双谱有理函数与 Leonard 三元组

Nicolas Crampé[1*]、Wolter Groenevelt[2†]、Quentin Labriet[3‡]、Lucia Morey[3§]、Luc Vinet[3, 4¶]、Carel Wagenaar[2‖]

[1] 法国国家科学研究中心 – 蒙特利尔大学 CRM - 法国国家科学研究中心，法国。

[2] 代尔夫特理工大学，DIAM，邮政信箱 5031，2600 GA Delft，荷兰。

[3] 数学研究中心，蒙特利尔大学，邮政信箱 6128，市中心站，蒙特利尔（魁北克），H3C 3J7，加拿大。

[4] IVADO，蒙特利尔（魁北克），H2S 3H1，加拿大。

arXiv:2601.15052v1 [math.RA] 21 Jan 2026

摘要

众所周知，Leonard 对与 Askey 方案中的双谱正交多项式密切相关。本文提出 Leonard 三元组（V, V, Z）这一概念，它是一种扩展 Leonard 对的代数结构，其中 V 和 V 的特征函数的重叠系数是满足广义特征值问题的双正交有理函数。我们利用不可约 Leonard 三元组与 Leonard 对及 Heun 算子之间的联系，提出并着手对不可约 Leonard 三元组进行分类。特别地，我们证明 Wilson 有理函数会作为重叠系数出现，证明其差分关系、递推关系和双正交关系，并得到一个求和公式，将它们表示为两个 q-Racah 多项式乘积的有限和。我们还开始研究约化 Leonard 三元组；对于这类三元组，一般特征值问题可简化为 R_I 型递推关系。作为示例，我们给出一个实例，其中作为重叠系数出现的有理函数可表示为一个 ${}_4\phi_3$，并且与一个对偶 q-Hahn 型 Leonard 对相关联。

1 引言

超几何双谱正交多项式的有限族及其 q类比函数 [1, 7, 18, 30]构成了一类重要的特殊函数，它们部分地组织在（q）Askey 方案中。之所以称其为双谱，是因为它们满足递推关系和三项（q）差分方程。它们的分类工作于 [31], 完成；通过将其解释为 Askey–Wilson 代数或其某些极限或特化形式 [8, 49] 的两组基之间的重叠系数，这一分类得到了进一步阐明，并且与

*电子邮件：crampe1977@gmail.com

†电子邮件：w.g.m.groenevelt@tudelft.nl

‡电子邮件：quentin.labriet@umontreal.ca§电子邮件：lucia.morey@umontreal.ca

¶电子邮件：luc.vinet@umontreal.ca

‖电子邮件：C.C.M.L.Wagenaar@tudelft.nl

于 [39, 40, 41, 42]引入的 Leonard 对这一概念相联系。本文旨在为双谱有理函数提供这样的框架。

基于平衡的、非常良好的 q-超几何函数 ${}_{10}\phi_9$，将（q-）Askey 方案中的多项式推广为双正交有理函数，这一推广已在 [48, 34, 35,37] 中提出。这些函数称为 Wilson 有理函数，具有双谱性质，满足一对广义特征值问题，详见 [50]。此后，人们开始对 Hahn 型 [43] 和 q-Hahn [6, 47]，的有理函数，乃至 Wilson 有理函数 [14], 进行代数诠释，由此引入了 meta（q-）Hahn 代数或 meta Wilson 代数。 [45, 5], 中研究了 meta（q-）Hahn 代数的有限维表示理论，并为这些有理函数满足的关系提供了代数证明。 [19]，中还发展出另一种研究有理函数的代数方法，该方法表明，（多变量）q-Racah 型有理函数作为重叠系数出现在 $\mathcal{U}_q$（$\mathfrak{sl}_2$）中。

本文提出了 Leonard 三元组的定义（见定义 2.1），其中涉及三个自同态和两组不同的基。我们证明，定义中出现的两组基之间的重叠系数满足两个广义特征值问题，这表明这些重叠系数是双谱有理函数。我们进一步证明，双正交伙伴也存在。对 Leonard 三元组进行分类，将有助于实现对双谱有理函数的分类。遗憾的是，这个问题似乎难以解决。为了聚焦于一个范围较窄且可处理的问题，我们提出不可约 Leonard 三元组的定义（见定义 3.1）。我们将证明，这些更特殊的三元组与 Leonard 对及其相关的代数 Heun 算子密切相关。基于此定义，我们对两个 Leonard 对属于 q-Racah 型的情形下的不可约 Leonard 三元组进行了分类，并证明它与 Wilson 有理函数相关。我们研究了这一结果的不同极限，由此出现了另一类称为约化 Leonard 三元组的三元组（见定义4.1）。我们证明，与这类三元组相关的重叠系数满足 R_I 型递推关系（见 [26]），而非广义特征值问题。这些结果表明，本文定义的 Leonard 三元组为研究双谱有理函数提供了强大的代数框架。

