arXiv:2601.14988v1 [math.AT] 21 Jan 2026

幂零空间自同构的扭结

SACHA GOLDMAN[1]

摘要。我们重新探讨一种以 K_1为值的怀特海德挠率推广形式，该形式最初由 Gersten 研究。我们利用这种 Gersten 扭结证明：对于基本群无限的幂零空间，任何在基本群上作用为恒等映射的自等价，其怀特海德挠率都消失。我们的消失结果有两项应用。首先，我们给出许多具有无限多个简单结构的空间实例。其次，基于 Sullivan 的一个定理，我们得出结论：连通幂零空间中作用于基本群为恒等映射的简单自等价的同伦类所成的群，与一个算术群可公度。我们还在附录中给出对 Sullivan 证明的修正版。

目录

引言 1
1. 简单同伦论 1.1. 预备知识 1.2. 怀特海德挠率 2
1.3. Gersten 扭结 2. 主要结果 2.1. 消失定理 2
2.2. 模空间定理 2.3. 算术性定理 附录 A. 自等价 3
的算术性 参考文献 4
5
5
8
9
10
17

引言

1950年，怀特海德 [Whi50] 给出了有限 CW 复形之间的等价成为简单等价的完整障碍。这一障碍之所以完整，是因为它总能由某个等价 $Y \to X$实现。实际上，我们通常关注的是研究自等价 $X \to X$，而不是所有等价。当我们将研究范围从等价缩小到自等价时，关于怀特海德扭结可能取值的已知结果却少得惊人。

定理 A。设 X 是一个连通基点有限幂零*CW*复形，且其 $\pi_1(X,x)$为无限。若 $f\colon X \to X$ 是一个有基点同伦自等价，并且在 $\pi_1(X,x)$上诱导恒等映射，则 f 是简单的。

我们的定理A 受到 Mislin 的一项结果的启发 [Mis76，定理 B] 指出有限支配幂零CW复形总是有限的。定理 A的证明将依赖于对 Gersten 的 [Ger67] K_1值怀特海德挠率精化的一种全新诠释。

[1] 本研究获加拿大自然科学与工程研究委员会研究生奖学金（硕士）及安大略省研究生奖学金资助。

定理A有两项应用。第一项应用是为了更好地理解等价关系与简单同伦等价关系之间的差异。

定理 B. 设 X 是一个连通有限幂零 *CW* 复形，其怀特海德群无限、基本群无限，并且 X 的基本群只有有限多个自同构。则存在无穷多个与 X 同伦等价的有限 *CW* 复形，且其中没有任何一个与之简单同伦等价。

在第 2.2 节中，我们给出了一些满足定理 B 条件的同伦型示例： $p \neq 2$ 的 $S^1 \times L(p, q_1, \dots, q_n)$，3，$S^1 \times S^3/Q_8$，这是一个具有非阿贝尔基本群的例子；以及李群 $U(n)/\langle\zeta\rangle$，其中 n^{th} 是单位根，且 $n \neq 1$ 为 2、3、6。对于圆与透镜空间的乘积这一首个例子，Nagy–Nicholson–Powell [NNP23, 定理 A] 证明了一个更强的结论：存在无穷多个与该同伦型对应的 h-余边界流形，它们彼此不同伦简单等价。将他们的技巧与定理 B 的证明结合起来，可以找到更多无穷族的 h-余边界流形，它们彼此不同伦简单等价。

我们对定理A的另一项应用，是研究简单自等价群的有限性性质。Bustamante–Krannich–Kupers [BKK23，定理 2。2]证明，当 X具有有限基本群时，该群与某个算术群模有限核可公度。我们分析 X 具有无限基本群的情形。结合我们的结果，可得以下定理。

定理 C。若 X 是一个连通基点有限幂零*CW*复形，则 X 的基点自等价群中，在有基点同伦意义下固定 $\pi_1(X, x)$ 且为简单自等价的那些元素，与某个算术群可公度。

Borel–Serre 的一个结果 [BS73]表明，与算术群可公度的群均为有限型，也就是说，每个维度都只有有限多个胞腔。

定理C 建立在 Sullivan 的一个结果之上 [Sul77，定理 6。1]该结果表明，对于连通基点有限幂零CW复形，存在一个从自等价群到某个适当的代数类比的有限核映射，且其像是一个算术群。Sullivan 给出的证明并不完整。Triantafillou [Tri99] 指出，Sullivan 的障碍理论未考虑基点，而其障碍理论也未考虑有理化的基点。为确保我们的结果建立在正确的基础上，我们在第A 节详细证明 Sullivan 的结果。在第A 节中，我们还讨论 Sullivan 的 [Sul77] 可公度性概念与通常概念之间的不一致。

致谢。 作者感谢 Oscar Randal-Williams，就如何通过 A理论（定理 1.3）来诠释 Gersten 精化挠率，进行了一次启发性的交谈。作者也感谢 Fadi Mezher 指出了 Roit- berg 的工作 [Roi84]，并验证了 [Mez24中的定理 E]适用于幂零空间；此外，也感谢 Mark Powell 对早期草稿提出意见。最后，作者由衷感谢自己的导师 Alexander Kupers，在本项目开展期间给予指导并与作者交流。

1. 简单同伦论

1.1. 预备知识。 虽然引言中的结果是针对拓扑空间陈述的，但我们将使用空间的 ∞-范畴 $\mathcal{S}$。与转向 ∞-范畴时的常见情况一样，有些结构会转化为性质。拓扑空间具有有限支配结构，对应于该空间是一个

$\mathcal{S}$ 中的紧对象。对于一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathcal{C}^{\omega}$ 表示紧对象构成的全子范畴。因此，$\mathcal{S}^{\omega}$ 是可有限支配的空间范畴。有限空间是指等价于终对象 $*$ 的有限余极限的空间。虽然有限 CW 复形显然对应于有限空间，但我们将看到，有限空间这一概念不足以开展简单同伦论；为此，我们需要带有有限性结构的有限空间（这一概念将在本节中引入）。就我们的目的而言，这提供了将关于拓扑空间的结果转化为关于空间的结果所需的信息，因此我们不必再讨论传统的拓扑空间。

除了上文已详细说明的内容外，我们还需要固定一些记号。$\mathcal{S}\mathrm{p}$ 表示谱的 ∞-范畴。若 X 是一个空间，我们将用 $\mathcal{C}^{X}$ 表示函子范畴 $\mathrm{Fun}(X,\mathcal{C})$，其中将 X 视为一个 ∞-群胚。我们称其为 X上的（取值于 $\mathcal{C}$ 的）局部系统范畴。除了少数例外，$\mathcal{C}$ 都将是 $\mathcal{S}\mathrm{p}$。对于空间之间的映射 $f\colon Y \to X$，我们用 f^{*} 表示拉回 $\mathcal{C}^{X} \to \mathcal{C}^{Y}$。当 $\mathcal{C}$ 具有余极限时，我们用 $f_{!}$ 表示 f^{*}的左伴随。值得指出的是，若 $\mathcal{C}$ 也具有极限，则 $f_{!}$保紧对象，因为它有一个余连续右伴随。

空间 X的 A-理论 $A(X)$，就是局部系统的 K-理论 $K((\mathcal{S}\mathrm{p}^{X})^{\omega})$。$A$-理论借助上文定义的 $f_{!}$赋予函子性。组装映射是函子之间的自然变换

$$\alpha_{-}\colon A(*)\otimes \Sigma^{\infty}_{+}- \to A(-)$$

到 A-理论函子相对于其切除逼近。α_{X} 的余纤维是怀特海德谱$\mathrm{Wh}(X)$。我们将记 $A_{n}(X)$ 或$\mathrm{Wh}_{n}(X)$ 为相应谱的 n^{th}同伦群。关于我们对 A-理论的处理方式，更多背景请参见 [Lur14]。

若 X 是一个空间，则 $\mathrm{Aut}(X)$ 表示 ∞-群，即 X的自等价群。若X 带基点，则下标 $*$ 和 π_{1} 分别表示固定基点和基本群的那些等价。当 X 具有有限性结构（定理 1.1）时，上标 s表示其中简单的自等价。

1.2. **怀特海德扭结**。首先，我们回顾以下 A-理论化的怀特海德挠率定义（参见 [Lur 14]）。

定义 1.1。假设 X 是 $\mathcal{S}^{\omega}$中的一个对象。X 的有限性结构 φ_{X}是常值局部系统 $[\mathbb{S}_{X}]$ 的 K-理论类沿组装映射的一个提升。也就是说，有限性结构是对等价$\alpha_{X}(\varphi_{X}) \simeq [\mathbb{S}_{X}]$的一个明确选择。

要使有限性结构存在，必须满足 X 是一个有限空间。$[\mathbb{S}_{X}]$ 在组装映射的余纤维 $\mathrm{Wh}(X)$ 中的像就是 Wall 有限性障碍，因此我们可以非正式地说，有限性结构保证 Wall 障碍消失。

