arXiv:2601.15033v1 [math.SP] 21 Jan 2026

一般实约当标准形

费尔南多·德·特尔´安*[1] 和弗罗伊´安·M. 多皮科†[1]

[1]马德里卡洛斯三世大学，ROR：https://ror.org/03ths8210，数学系，Avda. Universidad 30，28911，Legan´es，西班牙

摘要

我们获得了具有实数条目的 $n \times n$ 矩阵的一般实约当标准形。更确切地说，我们证明，$n \times n$ 实矩阵的集合是若干 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 集合的闭包之并，这些集合被称为 *generic bundles*，因为它们是特殊的“丛”。一般而言，一个丛是具有相同实约当标准形的 $n \times n$ 实矩阵集合，其中约当标准形允许特征值取不同数值；但前提是，在丛中某个矩阵里彼此不同的特征值，在同一丛的任何其他矩阵中仍保持不同。对于 $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$，第 k个一般丛包含具有 k 个不同的非实共轭特征值对以及 $n - 2k$ 个不同实特征值的 $n \times n$ 实矩阵。我们证明，每个 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 一般丛都是 $n \times n$ 实矩阵集合的一个开集。我们对不同规模的大规模随机矩阵集合进行了数值实验，以确认所有一般丛都会出现，并且只会出现这些一般丛。

关键词。实方阵；相似轨道；相似束；实约当标准形 for；闭包；舒尔形；随机矩阵；实特征值。

AMS 学科分类 MSC2020。15A18, 15A20, 15A21, 15B52, 65F15。

1 引言

众所周知，大多数复矩阵都有互不相同的特征值。用本文的术语来说，这可以改述如下：复矩阵的“泛型”约当标准形由若干个大小为 1、对应不同特征值的约当块作直和构成。回顾一下，约当形是复矩阵在相似意义下的标准形：若存在某个可逆矩阵，使得两个矩阵满足 $B = P^{-1}AP$，则称它们相似。自然会问：当矩阵的元素为实数，且允许的相似变换限制为实相似时，情况会如何？也就是说，在实相似意义下，实矩阵的泛型约当标准形是什么？众所周知，实矩阵的特征值要么是实数，要么是非实共轭数对；但是，对于一个矩阵，这两类特征值在泛型情形下各出现多少个？本文旨在从拓扑视角回答这个问题。

A在实相似意义下的实约当标准形 （记作 RJCF(A)）是实矩阵 A 的代表。它是两种不同类型的块的直和，分别对应于 A的实特征值和成对的非实共轭特征值

*fteran@math.uc3m.es
†dopico@math.uc3m.es

（定义见 [6, 定理 3.4.1。5] 和第 2 节）。在本文中，我们确定实 $n \times n$ 矩阵的一般实 Jordan 标准形。更准确地说，我们证明存在有限个 $n \times n$ RJCF（并对其进行明确描述），使得具有这些 RJCF 的矩阵构成的集合在 $\mathbb{R}^{n\times n}$中是开且稠密的，也就是说，在实 $n \times n$ 矩阵的集合中是开且稠密的。这些 RJCF 均由实特征值的数量确定。

我们来更详细地说明这项工作的贡献。主要结果是定理 3.2，我们证明了 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 个在实相似意义下的丛的闭包之并，这些丛彼此不同（我们证明了一个更强的事实，即给定的一个泛型丛的闭包与任何其他泛型丛的交集都为空），并且这些丛在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中是开集（在标准拓扑下）。因此，这些丛的并是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的开稠密集，所以在标准拓扑意义下是泛型的。我们称这些 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 丛在实相似意义下是泛型的。每个丛对应于具有相同数量的不同实特征值、其余特征值则由不同的非实共轭特征值对组成的实$n \times n$ 矩阵集合。就 RJCF 而言，第 t个丛是由 t 个大小为 2×2 、对应于不同非实共轭特征值对的实约当块，以及 $n - 2t$ 个大小为 1×1 、对应于不同实特征值的约当块作直和而成。由于 t的取值范围为 0 到 $\lfloor n/2 \rfloor$，因此并集中包含了所有可能数量的实特征值。换言之，每个泛型丛对应于一个整数 k，其中 $0 \le k \le n$，且与 n具有相同的奇偶性；它包含所有恰有 k 个不同实特征值和（$n - k$）/2 个不同非实共轭特征值对的 $n \times n$ 实矩阵。

