下结论。

定理 A. 设 M^* 是系数取自 $\mathbb{F}_p$、定义在 $\mathcal{F}$ 上的 *Mackey* 函子的逆变部分，并记 $M := M^* \downarrow^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}\,\mathcal{F}^c()}$。假设对每个 $x \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \boldsymbol{e}\}$，$\mathcal{F}^{cr}_x \subseteq \mathcal{C}$（见定义 *2.1(6)*）。那么：

1. 对每个 $n \geq 1$，都存在一个同构

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{F}_p\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\left(C_G^{p',p}, M\right) \cong \lim\nolimits^{n+2}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(M),$$

其中，在等号左侧，我们利用范畴等价 $\mathbb{F}_p\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)\text{-mod} \cong \mathbb{F}_p\text{-mod}^{\,\mathcal{O}_{(\mathcal{F}^c)^{op}}}$，将反变函子视为模。

2. 存在如下形式的正合列

$$0 \to \lim\nolimits^1_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(M) \to M^{\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}}}/\left(\overline{\iota^S_{S'}}\left(M^{\mathcal{F}_{\mathbf{1}}}\right) + M^{\mathcal{F}_{\mathbf{2}}}\right) \to \mathrm{Nat}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\left(C_G^{p',p}, M\right) \to \lim\nolimits^2_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(M) \to 0.$$

已有许多结果（见 [5, 10, 28]）证明，当图 $\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G(P)$（或以类似方式构造的图）对每个 $P \in \mathcal{C}$（见 [10, 定理 3.2]，了解更多详情）都是一棵树时，诸如 $\mathcal{F}$ 这样的融合系统是饱和的。在这种情况下，我们还有 $C^{p'}_{,\ G}{}^{p}(P) = 0$，并可由定理 A 推得，对每个 $n \geq 2$，$\lim^{n}_{\mathcal{O}\mathcal{F}^c()}(M) = 0$。此外，若 $\mathcal{F}$ 是饱和的，则对每个 $j \geq 0$，$\lim^{i}_{\mathcal{O}\mathcal{F}^c()}(H^j(-;\mathbb{F}_p)) = 0$（见引理 3.6）。更准确地说，我们有如下结论。

定理 B. 设 M^* 和 M 如定理 *A* 所述。假设 $\mathcal{F}$ 是饱和的，对每个 $x \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \boldsymbol{e}\}$ 都有 $\mathcal{F}^{cr}_x \subseteq \mathcal{C}$，并且 $C^{p'}_{,\ G}{}^{p}(P) = 0$ 对每个 $P \in \mathcal{C}$ 都成立。那么对每个 $n \geq 2$，$\lim^{n}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(M) = 0$，同时

$$\lim^{1}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(M) \cong M^{\mathcal{F}_e}/\left(\overline{\iota^S_{S'}}\left(M^{\mathcal{F}_1}\right) + M^{\mathcal{F}_2}\right).$$

此外，对每个 $i \geq 1$ 和每个 $j \geq 0$，$\lim^{i}_{\mathcal{O}\mathcal{F}^c()}(H^j(-;\ \mathbb{F}_p)) = 0$。

作为定理 B 的一个应用，我们在命题 4.5 和 4.8 之间证明了第三个主要结果。

定理 C. 设 $\mathcal{F}$ 是 *Clelland-Parker* 融合系统（见 *[10]*）或 *Parker-Stroth* 融合系统（见 *[24]*），则对每个 $i \geq 1$ 和每个 $j \geq 0$，$\lim^{i}_{\mathcal{O}\mathcal{F}^c()}(H^j(-;\ \mathbb{F}_p)) = 0$。

定理 C 补充了 Hencke、Libman 和 Lynd 在 [20, 定理 1.1 和 5.2], 中开启的工作：它不仅重新证明了 Parker-Stroth 融合系统的上同调函子的高阶极限消失，也证明了所有 Clelland-Parker 融合系统的上同调函子的高阶极限均消失（而不只是本质子群全为阿贝尔子群的那些系统）。

正如 Aschbacher 和 Chermak 所证明的（见 [1]），Benson-Solomon 融合系统也可以由两个有限群的 amalgamated 积实现。然而，正如 [5, 第 4], 节末尾所指出的，由这些合并积得到的$\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G$图$P(P)$不一定是树。因此，定理 B 在此情形下无法直接应用。不过，可以使用定理 A 来证明本文的第四个也是最后一个主要结果。

定理 D. 设 $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}$ 是一个 *Benson-Solomon* 融合系统，设 M 如定理 *A* 中所述，设$\theta\colon \mathcal{O}(\mathcal{F}^c)^{op} \to \mathrm{Grp}$ 为与 $\mathcal{F}$ 相关联的信号子函子（如 *[1, 第 941 页和定理 8.8]* 中所述），并定义 $\vartheta\colon \mathcal{O}(\mathcal{F}^c)^{op} \to \mathrm{Grp}$ 为复合 $\vartheta(P) =$ 阿贝尔化 $(\theta(P)) \otimes \mathbb{F}_2$。以下结论成立：

1. 对每个 $n \geq 1$，都存在一个同构

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{F}_2\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(\vartheta(P), M) \cong \lim^{n+2}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(M).$$

2. 存在一个如下形式的正合列

$$0 \to \lim^{1}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(M) \to M^{\mathcal{F}_S(B)}/\left(M^{\mathcal{F}_S(H)} + M^{\mathcal{F}_S(K)}\right) \to \mathrm{Nat}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(\vartheta, M) \to \lim^{2}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(M) \to 0.$$

其中 $H \cong \mathrm{Spin}_7\left(5^{2^n}\right)$ 对某个 $n \geq 0$，$S \in \mathrm{Syl}_2(H)$ 以及 $B \leq K$ 都是有限群，且$[K : B] = 3$ 并且 $S \leq B \leq H$。

我们以几句话结束引言，谈谈潜在的未来工作。设 $\mathcal{F}$ 是定义在 S上的饱和融合系统，$\mathcal{L}$ 是与之关联的中心化链接系统（见 [6, 定义 1.7]），令 $P_0 := S$，并将 S的所有 $\mathcal{F}$-本质子群编号为 P_1，....., P_n。对每个i定义 $L_i := \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P_i)$，便可得到每个 L_i 都是一个有限群，且 $P_i \trianglelefteq L_i$ 并且 $N_S(P_i) \in \mathrm{Syl}_p(L_i)$。此外，若定义 $\mathcal{F}_i := \mathcal{F}_{N_S(P_i)}(L_i)$以及$\mathcal{F}_{e,i} := \mathcal{F}_{N_S(P_i)}(N_S(P_i))$，便可得到 $\mathcal{F}\mathbf{cr}_i, \mathcal{F}^{\mathrm{cr}}_{e,i} \subseteq \mathcal{F}\mathbf{c}$（见 Poposition 4.2）。最后，我们可以递归地定义 $G_0 := L_0$ 和 $G_i := G_{i-1} *_{N_S(P_i)} L_i$，从而得到一个群$G := G_n$，使得 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$。能否通过对每个 $\mathcal{F}_S(G_i)$反复应用定理 B 的变体，证明 $\mathcal{F}$ 的尖锐性猜想? 作者正在撰写的一篇未来文章中，探讨了这一问题有肯定答案的一些情形。由此，他证明了比定理 C 所述范围更广的一类融合系统具有尖锐性。

本文结构：第 2 节简要介绍全文所用的记号，以及群树和融合系统树的概念。我们还开始研究图 $\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G(P)$，并给出函子 $C^{p'}{}_G{}^p$ 的另一种描述，这也说明了我们选择这些记号的原因（见命题 2.17 和注 2.18）。第 3 节中，我们继续证明本文的核心结果（即定理 A 和定理 B）。最后，第 4 节专门用于应用定理 A 和定理 B，以证明定理 C 和定理 D。

致谢。作者谨向 Chris Parker、Jason Semeraro、Martin Van Beek、Valentina Grazian、Justin Lynd、Andrew Chermak、Guille Carrión 和 Antonio Díaz 致以感谢，感谢他们提出的意见以及富有洞见的交流。这些意见使作者意识到，定理 B 可应用于比最初考虑的更多情形，并大大简化了其中一些证明。

在本文的研究过程中，作者获得了奥伯沃尔法赫莱布尼茨研究员资助以及德累斯顿工业大学通过资助项目 U-000902-830-C11-1010103、F-013038-541-000- 1010103 和 L-000150-721-110-1010100 提供的支持。

2 背景与初步结果

对于融合系统的深入介绍，感兴趣的读者可参阅 [2, Part I] 。在本文中，我们仅回顾融合系统相关的以下广泛采用的记号。

定义 2.1。

1. 设 S 为有限 p-群，且设 G 为包含 S的群。我们将由 G生成的融合系统记为 $\mathcal{F}_S(G)$。也就是说， $\mathcal{F}_S(G)$ 是一个范畴，其对象为 S 的子群，态射集由 G中元素的共轭给出。2. 如果融合系统 $\mathcal{F}$ 满足：对于某个 G 有限且 $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$，有 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$，则称 $\mathcal{F}_S(G)$ 是可实现的。否则称 $\mathcal{F}$ 是异态的。3. 除非另有明确说明，本文引入的融合系统不一定是饱和的。不过请注意，Clelland-Parker、Parker-Stroth 和 Benson-Solomon 融合系统都是饱和的。4. 设 $\mathcal{F}$为 S上的融合系统，我们将 $\mathcal{F}$的轨道范畴记为 $\mathcal{O}(\mathcal{F})$。也就是说， $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ 是一个范畴，其对象为 S 的子群（与 $\mathcal{F}$一样），态射集为商

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(\mathcal{F})}(P,Q) := Q \backslash \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q).$$

5. 若对每个 $Q \cong_{\mathcal{F}} P$（即每个在 $\mathcal{F}$ 中与 P 共轭的 $Q \leq S$），$C_S(Q) = Z(Q)$，则称子群 $P \leq S$ 为 $\mathcal{F}$-中心化子群。6. 若子群 $P \leq S$ 是 $\mathcal{F}$-中心化子群，且 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P) = \mathrm{Inn}(P)$，则称其为 $\mathcal{F}$-中心根子群。7. 我们用 $\mathcal{F}\mathfrak{c}$ 表示 S 的所有 $\mathcal{F}$-中心化子群的集合，用 $\mathcal{F}\mathfrak{cr}$ 表示 S 的所有$\mathcal{F}$-中心根子群的集合。8. 对于任意群族 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$ 表示 $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ 的全子范畴，其对象是包含于 $\mathcal{C}$ 中的 S 的子群。若 $\mathcal{C} = \mathcal{F}\mathfrak{c}$，则记作 $\mathcal{O}(\mathcal{F}^c) := \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$，并称其为 $\mathcal{F}$ 的中心轨道范畴。

在本文中，我们还将采用以下记号。

记号 2.2。

1. p是一个素数。2. 对于每个素数幂 q，我们用 $\mathbb{F}_q$ 表示含有 q 个元素的有限域。3. 除非另有说明，所有模均为右模，所有作用均为右作用。