定义 1.2。设 $f\colon Y \to X$ 是具有有限性结构的空间之间的一个等价，有限性结构分别记为 φ_{Y} 和 φ_{X}。令 ε为伴随 $f_{!} \dashv f^{*}$的余单位。那么

$$f_{!}\mathbb{S}_{Y} \simeq f_{!}f^{*}\mathbb{S}_{X} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{S}_{X}$$

给出了 $A(X)$ 中的一条路径，其端点沿着 α_{X} 提升（由有限性结构给出）。换言之，我们在 $\mathrm{Wh}(X)$ 中得到一个环路。由该环路表示的元素 $\tau(f) \in \mathrm{Wh}_{1}(X)$ 是 f 的怀特海德挠率。如果 $\tau(f)$ 消失，我们就称f 是简单的。

要了解这与怀特海德挠率的通常定义有何关联，请参见 [Lur14，第 27 讲，命题 5]。

1.3. **Gersten 扭结**。 现在我们可以定义 Gersten 对怀特海德挠率的细化 [Ger67]。在他们最初的论文中，Gersten 声称他们的构造适用于任意紧空间的自等价 $f\colon X \to X$ 但他们只对 X 带基点连通空间以及 f 在 $\pi_1(X,x)$上作用为恒等映射的自等价定义了该构造。正如 Ranicki [Ran87，§5] 所指出的，Gersten 的定义无法直接推广到紧空间的所有自等价。我们的定义适用于任意自等价，但并不总能细化怀特海德挠率。

定义 1.3. 设 X 是一个紧空间。令 $\tau\colon X \to X_1$ 为从 X 到其 1-截断的映射。设 $f\colon X \to X$ 是一个自等价，并令 $f_1\colon X_1 \to X_1$ 为 f 的 1-截断。于是我们可以构造一个自等价

$$\tau_!\mathbb{S}_X \xleftarrow{\varepsilon_{f_1}} f_{1!}\tau_!\mathbb{S}_X \simeq \tau_! f_!\mathbb{S}_X \xrightarrow{\tau_!\varepsilon_f} \tau_!\mathbb{S}_X.$$

这给出了 $A(X_1)$ 中的一个环路。由该环路表示的元素 $\tau_G(f) \in A_1(X_1) \xleftarrow{\simeq} A_1(X)$ 是 f 的*Gersten* 扭结。

我们暂且推迟对同构 $A_1(X_1) \xleftarrow{\simeq} A_1(X)$ 的论证，先作如下说明。

注 1.4. 当 X 是带基点连通紧空间，且 f 带基点并在 $\pi_1(X,x)$ 上诱导恒等映射时，定理 1.3 可以简化，因为此时带基点等价 $f_! \simeq \mathrm{id}_{X_1}$ 有可缩选择。事实上，由于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}/*}(X_1,X_1)$ 是一个 E_1-空间，其所有道路连通分支都相同。于是利用张量–Hom 伴随，$\pi_k(\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}/*}(X_1,X_1),*)$ 消失。因此，Gersten 扭结是与下式相关联的 $A_1(X_1)$ 中的元素

$$\tau_!\mathbb{S}_X \simeq \tau_! f_!\mathbb{S}_X \xrightarrow{\tau_!\varepsilon_f} \tau_!\mathbb{S}_X.$$

这就是 Gersten 扭结是怀特海德挠率的一个提升的情形，因此接下来我们只讨论这个简化情形。原始定义仍然很有用，因为它清楚地表明，τ_G 仅依赖于 f 的等价类（而非带基点等价类）。

命题 1.5. 对于空间 X，映射 $\tau\colon X \to X_1$ 在 A_1 和怀特海德$_1$上诱导同构。

证明。 若 X 是连通的，则 Schwede–Shipley 定理（最初发表于 [SS03],，但在我们的语境中见 [Lur17，定理 7.1.2。1]）给出了 X 上的谱的局部系统与球群环 $\Sigma^\infty_+\Omega X$的模之间的等价

$$\mathcal{S}\mathrm{p}^X \simeq \mathrm{Mod}_{\Sigma^\infty_+\Omega X}$$

这意味着 $A(X) \simeq K(\Sigma^\infty_+\Omega X)$。由于映射 τ 是 2-连通的，球群环上的映射是 1-连通的，因此映射

$$K(\Sigma^\infty_+\Omega X) \to K(\Sigma^\infty_+\Omega X_1)$$

仍然是 2-连通的 [Wal78，命题 1。1]。不交并的 A理论是每个连通分支的 A理论谱之和，因此对于任意 X （可能不连通的）空间，映射 $A(X) \to A(X_1)$ 是 2-连通的。这表明 A_1上的映射是等价。

显然，该映射

$$\tau\colon A(*) \otimes \Sigma^\infty_+ X \to A(*) \otimes \Sigma^\infty_+ X_1$$

是 2-连通的，因此组装映射的余纤维 $\mathrm{Wh}(X) \to \mathrm{Wh}(X_1)$ 上的映射是 2-连通的。这说明 Wh_1 上的映射是一个等价。□

注 1.6。我们在此简要说明定理 1.3与 Gersten 对怀特海德挠率所作的原始改进 [Ger67]相比之处。我们从未使用 Gersten 的原始表述。

设 X 是一个带基点连通紧空间，且 $f\colon X \to X$ 是一个带基点等价，它在 $\pi_1(X, x)$ 上诱导恒等映射。Gersten 的 K_1 元素是与下列 $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]$- 链复形映射相关联的元素

$$\tilde{f}\colon C(\tilde{X};\mathbb{Z}) \to C(\tilde{X};\mathbb{Z})$$

$\tilde{}$ 由 f 在 X 的万有覆盖 $\tilde{X}$ 的链上诱导。在怀特海德挠率的经典定义中，映射用于将 $C(Y, \mathbb{Z})$ 视为一个 $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]$-链复形。要使映射 f 成为 $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]$-链复形的映射，而不先用 f 将定义域链复形推前，正是 Gersten 要求 f 在 $\pi_1(X, x)$ 上作用为恒等映射的原因。

现在，为了从我们的定义得到 Gersten 的定义，我们可以将谱的局部系统推前为 $H\mathbb{Z}$ 上的模的局部系统

$$(\mathcal{S}\mathrm{p}^{X_1})^{\omega} \to (\mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}^{X_1})^{\omega}.$$

这再次根据 Schwede–Shipley 定理 [Lur17，定理 7.1.2，等价于由 E_1-环上的线性化映射给出的模上的映射

$$\Sigma_+^{\infty}\Omega X_1 \to H\mathbb{Z} \otimes \Sigma_+^{\infty}\Omega X_1 \simeq H\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)].$$

这个 E_1-环的映射是 1-连通的，因此它在 K-理论上诱导的映射是 2-连通的 [Wal78，命题 1。1] 在此等价下，$\tau_!\mathbb{S}_X \otimes H\mathbb{Z}$ 等价 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 于 $C(X, \mathbb{Z})$，而映射 $\tau_!\varepsilon$ 恰好就是映射 f。

最后，我们证明 Gersten 扭结是怀特海德挠率的一个提升。

命题 1.7。设 X 是一个连通的带基点有限空间。设X 带有某个有限性结构 φ_X。令 $f\colon X \to X$ 为一个在 $\pi_1(X, x)$上作用为恒等映射的等价。则 $\tau_G(f)$ 在 $\mathrm{Wh}_1(X_1) \xleftarrow{\cong} \mathrm{Wh}_1(X)$ 中的像是 $\tau(f)$。

证明。将有限性结构 φ_X 沿 τ 推前，会得到 $\tau_![\mathbb{S}_X]$ 沿组装映射 α_{X_1}的一个提升 $\tau\varphi_X$。这使我们能够为路径在 $A(X_1)$ 中的两个端点构造沿组装映射的提升，该路径由等价

$$\tau_!f_!\mathbb{S}_X \xrightarrow{\tau_!\varepsilon} \tau_!\mathbb{S}_X.$$

得到的 $_1$ 中的环路 $\mathrm{Wh}X$，恰好是在等价 $\mathrm{Wh}_1(X_1) \xleftarrow{\cong}\mathrm{Wh}_1(X)$ 下的怀特海德挠率 $\tau(f)$，该等价由 τ（定理 1.5）诱导。现在考虑等价 $\tau f \simeq \tau$。这为 $\tau f\varphi_X$提升 $\tau_!f_![\mathbb{S}_X]$与 $\tau\varphi_X$提升 $\tau_![\mathbb{S}_X]$之间的提升给出了一个等价。因此，怀特海德挠率也可由以下环路给出：将 $\tau\varphi_X$ 用作路径在 $A(X_1)$ 中两个端点的提升，该路径由

$$\tau_!\mathbb{S}_X \xrightarrow{\tau_!\varepsilon} \tau_!\mathbb{S}_X.$$

但现在，这个环路只是将 Gersten 扭结 $\tau_G(f)$ 从基点 $[\mathbb{S}_X]$移动到基点 $\alpha_{X_1}(\tau\varphi_X)$ 后的像，所用的等价为 $\alpha_{X_1}(\tau\varphi_X) \simeq[\mathbb{S}_X]$。□