预计每个一般丛的维数为 n^2，这与 $\mathbb{R}^{n\times n}$的维数一致。通过为相似束引入适当的维数概念，并改用 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的 余维 ，我们证明这一点确实成立，即每个一般丛的余维均为 0。

本文探讨的问题与确定随机矩阵的预期 RJCF 有关。仿照此前对一般 RJCF 的考察，我们自然会预期随机实矩阵的所有特征值两两不同，因此剩下的问题是：其中有多少个是实数？此前已有多项研究探讨这个问题。在 [3], Edelman 针对每个 $0 \le k \le n$，求出了随机 $n \times n$ 实矩阵恰有 k 个实特征值的概率；而在 [4] 中，研究者计算了实特征值的期望数量（这些研究中的随机矩阵，其元素服从相互独立的标准正态分布，不过研究者也提到，经过大量数值实验，其他分布也能得到类似结果）。根据我们的结果，所有与 n 奇偶性相同的 $0 \le k \le n$ 都必须具有正概率，并且在进行足够多次测试时，应当能通过实验观测到。我们通过若干数值实验证实了这一点。

2 记号与基本定义

沿用 [6], by $C(a, b)$ 中的记号：$= \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right]$ 我们用 2×2 表示与一对非实共轭特征值 $a \pm bi$相关联的实约当块，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $b > 0$ （从现在起， i表示虚数单位）。此外，我们分别用以下记号表示与特征值 $\mu \in \mathbb{C}$ 相关联的 $k \times k$约当块，以及与一对非实共轭特征值 $a \pm bi$相关联的 $2k \times 2k$ 实约当块，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $b > 0$:

$$J_k(\mu) = \begin{bmatrix} \mu & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & 1 \\ & & & \mu \end{bmatrix}_{k\times k}, \qquad C_k(a, b) = \begin{bmatrix} C(a,b) & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & C(a,b) & I_2 \\ & & & C(a,b) \end{bmatrix}_{2k\times 2k}. \quad (1)$$

当 $k=1$ 时，为简便起见，我们将块 $J_1(\mu)$ 写作 $[\mu]$，因为它只是一个数。

对于 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，其相似变换下的实轨道是与$A$相似的实矩阵集合，即

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(A)=\{P^{-1}AP:\ \ P\in\mathbb{R}^{n\times n}\ \text{invertible}\}. \tag{2}$$

轨道 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(A)$ 是 $\mathbb{R}$上的可微流形，其在 A 处的切空间是以下集合（例如参见 [2,§4.1]）：

$$\mathcal{T}_A=\{XA-AX:\ X\in\mathbb{R}^{n\times n}\}.$$

因此，$\mathcal{T}_A$的维数记为 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}_A)$，就是形如 $XA-AX$ 的矩阵所构成的实向量空间的维数。这就是轨道 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(A)$ 的维数。相反，我们将考察 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(A)$ 的余维，即 $\mathcal{T}_A$的法空间的维数；由于 n^2 是环境空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的维数，它等于 $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}}\mathcal{T}_A=n^2-\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{T}_A$。此外，

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(A)=\dim_{\mathbb{R}}\{X\in\mathbb{R}^{n\times n}\ :\ XA-AX=0\}, \tag{3}$$

也就是说，轨道 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(A)$ 的余维就是线性方程 $XA-AX=0$ 的解空间的维数，该解空间是一个实向量空间（例如参见 [2, 第 71] 页）。