4. 给定一个范畴 $\mathcal{C}$ 和一个交换环 $\mathcal{R}$，我们利用范畴的自然等价$\mathcal{RC}$-mod $\cong \mathcal{R}$-mod$^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$，将所有有限生成的 $\mathcal{RC}$-模视为从 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{R}$-mod（其对象为有限生成的 $\mathcal{R}$-模）的反变函子，反之亦然。

2.1 融合系统的《树》。

给定一个有限的 p-群 S，在 S 上构造融合系统相当容易。例如，给定 S 的子群之间任意一组单态射 X，显然可以构造出包含 X 中所有态射的、在 S 上的最小融合系统 $\langle X\rangle_S$。然而，判定一个给定的融合系统是否饱和则困难得多。事实上，寻找并分类这类融合系统一直是研究热点（例如参见 [10, 13, 17, 18, 23, 31]）。用于判定融合系统是否饱和的最常见方法中，有一些会用到所谓的群树（例如参见 [5, 10, 18, 28]）。

设 $\mathcal{T}$ 是一个图，并分别用 $V(\mathcal{T})$ 和 $E(\mathcal{T})$ 表示其顶点集和边集。于是，$\mathcal{T}$ 可视为一个范畴（我们也记作 $\mathcal{T}$）：令 Ob $(\mathcal{T})$ 为 $V(\mathcal{T})$ 与 $E(\mathcal{T})$ 的不交并，并规定唯一的非恒等态射为态射 $f_{e,\ v}\colon\ e\to v$，其中每个 $e\in E(\mathcal{T})$ 和每个与 e 关联的 $v\in V(\mathcal{T})$ 均对应一个这样的态射。也就是说，若 v 与 e 关联，则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(e,\ v)=\{f_{e,v}\}$；否则它是空集。

定义 2.3。一个**群图**是一个二元组 $(\mathcal{T},\mathcal{G})$，其中 $\mathcal{T}$是一个图，而 $\mathcal{G}$ 是一个从$\mathcal{T}$（视为一个范畴）到群范畴 Grp 的函子，它将每个态射映为一个群单态射。$(\mathcal{T},\mathcal{G})$ 的**完备化**是群 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}=\mathrm{colim}_{\mathcal{T}}\mathcal{G}$。若 $\mathcal{T}$ 是一棵树，我们称 $(\mathcal{T},\mathcal{G})$ 为**群树**。

例 2.4。

^{e}1. 给定群 B、$G_{\mathbf{1}}$、$G_{\mathbf{2}}$ 以及单态射 $f_i\colon\ B\hookrightarrow G_i$，我们可以取树 $\mathcal{T}:=\mathbf{1}--\mathbf{2}$，它只有两个顶点，且两顶点之间只有一条边；并定义 $\mathcal{G}\colon\ \mathcal{T}\to$ Grp，令 $\mathcal{G}(i)=G_i$、$\mathcal{G}(e)=B$，且 $\mathcal{G}(f_{e,i})=f_i$。那么 $(\mathcal{T},\mathcal{G})$ 是一个群图，其完备化 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ 是由包含映射 f_i 定义的 amalgamated 积 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}=G_{\mathbf{1}}*_B G_{\mathbf{2}}$。2. 设 $\mathcal{F}$ 是底群为 S 的饱和融合系统，并令 $\mathcal{T}$为 S的子群偏序集（按包含关系排序）的一棵生成树。对于每个顶点 $P\in V(\mathcal{T})$ 以及每条边 $(P,Q)\in E(\mathcal{T})$，若$P\le Q$，定义 $\mathcal{G}(P)=P\rtimes\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$，并令 $\mathcal{G}((P,Q))=P$。于是 $(\mathcal{T},\mathcal{G})$ 定义了一个群树（其包含态射显然），且 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$满足 $\mathcal{F}_S(\mathcal{G}_{\mathcal{T}})=\mathcal{F}$。3. 取 $\mathcal{L}$ 为与 $\mathcal{F}$ 相关联的中心化链接系统，并令 $\mathcal{T}$为 S 的 $\mathcal{F}$-中心化子群偏序集的一棵生成树（或取任何包含所有 $\mathcal{F}$-本质子群的子偏序集）。然后我们可以通过令 $\mathcal{G}(P)=\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P)$，以及 $\mathcal{G}(P,Q)=\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P<Q)$（即 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(Q)$ 中正规化 P的子群），来定义$\mathcal{G}$。在此情形下，我们同样有 $(\mathcal{T},\mathcal{G})$ 定义了一个群树，且 $\mathcal{F}_S(\mathcal{G}_{\mathcal{T}})=\mathcal{F}$。

使用例 2.4(3)中的记号，我们可以令 $\mathcal{T}$ 为一棵高度为 1 的树，其根为 S，叶为 S 的所有 $\mathcal{F}$-中心化且完全 $\mathcal{F}$-正规化的子群。于是，对于 $\mathcal{T}$ 的每个顶点 P，$S_P:=N_S(P)$ 是 $\mathcal{G}(P)$ 以及 $\mathcal{G}(P<S)$ 的 Sylow p-子群（若 $P\neq S$）。因此，对于 $\mathcal{T}$ 的每个顶点 P，我们可以定义饱和融合系统 $\mathcal{FG}(P):=\mathcal{F}_{S_P}(\mathcal{G}(P))$，并且若 $P\neq S$，则 $\mathcal{FG}(P<S):=\mathcal{F}_{S_P}(\mathcal{G}(P<S))$。在此设置下，我们有 $\mathcal{F}_S(\mathcal{G}_{\mathcal{T}})=\langle\mathcal{FG}(P)\mid P\in V(\mathcal{T})\rangle_S$。也就是说，$\mathcal{G}_{\mathcal{T}}(\mathcal{F}_S)$ 是包含融合子系统 $\mathcal{FG}(P)$ 的 S 上的最小融合系统。事实上，类似的结果也可以推广到更一般的情形（见下文命题 2.8）。

设 $(\mathcal{T},\mathcal{G})$ 是一个群树，并且对每个 $X\in$Ob $(\mathcal{T})$，选取 $\mathcal{S}(X)\in\mathrm{Syl}_p(\mathcal{G}(X))$，并定义$\mathcal{FG}(X):=\mathcal{F}_{\mathcal{S}(X)}(\mathcal{G}(X))$。对每条边 $e\in E(\mathcal{T})$ 以及与 e 相接的每个顶点 v，我们可以选取$g_{e,v}\in\mathcal{G}(v)$，使得 $\mathcal{G}(f_{e,v})\circ g_{e,v}$ 将 $\mathcal{S}(e)$ 映入 $\mathcal{S}(v)$。这自然诱导出融合系统 $\mathcal{FG}(e)$ 与 $\mathcal{FG}(v)$ 之间的映射，我们将其记为 $\mathcal{FG}(f_{e,v})$。

定义 2.5。我们称其为**树　由**$(\mathcal{T},\mathcal{G})$ (或简称**群融合系统的树**　　**p**

融合系统）中，任意一对（$\mathcal{T}, \mathcal{FG}$），其中 $\mathcal{FG}$ 是一个如上所定义的函子，将 $\mathcal{T}$ 映射到饱和 p-融合系统范畴。

注意，$(\mathcal{T}, \mathcal{FG})$ 同时取决于我们对 $\mathcal{S}(X)$ 和 $g_{e,v}$ 的选择。特别是，它不一定是唯一的。不过，在一些温和条件下，我们可以得到唯一性结果。

定义 2.6。 我们称群树 $(\mathcal{T}, \mathcal{G})$ 为 **p-局部的**，如果存在 $v^* \in V(\mathcal{T})$，使得对每个 $v \in \mathcal{T} \setminus \{v^*\}$，都有 $p \nmid |\mathcal{G}(v)| / |\mathcal{G}\, e\,|()$，其中 e 是从 v 到~~v^*~~ 的唯一最小路径上、以 v 为端点的唯一边。等价地，$\mathcal{G}(f_{e,v})$ 将 Sylow p-子群映射到 Sylow p-子群。

例 2.7。 使用例 2.4(3) 中的记号，我们可以取 $\mathcal{T}$ 为一棵高度为 1 的树，其根为 S，叶为 S 的所有 $\mathcal{F}$-中心化且完全 $\mathcal{F}$-正规化的子群。于是得到的群树是 p-局部的，其中 $v^* = S$。

另一方面，例 2.4(2) 中描述的群树不是 p-局部的，除非对于每个 $P \lneq S$ 都有 $p \nmid |\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)|$（特别地，$S$ 是阿贝尔的）。

最后，采用例 2.4(1) 中的记号，我们可以将 B、G_1 和 G_2 看作 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ 的子群。那么，本例中的群树是 p-局部的，当且仅当 B 包含 G_1 或 G_2 中某一个的 Sylow p-子群。设 $(\mathcal{T}, \mathcal{G})$ 是一个 p-局部群树，设 $(\mathcal{T}, \mathcal{FG})$ 是由 $(\mathcal{T}, \mathcal{G})$ 产生的群融合系统树，并设 $S = S(v^*)$。对于 $\mathcal{T}$ 的每个顶点 v，由从 v 到 v^* 的唯一道路以及 $g_{e,v}$ 的选择，可以得到一个显然的单态射，将 $\mathcal{S}(v)$ 映入 S。利用该单态射，我们可以将每个 $\mathcal{FG}(v)$ 看作定义在 S 的某个子群上的融合系统。

命题 2.8。 沿用上述记号，融合系统 $\mathcal{FG}_{\mathcal{T}} := \mathcal{F}_S(\mathcal{G}_{\mathcal{T}})$ 是 S 上包含每个顶点 v 所对应的融合系统 $\mathcal{FG}(v)$ 的最小融合系统。特别地，$\mathcal{FG}_{\mathcal{T}}$ 不依赖于 $(\mathcal{T}, \mathcal{FG})$ 的选取。

证明。 参见 [28,定理 A(b)]。 □

有时可以通过考察与（$\mathcal{T}$，$\mathcal{G}$）相关联的轨道图，来判断融合系统 $\mathcal{FG}_{\mathcal{T}}$ 是否饱和（参见 [5，定理 4.2]）。

定义 2.9。 设（$\mathcal{T}$，$\mathcal{G}$）是一个完备化为 $G = \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ 的群树。与（，$\mathcal{G}$）相关联的轨道图是图 $\tilde{\mathcal{T}}$（实际上是一棵树），其顶点集为右陪集族 $V\left(\tilde{\mathcal{T}}\right) = \coprod_{v \in V(\mathcal{T})} \mathcal{G}$（$v$）$\backslash G$；对于每条边 $e :=$（v，w）$\in \mathcal{T}$以及每个 $\mathcal{G}$（e）$g \in G$，都有一条连接$\mathcal{G}$（v）g与 $\mathcal{G}$（w）g的单边。

引理 2.10. 令 $\mathcal{G}(-)\backslash G : \mathcal{T} \to \mathrm{Grph}$ 为一个函子，它将每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 映射到一个无边图，其顶点集为右陪集 $\mathcal{G}(X)\backslash G$。那么，以自然的方式将图视为 CW-复形，我们有 $\mathcal{T} =$ 同伦余极限$_{\mathcal{T}}(\mathcal{G}(-)\backslash G)$。