2. Main Results

2.1. **消失定理**。我们的消失定理将用到以下诡计，它是 K-理论可加性定理的推论。

命题 2.1. 设 A 是某个带基点的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，且该范畴具有有限余极限。设 f 和 g 是 $\mathcal{C}$中对象 A 的两个可交换自等价。令 h 为 g 在$\mathrm{cofib}f$上诱导的自等价。由 h 给出的 $K_1(\mathcal{C})$ 中的元素$[h]$ 为0。

对 $\mathcal{C}$ 的假设是为了确保 $K(\mathcal{C})$ 可以通过 $S_\bullet$-构造来定义（最初由 [Wal85]提出；但在此处请参见 [Lur14，讲义 16]）。

证明。选取一个等价 $fg \simeq gf$，即可得到 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C})$ 中对象 $(g\colon A \to A)$ 的一个自等价，从而确定 $K(\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C}))$ 中的一个环路。关于 K-理论 [Lur14, Lec. 17, Theorem 1] 的可加性定理指出，映射 $K(\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C})) \to K(\mathcal{C})$（通过取目标给出）等于通过取源和余纤维给出的映射之和（关于原始证明以及可加性定理不同版本的比较，参见 [Wal85, §1.3-1.4]）。因此我们立即得到 $[g] = [g] + [h]$，这意味着 $[h] = 0$。□

我们的消失结果的证明将通过在圆上作纤维化来进行；这是简单同伦论中一项由 Mather 开创、用于证明消失结果的悠久传统 [Mat65]。

命题 2.2。设我们有一个连通空间的有基点映射 $p\colon X \to S^1$，其在基本群上是满射。设纤维 Y 和 X 是紧致的。则任意作用于 $\pi_1(X, x)$ 上为恒等映射的有基点自等价 $f\colon X \to X$ 的扭结均为零。

证明。映射 f 与到 S^1 的投影交换，因此我们得到纤维上的诱导映射 $g\colon Y \to Y$。设 i 为纤维 $Y \to X$ 的包含映射，并设 $m\colon Y \to Y$ 为绕圆一周给出的单值化映射。我们有 X 由余等化子构成

$$Y \underset{\mathrm{id}}{\overset{m}{\rightrightarrows}} Y.$$

现在我们有一个由绕 S^1 一周给出的同伦 $im \simeq i$。这意味着我们可以在 $\mathcal{S}_{/X}$ 这一空间在 X 上的范畴中考察这个余等化子图表，其中对象为 $i\colon Y \to X$。于是余等化子恰好是 $\mathrm{id}\colon X \to X$。现在，在映射 g 之前，它是一个映射 $Y \to Y$，但如果我们将 Y 视为 X 上的空间，那么 g 就是从 $ig\colon Y \to X$ 到 $i\colon Y \to X$ 的映射，因为图表

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad g \quad} & Y \\ & {\scriptstyle ig}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle i} & \\ & X & \end{array}$$

交换。这样，g 在 $\mathcal{S}_{/X}$ 中给出了一个余等化子图表的映射，因为 g 与 m 以及 id 交换。在这个余等化子图表映射的定义域上，是位于 X 之上的空间，由 ig 给出：$Y \to X$；而在陪域上，是位于 X 之上的空间，由 i 给出：$Y \to X$。位于 X 之上的余等化子图表映射要求我们提供一个 3-态射，而在此情形下，角填充保证了其存在。由此在余等化子上诱导的映射为 f，从 $f\colon X \to X$ 到 $\mathrm{id}\colon X \to X$。

由于 X 和 Y 是紧致的，这个余等化子图表映射属于范畴 $\mathcal{S}^{\omega}_{/X}$。我们可以通过复合将整个余等化子图表映射传递过去

$$\mathcal{S}^{\omega}_{/X} \to (\mathcal{S}^X)^{\omega} \to (\mathcal{S}\mathrm{p}^X)^{\omega}$$

其中，第一个函子是 Lurie 的直化函子 [Lur09，定理 2.2.1。2]而第二个函子是 Σ^{∞}_{+} 作用于目标后得到的。这个复合将一个对象（例如 $i\colon Y \to X$）映到 $i_! i^* \mathbb{S}_Y \simeq i_! \mathbb{S}_Y$，并将一个态射（例如 g 从 $ig\colon Y \to X$）映到 $i\colon Y \to X$ 至 $i_! \varepsilon_g$，其中 ε_g 是伴随 $g_! \dashv g^*$ 的余单位。这个复合也保持余极限，因此我们的余等化子仍然存在；不过，由于现在处于稳定范畴中，它们变成了差的余纤维。因此，我们得到

该图表

$$\begin{array}{ccccc} i_!g_!\mathbb{S}_Y & \xrightarrow{i_!g_!(\varepsilon_m-\varepsilon_{\mathrm{id}})} & i_!g_!\mathbb{S}_Y & \longrightarrow & f_!\mathbb{S}_X \\ \downarrow{\scriptstyle i_!\varepsilon_g} & & \downarrow{\scriptstyle i_!\varepsilon_g} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_f} \\ i_!\mathbb{S}_Y & \xrightarrow[i_!(\varepsilon_m-\varepsilon_{\mathrm{id}})]{} & i_!\mathbb{S}_Y & \longrightarrow & \mathbb{S}_X \end{array}$$

其中水平序列是正合的。令 τ 为从 $X \to X_1$ 出发的截断映射。现在我们将 $\tau_!$ 应用于这个图。 $\tau_! f_! \simeq \tau_!$ ，因为 f 在基本群上诱导恒等映射。类似地，$\tau_! i_! g_! \simeq i_! \tau_! g_! \simeq i_! \tau_! \simeq \tau_! i_!$ （这里我们稍微滥用了记号，也允许 τ 表示映射 $Y \to Y_1$）。这给出了交换图

$$\begin{array}{ccccc} \tau_!i_!\mathbb{S}_Y & \xrightarrow{\tau_!i_!(\varepsilon_m-\varepsilon_{\mathrm{id}})} & \tau_!i_!\mathbb{S}_Y & \longrightarrow & \tau_!f_!\mathbb{S}_X \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_!i_!\varepsilon_g} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_!i_!\varepsilon_g} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_!\varepsilon_f} \\ \tau_!i_!\mathbb{S}_Y & \xrightarrow[\tau_!i_!(\varepsilon_m-\varepsilon_{\mathrm{id}})]{} & \tau_!i_!\mathbb{S}_Y & \longrightarrow & \tau_!\mathbb{S}_X \end{array}$$

在$(\mathcal{S}\mathrm{p}^{X_1})^\omega$ 上。应用 K-理论后，右侧的映射变为一个环路，它给出 $\tau_G(f)$；再将定理 2.1 应用于左侧的方块，可知该环路为零。 □

这个命题是定理 A 所需的主要依据。我们还需要一个引理。

引理 2.3。 如果 G 是一个无限的有限生成幂零群，那么存在一个满射 $G \to \mathbb{Z}$。

证明。 由于 G 是有限生成幂零群，因此它有一个有限正规扭结子群T [Seg83，推论 1.A。10]。现在我们有一个从 $G \to G/T$的满射。 G/T现在满足原群的所有假设，并且它也是无挠的，因此我们可以假设原群 G是无挠的。

我们知道， G 嵌入到具有整数系数的 $n \times n$ 单位上三角矩阵群中 [Mal49]。令 $\mathrm{Uni}_n^m(\mathbb{Z})$ 表示这样一个单位上三角矩阵子群，其中所有 1st 到 m^{th} 上对角线的元素均为零。因此， m 介于 0 和$n-1$ 之间，其中 $\mathrm{Uni}_n^0(\mathbb{Z})$ 是所有单位上三角矩阵组成的群，而 $\mathrm{Uni}_n^n(\mathbb{Z})$ 是平凡群。这为所有单位上三角矩阵定义了一个滤过，其 m^{th} 分次部分为 $\mathbb{Z}^{n-m}$。由于 G 非零，它在其中一个分次部分中有非平凡像。该像总是无限循环群的乘积，因此特别地， G 满射到$\mathbb{Z}$。□

定理 2.4 (定理A)。 设 X 是一个具有无限基本群的连通有基点有限幂零空间。则任意有基点自等价映射 $f\colon\ X \to X$ 若其在 $\pi_1(X,\ x)$ 上诱导恒等映射，则其怀特海德挠率为零。

证明。 利用定理 2.3，存在一个从 $\pi_1(X)$ 到 $\mathbb{Z}$的映射。于是我们得到映射$X \to B\pi_1(X) \to B\mathbb{Z} \simeq S^1$。然后，根据 Mislin [Mis76的工作（定理 A，引理 1），1], 该映射的纤维总是一个紧致对象。因此根据定理 2.2，$\tau_G(f) = 0$，从而根据定理 1.7 $\tau(f)$为零。 □

备注 2.5。 定理 2.4中的假设，即 f 在 X 的基本群上诱导恒等映射，确实是必要的。Ferry [Fer81] 定义了一个单射

$$\widetilde{K}_0(G) \to \mathrm{Wh}(\mathbb{Z} \times G)$$

$$w(X) \mapsto \tau(S^1 \times X \xrightarrow{(-1,\mathrm{id}_X)} S^1 \times X)$$