作为我们构造的副产品，我们得到了 Wilson 有理函数的一个表达式，它可写成两个 q-Racah 多项式乘积之和。当 Wilson 有理函数趋于 q-Racah 多项式时，该公式在极限下化为q-Racah 多项式的 Racah 关系。

本文结构如下。第2节回顾 Leonard 对的定义，并综述与本文相关的性质。随后，我们定义 Leonard 三元组，并说明它如何自然地引出对满足广义特征值问题的双正交有理函数的研究。第3节给出不可约 Leonard 三元组的定义，并阐释其与 Leonard 对和代数 Heun 算子的联系。我们证明，与不可约 Leonard 三元组相关的有理函数可表示为两个来自（q-）Askey 方案的多项式乘积之和。第4节介绍约化 Leonard 三元组，并确定其构成算子的特征值所满足的约束。我们证明，与约化 Leonard 三元组相关的函数满足 R_I 型递推关系，而非广义特征值问题。此外，我们证明这些约化三元组可由不可约三元组取极限得到。第5节专门讨论 q-Racah 型不可约 Leonard 三元组的分类。从两个 q-Racah 型 Leonard 对出发，我们推导出构造 Leonard 三元组所需的参数约束。通过求解这些约束，我们证明最一般的不可约 Leonard 三元组与 Wilson 有理函数相关。作为这一构造的推论，我们重新推导其广义特征值问题，并得到这些有理函数用 q-Racah 多项式表示的表达式。第6节探讨上述结果的各种极限情形。我们给出一个约化 Leonard 三元组的例子，并将所得结果与此前研究过的函数联系起来。最后，第7节给出总结与展望。附录A和B分别包含关于 q-Racah 多项式和 Wilson 有理函数的技术性结果。

2 Leonard 三元组

在本文中， $\mathbb{V}$ 表示复数域 $\mathbb{C}$ 上维数有限的向量空间，End($\mathbb{V}$) 表示 $\mathbb{V}$ 的自同态在 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。令 $\mathbb{I}$ 为 End($\mathbb{V}$) 中的恒等算子。若方阵的每个非零元素都位于对角线、次对角线或超对角线上，则称其为三对角矩阵。若三对角矩阵的次对角线上的每个元素均非零，且超对角线上的每个元素也均非零，则称该矩阵不可约。

2.1 定义

我们来回顾 Leonard 对 [39, 40] 的定义。

定义 2.1。 Leonard 对（LP）是 End($\mathbb{V}$) 中元素的有序对 (X, Y)，满足以下条件：

(i) 存在 $\mathbb{V}$ 的一组基，使得表示 X 的矩阵是不可约三对角矩阵，而表示 Y 的矩阵是对角矩阵。(ii) 存在 $\mathbb{V}$ 的一组基，使得表示 X 的矩阵是对角矩阵，而表示 Y 的矩阵是不可约三对角矩阵。

下文将用到代数 Heun 算子的概念。与 LP (X, Y) 相关联的代数 Heun 算子是如下线性组合

$$H = h_0\mathbb{I} + h_1X + h_2Y + h_3XY + h_4YX\,, \tag{2.1}$$

对于 h_0， h_1， h_2， h_3， $h_4 \in \mathbb{C}$。 [33] 已证明，任何在与 Leonard 对 $(X$， $Y)$ 相关联的两个基中均为三对角的自同态，都可以写成 (2.1) 的形式。该名称首次出现在 [20], 中，当时它是在带宽与时间限制问题的研究中，作为微分 Heun 算子的一种推广提出的。它也被用于简化纠缠熵的计算 [13]，并出现在量子可积系统的研究中 [3]。

引入 Leonard 对这一概念，是为了对一个关于有限序列双谱多项式分类的定理提供代数解释 [2, 31]。下文将给出 Leonard 三元组的定义；它推广了 Leonard 对的概念，并为有理函数的研究提供了一个新的代数框架。若一个对角矩阵的对角线上所有元素都互不相同，则称其为重数自由的。