证明。 这直接由同伦余极限的构造得出。 □

˜图 $\mathcal{T}$具有显然的右 G-作用（图 $\mathcal{G}(X)\backslash G$也如此）。这使我们能够为每个子群 $P \leq G$定义商图 $\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G(P)$。这里，$\tilde{\mathcal{T}}^P$表示 $\tilde{\mathcal{T}}$中在 P的作用下保持不动的点所构成的子图。

假设 $(\mathcal{T}, \mathcal{G})$ 是 p-局部的，令 $S = S(v^*)$，并令 $(\mathcal{T}, \mathcal{FG})$ 为一个相关的群融合系统树˜。我们将 $\mathcal{T}^-/C_G(-) : \mathcal{O}(\mathcal{FG}_{\mathcal{T}})^{\mathrm{op}} \to$ Grph 定义为如下函子：它将每个 $P \leq S$映射到商图 $\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G(P)$。若要证明 $\mathcal{FG}_{\mathcal{T}}$是饱和融合系统，若干结果（例如参见 [5,定理 4.2]和 [10,定理 3.2]）要求当 P是 $\mathcal{FG}_{\mathcal{T}}$-中心化的时，这些商图为树。这些结果被多次应用于发现新的奇异融合系统族（参见 [10, 24]），这表明图 $\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G(P)$对于研究饱和融合系统显然具有重要意义。因此，下一节将从群融合系统树的角度研究这类图。

2.2 $\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G$（$P$）图

令 $(\mathcal{T},\mathcal{G})$ 和 $(\mathcal{T},\mathcal{FG})$ 如 2.1小节末尾所述；对于每个 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$，按照命题 2.8，将 $\mathcal{S}(X)$ 视为 S 的子群。在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{S}(X))$ 集合上定义等价关系 $\sim$：当且仅当存在一个同构 $\gamma\in\mathrm{Hom}^{\mathcal{FG}(X)}((P)\ \alpha,(P)\ \beta)$，使得对每个 $x\in P$，$(x)(\alpha\circ\gamma)=(x)\ \beta$。据此，我们可以定义集合

$$\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG}(X))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{S}(X))/\sim,$$

我们将其视为没有边的图。给定 $\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,\ \mathcal{S}(X))$，我们用 $[\alpha]_{\mathcal{F}(X)}$ 表示其在 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\ \mathcal{FG}(X))$ 中的等价类。

定义2.11. 对每个 $P\leq S$，定义 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG}(-))$ 为从 $\mathcal{T}$ 到图的函子，它将每个$X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 映为 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\ \mathcal{FG}(X))$。$f_{e,v}$ 的像将态射 $[\alpha]_{\mathcal{FG}(e)}$ 的等价类映为 $\left[\alpha\circ\iota_{\mathcal{S}\ e}^{\mathcal{S}(v)}(\ )\right]_{\mathcal{FG}}(v)$。以自然方式将图视为 CW-复形后，我们定义 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG})$ =同伦余极限$_{\mathcal{T}}(\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG}(-)))$。下面给出 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG})$ 的另一种描述。

引理2.12。 CW-复形 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG})$ 可以视为一个图 R，其

$$V(R):=\bigsqcup_{v\in V(\mathcal{T})}\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG}(v))\qquad and\qquad E(R):=\bigsqcup_{e\in E(\mathcal{T})}\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG}(e)),$$

其中，对于 $\mathcal{T}$ 的每条边 $e=(v,w)$，边 $[\alpha]_{\mathcal{FG}(e)}$ 连接顶点 $\left[\alpha\circ\iota_{\mathcal{S}\ e}^{\mathcal{S}(v)}()\right]_{\mathcal{FG}}(v)$ 和

$$\left[\alpha\circ\iota_{\mathcal{S}(e)}^{\mathcal{S}(w)}\right]_{\mathcal{FG}(w)}.$$

证明。 </style}这正是 [28, 引理2.8] 中证明的内容（另见 [28, 第 1060] 页中的评论）。 □

从现在起，除非另有说明，我们均使用引理2.12，将 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG})$ 视为一个图。

定义2.13。 我们定义 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-,\mathcal{FG}):\mathcal{O}(\mathcal{F})^{\mathrm{op}}\to$Grph 为如下函子：它将每个 $P\leq S$ 映射到图 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG})$（该图可能为空），并将每个 $[\varphi]\in\mathrm{Hom}^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}(Q,P)$ 映射到图态射，该态射将 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,\mathcal{FG})$ 的顶点 $[\alpha]_{\mathcal{FG}(X)}$ 映射到 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(Q,\mathcal{FG})$ 的顶点 $[\alpha\circ\varphi]_{\mathcal{FG}(X)}$。

函子 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-,\ \mathcal{FG})$ 的引入让我们对轨道图 $_{\sim}\mathcal{T}$ 有了新的认识。更确切地说，有如下结论。

引理 2.14。 设 $G=\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ 是 $(\mathcal{T},\mathcal{G})$ 的完备化。函子 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-,\mathcal{FG})$ 与第 6 页定义的函子 $\tilde{}\ \mathcal{T}^-/C_G(-)$ 同构。特别地，函子 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-,\mathcal{FG})$（在同构意义下）不依赖于 $(\mathcal{T},\mathcal{FG})$ 的选择。

证明。 由于 $(\mathcal{T},\mathcal{G})$ 是 p-局部的，因此满足 [28] 中所称的性质（H）。结论由 [28, 命题 3.5 和推论 3.7] 中所述的自然同构得出。 □

设 $\mathcal{R}$ 是一个交换环。以自然的方式将图视为 CW-复形后，我们可以将函子 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-,\ \mathcal{FG})$ 与 n 次同调函子 $H_n(-;\mathcal{R})$（系数取自 $\mathcal{R}$）复合。我们将这一复合记作 $H_n(\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-,\ \mathcal{FG});\mathcal{R})$。由引理 2.14 可立即得到以下推论。

推论 2.15。 函子 $H_n(\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-,\mathcal{FG});\mathcal{R})$ 对于每个 $n\geq 2$ 都是0 函子；而对于 $n=0$，它是常值反变函子 $\mathcal{R}$，将每个对象映到平凡的 $\mathcal{R}$-模 $\mathcal{R}$。—

证明。令 $P \leq S$，并将 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P, \mathcal{FG})$ 视为一个 CW-复形。由于对于每个 $n \geq 2$，$\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P, \mathcal{FG})$ 都没有 n-胞腔，因此对于所有此类 n，$H_n(\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-, \mathcal{FG}); \mathcal{R}) = 0$。
另一方面，我们有 $H_0(\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P, \mathcal{FG}); \mathcal{R}) = \mathcal{R}^k$，其中 k 是 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P, \mathcal{FG})$ 的连通分支数。

根据 [29, 定理 I.9]（其中 $\mathcal{T}$ 记作 X），我们知道 $\mathcal{T}$ 是一棵树，G 在其上作用且不发生反转。由 [29, 第 I.6 节1] 可知，$\tilde{\mathcal{T}}^P$ 也是一棵树。特别地，$\tilde{\mathcal{T}}^P$（因此 $\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G(P)$）是连通的。结论由引理 2.14 得出。 □

推论 2.15 描述了对每个 $n \neq 1$，函子 $H_n(\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-, \mathcal{FG}); \mathcal{R})$。对于最后一种情况，我们引入以下定义。

定义 2.16 定义。我们将函子 $H_1(\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-, \mathcal{FG}); \mathbb{F}_p)$ 简记为 C^{p', G^p}。
在 2.1小节末尾所述的情形中，$\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G(P)$ 是一棵树，因此，$C^{p', G^p}(P) = 0$。然而，这个函子并非零函子，下面的刻画有助于更好地理解它。

命题 2.17. 若 $P \in \mathcal{F}^c$，则 $C^{p', G^p}(P) \cong$阿贝尔化 $(C_G(P)/Z(P)) \otimes \mathbb{F}_p$ 其中，阿贝尔化 $(-)$ 表示阿贝尔化函子（即将一个群映射到其商群的函子，商群由该群除以换位子群得到）。

证明. 在整个证明过程中，对于每个子群 $H \leq G$，记 $C_H := C_H(P)$；并且，若 $Z(P) \leq H$，也记 $C_H := C_H/Z(P)$。
通过对每个 $x \in \tilde{\mathcal{T}}^P$ 和每个 $g \in C_G$ 定义 $g \cdot x = x \cdot g^{-1}$，我们得到 C_G 在 $\tilde{\mathcal{T}}^P$ 上的左作用，使得 $\tilde{\mathcal{T}}^P$ 在 C_G 的左作用和右作用下所得的商 $C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P$ 和 $\tilde{\mathcal{T}}^P/C_G$ 相同。在证明的其余部分，我们将 C_G 视为在 $\tilde{\mathcal{T}}^P$ 上的左作用。
由于根据定义，$Z(P)$ 在 $\tilde{\mathcal{T}}^P$ 上的作用是平凡的，因此 C_G 在 $\tilde{\mathcal{T}}^P$ 上的作用诱导出 C_G 在 $\tilde{\mathcal{T}}^P$ 上的作用，使得商 $C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P$ 和 $C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P$ 一致。由引理 2.14 可得 $C^{p', G^p}(P) \cong H_1\left(C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P;\ \mathbb{F}_p,\ \right)$。
根据推论 2.15，我们知道 $H_0\left(C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P;\ \mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}$ 是一个自由的 $\mathbb{Z}$-模。因此，$\mathrm{Tor}\left(H_0\left(C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P;\ \mathbb{Z}\right),\ \mathbb{F}_p\right) = 0$（见 [19, 命题 3A.5(3)]）。由通用系数定理（见 [19, 定理 3A.3]），我们得出 $C^{p', G^p}(P) \cong H_1\left(C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P;\ \mathbb{Z}\right) \otimes \mathbb{F}_p$。因此，只需证明 $\mathrm{Ab}\left(\pi_1\left(C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P\right)\right) \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathrm{Ab}\left(C_G\right) \otimes \mathbb{F}_p$。

按照 [3, 定义 3.2], 中的做法，我们可以取一个群图 $C_G\backslash\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P := \left(C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P, \mathcal{A}\right)$，其函子 $\mathcal{A}$ 满足：对于每个 $X \in \mathrm{Ob}\left(C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P\right)$，存在 $X \subseteq \mathrm{Ob}\left(\tilde{\mathcal{T}}^P\right)$，使得 X 通过商映射投影到 X，且 $\mathcal{A}(X) = C_{C_G}(X)$。

由 [3, 例（3）第 13] 页和 [29, 命题 I.20]（另见 [3, 命题 1.20]），我们知道存在一个群 $\pi_1\left(C_G\backslash\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P\right)$，它包含每个 $\mathcal{A}(v)$，其中 v 是 $C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P$ 的一个顶点，并且适合如下形式的短正合列

$$1 \to N \to \pi_1\left(\overline{C_G}\backslash\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P\right) \to \pi_1\left(\overline{C_G}\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P\right) \to 1, \tag{3}$$

其中，N 是由所有 $\mathcal{A}(v)$ 生成的正规子群。另一方面，根据 [3, 定理 3.6(d)]，我们还可以得到一个如下形式的短正合列

$$1 \to \pi_1\left(\tilde{\mathcal{T}}^P\right) \to \pi_1\left(\overline{C_G}\backslash\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P\right) \to \overline{C_G} \to 1.$$