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$的相似变换下的实丛记作 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A)$，它是由与 A具有相同 RJCF（特征值的具体取值除外）的实矩阵组成的集合，前提是某个矩阵中互不相同的特征值在其他矩阵中仍然互不相同。更准确地说，如果

$$\operatorname{RJCF}(A)=\bigoplus_{i=1}^{r}\left(\bigoplus_{j=1}^{d_i}C_{\ell_{j,i}}(\tilde{a}_i,\tilde{b}_i)\right)\oplus\bigoplus_{i=1}^{s}\left(\bigoplus_{j=1}^{e_i}J_{k_{j,i}}(\tilde{c}_i)\right), \tag{4}$$

其中 $\tilde{a}_i,\ \tilde{b}_i>0,\ \tilde{c}_i\in\mathbb{R}$，且 $\tilde{c}_i\neq\tilde{c}_{i'}$，$(\tilde{a}_i,\ \tilde{b}_i)\neq(\tilde{a}_{i'},\ \tilde{b}_{i'})$，对于 $i\neq i'$，则 A 的实丛为

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A):=\bigcup_{\substack{a_i,b_i>0,\,c_i\in\mathbb{R},\\ c_i\neq c_{i'},\ \text{if}\ i\neq i',\\ (a_i,b_i)\neq(a_{i'},b_{i'}),\ \text{if}\ i\neq i'}}\mathcal{O}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{r}\left(\bigoplus_{j=1}^{d_i}C_{\ell_{j,i}}(a_i,b_i)\right)\oplus\bigoplus_{i=1}^{s}\left(\bigoplus_{j=1}^{e_i}J_{k_{j,i}}(c_i)\right)\right). \tag{5}$$

按照 Arnold 的定义，[1, §5.5], 丛 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A)$ 的余维定义为轨道的余维与该丛中任意矩阵的不同特征值个数之差。更准确地说，若 RJCF(A) 如式 (4) 所示，则

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{R}}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A)=\operatorname{codim}_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(A)-(2r+s). \tag{6}$$

由于相似变换下的丛是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子集，因此丛的拓扑概念（如闭包或开性）采用 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的标准（欧几里得）拓扑。$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A)$ 的闭包记作 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A)$。

3 主要结果

在定理 3.2 中，我们给出了实 $n\times n$ 矩阵的一般实Jordan标准形。具体而言，我们证明了 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 $\lfloor n/2\rfloor+1$ 丛的闭包之并，而这些丛分别对应于某些特定的 RJCF。这些就是“ 一般”丛（在每个 RJCF 中，特征值彼此不同，且实特征值的数量决定了相应的 RJCF）。此外，我们还看到

任意一般丛的闭包与其他任意一般丛的交集为空，这意味着这些闭包中没有一个包含于另一个之中。我们还证明了一般丛是开集。注意，这一点特别意味着，这些丛的并集是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的开稠密集。最后，我们证明每个一般丛的余维都等于零。

为证明定理 3.2，我们将使用以下技术性引理。

引理 3.1。若 $M \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_i]\right)$，其中某个 $0 \le t \le \lfloor n/2 \rfloor$ 满足 $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $b_i > 0$，则

(a) M 至少有 $n-2t$ 个实特征值（按重数计）；(b) 若 M 的实特征值（按重数计）多于 $n-2t$ 个，则 M 的特征值中至少有一个是重特征值。

证明。若 $M \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_i]\right)$，则存在一个序列 $\{M_m\}_{m\in\mathbb{N}}$，它收敛到 M，且对所有 $m \in \mathbb{N}$，都有 $M_m \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_i]\right)$。令 RJCF$(M_m) = \bigoplus_{i=1}^{t} C(a_{i,m}, b_{i,m}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_{i,m}]$，其中某些 $a_{i,m}, b_{i,m}, c_{i,m} \in \mathbb{R}$, $b_{i,m} > 0$。根据实 Schur 分解（例如参见 [6, Th. 2.3.4-(b)]），存在一个正交矩阵 $Q_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得

$$Q_m^{\top} M_m Q_m = \begin{bmatrix} T_{1,m} & * & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & * & * & \cdots & * \\ & & T_{t,m} & & & \\ & & & c_{1,m} & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & * \\ 0 & & & & & c_{n-2t,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{7}$$