~**定义 2.2.** Leonard 三元组（LT）是由 End($\mathbb{V}$) 中的元素构成的有序三元组（V, V, Z），满足以下性质：

(i) 存在 $\mathbb{V}$ 的一组基，使得表示 V 的矩阵是对角且重数自由的，而表示 Z 和 VZ 的矩阵是三对角的。~(ii) 存在 $\mathbb{V}$ 的一组基，使得表示 V 的矩阵是对角且重数自由的，而表示 Z 和 ZV 的矩阵是三对角的。

~需要强调的是，在定义 2.2 的 (i) 中指定的第一组基下，表示 V 的矩阵可以是满矩阵；而在 (ii) 中指定的第二组基下， V 也可以是满矩阵。这是它与 [16] 中引入并在 [17, 22, 23, 24, 28]中分类的 Leonard三元组概念之间的主要区别。

注 2.1。 根据 *Leonard* 三元组的定义，我们可以证明以下不同的性质：

- 如果（$\widetilde{V}$、 V、 Z）是 *Leonard* 三元组，那么对于 $\widetilde{v_1}$、 $\widetilde{v_1}$、$z_1 \in \mathbb{C}^\star$、 v_0、$\widetilde{v_0} \in \mathbb{C}$，*{style id='9'}*（$v_1V + v_0\mathbb{I}$、 $\widetilde{v_1}V + \widetilde{v_0}\mathbb{I}$、 z_1Z）也是 *Leonard* 三元组。我们要强调，不能通过单位矩阵来变换 Z 。~ ~
- 如果 (V, V) 是一个 *Leonard* 对，那么 $(V, V, \mathbb{I})$ 就是一个 *Leonard* 三元组。

- 若(V, V, Z)是一个 *Leonard* 三元组，则(V, V, Z)不一定是 *Leonard* 三元组。
- 若(V, Z)是一个 *Leonard* 对，则(V, V, Z)是一个 *Leonard* 三元组。

在本文余下部分，对于 Leonard 三元组 (V, V, Z)，我们将 $\boldsymbol{v_n} \in \mathbb{V}$和 $\lambda_n \in \mathbb{C}$分别记为 $n = 0, 1, \ldots, N$ 对应的特征向量和特征值：V:

$$V\boldsymbol{v_n} = \lambda_n \boldsymbol{v_n}\,. \tag{2.2}$$

向量 $\boldsymbol{v_n}$ 构成 $\mathbb{V}$ 的一个基，而 $\lambda_n \neq \lambda_m$ 对应于 $n \neq m$。我们为这些向量选取一种排列，使得对于 $n = 0, 1, \ldots, N$,

$$Z\boldsymbol{v_n},\ \widetilde{V}Z\boldsymbol{v_n} \ \in\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v_{n-1}}, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_{n+1}})\,, \tag{2.3}$$

其中，按照约定，$\boldsymbol{v_{-1}} = \boldsymbol{v_{N+1}} = 0$。

我们将 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{V}$ 记为 $\sim\lambda_x \in \mathbb{C}$，对于 $x = 0$，1，...，N，V的特征向量和特征值为:

$$\widetilde{V}\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\lambda}_x \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}\,. \tag{2.4}$$

向量 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}$ 构成 $\mathbb{V}$ 和 $\lambda_x \neq \lambda_y$ 的一个基，属于 $x \neq y$。我们对这些向量进行排序，使得

$$Z\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}},\ ZV\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}},\ \in\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x-1}}, \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x+1}})\,, \tag{2.5}$$

其中，按照约定，$\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{-1}} = \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{N+1}} = 0$。

注 *2.2*。*</style>*向量 $\boldsymbol{v_n} \to \boldsymbol{v_{N-n}}$ 的重新排序保持矩阵 V、Z和 VZ的形状不变。类似地，向量 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} \to \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{N-x}}$ 的重新排序保持矩阵 V、Z 和 ZV的形状不变。

2.2 双谱有理函数

我们在 $\mathbb{V}$ 上赋予一个左半双线性型 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，并令 $\boldsymbol{v_n^\star}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^\star$ 表示 $\boldsymbol{v_n}$ 和$\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}$ 的对偶向量，其定义如下:

$$\langle \boldsymbol{v_m^\star}, \boldsymbol{v_n}\rangle = \delta_{m,n}\,, \qquad \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^\star, \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{y}}\rangle = \delta_{x,y}\,. \tag{2.6}$$