由于 $\tilde{\mathcal{T}}^P$ 是一棵树（见 [29, 第 I.6 节1]），我们可推得 $\pi_1\left(C_G\backslash\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P\right)\cong C_{G^\circ}$ 因此，利用公式 (3) 中的正合列，我们得到一个满射

$$\mathrm{Ab}\left(\overline{C_G}\right)\twoheadrightarrow \mathrm{Ab}\left(\pi_1\left(\overline{C_G}\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P\right)\right), \tag{4}$$

其核由以下形式的群在阿贝尔化 Ab 中的像生成：$\left(\underline{C_G}\right)$， $\mathcal{A}(v)=C_{C_G}(v)$，其中某个顶点 v 属于 $\tilde{\mathcal{T}}^P$。固定这样一个顶点 v。根据 $\tilde{\mathcal{T}}$ 的定义，存在 $Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 和 $y\in G$，使得$v=\mathcal{G}(Y)\,y$。由此可知，对于每个 $x\in C_{C_G}(v)\cup P$，都有 $\mathcal{G}(Y)\,yx^{-1}=\mathcal{G}(Y)\,y$，因此，$x\in\mathcal{G}(Y)^y$。我们得出结论：$P$（尤其是 $Z(P)$）包含于 $\mathcal{G}(Y)^y$，并且 $\mathcal{A}(v)\leq C_{\mathcal{G}(Y)^y}$。由于 $P\in\mathcal{F}^c$，因此对于任意有限的 $P\leq H\leq G$，$Z(P)$ 是 C_H 的一个 Sylow p-子群。由此可知，$C_{\mathcal{G}(Y)^y}$（因此 $\mathcal{A}(v)$）是一个有限的 p'-群。我们推得，$\mathrm{Ab}\left(\overline{C_G}\right)$ 的子群中由 $\mathcal{A}(v)$ 的像得到的部分，在与 $\mathbb{F}_p$ 作张量积后为零。我们得出结论，等式 (4) 中的满射诱导出一个从 $\mathrm{Ab}\left(C_G\right)\otimes\mathbb{F}_p$ 到 $\mathrm{Ab}\left(\pi_1\left(C_G\backslash\tilde{\mathcal{T}}^P\right)\right)\otimes\mathbb{F}_p$ 的同构，由此完成证明。

□

备注 2.18。 命题 2.17 实际上是所选记号的由来 $C^{p',\ {}^p}_{\ G}$ 其旨在表明，我们首先通过商去其 p-部分（即 $Z(P)$），聚焦于 $C_G(P)$ 的 p'-部分，然后通过与 $\mathbb{F}_p$ 张量积，移除所有有限阶元素 p'。

推论 2.19. 设 $P\in\mathcal{F}^c$，且 v 是 $\mathcal{T}$ 的一个顶点，使得 $P\leq\mathcal{S}(v)$。若 $C_G(P)$ 共轭于 $\mathcal{G}(v)$ 的一个子群，则 $C^{p',\ {}^p}_{\ G}(P)=0$。

证明。 如有必要，对 P 取共轭后，不失一般性，可设 $C_G(P)\leq\mathcal{G}(v)$。特别地，$C_G(P)=C_{\mathcal{G}(v)}(P)$。由于 P 是 $\mathcal{FG}(v)$-中心化的（因为它是 $\mathcal{F}$-中心化的），因此 $Z(P)\in\mathrm{Syl}_p(C_G(P))$。由此可得，阿贝尔化 $\left(C_G(P)/Z(P)\right)$ 是一个 p'-群。特别地，阿贝尔化 $\left(C_G(P)/Z(P)\right)\otimes\mathbb{F}_p=0$。结论由命题 2.17 得出。

□

我们以关于轨道~图 $\mathcal{T}$的融合 Bredon 上同调的一些观察结束本节。

设 K 是一个 G-CW-复形， $\mathcal{R}$ 是一个交换环， $\mathcal{C}$ 是 S的任意子群族。对于每个 $P\in\mathcal{C}$，定义 $C_*\left(K^P/C_G(P)\,;\,\mathcal{R}\right)$ 为与 CW-复形 $K^P/C_G(P)$ 相关联的 $\mathcal{R}$-模链复形（即，$C_n\left(K^P/C_G(P)\,;\,\mathcal{R}\right)$ 是以 $K^P/C_G(P)$ 的 n-胞腔为基的自由 $\mathcal{R}$-模）。这一构造自然导出一个由 $\mathcal{RO}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$-模构成的链复形 $C_*(K^-/C_G(-)\,;\,\mathcal{R})$。设 $P_{*,\ *}$ 是 $C_*(K^-/C_G(-)\,;\mathcal{R})$ 的 Cartan-Eilenberg 射影分解（定义见 [27, 第 10.5] 节）。那么，对于每个 $\mathcal{RO}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$- 模 M，我们定义如下。

定义 2.20 ([33, 定义 1.5])。 X 的**融合 Bredon 上同调**（系数为 M）定义为

$$H^*_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}(K;M):=H^*\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{RO}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(\mathrm{Tot}^{\oplus}\left(P_{*,*}\right);M\right)\right).$$

如果 M 来自系数为 $\mathbb{F}_p$ 的 Mackey 函子的逆变部分，$\mathcal{C}$中的所有元素都是 $\mathcal{F}$-中心化的， $\mathcal{C}$对 $\mathcal{F}$-共轭及取上群封闭，并且对每个 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 都包含所有 $\mathcal{FG}(X)$-中心化根群，那么由 [33, 命题 10.5] 及尖锐性（见 [12, 定理 B]）可知，对于每个 $n\geq1$，$\lim^n_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{FG}(X))}\left(M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})\ (\mathcal{FG}(X))}\right)=0$。在这类情形下，可以对 Bredon 上同调作如下简化。

命题 2.21。 假设对每个 $n\geq1$ 以及每个 $X\in\tilde{}$（$\mathcal{T}$），都有 $\lim^n_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{FG}(X))}\left(M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})\ (\mathcal{FG}(X))}\right)=0$。那么，以自然方式将 G-图 $\mathcal{T}$视为一个 G-CW-复形，我们有

$$H^n_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(\tilde{\mathcal{T}};M\right)\cong\lim^n_{\mathcal{T}}\left(\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{FG}(-))}\left(M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{FG}(-))}\right)\right).$$

˜证明。 由引理 2.10 可知 $\mathcal{T}=$ 同伦余极限$_{\mathcal{T}}(\mathcal{G}(-)\backslash G)$。因此，我们得到以下 Bousfield-Kahn 谱序列（参见 [4,§XII 4.5]）

$$E_2^{s,t}:=\lim_{\mathcal{T}}^{s}\left(H^{t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(\mathcal{G}\left(-\right)\backslash G;M\right)\right)\Rightarrow H^{s+t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(\tilde{\mathcal{T}};M\right). \tag{5}$$

令 $X\in\mathcal{C}$，并对每个 $P\in\mathcal{C}$，定义 $\mathbf{Rep}_G(P,\ \mathcal{G}(X)):=(\mathcal{G}(X)\ \backslash G)^P/C_G(P)$。将 [33,命题 5.7] 应用于 G-CW 复形 $\mathcal{G}(X)\backslash G$，得到如下收敛谱序列

$${}^{II}E_2^{u,v}:=\mathrm{Ext}^{u}_{\mathcal{R}\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(H_v\left(\mathrm{Rep}_G\left(-,\mathcal{G}\left(X\right)\right);\mathcal{R}\right),M\right)\Rightarrow H^{u+v}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(\mathcal{G}\left(X\right)\backslash G;M\right). \tag{6}$$

由于 $\mathcal{G}(X)\ \backslash G$（作为一个 CW-复形）只是一个离散点集，因此对每个 $P\in\mathcal{C}$，$\mathbf{Rep}_G(P,\ \mathcal{G}(X))$ 也具有同样的性质。由此可得，对每个 $v\geq 1$，$H_v(\mathbf{Rep}_G(-,\ \mathcal{G}(X));\mathcal{R})=0$。换言之，方程 (6) 的谱序列是锐的。我们推得

$$\mathrm{Ext}^{t}_{\mathcal{R}\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(H_0\left(\mathrm{Rep}_G\left(-,\mathcal{G}\left(X\right)\right);\mathcal{R}\right),M\right)\cong H^{t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(\mathcal{G}\left(X\right)\backslash G;M\right).$$

我们从 [30, 页（另见 [33, 命题 4.1]）得知，函子 $H_0(\mathbf{Rep}_G(-,\ \mathcal{G}(X));\mathcal{R})$ 实际上是将一切映到平凡 $\mathcal{R}$-模 $\mathcal{R}$ 的常值函子 $\mathcal{R}$ 从 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}\mathcal{G}(X))$ 到 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$ 的诱导。根据 Shapiro 同构（关于融合系统的一个版本，见 [33, 命题 4.8] ），可得

$$H^{t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(\mathcal{G}\left(X\right)\backslash G;M\right)\cong\lim^{t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}\mathcal{G}(X))}\left(M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}\mathcal{G}(X))}\right),$$

这里我们使用自然同构 $\mathbf{Ext}^{t}_{\mathcal{R}\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}\mathcal{G}(X))}(\mathcal{R},\ M)\cong\mathbf{lim}^{t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}\mathcal{G}(X))}(M)$。由假设可推得，方程 (5) 的谱序列是锐的。结论得证。 □

3 高阶极限的一个正合列

从现在起，我们将重点关注最简单的非平凡融合系统树。为此，我们引入以下记号。

记号 3.1。

1. 定义 $\mathcal{T}$ 为仅有两个顶点 $\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$ 和一条连接它们的边 $\boldsymbol{e}$ 的树。将 $\mathcal{T}$ 视为范畴时，对于 $i=1,\ 2$，我们用 $f_{\boldsymbol{ei}}$ 表示 $\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 之间唯一的态射。2. 设 $G_{\mathbf{1}}$、$G_{\mathbf{2}}$、$G_{\boldsymbol{e}}$ 为有限群，且有单态射 $\varphi_{\boldsymbol{i}}\colon G_{\boldsymbol{e}}\hookrightarrow G_{\boldsymbol{i}}$，满足 $p\nmid[G_{\mathbf{2}}\colon\varphi_{\mathbf{2}}(G_{\boldsymbol{e}})]$。特别地，$G_{\boldsymbol{e}}$ 的一个 Sylow p-子群经 $\boldsymbol{\varphi_{\mathbf{2}}}$ 映射到 $G_{\mathbf{2}}$ 的一个 Sylow p-子群。对于 $i=1$，同样的结论未必成立。3. 定义 $\mathcal{G}\colon\mathcal{T}\to\mathbf{Grp}$ 为函子，它将每个 $x\in\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 映为 $\mathcal{G}(x):=G_x$，并将 $f_{\boldsymbol{ei}}$ 映为 $\mathcal{G}(f_{\boldsymbol{ei}}):=\varphi_{\boldsymbol{i}}:G_{\boldsymbol{e}}\hookrightarrow G_{\boldsymbol{i}}$。4. 定义 $G=G_{\mathbf{1}}*_{G_{\boldsymbol{e}}}G_{\mathbf{2}}$ 为由单态射 $\varphi_{\boldsymbol{i}}$ 诱导的合并积。换言之，G 是 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{T}$ 上的余极限。5. 以自然方式将 $G_{\mathbf{1}}$、$G_{\mathbf{2}}$ 和 $G_{\boldsymbol{e}}$ 视为 G 的子群。特别地，$G_{\boldsymbol{e}}\leq G_{\mathbf{1}}$、$G_{\mathbf{2}}$。6. 设 $S_{\mathbf{1}}:=S\in\mathbf{Syl}_p(G_{\mathbf{1}})$，且 $S_{\mathbf{2}}:=S_{\boldsymbol{e}}:=S'\in\mathbf{Syl}_p(G_{\boldsymbol{e}})\subseteq\mathbf{Syl}_p(G_{\mathbf{2}})$。7. 定义 $\mathcal{F}\mathcal{G}$ 为从 $\mathcal{T}$ 到融合系统范畴的函子，它将每个 $x\in\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 映为 $\mathcal{F}\mathcal{G}(x):=\mathcal{F}_{S_x}(G_x)$。8. 对每个 $x\in\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$，定义 $\mathcal{F}_x:=\mathcal{F}\mathcal{G}(x)$。

借助此 因此，我们现在可以证明命题 2.2 的以下特例 1.