其中，$T_{i,m} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 与 $C(a_{i,m}, b_{i,m})$实相似，其中 $1 \le i \le t$，(7)中右端矩阵的分块下三角部分为零，而分块上三角部分中以 $*$标记的元素与我们的论证无关。由于正交群是紧集，必要时取一个子序列，可得序列 $\{Q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 收敛到某个正交矩阵 Q。因此，$\{Q_m^{\top} M_m Q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $Q^{\top} M Q$，它与 M相似，并具有与(7)相同的分块上三角结构。若 $Q^{\top} M Q$ 的分块对角部分为 diag$(T_1, \ldots, T_t, c_1, \ldots c_{n-2t})$，其中 $T_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 且 $c_i \in \mathbb{R}$，则 $T_i = \lim_{m\to\infty} T_{i,m}$ 且 $c_i = \lim_{m\to\infty} c_{i,m}$。此外，若 α_i, β_i 是 T_i的两个特征值，则根据特征值的连续性 [6, Th. 2.4.9.2]，当 $1 \le i \le t$时，$\alpha_i = \lim_{m\to\infty}(a_{i,m} + b_{i,m}\mathrm{i})$且 $\beta_i = \lim_{m\to\infty}(a_{i,m} - b_{i,m}\mathrm{i})$。由于 M的特征值为 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_t, \beta_t, c_1, \ldots c_{n-2t}$和 $c_i \in \mathbb{R}$，又因$c_{i,m} \in \mathbb{R}$，可知矩阵 M 至少有 $n-2t$ 个实特征值。这就证明了(a)。

为证明 (b)，假设 M 有超过 $n-2t$ 个实特征值。要出现这种情况，必须有 $\lim_{m\to\infty} b_{i,m} = 0$，其中某个 $1 \le i \le t$。但此时，$\alpha_i = \beta_i = \lim_{m\to\infty} a_{i,m}$ 是 M的一个重特征值（至少为二重）。 □

现在我们可以陈述并证明定理 3.2。(8) 右侧直和中的第一项在 $t = 0$ 时为空；第二项在 $n - 2t = 0$ 时也会出现同样的情况，即在 $t = n/2$ 时为空。

定理 3.2. 实 $n \times n$ 矩阵的集合等于以下有限个在相似意义下的丛闭包之并:

$$\mathbb{R}^{n\times n} = \bigcup_{t=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t} [c_i] \right), \tag{8}$$

其中 $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $b_i > 0$, 且$(a_i, b_i) \neq (a_{i'}, b_{i'})$, 且 $c_i \neq c_{i'}$ 对于 $i \neq i'$。此外:

(i) $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t} [c_i] \right) = 0$, 对所有 $0 \le t \le \lfloor n/2 \rfloor$, (ii) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t} [c_i] \right) \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t'} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t'} [c_i] \right) = \emptyset$, 对于 $t \neq t'$, 以及(iii) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t} [c_i] \right)^{-}$是开集, 对所有 $0 \le t \le \lfloor n/2 \rfloor$。

证明。我们先证明恒等式 (8)。为此, 令 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$。假设 RJCF($A$) 如 (4) 所示, 因此存在某个可逆矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $P^{-1}AP = \text{RJCF}(A)$。我们将证明 $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\bigoplus_{i=1}^{n_1} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n_2} [c_i])$, 其中 $n_1 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{d_i} \ell_{j,i}$ 且$n_2 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{e_i} k_{j,i}$。为此, 我们考虑以下序列 $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, 它是对 $A = P \cdot \text{RJCF}(A) \cdot P^{-1}$ 的扰动构造而成的:

$$\begin{aligned} A_m \;=\; P \Bigg(& \bigoplus_{i=1}^{r} \Bigg(\bigoplus_{j=1}^{d_i} C_{\ell_{j,i}}(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i) + \begin{bmatrix} C(\frac{1}{m+j}, \frac{1}{m+j}) & & & \\ & C(\frac{1}{2m+j}, \frac{1}{2m+j}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & C(\frac{1}{\ell_{j,i}m+j}, \frac{1}{\ell_{j,i}m+j}) \end{bmatrix} \Bigg) \\ & \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} \Bigg(\bigoplus_{j=1}^{e_i} J_{k_{j,i}}(\tilde{c}_i) + \begin{bmatrix} \frac{1}{m+j} & & & \\ & \frac{1}{2m+j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{k_{j,i}m+j} \end{bmatrix} \Bigg) \Bigg) P^{-1}. \end{aligned}$$

注意, 序列 $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $A = P \cdot \text{RJCF}(A) \cdot P^{-1}$。此外, 当 m 足够大时, $A_m \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\bigoplus_{i=1}^{n_1} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n_2} [c_i])$, 其中 $c_i \neq c_{i'}$ 且 $(a_i, b_i) \neq (a_{i'}, b_{i'})$, 对 $i \neq i'$ 成立, 这是因为:

- A_m 的实特征值为 $\tilde{c}_i + \frac{1}{km+j}$, 其中 ~~$1 \le i$~~ $\le s$、 $1 \le j \le e_i$以及$1 \le k \le k_{j,i}$。下面证明, 当 m 充分大时, 这些特征值两两不同。若 $\tilde{c}_i + \frac{1}{km+j} = \tilde{c}_i + \frac{1}{k'm+j'}$, 对于~~某个~~$1 \le k \le$ ~~$k_{j,i}$~~、$1 \le k' \le k_{j',i}$以及 $1 \le j, j' \le e_i$, 则必有 $(k-k')\, m = j' - j$。然而, 当 m 足够大时, 除非 $k = k'$ 且 $j = j'$, 否则这是不可能的, 因为 $|j' - j| \le e_i$。对于 $i \neq i'$, 由于 $\tilde{c}_i \neq \tilde{c}_{i'}$, 只要 m 足够大, 就能保证对任意$1 \le k \le k_{j,i}$、 $1 \le j \le e_i$、 $1 \le k' \le k_{j',i}$以及 $1 \le j' \le e_{i'}$, 都有 $\tilde{c}_i + \frac{1}{km+j} \neq \tilde{c}_{i'} + \frac{1}{k'm+j'}$, 因为当 m 趋于无穷大时, $\frac{1}{km+j}$ 和 $\frac{1}{k'm+j'}$都趋于0。
- 类似地, A_m 的非实复共轭特征值为 $\tilde{a}_i + \frac{1}{\ell m+j} \pm (\tilde{b}_i + \frac{1}{\ell m+j})$i, 其中 ~~$1 \le i$~~ $\le r$、 $1 \le j \le d_i$和$1 \le \ell \le \ell_{j,i}$。要证明当$m$足够大时它们两两不同, 只需检查对应于"+"符号的特征值是否两两不同, 因为 $\tilde{b}_i > 0$。若对于某个

$1 \le \ell \le \ell_{j,i}$、$1 \le \ell' \le \ell_{j',i}$、$1 \le j$、$j' \le d_i$，则与之前一样，我们得出结论：当 m 足够大时，必有 $\ell = \ell'$ 和 $j = j'$。此外，对于 $i \neq i'$，由于 $(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i) \neq (\tilde{a}_{i'}, \tilde{b}_{i'})$，可得当 m 足够大时，对于所有$1 \le \ell \le \ell_{j,i}$、$1 \le \ell' \le \ell_{j',i'}$以及$1 \le j \le d_i$、$1 \le j' \le d_{i'}$，都有 $\tilde{a}_i + \frac{1}{\ell m + j} + (\tilde{b}_i + \frac{1}{\ell m + j})\mathrm{i} \neq \tilde{a}_{i'} + \frac{1}{\ell' m + j'} + (\tilde{b}_{i'} + \frac{1}{\ell' m + j'})\mathrm{i}$。最后注意到，当 m足够大时，$\tilde{b}_i + \frac{1}{\ell m + j} > 0$，因为 $b_i > 0$。