其中 $w(X)$ 是 X的 Wall 有限性障碍；为了定义 $S^1 \times X$ 上的扭结，需在 $S^1 \times X$上赋予某种有限性结构。Mislin [Mis75，定理

4.1] 表明，存在紧致幂零空间 X，使得 $w(X)$ 不消失，因此我们可以构造一个 $S^1 \times X$ 的自等价，而它不是简单的。

2.2. **模空间定理**。现在我们可以证明，简单结构的模空间往往可能有无限多个连通分支。空间X 上的简单结构，是指模掉简单等价后得到的有限性结构。

推论 2.6 (定理B)。设 X 是一个连通有限幂零空间。假设$\mathrm{Wh}_1(X)$是无限的，并且 X 的基本群是无限群，且只有有限多个自同构。则 X上有无限多个彼此不同的简单结构。

证明。为 X任取一个基点。Cockcroft–Moss [CM72 定理 1]表明， X 上的简单结构与 $\mathrm{Wh}_1(X)$ 在某个 π_0自同构群$_*(X)$右作用下的轨道一一对应。给 X 赋予某个有限性结构。现在设$\psi\colon Y \to X$ 是空间之间的一个等价，其中 Y 具有有限性结构。于是 $f \in \pi_0$自同构群$_*(X)$通过将 $\tau(\psi)$映到以下对象来作用：

$$f_!^{-1}(\tau(\psi)) + \tau(f).$$

在我们的情形中，可以看到这个作用经由映射 π_0自同构群$_*(X) \to$自同构群$(\pi_1(X,\ x))$ 分解。对于项 $f^{-1}{}_!\,(\tau(\psi))$，这显然成立。对于项 $\tau(f)$，由怀特海德挠率给出的映射

$$\tau\colon \pi_0\mathrm{Aut}_*(X) \to \mathrm{Wh}_1(X)$$

在映射 π_0自同构群$_*(X) \to$ 自同构群$(\pi_1(X,\ x))$ 的核上为零2.4由定理可知，因此可经由自同构群$(\pi_1(X,\ x))$。

因此， X 上的简单结构与无限集 $\mathrm{Wh}_1(X)$ 在有限群自同构群$(\pi_1(X,\ x))$ 作用下的轨道一一对应。这表明 X 上有无穷多个简单结构。□

现在我们将举例说明满足定理2.6假设的空间。我们需要验证Wh_1 是无限集，为此我们将使用 Bass–Heller–Swan 分解 [Bas68，第七章]

$$\mathrm{Wh}(\mathbb{Z} \times G) \cong \mathrm{Wh}(G) \times \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G]) \times \widetilde{\mathrm{Nil}}_1(\mathbb{Z}[G]) \times \widetilde{\mathrm{Nil}}_1(\mathbb{Z}[G]).$$

这里 $\mathrm{Wh}(G)$ 是一个群的怀特海德群 G，在我们的记号中等价于$\mathrm{Wh}_1(X_1)$ 。满足定理 2.6 中关于基本群条件的一个重要的群是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n$。我们可以准确地分类 $\mathrm{Wh}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n)$ 何时是无限群。

命题 2.7。群 $\mathrm{Wh}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n)$ 是无限群，当且仅当 $n \neq 1$,2、3、6

证明。群 $\mathrm{Nil}_1(\mathbb{Z}/n)$ 是无限群，当且仅当它们非零；这又当且仅当 n没有平方因子（参见 [NNP23，定理 5.8]，其中给出了完整证明）。怀特海德群 $\mathrm{Wh}(\mathbb{Z}/n)$ 是无限群，当且仅当 $n \neq 1$、2、3、4， 6 [Mil66，推论 6.5]。最后， $K_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n])$ 总是有限的 [Swa60，命题 9.1]。利用 Bass–Heller–Swan 分解将这些结果组合起来，即得所需结论。□

以下空间满足定理 2.6的假设。

例 2.8。透镜空间 $S^1 \times L(p,\ q_1,\ \ldots\ldots,\ q_n)$ 当 $p \neq 2,\ 3$时。根据定理 2.7，该空间的怀特海德群是无限群。该空间的基本群是阿贝尔群，且万有覆盖上的甲板变换全都是恒等映射，因此它是幂零的。

例 2.9。 $S^1 \times S^3/Q_8$。由于 $\mathrm{Nil}_1(Q_8)$是无限的 [GJPML18，命题 52]。不难看出 Q_8 是幂零的，而且甲板变换均为恒等映射，因此它是一个幂零空间。

例 2.10。 李群 $U(n)/\langle\zeta\rangle$ ，其中 n^{th} 是单位根 ζ ，且$n \neq 1, 2, 3, 6$。根据定理 2.7，它的怀特海德群是无限的。这个空间是幂零空间，因为它是李群。

注 2.11. 在许多情况下，我们可以将消失结果与 Nagy–Nicholson–Powell [NNP 23] 的方法结合起来，证明比定理 2.6 更强的结果。我们可以找到许多无穷族的 h-余边界流形，其中任意两个都不简单同伦等价。若 M 是一个紧致连通 d-流形，并满足若干适当条件以保证可以进行外科手术，那么 [NNP23，定理 4.16] 刻画了与 M h-余边界的流形在简单同伦等价意义下的集合。令 $\pi_0\mathrm{Aut}(M)$通过以下方式作用于 $\mathrm{Wh}_1(M)$：令 $g\colon\ M \to M$将$\tau(f\colon\ N \to M)$映到 $\tau(g \circ f)$。令

$$q\colon \mathrm{Wh}_1(M) \to \mathrm{Wh}_1(M)/\pi_0\mathrm{Aut}(M)$$

为商映射。令 ω 为 M 的定向特征，并定义

$$\mathcal{I}_d(\pi_1(M), \omega) = \{x - (-1)^d \bar{x} \mid x \in \mathrm{Wh}(\pi_1(M))\}$$

其中 $x \mapsto \bar{x}$ 是一个依赖于 ω的对合。那么，与 Mh-余边界但不与之简单同伦等价的流形集合，等价于 $q(I_d(\pi_1(M)\ \omega))$。当 M 是基本群无限的幂零空间时，定理 2.4 表明， $\pi_0\mathrm{Aut}(M)$的作用可经由 $\mathrm{Out}(\pi_1(M))$分解。若 $\mathrm{Out}(\pi_1(M))$有限，只需验证 $\mathcal{I}_d(\pi_1(M)\ \omega)$是无限的，即可找到我们的无穷族。值得注意的是，当 $\pi_1(M)$ $\cong \mathbb{Z} \times G$时， [NNP23，命题 5.10] 表明，$\mathrm{Nil}_1(\mathbb{Z}[G])$是 $\mathcal{I}_d(\pi_1(M)\ \omega)$的子集。因此，对于相关情况下不含平方因子的 n，我们看到例 2.8、2.9 和 2.10 给出了由 h-余边界流形构成的无穷族，且这些流形并非简单同伦等价。

2.3.**算术性定理**。 最后，我们利用消失结果来证明定理C。

定理 2.12 （定理C）。 设 X 是一个具有有限性结构的连通带基点幂零空间。群 π_0自同构群$^{s}_{*,\ \pi_1}(X)$ 与某个算术群可公度。

证明。 根据 Roitberg [Roi84 的工作，群 π_0自同构群$_*(X)$ 是剩余有限的；定理 3] 因此，其所有子群也都是剩余有限的。因此，要证明 π_0 自同构群 $^{s}_{*,\ \pi_1}(X)$ 与某个算术群可公度，我们只需证明存在一个从 π_0自同构群$^{s}_{*,\ \pi_1}(X)$ 到某个算术群的满射，且其核有限。也就是说，我们需要证明 π_0自同构群$^{s}_{*,\ \pi_1}(X)$ 与某个算术群模有限核可公度。

如果 X 具有有限基本群，那么这正是 [BKK23，定理 2。2]。

现在假设 X 具有无限基本群。在这种情况下，定理 2.4立即表明， π_0自同构群$_{*,\ \pi_1}(X)$ 中任意元素的怀特海德挠率都消失，因此 π_0自同构群$^{s}_{*,\ \pi_1}(X) = \pi_0$自同构群$_{*,\ \pi_1}(X)$。因此，我们只需利用有理同伦论证明 π_0自同构群$_{*,\ \pi_1}(X)$ 模有限核可公度于一个算术群。

首先，我们有一个群的交换图

$$\begin{array}{ccc} \pi_0\mathrm{Aut}_*(X) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\pi_1(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0\mathrm{Aut}_*(X_{\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & \pi_0\mathrm{Aut}_*((X_1)_{\mathbb{Q}}) \end{array} .$$

现在设 $\mathcal{M}$ 是 X的 Sullivan 意义下的极小模型 [Sul77]。因此 $\mathcal{M}$ 是一个交换微分分次代数（CDGA），其增广来自

X的基点。上方方框中的底部映射是映射

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim_* \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M}^1)/\sim_*$$