注意，对于任意 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$，我们都有如下分解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \sum_{n=0}^{N} \langle \boldsymbol{v_n^\star}, \boldsymbol{w}\rangle \boldsymbol{v_n} = \sum_{n=0}^{N} \langle \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{w}\rangle \boldsymbol{v_n^\star} \\ &= \sum_{x=0}^{N} \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^\star, \boldsymbol{w}\rangle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} = \sum_{x=0}^{N} \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{w}\rangle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^\star\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

对于任意自同态 $A \in$End($\mathbb{V}$)，我们关联到伴随自同态 $A^\dagger \in$End($\mathbb{V}$)，其定义为：对于任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$,

$$\langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w}\rangle = \langle A^\dagger \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle\,. \tag{2.8}$$

引入 Leonard 三元组的主要动机由下述命题给出，其中 LT 的两组基之间的重叠给出了满足双谱广义特征值问题的有理函数。

命题 2.3. 设(V, V, Z) 是一个 LT。由下式定义的函数

$$w_n(x) = \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star}, \boldsymbol{v_n} \rangle \,, \tag{2.9}$$

满足递推关系

$$\begin{aligned} & X_{n+1,n}\, w_{n+1}(x) + X_{n,n}\, w_n(x) + X_{n-1,n}\; w_{n-1}(x) \\ =& \widetilde{\lambda}_x \Big(Z_{n+1,n}\, w_{n+1}(x) + Z_{n,n}\, w_n(x) + Z_{n-1,n}\, w_{n-1}(x) \Big) \,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

以及差分方程

$$\begin{aligned} & \widetilde{X}_{x,x+1}\, w_n(x+1) + \widetilde{X}_{x,x}\, w_n(x) + \widetilde{X}_{x,x-1}\; w_n(x-1) \\ =& \lambda_n \Big(\widetilde{Z}_{x,x+1}\, w_n(x+1) + \widetilde{Z}_{x,x}\, w_n(x) + \widetilde{Z}_{x,x-1}\, w_n(x-1) \Big) \,, \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $X_{m,\,n}$ 和 $Z_{m,\,n}$ 是矩阵 VZ 和 Z 在基 $\boldsymbol{v_n}$ 和 $X_{x,\,y}$ 和 $Z_{x,\,y}$ 中的元素，矩阵 ZV 和 Z 在基 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}$中的元素：

$$X_{m,n} = \langle \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{m}}^{\star}, \widetilde{V} Z \boldsymbol{v_n} \rangle \,, \quad Z_{m,n} = \langle \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{m}}^{\star}, Z \boldsymbol{v_n} \rangle \,, \quad \widetilde{X}_{x,y} = \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star}, ZV \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{y}} \rangle \,, \quad \widetilde{Z}_{x,y} = \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star}, Z \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{y}} \rangle \,. \tag{2.12}$$

证明。 通过以两种不同方式计算以下标量积，可证明递推关系 (2.10)

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star}, \widetilde{V} Z \boldsymbol{v_n} \rangle = \langle \widetilde{V}^{\dagger} \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star}, Z \boldsymbol{v_n} \rangle \,. \tag{2.13}$$

事实上，利用 Leonard 三元组的性质可知， VZ 在基 $\boldsymbol{v_n}$ 下是一个三对角矩阵，这给出了 (2.10) 的左端。然后，由 (2.7) 可得 $\widetilde{V}^{\dagger} \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star} = \widetilde{\lambda}_x \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star}$（其中 $\cdot$表示复共轭），再利用半双线性型的线性性，即可得到 (2.10) 的右端，从而完成该关系的证明。

从 $\langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star}, ZV \boldsymbol{v_n} \rangle$ 出发，可以用类似的方法求得差分方程，其中需要利用 (2.7) 求出 $Z^{\dagger}$ 对 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star}$ 的作用。 □

前一个命题中引入的关系称为广义特征值问题。接下来，我们要求对于 $0 \leq n, x \leq N$,

$$X_{n+1,n} - \widetilde{\lambda}_x Z_{n+1,n} \neq 0 \,. \tag{2.14}$$

利用这些条件，通过递归使用 (2.10)，可以推导出 $w_n(x)/w_0(x)$ 是关于 λ_x的有理函数。此外，如果对于任意 n，$Z_{n,n}$ 和 $Z_{n+1,n}$ 均不为零，则可以通过归纳法证明， $w_n(x)/w_0(x)$ 是一个次数为 n 的多项式与另一个次数为 n 的多项式之比。如果 (2.10) 中所有系数 $Z_{n+1,n}$ 均为零，那么这些函数 w_n/w_0 就变为多项式，而广义特征值问题则变为递推关系。