因此，$A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n_2}[c_i]\right)$，其中 n_1和 n_2如上所述，且 a_i，b_i，$c_i \in \mathbb{R}$，$b_i > 0$, $(a_i, b_i) \neq (a_{i'}, b_{i'})$，以及 $c_i \neq c_{i'}$，对于 $i \neq i'$。由于它必定是 $2n_1 + n_2 = n$，若令 $t = n_1$，则$A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_i]\right)$，这就证明了 (8)。

现在证明陈述中的断言 (ii)。假设存在某个矩阵 $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_i]\right) \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t'} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t'}[c_i]\right)$，其中某个 $1 \le t, t' \le \lfloor n/2 \rfloor$。

由于 $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_i]\right)$，因此 A 恰有 $n - 2t$ 个实特征值。此外，由于 $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t'} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t'}[c_i]\right)$，根据引理 3.1 的 (a) 部分，$A$ 至少有 $n - 2t'$ 个实特征值，因此它必定是 $n - 2t \ge n - 2t'$，即 $t' \ge t$。如果 $t' > t$，那么引理 3.1 的 (b) 部分意味着 A 至少有一个重特征值，但事实并非如此。因此，它必定是 $t' = t$。

现在证明断言（iii）。为简便起见，设 $\mathcal{B}_t := \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_i]\right)$，其中$a_i$、$b_i$ 以及 c_i 均如陈述所述，且 $0 \le t \le \lfloor n/2 \rfloor$。设 $M \in \mathcal{B}_{t_0}$，其中某个 $0 \le t_0 \le \lfloor n/2 \rfloor$。我们将看到，存在某个 $\varepsilon > 0$，使得 $B(M, \varepsilon) \subseteq \mathcal{B}_{t_0}$，其中 $B(M, \varepsilon) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \|M - A\|_2 < \varepsilon\}$是以 M 为中心、半径为 ε 的（开）球（其中 $\|\cdot\|_2$ 表示谱范数，参见例如 [6,例 5.6。6]）。首先，根据特征值的连续性（参见例如 [6, 定理 D.2]），存在某个 $\varepsilon_0 > 0$，使得 $B(M, \varepsilon_0)$ 中的所有矩阵都有 n 个互不相同的特征值，这意味着 $B(M, \varepsilon_0) \subseteq \bigcup_{t=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{B}_t$。现在反设，对于所有 $\varepsilon < \varepsilon_0$，开球 $B(M, \varepsilon)$ 都不包含于 $\mathcal{B}_{t_0}$ 中；由于 $B(M, \varepsilon)$ 中的所有矩阵都有 n 个互不相同的特征值，这意味着 $B(M, \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{t \neq t_0} \mathcal{B}_t\right) \neq \emptyset$。因此，$M$ 属于 $\bigcup_{t \neq t_0} \mathcal{B}_t$ 的闭包，而该闭包等于 $\bigcup_{t \neq t_0} \mathcal{B}_t$。于是，对于某个$t \neq t_0$，有 $M \in \mathcal{B}_{t_0} \cap \mathcal{B}_t$，这与（ii）部分相矛盾。 —

最后，让我们证明陈述中的断言（i）。为此，我们主要依赖 [5, 第 VIII 章]中的研究成果。更准确地说，$XA - AX = 0$ 的解空间的维数取决于 RJCF(A)；对于 RJCF(A) $= \bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_i]$，其中参数 a_i，b_i，和 c_i 与陈述中的相同，其值为

$$\sum_{i=1}^{t} \dim_{\mathbb{R}}\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : XC(a_i, b_i) - C(a_i, b_i)X = 0\} + \sum_{i=1}^{n-2t} \dim_{\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R} : xc_i - c_i x = 0\}.$$