由限制到由次数不超过 1 的生成元生成的模型给出。此处$\sim_*$ 是保增广的 CDGA 同伦所确定的等价关系。这个映射是代数的，因为我们取的是代数群之间的映射，并对一个代数子群取商；详情见定理 A.9 的证明。现在，若取上述方框中水平映射的核，就得到一个映射

$$\pi_0\mathrm{Aut}_{*,\pi_1}(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}^1}(\mathcal{M})/\sim_*$$

其中 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{M}^1}(\mathcal{M})/\sim_*$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim_*$的一个代数子群。现在，定理A.12指出，我们方框中的竖直同态具有有限核，且其像是一个算术群。应用定理 A.5 可知，映射 $\pi_0\mathrm{Aut}_{*,\pi_1}(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}^1}(\mathcal{M})/\sim_*$ 具有有限核，且其像是一个算术群。□

人们或许希望这一结果能有各种推广。

问题 2.13。 在定理 2.12的假设下， π_0自同构群$^s_*(X)$ （此处我们不固定 $\pi_1(X,\ x)$）是否与某个算术群可公度？自同构群$^s_*(X)$ 是否为有限型？

问题 2.14。 如果我们假设 M 是一个幂零流形，那么微分同胚的伪同痕类群（也可以只考虑在 M 的基本群上作用为恒等映射的那些微分同胚）是否与某个算术群可公度？

不能指望 M 的微分同胚同痕类群与某个算术群可公度，因为 Hsiang–Sharpe [HS76，第 408 页，例 1] 表明它甚至可能不是有限生成的。固定基本群也无法解决这个问题，该群仍将是无限生成的。

要回答定理 2.14 ，或许可以使用 Bustamante– Krannich–Kupers [BKK23，定理 2.6], 中的技巧，但这并不直接，因为他们所考虑的 L-理论群在这种情况下可能是无限生成的。

附录 A. 自等价的算术性

本附录旨在详细证明以下定理，该定理用于证明定理2.12 ，也是证明其他关于各种自同构群的有限性结果的基础（例如 [Kup25、BKK23]）。

定理 A.1 （Sullivan [Sul77，定理 6.1]）。 若 X 是连通有基点有限幂零空间，则 π_0 自同构群$_*$（X）与某个算术群可公度。

Sullivan 的证明存在一个主要问题，这一点最初由 Triantafillou 指出 [Tri99，第 284], 页：Sullivan 只讨论无基点空间，但他们援引的障碍理论要求有一个基点。从这个意义上说，我们的定理 A.1 实际上并不等价于 Sullivan 的定理 [Sul77，定理 6。1]在本附录末尾，我们将 Sullivan 原始的定理陈述作为定理 A.13给出。尽管 Triantafillou 注意到 Sullivan 的障碍理论要求一个基点，却没有在相应的有理同伦论中考虑这个基点。要考虑这个基点需要格外谨慎。Triantafillou 还补充了 Sullivan 证明中省略的许多细节，但其证明的某些部分仍不够严谨。我们希望对此给出更为严谨的阐述。

Sullivan [Sul77] 所说的两个群“可公度”，是指模有限核可公度。Serre 指出了 Sullivan 的术语与文献用法不一致这一问题的解决办法， [Ser79，1.2 (8)] 他指出，可以利用 Sullivan 的有限化同伦论 [Sul74，定理 3，2] 证明群 $\pi_0\mathrm{Aut}(X)$ 是剩余有限的。Mezher 将这一思路付诸实践 [Mez24，定理 E]。若一个群是剩余有限的，那么模有限核可公度便意味着可公度。我们没有利用 Sullivan 的有限化同伦论来证明定理 A.1 ，因为我们研究的是基点保持的同伦自等价；相反，我们采用了 Roitberg 的工作 [Roi84，定理 1。3]。

文献中还有其他类似的结果。在 Sullivan 之前，Wilkerson[Wil76] 为单连通空间给出了证明（在单连通情形下，Sullivan 的证明也不存在任何问题）。Dror–Dwyer–Kan [DDK81]证明，对于几乎幂零的 X，群 $\pi_0\mathrm{Aut}(X)$ 是有限型的。尽管我们主要关注算术群，因为它们是有限型的，但在实践中，算术性还会带来有用的推论。特别是，虽然有限型群在扩张下封闭，但在取子群时几乎从不封闭。另一方面，如果我们知道某个算术群的子群是由与一个代数映射的核相交得到的，那么该子群仍然是算术群。我们在定理 2.12 的证明中明确使用了这一点。

为了着手证明 Sullivan 定理，我们先陈述一些关于算术群的事实。本文所说的代数群，始终指仿射有理代数群。

事实 A.2 ([Ser79，第 106] 页)。 设 $\varphi\colon G \to H$ 是代数群之间的一个映射，并设 $\Gamma \leq G$ 是一个算术子群。

(1) 若 φ是满射，则 $\varphi(\Gamma)$ 是一个算术子群。*(2)* $\ker(\varphi)$ 是一个代数群，且 $\ker(\varphi)\cap\Gamma$ 是一个算术子群。

事实 A.3 ([Cha15，推论 3.8 (1)])。 设 U 和 G 是代数群，且 U是幺幂的。那么任意群同态 $U \to G$ 都是代数群映射。

我们将沿着 A.1 的 Postnikov 塔向上归纳证明定理 X。归纳步骤中，我们将用到以下两个事实。第一个结果最初在 [Tri99] 中被引用，但未注明 Borel，后由 Kupers 证明。

事实 A.4 ([Kup25，引理 2。10])。 设我们有一个群的短正合列之间的映射

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle r'} & & \downarrow{\scriptstyle r''} & & \\ 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

底部是一列代数群，且 G 是幺幂群。进一步假设 r 和 r'' 的核均有限，且像均为算术群。那么r' 的核也有限，且像也是算术群。

我们不知道这一最后事实的出处，因此给出证明。

事实 A.5. 假设我们有一个带基点集合正合序列的映射

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & A' & \xrightarrow{q} & A'' \\ & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle r'} & & \downarrow{\scriptstyle r''} \\ 1 & \longrightarrow & G & \xrightarrow[I]{} & G' & \xrightarrow{Q} & G'' \end{array}$$

其中 i、 r 和 r' 是群映射，而 I 是代数群的映射。此外，假设 r' 和 r'' 均具有有限核，且 r' 的像是一个算术子群。假设映射 q 满足：若 $q(y) = q(y')$ ，则 $q(y'y^{-1}) = 1$。那么 r 具有有限核，且其像是一个算术子群。

证明。映射 r 的核有限，因为 r' 的核有限。群 $\mathrm{im}(r') \cap \mathrm{im}(I)$ 是 $\mathrm{im}(I)$ [的一个算术子群（Ser79，第 106]页）。现在，$\mathrm{im}(r)$ 是 $\mathrm{im}(r') \cap \mathrm{im}(I)$ 的一个子群。设 $x, x' \in \mathrm{im}(r') \cap \mathrm{im}(I)$ 是 $\mathrm{im}(r)$ 在 $\mathrm{im}(r') \cap \mathrm{im}(I)$ 中代表不同左陪集的元素。由于 $x, x' \in \mathrm{im}(I)$，我们得到 $Q(x) = 1 = Q(x')$。设 y 和 y' 分别是 x 和 x' 在 r' 下的提升。定义 $z = q(y)$ 和 $z' = q(y')$。由上图的交换性可知， $z, z' \in \ker(r'')$。若 $z = z'$ ，则 $q(y'y^{-1}) = 1$ ，即 $i(w)y = y'$ ，其中某个 $w \in A$ 满足此式。于是 $r(w)x = x'$ ，这与我们的假设矛盾： x 和 x' 代表不同的左陪集。因此，不同的左陪集对应 $\ker(r'')$ 中不同的元素。这说明 $\mathrm{im}(r)$ 是 $\mathrm{im}(r') \cap \mathrm{im}(I)$ 的有限指数子群，因此是算术的。□

现在我们可以开始有理同伦论了。首先，我们将构造一个代数群，使基点自等价群成为其中的算术子群。在本附录余下部分中， X 是一个有基点、连通的幂零空间，或者是它的某个 Postnikov 截断。令$(\mathcal{M}, d)$ 为 X 按 Sullivan 的定义所取的极小模型 [Sul77]。因此，$(\mathcal{M}, d)$ 是一个交换微分分次代数（CDGA）。$\mathcal{M}$ 还具有一个由 X的基点诱导的增广。

命题 A.6。 令 $\mathfrak{u}$ 为所有形如 $[i, d] = di + id$ 的元素所构成的集合，其中i 是 $\mathcal{M}$的一个次数为 -1 的导子。这里， $[-,-]$ 是 $\mathcal{M}$的所有分次导子构成的分次李代数上的李括号。此外，定义 $\mathfrak{u}_*$ 为 $\mathfrak{u}$的子集，使得导子 i 在次数1 的元素 $\mathcal{M}$上取值为零。那么， $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{u}_*$ 都是幂零李代数。

证明。首先

$$[d, di + id] = ddi + did - did - idd = 0.$$

然后利用这一点

$$[di + id, dj + jd] = d\underbrace{[i, jd + dj]}_{k} + \underbrace{[i, jd + dj]}_{k} d$$