引理 3.2. 设 $\mathcal{C}$ 是 S 的一个子群族， $\mathcal{R}$ 是一个交换环， M 是一个$\mathcal{RO}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$-模。假设对于每个 $n\geq 1$ 和每个 $x\in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$，都有 <style>$\lim^{n}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_x)}\left(M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})(\mathcal{F}_x)}\right)=0$。那么

$$H^n_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(\tilde{\mathcal{T}};M\right)\cong\begin{cases}M^{\mathcal{F}} & if\ n=0\\ M^{\mathcal{F}_e}/\left(\overline{\iota^S_{S'}}\left(M^{\mathcal{F}_1}\right)+M^{\mathcal{F}_2}\right) & if\ n=1\\ 0 & else\end{cases},$$

其中 $M^{\mathcal{H}}:=\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})}M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{(\mathcal{F})\,\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})}$ 视具体情况被视为 $M(S)$ 或 $M(S')$ 的子群，而 $\iota^S_{S'}:M^{\mathcal{F}_1}\to M^{\mathcal{F}_e}$ 是泛映射。

证明。 定义 P_0 和 P_1 为从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{R}$-模的反变函子，满足

$$\begin{aligned}&P_0(\boldsymbol{e})=\mathcal{R}^2, && P_0(\mathbf{1})=P_0(\mathbf{2})=\mathcal{R},\\ &P_1(\boldsymbol{e})=\mathcal{R}, && P_1(\mathbf{1})=P_1(\mathbf{2})=0,\end{aligned}$$

且 $P_0(f_{e,i})$ 是在第 i 个分量上的自然包含。
令 $\mathcal{R}_$为从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{R}$-模的常值反变函子，它将所有对象映到 $\mathcal{R}$。定义自然变换 $\varepsilon:P_0\to\mathcal{R}$ 和 $\varphi:P_1\to P_0$，令

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{\boldsymbol{i}}(x)=x, && \varphi_{\boldsymbol{e}}(x\oplus y)=x+y,\\ &\varepsilon_{\boldsymbol{e}}(x)=x\oplus -x.\end{aligned}$$

于是 $0\to P_1\xrightarrow{\varphi}P_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathcal{R}_$是 $\mathcal{R}$ 的投射分解。利用该投射分解计算高阶极限，即可由命题 2.21 得出结果。□

现在我们可以证明以下命题。
命题 3.3。 设 $\mathcal{C}$ 是 S 的子群族，设 $\mathcal{R}$ 是一个交换环，且设 M 是一个 $\mathcal{RO}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$-模。假设对于每个 $n\geq 1$ 以及每个 $x\in\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$，都有 $\lim^{n}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_x)}\left(M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})\,\mathcal{F}_x)}\right)=0$。则以下结论成立：

1. 对于每个 $n\geq 1$，存在一个同构

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{RO}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(C_G^{p',p},M\right)\cong\lim^{n+2}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}(M).$$

2. 存在一个形如以下形式的正合列

$$0\to\lim^1_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}(M)\to M^{\mathcal{F}_e}/\left(\overline{\iota^S_{S'}}\left(M^{\mathcal{F}_1}\right)+M^{\mathcal{F}_2}\right)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{RO}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(C_G^{p',p},M\right)\to\lim^2_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}(M)\to 0.$$

˜证明。 设 $\mathcal{T}$ 是与 $(\mathcal{G}、\mathcal{T})$ 相关联的轨道图（见定义 2.9）。通过以自然方式将图视为 CW-˜复形，我们可以应用 [33, 命题 5.7]，取 $X=\mathcal{T}$，从而得到收敛的谱序列

$${}^{II}E_2^{s,t}:=\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{RO}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(H_t\left(\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-,\mathcal{FG})\right),M\right)\Rightarrow H^{s+t}:=H^{s+t}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})}\left(\tilde{\mathcal{T}};M\right),$$

˜这里我们应用引理 2.14，以便将函子 $\mathcal{T}^-/C_G(-)$ 替换为函子 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(-,\mathcal{FG})$（更确切地说，是将其限制到 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$ 上）。

由推论 2.15，我们知道 ${}^{II}E^{s}_{,2}{}^{0} \cong \mathrm{Ext}^{s}_{\mathbb{F}_p\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\left(\mathbb{F}_p, M\right) \cong \lim^{s}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(M)$，并且 ${}^{II}E^{s}_{,2}{}^{t} = 0$对每个 $t \geq 2$ 都成立。利用上述谱序列，我们可以推得（见 [32, 习题 5.2.2]），存在如下形式的长正合列

$$\cdots \to H^n \to \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{R}\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\left(C_G^{p',p}, M\right) \to \lim\nolimits^{n+1}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(M) \to H^{n+1} \to \cdots . \tag{7}$$

该结果由引理 3.2 得出。 □

注 3.4。 在命题 3.3 的证明中，为了证明融合 Bredon 上同调 $H^n_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{F})}\left(\tilde{\mathcal{T}};\, M\right)$ 对 $n \geq 2$消失，我们用到了这样一个事实： $\mathcal{T}$是仅有两个顶点的树。在更
一般的情形中，$(\mathcal{T}, \mathcal{G})$ 是任意一个 p-局部群树。我们知道，若 $\lim^{n}_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{F}\mathcal{G}(X))}\left(M\downarrow^{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{F})\,\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{F}\mathcal{G}(X))}\right)$ $=0$ 对每个 $X \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{T})$ 及每个 $n \geq 1$，该 Bredon 上同调可以视为高阶极限 $\lim^{n}_{\mathcal{T}}\left(\lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{F}\mathcal{G}(-))}\left(M\downarrow^{\mathcal{O}_\mathcal{C}}_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{F})\ (\mathcal{F}\mathcal{G}(-))}\right)\right)$ （见命题 2.21）。因此，在这个更一般的情形下，我们仍然得到方程 (7) 中的长正合列，但本文不涉及对 H^n 的进一步简化。
由命题 3.3 可立即得出推论，从而现在可以给出定理 A 的证明。

定理 *A* 的证明。 由 [33, 命题 10.5] （另见 [6, 推论 3.6]）可知，对于每个$\mathcal{H} \in \{\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_e\}$ 以及每个 $n \geq 0$

$$\lim\nolimits^{n}_{\mathcal{O}(\mathcal{H}^c)}\left(M^*\downarrow^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\right) \cong \lim\nolimits^{n}_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{H})}\left(M^*\downarrow^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{H})}\right).$$

由 [12, 定理 B] 可知，对于每个 $n \geq 1$ 以及每个 $\mathcal{E} \in\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_e\}$，$\lim^{n}_{\mathcal{O}(\mathcal{E}^c)}\left(M^*\downarrow^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}\ \mathcal{F}^c\,()}\right) = 0$。
结论由命题 3.3 得出。

□

定理 A 告诉我们，在 ${C^{p'}_{,G}}^{p}(P) = 0$对每个 $P \in \mathcal{C}$成立的情形下，$\lim^{i}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(H^j(-;\, \mathbb{F}_p)) = 0$对每个 $i \geq 2$ 和每个 $j \geq 0$都成立。因此，为了证明定理 B，我们只需证明第一个高阶极限也消失。为此，我们先回顾下面这个众所周知的结果。

引理 3.5 ([32, 练习 5.2.1（对偶）])。 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个阿贝尔范畴，且令 ${E^{s}_{,2}}^{t} \Rightarrow H^{s+t}$ 为 $\boldsymbol{A}$中的一个上同调谱序列。假设 ${E^{s}_{,2}}^{t} = 0$ 对每个 $s \notin \{0, 1\}$均成立。对每个 $n \in \mathbb{Z}$，存在如下形式的短正合列

$$0 \to E_2^{1,n-1} \to H^n \to E_2^{0,n} \to 0.$$

由引理 3.5 可得如下结论。

引理 3.6。 设 $\mathcal{F}$是一个饱和融合系统。假设对每个 $j \geq 0$和每个 $i \geq 2$，$\lim^{i}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\left(H^j\left(-;\mathbb{F}_p\right)\right) = 0$。则对每个 $j \geq 0$，$\lim^{1}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\left(H^j\left(-;\mathbb{F}_p\right)\right) = 0$。

ˆ证明。 由于 $\mathcal{F}$是饱和的，因此我们可以取 $\mathcal{F}$的中心化链接系统 $\mathcal{L}$，并定义 $B\mathcal{F} := |\mathcal{L}|_p$。由 [6,命题 2.2], 可知，存在如下形式的 Bousfield-Kan 谱序列

$$\lim\nolimits^{i}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\left(H^j\left(-;\mathbb{F}_p\right)\right) \Rightarrow H^{i+j}\left(B\mathcal{F};\mathbb{F}_p\right).$$

From 由引理 3.5，我们对每个 $n \geq 1$ 都得到如下形式的短正合列

$$0 \to \lim\nolimits^{1}_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\left(H^{n-1}\left(-;\mathbb{F}_p\right)\right) \to H^n\left(B\mathcal{F};\mathbb{F}_p\right) \to \lim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}\left(H^n\left(-;\mathbb{F}_p\right)\right) \to 0.$$

由 [6, 引理 5.3], 可知，对每个 $n \geq 0$，$\lim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(H^n(-;\, \mathbb{F}_p)) \cong H^n(B\mathcal{F};\, \mathbb{F}_p)$。由于 $\lim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}(H^n(-;\mathbb{F}_p))$ 是有限生成的 $\mathbb{F}_p$-模，因此是有限的，我们推得上述短正合列中的满射实际上是一个同构。结论得证。

□

The定理 B 现在是定理 A 和引理 3.6 的直接推论。

4 尖锐性　　一些由合并积得到的融合系统　　S

本节旨在将定理 A 和定理 B 应用于研究三类融合系统。具体而言，我们利用定理 B 证明定理 C（见命题 4.5 和 4.8），从而表明 Clelland-Parker 融合系统和 Parker-Stroth 融合系统都具有尖锐性。此外，我们利用定理 A 证明定理 D（见第 4.3 小节），从而将 Benson-Solomon 融合系统的轨道范畴上的高阶极限与 [1] 中描述的这些融合系统的信号子函子联系起来。