我们也只考虑以下情形： $0 \leq n$， $x \leq N$,

$$\widetilde{X}_{x,x+1} - \lambda_n \widetilde{Z}_{x,x+1} \neq 0 \,, \tag{2.15}$$

使得关系 (2.11) 也可以递归地用于定义 $w_n(x+1)$，并以 $w_n(0)$ 表示。换言之，前述命题与约束条件 (2.14) 和 (2.15) 一起意味着，在 LT 定义中引入的两组基之间的重叠系数是双谱有理函数。这推广了这样一个事实：在 LP 定义中引入的两组基之间的重叠系数是双谱多项式。

上一命题中引入的有理函数 w_n 有其自然的伴随函数，从而得到下一命题中的双正交关系。

命题 2.4。 按照命题 *2.3* 定义 $w_n(x)$，并将函数 $\widetilde{w}_n(x)$定义为

$$\widetilde{w}_n(x) = \langle \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}^{\star}, \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} \rangle \,. \tag{2.16}$$

这些函数是双正交的，并且接近恒等式

$$\sum_{x=0}^{N} w_m(x)\widetilde{w}_n(x) = \delta_{m,n} \,, \qquad \sum_{n=0}^{N} w_n(x)\widetilde{w}_n(y) = \delta_{x,y} \,. \tag{2.17}$$

证明。 利用 (2.7)，可以将 $\boldsymbol{v_m}$ 表示为基 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}$ 中的形式，从而得到

$$\delta_{m,n} = \langle \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}^{\star}, \boldsymbol{v_m} \rangle = \sum_{x=0}^{N} \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star}, \boldsymbol{v_m} \rangle \langle \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}^{\star}, \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} \rangle \,,$$

从而证明了 (2.17) 中的第一个关系。第二个关系的证明类似。 □

此时，双正交伙伴 $\widetilde{w}_n(x)$ 不一定满足递推关系或差分关系，尽管我们稍后讨论的例子将会满足这些关系。

下一个目标是类比 Leonard 对[39, 40]的分类，对 LT 进行分类。然而，这个问题目前似乎难以解决。通过施加一些额外条件，可以得到不可约 Leonard 三元组的定义；在接下来的章节中，我们将成功计算出一大类解。

3 不可约 Leonard 三元组

3.1 定义与代数 Heun 算子

为了简化分类，同时仍保留大量示例，我们引入不可约 Leonard 三元组的概念。

定义 3.1. 不可约 Leonard 三元组（iLT）是由 End(𝕍) 中的元素构成的有序三元组 (V, V, Z)，满足以下性质：

(i) 存在 $\mathbb{V}$ 的一组基，使得表示 V 的矩阵为对角矩阵，表示 VZ 的矩阵为三对角矩阵，而表示 Z 的矩阵为不可约三对角矩阵。(ii) 存在 $\mathbb{V}$ 的一组基，使得表示 V 的矩阵为对角矩阵，表示 ZV 的矩阵为三对角矩阵，而表示 Z 的矩阵为不可约三对角矩阵。(iii) 存在 $\mathbb{V}$ 的一组基，使得表示 Z 的矩阵为对角矩阵，而表示 V 和 V 的矩阵为不可约三对角矩阵。

根据这一定义，与 Leonard 对存在紧密联系，具体如下述命题所示。

命题 3.2。 设(V, V, Z) 是一个不可约 *Leonard* 三元组。以下陈述成立：

- (V, Z) 是一个 *Leonard* 对；
- (V, Z) 是一个 *Leonard* 对；
- (V, V, Z) 是一个 *Leonard* 三元组。

证明。 除了 Leonard 三元组中、 V 和 V 的谱非退化性之外，证明可由各项定义直接得出。这是因为 Leonard 对的两个元素都具有非退化谱 [41,引理 3.1]。

□

对于不可约 Leonard 三元组，在与该 Leonard 三元组相关联的两个基下，表示 Z 的矩阵均为不可约三对角矩阵。这解释了为何使用形容词不可约来描述这类 Leonard 三元组。不可约 Leonard 三元组与代数 Heun 算子之间存在以下有趣的联系（其定义见下文定义 2.1），这对其分类非常有帮助。