由于 $\dim_{\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R} : xc_i - c_i x = 0\} = 1$，且通过直接计算可得 $\dim_{\mathbb{R}}\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : XC(a_i, b_i) - C(a_i, b_i)X = 0\} = 2$，由 (3) 可知

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_i]\right) = 2t + n - 2t = n,$$

并且，由（6）可得，$\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C(a_i, b_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2t}[c_i]\right) = n - n = 0$。

□

n	k	$p_{n,k}$
8	8	$6.10 \cdot 10^{-5}$
	6	$2.05 \cdot 10^{-2}$
	4	$3.46 \cdot 10^{-1}$
	2	$5.71 \cdot 10^{-1}$
	0	$6.21 \cdot 10^{-2}$
9	9	$3.81 \cdot 10^{-6}$
	7	$2.56 \cdot 10^{-3}$
	5	$1.46 \cdot 10^{-1}$
	3	$5.93 \cdot 10^{-1}$
	1	$2.57 \cdot 10^{-1}$

表1：$p_{n,k}$ 对于 $n = 8$ 和 $n = 9$ 的取值（摘自 [3, 表 1]）。

4 随机矩阵的实特征值：数值实验

在最后这一节中，我们给出一些数值实验来支持主要结果，即定理 3.2，并将其与文献中关于随机矩阵实特征值的一些结果联系起来。我们将其元素为独立同分布随机变量且服从标准正态分布的实 $n \times n$ 矩阵称为“随机矩阵”。随机矩阵恰有 k 个实特征值的概率已在 [3]中得到。按照 [3], 中的记号，我们用$p_{n,\ k}$表示该概率。根据定理 3.2，只要 k 和 n 具有相同的奇偶性，就必有$p_{n,\ k} \neq 0$。$p_{n,\ k}$ 在 $n = 8$ 和 $n = 9$ 取值时的数值见表1。

我们使用以下MATLAB 代码计算了实随机矩阵的实特征值数量：

```
function 实特征值(n,m)
% 统计 m 个随机 n×n 矩阵的实特征值数量
counter=zeros(m,1);
for i=1:m
    a=randn(n);
    e=eig(a);
    normi=abs(e);
    for j=1:n
        if abs(e(j)/normi(j)-1)<=eps*cond(a)
            counter(i)=counter(i)+1;
        elseif abs(e(j)/normi(j)+1)<=eps*cond(a)
            counter(i)=counter(i)+1;
        else
            计数器(i)=计数器(i);
        end
    end
end

x  =唯一值(counter);
N  =元素个数(x);
计数  =零矩阵(N,1);
对于 k  =  1:N
   计数(k)  =  求和(counter==x(k));
end
disp([x(:) 数量  ]);
```

对于每种尺寸为 $n = 8$、9、10、15 的矩阵，我们各生成了 10^7 个测试矩阵，并使用 MATLAB R2024b进行了计算，结果如表2所示。列 k 表示实特征值的数量，列 F 表示频数。最后一列显示频数与测试总次数之比，这是对概率 $p_{n,k}$的实验近似值。对于 $n = 8$ 和 $n = 9$，实验结果与表1中的相应数值 $p_{n,k}$非常接近。事实上，对于 k 中的某些数值，它们与理论值精确到三位有效数字完全一致。对于 $n = 10$，所有可能的实特征值数量都会出现（即$k = 0$、2、4、6、8 和 10）。因此，对于 $n = 8$、9 和 10，定理 3.2 中描述的所有一般丛都会出现。然而，对于 $n = 15$，实特征值最多只出现 $k = 11$ 个（因此缺少 $k = 13$ 和$k = 15$）。在这两种情况下，结果都与 [4]中得出的实特征值期望数量相符。更具体地说，$n = 10$ 的期望值约为 2.93（见 [4]中的表1），与之最接近的偶数是 $k = 2$，其频数最高；而对于 $n = 15$，可以根据 [4, 推论 5.3] 中的公式计算，结果约为 3.51，与之最接近的奇数是 $k = 3$，其频数同样最高。