4.1 Clelland-Parker 融合系统

Clelland 和 Parker 在 [10] 中描述了两个可按如下方式构造的无限族融合系统。

设 p 为奇素数，q 为一个 p次幂，$2 \le n \le p-1$ 为自然数，并令 $k := \mathbb{F}_q$。条件 $n \ge 2$ 并未排除任何 Clelland-Parker 异态融合系统（参见 [10, 定理 5.1 和 5.2，以及引理 5.3]）。

定义 $D := k^* \times \mathrm{GL}_2(k)$，并将 $A := A(n,k)$ 定义为由两个变量的齐次多项式构成的群，其次数为 n，系数取自 k。群 D 通过 $f(x,y)\cdot\left(\lambda, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \lambda f(ax+by, cx+dy)$ 的作用作用于 A。这使我们能够定义半直积 $P := P(n,k) = D \ltimes A$，并取一个 Sylow p-子群 $S := UA$，其中 $U \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} : a \in k \right\}$ 被视为 D的 Sylow p-子群。最后，对每个 $i = 0, \dots, n$，令 $C_i := \left\{ \sum_{j=0}^{n} \lambda_k x^{n-j} y^j \right\}$，并定义子群 $R = UC_0$和 $Q = UC_1$。等价地，R 和 Q 定义为

$$R = \left\{ \left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \lambda x^n + \mu x^{n-1} y \right) : \lambda, \mu, a \in k \right\},$$
$$Q = \left\{ \left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \lambda x^n + \mu x^{n-1} y + \nu x^{n-2} y \right) : \lambda, \mu, \nu, a \in k \right\}.$$

如 [10, 第 296] 页所述，P 中 R 和 Q 的正规化子满足

$$N_P(R) = \left\{ \left(\theta, \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}, \lambda x^n + \mu x^{n-1} y \right) : \lambda, \mu, c \in k \wedge \theta, a, b \in k^* \right\}, \tag{8}$$
$$N_P(Q) = \left\{ \left(\theta, \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}, \lambda x^n + \mu x^{n-1} y + \nu x^{n-2} y \right) : \lambda, \mu, \nu, c \in k \wedge \theta, a, b \in k^* \right\}.$$

结果表明（见 [10, 引理 4.6]），存在子群 $P_R \le G_R := \mathrm{GL}_3(k)$ 和 $P_Q \le G_Q := \mathrm{GSp}_4(k)$，并且对于 $X \in \{R, Q\}$，存在单态射 $\psi_X \colon N_P(X) \to P_X$，它们将 $N_P(X)$ 映到 G_X 的一个 Borel 子群，并将 X 映到 P_X 的一个正规子群。利用这些单态射，Clelland 和 Parker 构造了合并积

$$F_X := F(1, n, k, X) = P *_{N_P(X)} P_X.$$

定义 $S_X := N_S(X) \in \mathrm{Syl}_p(P_X)$、$L := N_{O^{p'}(P_X)}(S_X)$ $O^{p'}(P)$ 和 $L_X := (L \cap P_X)$ $O^{p'}(P_X)$，将它们视为 F_X 的子群。然后我们可以进一步定义 F_X 的子 amalgam

$$F_X^* := F(q-1, n, k, X) := L *_{L \cap L_X} L_X.$$

通过将 F_X^*和 $N_P(X)$ 视为 F_X 的子群，可以证明（见 [10, 第 296 页以及引理 4.7]），$F_X = N_P(X)$ F_X^*，并且 $F_X / F_X^* \cong N_P(X)$ $/(L \cap L_X) \cong k^*$。因此，对于每个 $r | (q-1)$，我们

可以取 $x \in N_P(X)$，使其在 $N_P(X)$ 上的投影 $x\ /(L \cap L_X)$ 的阶为 ord $(x) = \frac{q-1}{r}$。因此，我们可以定义 $P_r = L\langle x\rangle$ 和 $P_{X,\,r} := L_X\langle x\rangle$，并通过将它们视为 F_X 的子群，得到 F_X 的子 amalgam

$$F(r,n,k,X) := P_r *_{P_r \cap P_{X,r}} P_{X,r}, \tag{9}$$

这是包含 F_X^* 且指数为 r 的 F_X 的唯一子群。最后，Clelland-Parker 融合系统定义为

$$\mathcal{F}(r,n,k,X) := \mathcal{F}_S(F(r,n,k,X)).$$

以下是这些融合系统的一些有用性质。

引理 4.1。设 $X \in \{R,Q\}$ 且令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(r,n,k,X)$。则以下结论成立：

1. A 是 $\mathcal{F}$-中心化的。*2.* 对于每个 $Y \cong_{\mathcal{F}} X$，存在 $a \in P$ 使得 $Y = X^a$。*3.* X 是 $\mathcal{F}$-中心化的。

证明。由 [10, 引理 4.2(iv)] 可知，A 是 S 中阶最大的唯一阿贝尔子群。特别地，它既是弱 $\mathcal{F}$-闭的，也是 S-中心化的。因此，我们得到 A 是 $\mathcal{F}$-中心化的，从而证明了第 (1) 项。

设 Y 是 X 的一个 $\mathcal{F}$-共轭元。由于 $\mathcal{F}$ 由公式 (9) 中的合并积实现，存在 $n \geq 0$ 以及元素 $a_0,\ldots,a_n \in P_r$ 和 $b_1,\ldots,b_n \in P_{X,r}$，使得 $Y = X^{a_0 b_1 a_1 b_2 \cdots a_n}$。定义 $B_0 := X$，并且对于每个 $i \geq 1$，定义 $A_i := B_{i-1}^{a_{i-1}}$ 和 $B_i := A_i^{b_i}$。特别地，$Y = A_{n+1}$。

由 [26, 引理 1], 可知，对于每个 $i = 0,\ldots,n$，都有 $A_i, B_i \leq P_r \cap P_{X,r} \leq N_P(X)$。由于 X 在 P_X 中正规，若 $a_0 \in N_P(X)$，则 $X = B_1$。因此，取 n 为极小值后，不失一般性，可以假设 $a_0 \notin N_P(X)$。利用给出的 $N_P(X)$ 描述（见公式 (8)），容易看出，对每个 $a \in P$，要么 $a \in N_P(X)$，要么 $X^a \not\leq N_P(X)$。由此得出 $A_1 \not\leq N_P(X)$，因此 $n = 0$ 和 $Y = A_1$。特别地，Y 通过 $a_0 \in P$ 与 X 共轭，从而证明了条目 (2)。

由于 X 在 P 中是 p-中心化的（见 [10, 引理 4.4(ii)]），因此，包含在 S 中的每个 X 的 P-共轭都是 S-中心化的。特别地，条目 (3) 由条目 (2) 推出。 □

让我们回顾以下众所周知的结果。

命题 4.2. 设 S 是有限的 p-群，$\mathcal{F}$ 是定义在 S 上的饱和融合系统，且 $Q \leq S$ 在 $\mathcal{F}$ 中正规。那么，S 的任意 $\mathcal{F}$-中心化-根子群都包含 Q。

证明。参见 [11, 命题 4.46]。 □

由此可得以下结果。

引理 4.3. 设 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(r,n,k,X)$，令 $\mathcal{C} = \mathcal{F}^c$ 为 S 的 $\mathcal{F}$-中心化子群族，令 M^* 为一个定义在 $\mathcal{F}$ 上、系数取自 $\mathbb{F}_p$ 的 *Mackey* 函子的逆变部分，并记 $M := M^* \downarrow^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}\mathcal{F}}()$。那么，对于每个 $i \geq 1$ 以及每个 $\mathcal{H} \in \{\mathcal{F}_S(P_r)\ \ \mathcal{F}_{S_X}(P_r \cap P_{X,r})\ \ \mathcal{F}_{S_X}(P_{X,r})\}$，均有 $\lim^i_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})}\left(M \downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})(\mathcal{H})}\right) = 0$。

证明。由于 $X \leq S_X$ 在 P_X 中正规（因此也在 $P_{X,r}$ 和 $P_r \cap P_{X,r}$ 中正规），所以它在融合系统 $\mathcal{F}_{S_X}(P_{X,r})$ 和 $\mathcal{F}_{S_X}(P_r \cap P_{X,r})$ 中正规。由命题 4.2 可知，每个 $Y \in (\mathcal{F}_{S_X}(P_{X,r}))^{\mathrm{cr}} \cup (\mathcal{F}_{S_X}(P_r \cap P_{X,r}))^{\mathrm{cr}}$ 都包含 X；因此，根据引理 4.1(3)，它是 $\mathcal{F}$-中心化的。由于 A 在 P 中正规，根据引理 4.1(1)，还可得 $(\mathcal{F}_S(P_r))^{\mathrm{cr}} \subseteq \mathcal{F}^{\mathrm{c}}$。

由 [33, 命题 10.5]（另见 [6, 推论 3.6]）可知，对于每个 $i \geq 0$，$\lim^i_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})} M \downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{(\mathcal{F})\,\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})} = \lim^i_{\mathcal{O}(\mathcal{H}^c)} M \downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{(\mathcal{F})\,\mathcal{O}(\mathcal{H}^c)}$。由于 $\mathcal{H}$ 是一个可实现融合系统，结论由 [12, 定理 B] 得出。 □

固定 r、 n、 k和 X，并定义 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(r, n, k, X)$。采用记号 3.1，令 $S' = S_X$、 $G_{\mathbf{1}} = P_r$、 $G_{\mathbf{2}} = P_{X,r}$ 和 $G_{\boldsymbol{e}} = P_r \cap P_{X,r}$。特别地，我们有

$$\mathcal{F}_{\mathbf{1}} = \mathcal{F}_S(P_r), \qquad \mathcal{F}_{\mathbf{2}} = \mathcal{F}_{S_X}(P_{X,r}), \qquad \mathcal{F}_{\boldsymbol{e}} = \mathcal{F}_{S_X}(P_r \cap P_{X,r}),$$

˜和 $G = \mathcal{G}_{\mathcal{T}} = F(r,\ n,\ k,\ X)$。设 $\mathcal{T}$为与群树 $(\mathcal{T},\ \mathcal{G})$ 相关联的轨道图。那么有如下结果

引理 4.4. 对于每个 $Y \in \mathcal{F}^c$，树 $\tilde{\mathcal{T}}^Y$ 都是有限的。

证明。 这正是 [10, 定理 4.9] 中证明的内容。 □

现在我们可以证明定理 C 的前半部分。

命题 4.5. 设 $\mathcal{F}$为一个 *Clelland-Parker* 融合系统， M^*为 $\mathcal{F}$ 上的一个 *Mackey* 函子的逆变部分，其系数取自 $\mathbb{F}_p$，并记 $M{:}\ = M^* \downarrow_{\mathcal{O}\ \mathcal{F}^c()}^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}$。那么，对于每个 $i \geq 2$，$\lim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}^{i}(M) = 0$，而

$$\lim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}^{1}(M) = M^{\mathcal{F}_{\boldsymbol{e}}} / \left(\overline{\iota_{S'}^{S}}\left(M^{\mathcal{F}_{\mathbf{1}}}\right) + M^{\mathcal{F}_{\mathbf{2}}}\right).$$