所以 $\mathfrak{u}$ 在交换子运算下封闭。现在假设 i 和 j 在所有 1 次元素上都取零，且 x 是这样的元素。那么

$$k(x) = (ijd + idj - jdi - dji)(x) = ijd(x).$$

$\mathcal{M}$ 的极小性表明， $d(x)$是 1 次元素的乘积的线性组合，因此 $ijd(x) = 0$。由此可知，$\mathfrak{u}_*$ 在交换子运算下封闭。由于$\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{u}_*$ 在求和运算下也封闭，因此它们是李代数。

定义 $\mathcal{M}$ 的生成元 x 的权为 $\deg(x) + 1$。将此定义加性地推广到单项式。我们可以考虑权至少为k的元素，从而对 $\mathcal{M}$ 进行过滤。现在，由于 $\mathcal{M}$ 是极小的，d 使权至少增加 2。此外， i使元素的权最多减少 1。于是， $di + id$ 在保持次数不变的同时使元素的权至少增加 1；但在给定次数 d 下，可能的最大权为 $2d$，所以 $di + di$ 是幂零的。□

现在我们将 U 记作 $\exp(\mathfrak{u})$，将 U_* 记作 $\exp(\mathfrak{u}_*)$。由于 $\mathfrak{u}$ 由幂零元素组成，$\mathfrak{u}$ 中元素的指数只有有限个非零项。由于 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{u}_*$ 中的元素与 d可交换， U 和 U_* 由 CDGA 映射 $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$构成。我们的下一个目标是证明， U 和 U^* 恰好分别是 $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 的子群，其中的元素分别与恒等映射同伦，以及与恒等映射同伦且保持增广。值得

指出的是，尽管 $\mathcal{M}$ 只有一种增广选择，因为 $\mathcal{M}(0)\cong\mathbb{Q}$，但这并不意味着所有同伦都保持增广。

命题 A.7. U 中的元素与恒等映射同伦。此外， U_* 中的元素是保持增广且与恒等映射同伦的。

证明。 这里， $\mathbb{Q}(t,dt)$表示由 t 和 dt 生成的自由交换微分分次代数，其中 $d(t)=dt$ 且$d(dt)=0$ ，其中 $\deg(t)=0$。对于一个次数为 -1 的导子 i ，定义次数为 -1的导子

$$I\colon \mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt)\to\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt)$$

其中对于 $x\in\mathcal{M}$ ，我们取 $I(x)=ti(x)$且 $I(t)=0$。于是复合映射

$$\mathcal{M}\xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{M}}\otimes 1}\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt)\xrightarrow{\exp([I,d_{\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt)}])}\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt)$$

给出了从 $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 到 $\exp([i,d])$的一个同伦。这表明 U 中的元素与恒等映射同伦。

进一步假设 i在次数为 1 的元素上取值为零。那么我们必须检查上述映射是否为保持增广的同伦，也就是说，必须检查该同伦的像是否包含于$(\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt))\oplus\mathbb{Q}$中，其中 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$的增广理想。我们将证明，对于 $\mathcal{M}$的一个次数为 n 的生成元 x ， $[I,d_{\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt)}]x$ 落在$(\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt))\oplus\mathbb{Q}$ 中。我们计算

$$[I,d_{\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt)}]x=ti(dx)+i(x)dt+tdi(x)=t(id+di)x+i(x)dt.$$

对于右侧第一项，$\deg([i,d]x)\neq 0$，因此 $t[i,d]x\in(\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt))\oplus\mathbb{Q}$。现在考虑第三项，如果 $n\neq 1$，那么 $\deg(i(x))\neq 0$，所以 $i(x)dt\in(\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt))\oplus\mathbb{Q}$。再者，如果 $n=1$，那么根据我们关于 i 的假设， $i(x)=0$，因此$i(x)dt\in(\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt))\oplus\mathbb{Q}$。□

命题 A.8。 如果映射 $f\colon\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 与恒等映射同伦，那么 $f\in U$。此外，如果 f 是保持增广的并且与恒等映射同伦，那么 $f\in U_*$。

证明。 假设我们有一个同伦 $F+Gdt\colon\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,\ dt)$ 使得$F|_{t=0}=$恒等映射$_{\mathcal{M}}$。我们需要证明 $F|_{t=1}$具有 $\exp([i,d])$的形式。为此，我们采用 Block–Lazarev [BL05，第 10–11], 页的工作，而不是 Sullivan 的原始策略，因为他们的构造更适用于带基点情形。他们证明

$$F(1)=\exp\left(\left[\int_0^1 GF^{-1}dt,d\right]\right)$$

其中积分是形式的，且 F^{-1}是从 $\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt)$ 到 $\mathcal{M}$ 的映射。由此可立即得出，任何与恒等映射同伦的映射都属于 U （这是 Block–Lazarev 的动机），只需取 $i=\int_0^1 GF^{-1}dt$。进一步假设同伦 $F+Gdt$ 是一个保持增广的同伦，即其像属于$(\mathcal{M}\otimes\mathbb{Q}(t,dt))\oplus\mathbb{Q}$。由于 G 会降低元素的次数，因此它在 M 的次数为 1 的生成元上必为零。于是，对于 $\mathcal{M}$ 的一个次数为 1 的生成元 x ，我们得到 $\left(\int_0^1 GF^{-1}dt\right)(x)=0$，因为 F保持次数。□

现在我们可以构造一个代数群，使得 $\pi_0\mathrm{Aut}_*(X)$ 是算术的。令 $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 表示所有 CDGA 自同构组成的群，并令 $\sim$ 和 $\sim_*$ 分别表示 CDGA 同伦与保增广的 CDGA 同伦这两种等价关系。

命题 A.9. 自同构群$(\mathcal{M})/\sim$ 和自同构群$(\mathcal{M})/\sim_*$ 都是代数群。

证明。 首先，设 X 是有限幂零空间的一个 Postnikov 截断。那么 $\mathcal{M}$ 是有限生成的，因此 $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 是一个代数群。群U 和 U_* 是 $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 的正规子群（共轭保持与恒等映射同伦的映射，且

保持增广）。由于 U 和 U_* 是幂零李代数的指数像，因此它们是幺幂代数群。此外，根据定理 A.3，它们是$\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 的代数子群。因此，商群

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M})/U \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim \qquad \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/U_* \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim_*$$

是代数群 [Hum75, §12.1]。

现在，对于不是 Postnikov 截断的 X ，障碍理论给出以下等价：

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{M}^n)/\sim \qquad \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim_* \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{M}^n)/\sim_*$$

其中， n 是 X 的上同调维数， $\mathcal{M}^n$ 是 X 的 Postnikov 截断的极小模型。□

命题 A.10. 对于 V 这个有限维向量空间，$\mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim$ 和 $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim_*$ 在 $H^*(\mathcal{M};V)$ 上的作用是代数的。

证明。 这里 $H^*(\mathcal{M};V) \cong H^*(\mathcal{M}) \otimes V$，因此我们可以忽略系数。

首先，假设 X 是有限幂零空间的 Postnikov 截断。映射 Aut($\mathcal{M}$) → Aut(H^*($\mathcal{M}$)) 的定义是：取一个自同构，将其限制到 d 的核上，然后再取其在商上的自同构；这些操作都是代数的（这里的 Aut(H^*($\mathcal{M}$)) 指作为分次代数的自同构）。最后，根据商 [Hum75, §12.1] 对于代数群的泛性质，Aut($\mathcal{M}$)/$\sim$ 和 Aut($\mathcal{M}$)/$\sim_*$ 在 Aut(H^*($\mathcal{M}$)) 上的作用存在且是代数的。

现在，对于并非 Postnikov 截断的 X，利用 Serre 谱序列可知，当 $\mathcal{M}^n$ 是 X 的 n^{th} Postnikov 截断的极小模型时， H^k($\mathcal{M}$) 与 H^k($\mathcal{M}^n$) 对于 $k \leq n$ 一致。取 n 为 X 的上同调维数，我们得到一个映射 Aut(H^*($\mathcal{M}^n$)) →Aut(H^*($\mathcal{M}$)), 其定义是将所有次数高于 n 的元素设为 0。这个映射是代数的，因此由复合给出的作用映射为

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}^n)/\sim \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{M}^n)/\sim \to \mathrm{Aut}(H^*(\mathcal{M}^n)) \to \mathrm{Aut}(H^*(M))$$

也具有代数性（这里 ∼可以替换为 $\sim_*$）。

□

至此，我们完成了代数群的构造，并将把基点自等价映入其中。为研究这个映射，我们将使用以下障碍理论结果。

事实 A.11 (Nomura [Nom66，定理 1.3])。 假设我们有一个带基点空间的主纤维序列，即一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \Omega B' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & E' \longrightarrow B' \end{array} .$$

进一步假设 $\pi_k(F) = 0$ 对于 $k < n$ 成立，且 $\pi_k(B) = 0$ 对于 $k \geq n$成立。那么存在一个正合序列

$$\ker([E,F] \to [F,F]) \to \pi_0\mathrm{Aut}_*(E) \to \pi_0\mathrm{Aut}_*(F) \times \pi_0\mathrm{Aut}_*(B).$$