命题 3.3。 设(V,V,Z) 为一个不可约 *Leonard* 三元组。存在 $h_0,h_1,\ldots,h_9\in\mathbb{C}$，使得

$$\widetilde{V}Z = h_0\mathbb{I} + h_1Z + h_2V + h_3VZ + h_4ZV\,, \tag{3.1}$$

$$ZV = h_5\mathbb{I} + h_6Z + h_7\widetilde{V} + h_8\widetilde{V}Z + h_9Z\widetilde{V}\,. \tag{3.2}$$

证明。 根据 Leonard 对的定义，元素 V 在 $\mathbb{V}$ 的一组基上作用为三对角形式，而相对于这组基，$\widetilde{Z}$ 为对角形式。于是，元素 VZ 在这组基上作用为三对角形式。此外，算子 VZ 在基 $\boldsymbol{v_n}$ 下也为三对角形式（根据 Leonard 三元组的定义）。因此，由 [33] 可知， VZ在定义该 Leonard 对的两个算子 V 和 Z 的特征基中均为三对角形式，故必为与该 Leonard 对相关的 Heun 算子，即 具有形式 (3.1)。类似地，我们可以证明 ZV 是关于 V 和 Z的代数 Heun 算子。

□

命题 3.3 的逆命题也成立。

命题 3.4. 设 (V,Z) 和 (V,Z) 是两个 *Leonard* 对。若存在 $h_0,h_1,\ldots,h_9\in\mathbb{C}$ 使得(3.1)和(3.2) 成立，则(V,V,Z) 是一个不可约 *Leonard* 三元组。

证明. 利用 VZ 和 ZV用代数 Heun 算子表示的表达式，可得 Leonard 三元组定义中的 (i) 和 (ii) 两点。其余各点则由命题的假设直接得到。

□

利用命题 3.3，我们可以证明双正交伙伴 $\widetilde{w}_n(x)$ 也满足递推关系和差分关系。事实上，由 (3.1) 可得

$$h_4ZV = \widetilde{V}Z - h_0\mathbb{I} - h_1Z - h_2V - h_3VZ\,.$$

将 (3.2) 左边乘以 h_4，并代入上面的表达式，得到：

$$\widetilde{V}Z - h_0\mathbb{I} - h_1Z - h_2V - h_3VZ = h_4h_5\mathbb{I} + h_4h_6Z + h_4h_7\widetilde{V} + h_4h_8\widetilde{V}Z + h_4h_9Z\widetilde{V}\,.$$

重新整理各项可得，除了 ZV， $V(Z+h_2/h_3\mathbb{I})$ 也是与 (Z,V) 相关联的 Heun 算子。类似地，$(Z+h_7/h_9\mathbb{I})V$是与 (Z,V) 相关联的 Heun 算子。

推论 3.5。 设 $h_0,h_1,\ldots,h_9\in\mathbb{C}$ 如命题 *3.3* 中所述，并假设 h_3 和 h_9 均非零，则

$$\big(Z+\frac{h_7}{h_9}\mathbb{I}\big)\widetilde{V} = -\frac{h_5+h_0h_8}{h_9}\mathbb{I} - \frac{(h_6+h_1h_8)}{h_9}Z - \frac{h_2h_8}{h_9}V - \frac{h_3h_8}{h_9}VZ + \frac{(1-h_4h_8)}{h_9}ZV\,, \tag{3.3}$$

$$V\big(Z+\frac{h_2}{h_3}\mathbb{I}\big) = -\frac{(h_0+h_4h_5)}{h_3}\mathbb{I} - \frac{(h_1+h_4h_6)}{h_3}Z - \frac{h_4h_7}{h_3}\widetilde{V} + \frac{(1-h_4h_8)}{h_3}\widetilde{V}Z - \frac{h_4h_9}{h_3}Z\widetilde{V}\,. \tag{3.4}$$

利用上述推论，可以采用与命题 2.3 中相同的方法，推导出 $\widetilde{w}_n(x)$ 的递推关系和差分关系。

除了与代数 Heun 算子的联系之外，不可约 Leonard 三元组与 Leonard 对相关这一事实，使我们能够利用后者的分类来探索不可约 Leonard 三元组可能的类型。众所周知，任意 Leonard 对都与一族双谱多项式相关。这些多项式族必属于 q-Askey 方案的有限序列（q-Racah、 q-Hahn、对偶 q-Hahn、 q-Krawtchouk、对偶 q-Krawtchouk、仿射 q-Krawtchouk、量子 q-Krawtchouk）、该方案的极限 $q\to 1$ （Racah、Hahn、对偶 Hahn、Krawtchouk），或其 $q\to -1$ 极限（Bannai–Ito 及其后裔）。在下面的小节中，我们回顾 Leonard 对与双谱多项式之间的确切关系。