此外，对于每个 $i \geq 1$ 和每个 $j \geq 0$，$\lim_{\mathcal{O}\ \mathcal{F}^c()}(H^j(-;\ \mathbb{F}_p)) = 0$。

证明。 由引理 4.4 可知，对于每个 $Y \in \mathcal{F}^{\mathrm{c}}$， $\tilde{\mathcal{T}}^Y$ 都是有限的。由 [10, 引理 3.3] 可知， $\tilde{\mathcal{T}}^Y / C_G(Y)$ 是一棵树，因此 $C^{p'}{}_{,\ G}{}^{p}(Y) = 0$。由定理 B 即得结论。 □

4.2 Parker-Stroth 融合系统。

在 [24] 中，Parker 和 Stroth 描述了一族异态融合系统。与第 4.1 小节中描述的 Clelland-Parker 融合系统一样，这一族系统也与作用在二元齐次多项式上的某个作用相关。然而， [24] 中使用的记号不同于 [10] 和第 4.1 小节中使用的记号。为了与我们的记号保持一致，我们在下面对 Parker-Stroth 融合系统的描述中略微修改了 [24] 的记号。希望将本文档与 [24] 进行比较的读者，可能会发现下面的记号转换表很有用。

描述	我们的记号	[24]中的记号
k 元素域	$\mathbb{F}_k$ 或 k	$\mathbb{F}$
可逆元素群	$\mathbb{F}_k^*$ 或 k^*	$\mathbb{F}^\times$
n 齐次多项式 在两个变量中 k	$A(n,\ k)$	V_n
齐次多项式的次数	n	m
群 $k^* \times \mathrm{GL}_2(k)$	D	L
p的 Sylow 子群	U	S_0

[24] 和第 4.1 小节中符号 P、 X、 G、 S 和 Q 的用法也有所不同。在本小节中，我们将赋予 G、 S 和 Q 在 [24] 中使用的含义，并限制其他符号的用法，以避免混淆。

设 $p \geq 5$ 为一个素数，设 $n = p - 4$，定义 $A{:=}\ A(n,\ p)$，并定义 $\beta_n{:}\ A \times A \to p$ 为满足以下条件的双线性形式

$$\beta_n\left(x^a y^b, x^c y^d\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^a}{\binom{n}{a}} & \text{if } a = d \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

集合 $Q := A \times \ \mathbb{F}_p$ 可以通过将乘积定义为.....来赋予非阿贝尔群结构

$$(v, y)(w, z) = (v + w, y + z + \beta_n(v, w)).$$

按第 4.1 小节中的定义，定义群 $D:=\mathbb{F}_p^*\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$。存在 D 对 Q 的右作用，其定义如下：对于每个 $(v,\ y)\in Q$ 和每个 $(t,\ M)\in D$

$$(v,y)\cdot(t,M):=\left(v\cdot(t,M),t^2\det(M)^n z\right),$$

这里，D 在 A 上的作用与第 4.1 小节中的相同。在 [24, 引理2.3和定理 2.9] 中，Parker 和 Stroth 证明了

$$C_D(Q)=\left\{\left(\mu^{-n},\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\right):\mu\in\mathbb{F}_p^*\right\},\tag{10}$$

并且群 $P_1:=(D\ltimes Q)/C_D(Q)$包含一个与该子群同构的子群

$$C:=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \alpha & \theta & 0\\ \delta & \varepsilon & \theta^{-1}\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_p)\right\},$$

of

$$K:=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \delta & \varepsilon & \phi\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_p)\right\}.$$

利用这个同构，可以定义合并积 $G=P_1*_C K$，并将 K、C和 P_1 视为 G的子群。按照第 4.1 小节中的方式取 $U\in \mathrm{Syl}_p(D)$，我们还可以定义 $S:=(UQC_D(Q))/C_D(Q)\leq P_1$ 以及 $S':=S\cap C$（在 [24]中记为 D）。事实证明（见 [24, 第 320] 页），S 是P_1 的一个 Sylow p-子群，而 $S'\cong p_+^{1+2}$是 C 和 K的 Sylow p-子群。此外，融合系统 $\mathcal{F}:=\mathcal{F}_S(G)$是饱和的（见 [24, 引理 3.2(iii)]），且是异态的（见 [24, 引理 3.4]）。我们将以这种方式构造的任意融合系统 $\mathcal{F}$称为 Perker-Stroth融合系统。

有了这些记号，我们现在可以证明如下结论。

引理4.6。设 $\mathcal{C}$是 $\mathcal{F}$-中心化子群 S的族，设 M^*是一个在 $\mathcal{F}$上的、系数取自 $\mathbb{F}_p$ 的 ***Mackey*** 函子的逆变部分，并记 $M:=M^*\downarrow^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}\mathcal{F}()}$。则对于每个 $i\geq 1$ 以及每个 $\mathcal{H}\in\{\mathcal{F}_S(P_1)\ \ \mathcal{F}_{S'}(C)\ \ \mathcal{F}_{S'}(K)\}$, 有$\lim^i_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})}\left(M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})(\mathcal{H})}\right)=0$。

证明。沿用 [24, 第 320], 页的记号，我们定义 $W:=O_p(K)$。由于 W是 K 的正规子群，且 $W\leq S'$，因此 W 是 $\mathcal{F}_{S'}(K)$的正规子群。由命题 4.2可知，$(\mathcal{F}_{S'}(K))^{\mathrm{cr}}$中的每个子群都包含 W。由于 W $\mathcal{F}$-中心化（见 [24, 引理 3.3]），可得 $(\mathcal{F}_{S'}(K))^{\mathrm{cr}}\subseteq\mathcal{F}_{\mathrm{c}}$。由于 $W\leq C\leq K$，同样的论证表明每个 $(\mathcal{F}_{S'}(C))^{\mathrm{cr}}\subseteq\mathcal{F}^{\mathrm{c}}$。

我们从 [24, 第 320] 页得知 $(QC_D(Q))/C_D(Q)=O_p(P_1)$。由于 $C_D(Q)$ 是一个 p-素数群（见公式（10）），通过自然同构可得 $S\cong UQ$，该同构还将 $(QC_D(Q))/C_D(Q)$ 映射为 Q。直接计算表明，Q 在 UQ 中是中心化的。由此得出，$O_p(P_1)$ 是 $\mathcal{F}_S(P_1)$-中心化的。由于 $|O_p(P_1)|\geq|S'|$，且 $\mathcal{F}=\langle\mathcal{F}_S(P_1)\ \ \mathcal{F}_{S'}(K)\rangle$（见 [26, 定理 1]），因此 $\mathcal{F}$ 中与 $O_p(P_1)$ 共轭的 S 的每个子群，在 $\mathcal{F}_S(P_1)$ 中也共轭。特别地，$O_p(P_1)$ 是 $\mathcal{F}$-中心化的。由于 $O_p(P_1)$ 在 $\mathcal{F}_S(P_1)$ 中也是正规的（因为它在 P_1 中正规），由命题 4.2 可得，每个 $(\mathcal{F}_S(P_1))^{\mathrm{cr}}\subseteq\mathcal{F}^{\mathrm{c}}$。

由 [33, 命题 10.5]（另见 [6, 推论 3.6]）可知，对于每个 $i\geq 0$，$\lim^i_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})}M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})}=\lim^i_{\mathcal{O}(\mathcal{H}^c)}M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{\mathcal{O}(\mathcal{F})\mathcal{O}(\mathcal{H}^c)}$。由于每个 $\mathcal{H}$ 都是可实现融合系统，因此由 [12, 定理 B]即可得到该结果。

□

按照第 4.1 小节中的做法，我们现在可以采用记号 3.1，其中 $G_{\mathbf{1}}=P_1$、$G_{\mathbf{2}}=K$ 和 $G_{\boldsymbol{e}}=C$。特别地，我们有

$$\mathcal{F}_{\mathbf{1}}:=\mathcal{F}_S(P_1),\qquad \mathcal{F}_{\mathbf{2}}:=\mathcal{F}_{S'}(C),\qquad \mathcal{F}_{\boldsymbol{e}}:=\mathcal{F}_{S'}(K),$$

˜ 和 $G = \mathcal{G}_{\mathcal{T}} = P_1 *_C K$。令 $\mathcal{T}$ 为与群树（$\mathcal{T}$， $\mathcal{G}$）相关联的轨道图。那么有如下结论

引理 4.7。 对于每个 $Y \in \mathcal{F}^c$，树 $\tilde{\mathcal{T}}^Y$ 都是有限的。

证明。由于 S 的每个 $\mathcal{F}$-中心化子群的阶至少为 2，由 [24, 引理 3.2] 可得结论。现在我们可以证明定理 C 的后半部分。

命题 4.8。 设 $\mathcal{F}$ 是一个 *Parker-Stroth* 融合系统， M^* 是 $\mathcal{F}$ 上取值于 $\mathbb{F}_p$、系数为 $\mathbb{F}_p$ 的 *Mackey* 函子的逆变部分，并记 $M\colon = M^* \downarrow_{\mathcal{O}^{\mathcal{F}^c}()}^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}$。那么，对于每个$i \geq 2$，都有$\lim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}^{i}(M) = 0$，其中

$$\lim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)}^{1}(M) = M^{\mathcal{F}_e} / \left(M^{\mathcal{F}_1} \overline{\iota_{S'}^{S}} + M^{\mathcal{F}_2} \right).$$

此外，对于每个 $i \geq 1$ 以及每个 $j \geq 0$，都有$\lim_{\mathcal{O}^{\mathcal{F}^c}()}^{i}(H^j(-;\ \mathbb{F}_p)) = 0$。

证明。 由引理 4.7 可知，对于每个 $Y \in \mathcal{F}^{\mathrm{c}}$， $\tilde{\mathcal{T}}^Y$ 都是有限的。由 [10, 引理 3.3] 可知， $\tilde{\mathcal{T}}^Y / C_G(Y)$ 是一棵树，因此 $C^{p'}{}_{,\ G}{}^{p}(Y) = 0$。由定理 B 得出结论。 □

备注 4.9。命题 4.8 是 [16, 定理 A] 的一个特例，而此类融合系统的分类见 [23, 定理 1.1]。另一种证明见 [20, 定理 1.1 和 5.2(d)] 。

4.3 Benson-Solomon 融合系统

迄今为止，Benson-Solomon 融合系统是已知的唯一一类定义在素数 2 上的奇异融合系统。以下沿用 Aschbacher 和 Chermak 在 [1], 中采用的群论方法来定义它们。

设 $\overline{\mathbb{F}_5}$ 为含 5 个元素的有限域的代数闭包，并令 $\mathbf{F}_5 \subseteq \mathbb{F}_5$ 为 $\mathbb{F}_5$ 中所有阶为$\overline{5^{2^n}}$（其中 $n \geq 0$）的子域之并。定义 $B^0 := (\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_5))^3 / \langle -(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \rangle$，令 S_3 以显然的方式作用于 B^0，并定义半直积

$$B := \langle (1,2) \rangle \ltimes B^0, \qquad\qquad K := \mathrm{Sym}(3) \ltimes B^0,$$