通过更周密的设置，我们现在可以沿着 X 的 Postnikov 塔逐步归纳。

定理 A.12. 映射

$$\pi_0\mathrm{Aut}_*(X) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim_*$$

具有有限核，且像是一个算术群。

证明。 由于 X 要么是有限幂零空间（要么是其 Postnikov 截断），因此其 Postnikov 塔可以细化为

$$\cdots X_{n+1} \to X_n \to \cdots \to X_1 \to *$$

其中，每一对相邻项都表示为一个 Eilenberg–MacLane 空间 $K(\pi_{n+1},\ n+1)$ 的路径空间纤维化的拉回，且 n 非严格递增。 $\mathcal{M}^n$ 表示 X_n的极小模型。我们用 π_n 表示 $X_n \to X_{n-1}$的纤维的 n^{th} 同伦群，并用 Q^n 表示对偶有理化。

首先，对于任意 n ，映射

$$\pi_0\mathrm{Hom}(X_n, X_n) \cong \pi_0\mathrm{Hom}(X, X_n) \to \pi_0\mathrm{Hom}(X,(X_n)_{\mathbb{Q}}) \cong \pi_0\mathrm{Hom}((X_n)_{\mathbb{Q}}, (X_n)_{\mathbb{Q}})$$

是有限多对一的 [HMR75，推论 II.5。4]（此处 Hom 空间是基点化的）。映射 π_0（自同构群$_*$（X_n）） $\to$ 自同构群（$\mathcal{M}^n$）$/\sim_*$ 是一个限制映射，因此其核有限。

我们必须证明映射 π_0(自同构群(X_n)) $\to$ 自同构群($\mathcal{M}^n$)$/\sim_*$ 的像是一个算术群。为此，我们将使用归纳性的障碍理论论证。注意， $\mathbb{Q}$ 是点的极小模型，且自同构群($\mathbb{Q}$)$/\sim_*$ 是平凡的，而平凡群的平凡子群是算术群。

现在我们考虑纤维化

$$K(\pi_n, n) \to X_n \to X_{n-1}.$$

由于这是一个主纤维化，因此我们可以应用定理A.11。我们看到

$$\ker([X_n, K(\pi_n, n)] \to [K(\pi_n, n), K(\pi_n, n)])$$

是来自一对 (X_n， X_{n-1}) 的正合序列中映射的核，它给出

$$\ker(H^n(X_n; \pi_n) \to H^{n+1}(X_n, X_{n-1}; \pi_n)) \cong H^n(X_{n-1}; \pi_n).$$

因此我们有正合序列

$$H^n(X_{n-1}; \pi_n) \to \pi_0\mathrm{Aut}_*(X_n) \xrightarrow[(F,\phi)]{} \pi_0\mathrm{Aut}_*(X_{n-1}) \times \mathrm{Aut}(\pi_n).$$

由于我们的所有推理在有理数范围内仍然成立，因此我们得到以下正合序列的比较

$$\begin{array}{ccccc} H^n(X_{n-1};\pi_n) & \longrightarrow & \pi_0\mathrm{Aut}_*(X_n) & \xrightarrow[(F,\phi)]{} & \pi_0\mathrm{Aut}_*(X_{n-1}) \times \mathrm{Aut}(\pi_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^n(\mathcal{M}^{n-1}; Q^n) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathcal{M}^n)/\sim_* & \xrightarrow[(F_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathbb{Q}})]{} & \mathrm{Aut}(\mathcal{M}^{n-1})/\sim_* \times \mathrm{Aut}(Q^n) \end{array}.$$

我们的目标是修改这个图表，以便应用定理A.4，从而得出中间映射的像是一个算术群。

首先， π_0Aut(X_{n-1})$/\times$Aut(π_n)通过第一项作用于空间、第二项作用于系数，从而作用于 H^{n+1}(X_{n-1};π_n)。(F,ϕ)的像恰好是那些能够提升为 X_n的有基点自等价的 X_{n-1} 的有基点自等价，以及能够提升为 X_n的自同构的 π_n 的自同构；也就是说，是稳定 k-不变量 $k_n \in H^{n+1}$(X_{n-1};π_n)的 X_{n-1} 的有基点自等价和 π_n 的自同构。这意味着 im($\mathbb{F},\phi$) = stab(k_n)。这些结论在有理情形下也都成立，并且我们有映射 stab(k_n) $\to$ stab((k_n)$_{\mathbb{Q}}$)。定理 A.10 表明，有理情形下作用映射是代数的，因此我们看到 stab((k_n)$_{\mathbb{Q}}$) 是代数子群（见 [Bor91，第 52] 页）。我们可以将稳定子视为求值映射在 k_n处的核：π_0Aut(X_{n-1})$/\times$Aut(π_n) $\to H^{n+1}$(X_{n-1};π_n)。值得注意的是，这并非群同态，但其结构足够良好，可以应用定理 A.5（此处集合 H^{n+1}(X_{n-1};π_n) 的适当基点是 k_n）。这表明映射 stab(k_n) $\to$

stab$((k_n)_{\mathbb{Q}})$ 的核有限，且其像是一个算术群。因此，我们将问题归结为比较正合列

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(X_{n-1};\pi_n) & \longrightarrow & \pi_0\mathrm{Aut}_*(X_n) & \xrightarrow[(F,\phi)]{} & \mathrm{im}(F,\phi) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^n(\mathcal{M}^{n-1};Q^n) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathcal{M}^n)/\sim_* & \xrightarrow[(F_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathbb{Q}})]{} & \mathrm{im}(F_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

其中右下方的水平映射是代数映射，而右侧的垂直映射具有有限核，且其像是一个算术子群。

现在我们可以将讨论限制在核上。映射 $\ker(F,\phi) \to \ker(F_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathbb{Q}})$ 具有有限核，因为上方图表中的中间垂直映射如此。映射 $H^n(\mathcal{M}^{n-1};Q^n) \to \ker(F_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathbb{Q}})$ 根据定理 A.3 是代数映射，因此复合映射的像

$$H^n(X_{n-1};\pi_n) \to H^n(\mathcal{M}^{n-1};Q^n) \to \ker(F_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathbb{Q}})$$

根据定理 A.2，它是一个算术群。此像恰好是映射 $\ker(F,\phi) \to \ker(F_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathbb{Q}})$的像。因此，我们可以将讨论限制在以下图表中

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \ker(F,\phi) & \longrightarrow & \pi_0\mathrm{Aut}_*(X_n) & \xrightarrow[(F,\phi)]{} & \mathrm{im}(F,\phi) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \ker(F_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathcal{M}^n)/\sim_* & \xrightarrow[(F_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathbb{Q}})]{} & \mathrm{im}(F_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

对该映射应用定理 A.4即可。这就完成了对有限幂零空间的任意 Postnikov 截断的证明 X。为完成证明，我们利用以下事实：对于 n至少为 X

$$\pi_0\mathrm{Aut}_*(X) \cong \pi_0\mathrm{Aut}_*(X_n).$$

□

最后，为了从定理 A.12推出定理 A.1，我们需要知道，对于有限幂零 X，群 $\pi_0\mathrm{Aut}(X)$ 是剩余有限的。这是 Roitberg 的一个结果 [Roi84，定理 3]。现在我们可以证明 Sullivan 最初陈述的结果。

定理 A.13. 对于有限幂零空间 X，群 $\pi_0\mathrm{Aut}(X)$ 与某个算术群可公度。

证明。 如果 X 有多个道路连通分支，那么

$$\pi_0\mathrm{Aut}(X) \simeq S \ltimes \prod_{i\in\pi_0(X)} \pi_0\mathrm{Aut}(X_i)$$

其中 S 是对称群的乘积，对于 X的每个由同伦道路连通分支构成的基数为k 的集合，都有一个阶为 k 的对称群。于是，$\prod_{i\in\pi_0(X)} \pi_0\mathrm{Aut}(X_i)$ 是这个乘积中的有限指数子群，因此，如果每个 $\pi_0\mathrm{Aut}(X_i)$ 都与某个算术群可公度，那么 $\pi_0\mathrm{Aut}(X)$ 也与某个算术群可公度。所以我们可以假设 X 只有一个道路连通分支。

现在，为 X 任取一个基点。于是，按照定理 A.12 的记号，我们有一组比较带基点和不带基点情形的正合列

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1 & \xrightarrow{\partial} & \pi_0\mathrm{Aut}_*(X) & \longrightarrow & \pi_0\mathrm{Aut}(X) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Q^1 & \xrightarrow[\partial_{\mathbb{Q}}]{} & \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim_* & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim & \longrightarrow & 1 \end{array}.$$

我们旨在证明右侧映射的核有限，且其像是一个算术群。

首先，右侧映射的像就是复合映射的像

$$\pi_0\mathrm{Aut}_*(X) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim_* \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\sim.$$