3.2 Leonard 对与双谱多项式

如果有限多项式序列（P_n）$_{n=0}^{N}$ 是上述序列之一，那么它们满足递推关系，对于 $0 \le n,\ x \le N$,

$$\lambda_x P_n(x) = \mathcal{A}_n P_{n+1}(x) + \mathcal{B}_n P_n(x) + \mathcal{C}_n P_{n-1}(x)\,. \tag{3.5}$$

根据法瓦尔德定理 [7], ，这些多项式是正交的，即存在权函数 Ω_x ，使得对于 $0 \le m,\ n \le N$，以下关系成立,

$$\sum_{x=0}^{N} \Omega_x P_m(x) P_n(x) = \omega_n \delta_{m,n}\,. \tag{3.6}$$

除这些关系外，它们还满足差分方程，对于 $0 \le n,\ x \le N$,

$$\xi_n P_n(x) = \mathscr{A}_x P_n(x+1) + \mathscr{B}_x P_n(x) + \mathscr{C}_x P_n(x-1)\,, \tag{3.7}$$

且接近恒等式

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\omega_n} P_n(x) P_n(y) = \frac{1}{\Omega_x}\delta_{x,y}\,. \tag{3.8}$$

为了将这些多项式与 Leonard 对联系起来，令 $\boldsymbol{z_i}(i = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ N)$ 为 $\mathbb{V}$ 的一组基，并在 $\mathbb{V}$ 上赋予由 $\langle \boldsymbol{z_i},\ \boldsymbol{z_j}\rangle = \delta_{i,\ j}$ 诱导的内积。定义两个算子 Z 和 V，对于 $i = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ N$,

$$Z\boldsymbol{z_i} = \xi_i \boldsymbol{z_i}\,, \qquad V\boldsymbol{z_i} = \mathcal{C}_{i+1}\boldsymbol{z_{i+1}} + \mathcal{B}_i \boldsymbol{z_i} + \mathcal{A}_{i-1}\boldsymbol{z_{i-1}}\,. \tag{3.9}$$

这两个算子构成一个 Leonard 对（$V,\ Z$）。事实上，定义 $\boldsymbol{v_n}$，对于 $n = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ N$,

$$\boldsymbol{v_n} = \sum_{i=0}^{N} P_i(n)\ \boldsymbol{z_i}\,, \tag{3.10}$$

o可以利用递推关系 (3.5) 证明，V 在此基上以对角形式作用 ,

$$V\boldsymbol{v_n} = \lambda_n \boldsymbol{v_n}\,, \tag{3.11}$$

并利用差分关系 (3.7) 证明，Z 以三对角形式作用:

$$Z\boldsymbol{v_n} = \mathscr{A}_n \boldsymbol{v_{n+1}} + \mathscr{B}_n \boldsymbol{v_n} + \mathscr{C}_n \boldsymbol{v_{n-1}}\,. \tag{3.12}$$

利用关系 (3.8)，对偶向量 $\boldsymbol{v_n^\star}$ 可写成如下形式:

$$\boldsymbol{v_n^\star} = \sum_{i=0}^{N} \frac{\omega_i}{\Omega_n} P_i(n) \boldsymbol{z_i}\,. \tag{3.13}$$

由此可推得，两组基 $\boldsymbol{z_i}$、 $\boldsymbol{v_n}$ 之间的重叠系数与多项式

$$\langle \boldsymbol{z_i}, \boldsymbol{v_n}\rangle = P_i(n)\,, \qquad \langle \boldsymbol{v_n^\star}, \boldsymbol{z_i}\rangle = \frac{\omega_i}{\Omega_n} P_i(n)\,. \tag{3.14}$$

3.3 不可约 Leonard 三元组与双谱多项式

~设 (V,V,Z) 是一个不可约 Leonard 三元组。根据定义，(V,Z) 和 (V,Z) 是 Leonard 对；如前一小节所述，我们可以分别为它们关联有限的多项式序列 $(P_i)_{i=0}^N$和 $(\widetilde{P}_i)_{i=0}^N$。对于多项式 P_n，我们沿用前一小节的记号~；而对于 P_n，我们沿用满足这些多项式~所满足关系中的所有函数的名称，但加上波浪号。例如，对角化 V的那组基中的向量记为 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n}}$，关系 (3.10) 的对应形式为