因此我们将 B 视为 K的子群。可以（参见 [1, 定理 A]）取 $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{F}_5)$ 中一个由 H 的 $\mathbf{F}_5$-有理点组成的群，以及一个单态射 $\overline{\lambda^*}\colon B \to H$，使得所得合并积 $G := H *_B K$具有一个自同构 ψ_0，满足以下条件:

1. ψ_0 的每个形如 $\sigma = \psi_0^{2^n}$ 的幂都保持G的子群 H、 K 和 B 不变。特别地，$G_\sigma = H_\sigma *_{B_\sigma} K_\sigma$，其中下标 σ 表示在 σ作用下保持不动的元素所组成的子群。2. 群 H_σ同构于 $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{F}_{5^{2^n}})$，子群 B_σ和 K_σ是有限的， $K_\sigma = B_\sigma \langle (1,\ 2,\ 3) \rangle$和 $B_\sigma = B_\sigma^0 \langle (1,\ 2) \rangle$。3. 存在一个 2-子群 $S \leq B$，使得 $S_\sigma \leq B$ 是 B_σ、 K_σ 和 H_σ 的 Sylow 2- 子群。4. 融合系统 $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{S_\sigma}(G_\sigma)$ 是 Benson-Solomon 融合系统 $\mathcal{F}_{\mathrm{Sol}}(5^{2^n})$。特别地，所有 Benson-Solomon 融合系统都具有这种形式（参见 [9,定理 B]）。5. 存在一个正规子群 $X \trianglelefteq G$，使得对于 S_σ的每个子群 P，集合

$$\theta_\sigma(P) := C_{X_\sigma}(P)\, \mathcal{O}(C_{G_\sigma}(P)),$$

是 $C_{G_\sigma}(P)$ 的子群。此外， $\theta_\sigma(P)$ 是 $C_{G_\sigma}(P)$ 中 $Z(P)$ 的补（见 [1, 定理 8.8]）。换言之， θ_σ 是 G_σ 的信号子函子（见 [1, 定义 2.5]）。

由此我们得到如下结果。

引理 4.10. 设 $\mathcal{C}$ 是 S_σ 的 $\mathcal{F}_\sigma$-中心化子群族，M^* 是一个取值于 $\mathbb{F}_2$、定义在 $\mathcal{F}_\sigma$ 上的 *Mackey* 函子的逆变部分，并记 $M{:}=M^*\downarrow^{\mathcal{O}(\mathcal{F})}_{\mathcal{O}^{\mathcal{C}}\mathcal{F}()}$。那么，对于每个 $i\geq 1$ 以及每个 $\mathcal{H}\in\{\mathcal{F}_{S_\sigma}(H_\sigma)\ \ \mathcal{F}_{S_\sigma}(B_\sigma)\ \ \mathcal{F}_{S_\sigma}(K_\sigma)\}$，都有 $\lim^{i}_{\mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{H})}M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{(\mathcal{F})\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})}=0$。

证明。为简化记号，在整个证明中，我们用 $\mathcal{F}_X=\mathcal{F}_{S_\sigma}(X_\sigma)$ 表示 $X\in\{H,B,K\}$，并且对于每个 $A,B,C\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_5)$，我们用 $[\![A,B,C]\!]$ 表示商群 B^0 中的任意一个元素。
设 $Z=Z(S_\sigma)=[\![\mathrm{Id},\mathrm{Id}\ -\mathrm{Id}]\!]$。由 [1, 命题 9.2] 可知 $\mathcal{F}_H=C_{\mathcal{F}_\sigma}(Z)$。由于 $B_\sigma=K_\sigma\cap H_\sigma$，且 K_σ 中的元素 (1, 2, 3) 不中心化 Z，因此我们得出 $\mathcal{F}_B=C_{\mathcal{F}_K}(Z)$。由 [6, 命题 2.5] 可知 $\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_\sigma=\mathcal{F}\mathrm{c}_H$，且 $\mathcal{F}\mathrm{c}_K=\mathcal{F}\mathrm{c}_B$。特别地，由于 $\mathcal{F}_H\subseteq\mathcal{F}_\sigma$和$\mathcal{F}_B\subseteq\mathcal{F}_K$，因此 $\mathcal{F}\mathrm{cr}_H\subseteq\mathcal{F}\mathrm{cr}_\sigma\subseteq\mathcal{F}\mathrm{c}_\sigma$，且 $\mathcal{F}\mathrm{cr}_B\subseteq\mathcal{F}\mathrm{cr}_K$。$\mathcal{F}\mathrm{cr}_K$ 中的元素列于 [1, 引理 10.2]。另一方面，[1, 引理 10.9] 告知我们，这些子群也都是 $\mathcal{F}_\sigma$-中心化-根基子群，尤其是 $\mathcal{F}_\sigma$-中心化子群。
由 [33, 命题 10.5]（另见 [6, 推论 3.6]）可知，对于每个 $i\geq 0$，$\lim^{i}_{\mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{H})}M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{(\mathcal{F})\mathcal{O}(\mathcal{C}(\mathcal{H})}=\lim^{i}_{\mathcal{O}(\mathcal{H}^{\mathcal{C}})}M\downarrow^{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_{(\mathcal{F})\mathcal{O}(\mathcal{H}^{\mathcal{C}})}$。由于每个 $\mathcal{H}$ 都是可实现融合系统，因此由 [12, 定理 B] 可得结论。

□

备注 4.11。读者或许不会立刻看出，S_σ 中 [1, 引理 10.2] 所列出的 $\mathcal{F}_K$-中心根子群，也列在 [1, 引理 10.9] 中。还可以通过 [22, 表 1、表 2 和 4] 中列出的所有此类子群的完整清单，另行证明 S_σ 的所有 $\mathcal{F}_K$- 中心根子群都是 $\mathcal{F}_\sigma$- 中心根子群。

引理 4.10 使我们能够将定理 A 应用于 Benson-Solomon 融合系统。根据信号子函子的定义，我们还知道 $\theta_\sigma(P)\cong C_{G_\sigma}(P)/Z(P)$。定理 D 现可由命题 2.17 得出。

参考文献

[1] Michael Aschbacher 和 Andrew Chermak. “通过群论方法研究由 Levi 和 Oliver 构造的一族 2-局部有限群”。载于：《数学年刊》171.2 (2010)，第 881–978 页。[2] Michael Aschbacher、Radha Kessar 和 Bob Oliver.《代数与拓扑中的融合系统》。第 391 卷。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，2011。[3] Hyman Bass. “群图的覆盖理论”。载于：《纯粹与应用代数杂志》89.1–2 (1993)，第 3–47 页。[4] Aldridge K. Bousfield 和 Daniel M. Kan.《同伦极限、完备化与局部化》。第 304 卷。数学讲义。施普林格出版社，柏林，1972。[5] Carles Broto、Ran Levi 和 Bob Oliver. “饱和融合系统的几何构造”。载于：《高山同伦理论选集》(2006)，第 11–40 页。[6] Carles Broto、Ran Levi 和 Bob Oliver. “融合系统的同伦理论”。载于：《美国数学学会杂志》16.4 (2003)，第 779–856 页。[7] Guille Carrión S. 和 Antonio Díaz. “偏序集上的 Mackey 函子”。载于：《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院杂志》119.40 (2025)。[8] Andrew Chermak. “融合系统与局部群”。载于：《数学学报》211.1 (2013)，第 47–139 页。[9] Andrew Chermak、Bob Oliver 和 Sergey Shpectorov. “Solomon 2-局部有限群的连接系统是单连通的”。载于：《伦敦数学学会会刊》97.3 (2008)，第 209–238 页。[10] Murray Clelland 和 Chris Parker. “两族奇异融合系统”。载于：《代数学杂志》323 (2010)，第 287–304 页。

[11] David A. Craven.《融合系统理论：代数方法》。第 131 卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2011。[12] Antonio Díaz 和 Sejong Park. “融合系统的 Mackey 函子与尖锐性”。载于：《同调、同伦与应用》17.1 (2015)，第 147–164 页。[13] Antonio Díaz、Albert Ruiz 和 Antonio Viruel. “奇素数下的所有 p秩二 p局部有限群”。载于：《美国数学会汇刊》359.4 (2007)，第 1725–1764 页。[14] William G. Dwyer. “有限群分类空间的尖锐同调分解”。载于：《群表示：上同调、群作用与拓扑》。第 63 卷。《纯粹数学研讨会论文集》。美国数学会，普罗维登斯，1998，第 197–220 页。[15] George Glauberman 和 Justin Lynd. “融合系统中心轨道范畴上的上同调”。载于：《数学基础》269.2 (2025)，第 187–199 页。[16] Valentina Grazian 和 Ettore Marmo. “Sylow p-子群上的饱和融合系统的尖锐性 $G_2(p)$”。载于：《同调、同伦与应用》25.2 (2023)，第 329–342 页。[17] Valentina Grazian 和 Chris Parker. “极大类 p-群上的饱和融合系统”。载于：《美国数学会回忆录》307.1549 (2025)。[18] Valentina Grazian 等. “与 $SL_2(q)$ 的多项式表示相关的融合系统”。载于：预印本：arXiv: 2502.20873 (2025)。[19] Allen Hatcher.《代数拓扑》。剑桥：剑桥大学出版社，剑桥，2002。[20] Ellen Henke、Assaf Libman 和 Justin Lynd. “奇异融合系统的穿孔群”。载于：《伦敦数学学会汇刊》10.1 (2023)，第 21–99 页。[21] Stefan J ackowski 和 James McClure. “通过初等阿贝尔子群分解分类空间”。载于：《拓扑学》31.1 (1992)，第 113–132 页。[22] Justin Lynd 和 Jason Semeraro. “Benson-Solomon 块中的权”。载于：剑桥大学出版社 11 (2023)，第 60–90 页。[23] Chris Parker 和 Jason Semeraro. “ $G_2(p)$ 的 Syl ow p-子群上的融合系统”。载于：《数学杂志》289.1–2 (2018)，第 629–662 页。[24] Chris Parker 和 Gernot Stroth. “与群 $S_{p_4}(p^a)$ 和$G_2(p^a)$ 相关的一族融合系统”。载于：《数学档案》104.4 (2015)，第 311–323 页。[25] Lluis Puig. “Frobenius 范畴”。载于：《代数学杂志》303.1 (2006)，第 309–357 页。[26] Geoffrey R. Robinson. “合并积、块、权、融合系统与有限单群”。载于：《代数学杂志》314.2 (2007)，第 912–923 页。[27] Joseph J. Rotman.《同调代数导论》。第二版。Universitext。施普林格纽约，纽约，2009。[28] Jason Semeraro. “融合系统树”。载于：《代数学杂志》399 (2014)，第 1051–1072 页。[29] Jean-Pierre Serre.《树》。施普林格出版社，柏林，1980。[30] Peter Symonds. “子群复形的 Bredon 上同调”。载于：《纯粹与应用代数杂志》199.1–3 (2005)，第 261–298 页。[31] Martin Van Beek. “与散在单群相关的奇异融合系统”。载于：《剑桥哲学学会数学会刊》(2025)，第 1–54 页。[32] Charles A. Weibel.《同调代数导论》。第 38 卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，1994。[33] Ergün Yalçin. “融合轨道范畴上的高阶极限”。载于：《数学进展》406 (2022)。文章编号 108482。