我们可以对用于 $n = 15$ 的随机矩阵稍作调整，以便 $k = 13$ 和 $k = 15$ 出现正频数，即出现 13 个和 15 个实特征值。为此，我们给每个随机矩阵加上一个对角矩阵，其中 (i, i) 项等于 $2i$。这些矩阵的结果列于表3。如图所示，在这种情况下，所有可能数量的实特征值（即 k 个实特征值，其中 k 可以是 1 到 15 之间的任意奇数）都会出现，这证实了定理 3.2 中所述的 $n = 15$ 的丛具有一般性。

致谢。本研究部分由以下项目资助：MICIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID2023-147366NB-I00 和 FEDER/UE，以及 RED2022-134176-T。

n	k	F	$F/10^7$
8	8	594	$5.94 \cdot 10^{-5}$
	6	205759	$2.06 \cdot 10^{-2}$
	4	3456910	$3.46 \cdot 10^{-1}$
	2	5713924	$5.71 \cdot 10^{-1}$
	0	622813	$6.23 \cdot 10^{-2}$
9	9	46	$4.6 \cdot 10^{-6}$
	7	35384	$3.53 \cdot 10^{-3}$
	5	1462469	$1.46 \cdot 10^{-1}$
	3	5931622	$5.93 \cdot 10^{-1}$
	1	2570479	$2.57 \cdot 10^{-1}$
10	10	2	$2 \cdot 10^{-7}$
	8	4325	$4.22 \cdot 10^{-4}$
	6	444855	$4.45 \cdot 10^{-2}$
	4	4172775	$4.17 \cdot 10^{-1}$
	2	4944333	$4.94 \cdot 10^{-1}$
	0	433710	$4.34 \cdot 10^{-2}$
15	11	12	$1.2 \cdot 10^{-6}$
	9	5444	$5.44 \cdot 10^{-4}$
	7	335896	$3.36 \cdot 10^{-2}$
	5	3142390	$3.14 \cdot 10^{-1}$
	3	5248744	$5.25 \cdot 10^{-1}$
	1	1267514	$1.27 \cdot 10^{-1}$

表2：大小为 $n \times n$ 的 10^7 实随机矩阵的实特征值数量。

k	F	$F/10^6$
15	11240	$1.12 \cdot 10^{-2}$
13	91675	$9.17 \cdot 10^{-2}$
11	269714	$2.70 \cdot 10^{-1}$
9	352263	$3.52 \cdot 10^{-1}$
7	212891	$2.13 \cdot 10^{-1}$
5	56619	$5.66 \cdot 10^{-2}$
3	5477	$5.48 \cdot 10^{-3}$
1	121	$1.21 \cdot 10^{-4}$

表3：形式为 randn(15)+diag(2,4,6,...,2*15) 的 10^6 实矩阵的实特征值数量。

参考文献

[1] V. I. Arnold. 关于依赖于参数的矩阵。《俄罗斯数学评论》，26:29–43，1971年。[2] J. W. Demmel 和 A. Edelman. 具有给定 Jordan（Kronecker）标准形的矩阵（矩阵铅笔）的维数。《线性代数及其应用》，230:61–87，1995年。[3] A. Edelman. 随机实高斯矩阵具有 k 实特征值的概率、相关分布及圆律。《多元分析杂志》，60:203–232，1997年。[4] A. Edelman、E. Kostlan 和 M. Shub. 随机矩阵有多少个特征值是实数？《美国数学会杂志》，7:247–267，1994年。[5] F. R. Gantmacher.《矩阵论》。AMS Chelsea 出版社，纽约，1959年。[6] R. A. Horn 和 C. R. Johnson.《矩阵分析，第二版》。剑桥大学出版社，2013年。