根据定理 A.1 ，第一个映射的像是一个算术群，而第二个映射是满射代数映射，因此总像是算术子群。这说明上方最右侧的竖直映射的像是一个算术群。

现在我们证明，右侧映射的核中的任意元素 x 都是扭结。令 y 为 x 沿映射 π_0 Aut$_*(X)$ $\to \pi_0$Aut(X) 的一个提升。再令 $\tilde{y}$ 为 y 沿中间竖直映射的像。于是 $\tilde{y}$ 沿映射 Aut$(\mathcal{M})/\sim_* \to$ Aut$(\mathcal{M})/\sim$ 映射到 0，因此它沿 $\partial_{\mathbb{Q}}$ 有某个提升 $\tilde{z}$ 。现在，映射 $\pi_1 \to Q^1$ 由 Mal'cev 完备化 [Mal49]，给出，换言之，这是从 π_1 到其唯一可除闭包的映射。这告诉我们，对于某个 n ，存在 $\tilde{z}^n$ 在 π_1 中的提升 w 。现在 ∂w 和 y^n 都经由 π_0Aut$_*(X)$ $\to$Aut$(\mathcal{M})/\sim_*$ 映射到 $\tilde{y}^n$ ，因此二者相差一个位于该映射核中的元素，即对于某个扭结元素 t，有 $y^n = t\partial w$ 。 ∂w 沿映射 π_0Aut$_*(X)$ $\to \pi_0$Aut(X) 映射到 1，因此 x^n 是一个扭结元素，这意味着 x 本身也是扭结。

现在，为了避免 Burnside 问题带来的困难，我们必须为右侧映射的核建立某种˜有限性性质。令 Γ表示 $\partial_{\mathbb{Q}}$ 的像与 π_0Aut$_*(X)$ $\to$Aut$(\mathcal{M})/\sim_*$ 的像的交集，并令 Γ 表示 π_0Aut$_*(X)$ $\to$Aut$(\mathcal{M})/\sim_*$下 Γ 的˜ ˜原像。现在， Γ 是一个幺幂代数群的子群，因此是幂零群。这意味着 Γ 是有限扩张幂零群，进而是多循环有限扩张群 [Seg83，命题 1.A.2]。现在， Γ 在映射 π_0Aut$_*(X)$ $\to \pi_0$Aut(X) 下的像恰好是我们要证明为有限群的核。因此，这个核是一个多循环有限扩张群的商群，所以也是多循环有限扩张群。

因此，右侧映射的核是一个挠多循环有限扩张群，而我们可以看出它实际上是有限群（多循环部分的次正规列表明，该群是由有限多个有限群通过扩张构成的）。

这表明映射 π_0自同构群(X) $\to$自同构群$(\mathcal{M})/\sim$ 具有有限核，且其像是一个算术群。根据 Mezher 的研究 [Mez24，定理 E] ，我们知道π_0自同构群(X) 是剩余有限的（Mezher 的结果仅针对单连通空间陈述，但其证明同样适用于幂零空间）。因此， π_0自同构群(X)与一个算术群可公度。□

参考文献

[Bas68] H. Bass, 《代数K理论》, W. A. Benjamin, Inc., 纽约—阿姆斯特丹, 1968。8[BKK23] M. Bustamante、M. Krannich 和 A. Kupers, 《有限基本群流形自同构空间的有限性性质》, 《数学年刊》, 388（2023）（4）, 3321–3371。2, 9, 10[BL05] J. Block 和 A. Lazarev, 《安德烈–奎伦上同调与函数空间的有理同伦》, 《数学进展》, 193（2005）（1）, 18–39。13[Bor91] A. Borel, 《线性代数群》, 施普林格纽约, 1991。15[BS73] A. Borel 和 J.-P. Serre, 《角点与算术群》, 《瑞士数学评论》, 48（1973）（1）, 436–491。2[Cha15] P. Chatterjee, 《关于代数群的抽象同态》, （2015）, arXiv:1511.06180。11[CM72] W. H. Cockcroft 和 R. M. F. Moss, 《某些二维复形的简单同伦型》, 《伦敦数学学会杂志》（2）, 5（1972）, 726–728。8

[DDK81] E. Dror、W. G. Dwyer 和 D. M. Kan，《虚幂零空间的自同伦等价》，《瑞士数学评论》，56（1981）（1），599–614。11[Fer81] S. Ferry，《有限性障碍的简单同伦方法》，载于《形状理论与几何拓扑》（杜布罗夫尼克，1981），《数学讲义》，第870卷，Springer，柏林，1981，第73–81页。7[Ger67] S. M. Gersten，《自同伦等价的挠率》，《拓扑学》，6（1967）（3），411–414。1，4，5[GJPML18] J. Guaschi、D. Juan-Pineda 和 S. Millán López，《球面及 $\mathbb{Z}[B_4(\mathbb{S}^2)]$，的辫群虚循环子群的低阶代数K理论》，《数学丛书简编》，Springer，Cham，2018。8[HMR75] P. Hilton、G. Mislin 和 J. Roitberg，《幂零群与空间的局部化》，《北荷兰数学研究》，第15号，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹—牛津；American Elsevier Pub-lishing Co., Inc.，纽约，1975，《数学札记》 [《数学札记》],第55号。15[HS76] W. C. Hsiang 和 R. W. Sharpe，《参数化手术与同痕》，《太平洋数学杂志》，67（1976）（2），401–459。10[Hum75] J. E. Humphreys，《线性代数群》，《数学研究生文本》，第21号，Springer-Verlag，纽约—海德堡，1975。14[Kup25] A. Kupers，《带边界流形的映射类群具有有限型》，《同调、同伦与应用》，27（2025）（1），51–74。10，11[Lur09] J. Lurie，《高阶拓扑斯理论》，普林斯顿大学出版社，2009。6[Lur14] ——，《代数K理论与流形拓扑》，2014，未发表。在线地址：math.ias.edu/~lurie/。3，6[Lur17] ——，《高阶代数》，2017，未发表。在线地址：math.ias.edu/~lurie/。4，5[Mal49] A. I. Malćev，《幂零无挠群》，《苏联科学院消息·数学辑》，13（1949），201–212。7，17[Mat65] M. Mather，《流形同伦类型计数》，《拓扑学》，4（1965）（1），93–94。6[Mez24] F. Mezher，《某些高维流形自同构群的剩余有限性》，（2024），arXiv:2410.08902。2，11，17[Mil66] J. Milnor，《怀特海德挠率》，《美国数学会通报》，72（1966）（3），358–426。8[Mis75] G. Mislin，《幂零空间的 Wall 障碍》，《拓扑学》，14（1975）（4），311–317。8[Mis76] ——，《有限支配的幂零空间》，《数学年刊》，103（1976）（3），547。1，7[NNP23] C. Nagy、J. Nicholson 和 M. Powell，《偶维流形的简单同伦型》，（2023），arXiv:2312.00322。2，8，9[Nom66] Y. Nomura，《主纤维空间中的同伦等价》，《数学杂志》，92（1966）（5），380–388。14[Ran87] A. Ranicki，《挠率的代数理论。II：乘积》，《K-理论》，1（1987）（2），115–170。4[Roi84] J. Roitberg，《同伦论中的剩余有限性》，《纯粹与应用代数杂志》，32（1984）（3），347–358。2，9，11，16[Seg83] D. Segal，《多循环群》，剑桥大学出版社，1983。7，17

[Ser79] J.-P. Serre, 《同调群论》（达勒姆，1977 年研讨会论文集）中的《算术群》，伦敦数学学会讲义丛书第 36 卷，剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1979 年，伦敦数学学会讲义丛书第 36 卷，第 105–136 页。11，12[SS03] S. Schwede 和 B. Shipley, 《稳定模型范畴是模范畴》，《拓扑学》42（2003）（1），103–153。4[Sul74] D. Sullivan, 《同伦论的遗传学与阿姆斯猜想》，《数学年刊》100（1974）（1），1。11[Sul77] ——, 《拓扑学中的无穷小计算》，高等科学研究所数学出版物，（1977）（47），269–331（1978）。2，9，10，11，12[Swa60] R. G. Swan, 《诱导表示与射影模》，《数学年刊》71（1960）（3），552。8[Tri99] G. Triantafillou, 《空间自同构群的算术性》，1999。2，10，11[Wal78] F. Waldhausen, 《拓扑空间的代数 KK理论 I》，载于《代数与几何拓扑》（斯坦福大学，斯坦福，加利福尼亚州，1976 年纯数学研讨会论文集），第 1 部分，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1978 年，纯数学研讨会论文集，第 XXXII 卷，第 35–60 页。4，5[Wal85] ——, 《空间的代数K理论》，施普林格出版社，柏林—海德堡，1985 年，第 318–419 页。6[Whi50] J. H. C. Whitehead, 《简单同伦型》，《美国数学杂志》72（1950）（1），1。1[Wil76] C. W. Wilkerson, 《极小单纯群的应用》，《拓扑学》15（1976）（2），111–130。11

多伦多大学，数学系，加拿大安大略省多伦多市圣乔治街40号，邮编 M5S 2E4电子邮件地址：sacha.goldman@mail.utoronto.ca