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=0}^{N} \widetilde{P}_i(x)\boldsymbol{z_i}\,. \tag{3.15}$$

由这些结果，我们可以得到命题 2.3 中定义的有理函数 $w_n(x)$与两个 Leonard 对所关联的两组多项式之间的关系，

$$w_n(x) = \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{\star}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v_n}\rangle = \sum_{i=0}^{N} \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{\star}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{z_i}\rangle\langle \boldsymbol{z_i}, \boldsymbol{v_n}\rangle = \sum_{i=0}^{N} \frac{\widetilde{\omega}_x}{\widetilde{\Omega}_i}\widetilde{P}_i(x)P_i(n)\,. \tag{3.16}$$

我们指出，这一构造表明，我们所关注的双谱有理函数 $w_n(x)$是两个双谱多项式乘积之和。

如命题 3.3 所述，与一个不可约 Leonard 三元组相关联的有代数 Heun 算子 (3.1) 和 ~(3.2)。利用算子 V 和 V 在基 $\boldsymbol{z_i}$下为三对角算子、而 Z 为对角算子这一事实，我们可以计算这些关系中出现的常数 h_i。此外，如果已知~参数 h_i的表达式，就可以利用 (3.1) 确定 VZ 在 $\boldsymbol{v_n}$ 上的作用

$$\begin{aligned}(\widetilde{V}Z)\boldsymbol{v_n} =&(h_0 + h_2\lambda_n + (h_1 + h_3\lambda_n + h_4\lambda_n)\mathscr{B}_n)\boldsymbol{v_n}\\ &+(h_1 + h_3\lambda_{n+1} + h_4\lambda_n)\mathscr{A}_n\boldsymbol{v_{n+1}} + (h_1 + h_3\lambda_{n-1} + h_4\lambda_n)\mathscr{C}_n\boldsymbol{v_{n-1}}\,,\end{aligned} \tag{3.17}$$

并利用 (3.2) 计算 ZV 在 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}$ 上的作用

$$\begin{aligned}(ZV)\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} =&(h_5 + h_7\widetilde{\lambda}_x + (h_6 + h_8\widetilde{\lambda}_x + h_9\widetilde{\lambda}_x)\widetilde{\mathscr{B}}_x)\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}\\ &+(h_6 + h_8\widetilde{\lambda}_{x+1} + h_9\widetilde{\lambda}_x)\widetilde{\mathscr{A}}_x\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x+1}} + (h_6 + h_8\widetilde{\lambda}_{x-1} + h_9\widetilde{\lambda}_x)\widetilde{\mathscr{C}}_x\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x-1}}\,.\end{aligned} \tag{3.18}$$

利用这些公式，我们可以得到出现在 $w_n(x)$ 的广义特征值问题 (2.10) 和 (2.11) 中的函数的显式表达式:

$$Z_{n+1,n} = \mathscr{A}_n\,,\quad Z_{n,n} = \mathscr{B}_n\,,\quad Z_{n-1,n} = \mathscr{C}_n\,, \tag{3.19a}$$
$$X_{n+1,n} = (h_1 + h_3\lambda_{n+1} + h_4\lambda_n)\mathscr{A}_n\,,\quad X_{n,n} = h_0 + h_2\lambda_n + (h_1 + h_3\lambda_n + h_4\lambda_n)\mathscr{B}_n\,, \tag{3.19b}$$
$$X_{n-1,n} = (h_1 + h_3\lambda_{n-1} + h_4\lambda_n)\mathscr{C}_n\,, \tag{3.19c}$$

and

$$\widetilde{Z}_{x,x-1} = \widetilde{\mathscr{A}}_{x-1}\,,\quad \widetilde{Z}_{x,x} = \widetilde{\mathscr{B}}_x\,,\quad \widetilde{Z}_{x,x+1} = \widetilde{\mathscr{C}}_{x+1}\,, \tag{3.20a}$$
$$\widetilde{X}_{x,x-1} = (h_6 + h_8\widetilde{\lambda}_{x-1} + h_9\widetilde{\lambda}_x)\widetilde{\mathscr{A}}_{x-1}\,,\quad X_{x,x} = h_5 + h_7\widetilde{\lambda}_x + (h_6 + h_8\widetilde{\lambda}_x + h_9\widetilde{\lambda}_x)\widetilde{\mathscr{B}}_x\,, \tag{3.20b}$$
$$\widetilde{X}_{x,x+1} = (h_6 + h_8\widetilde{\lambda}_x + h_9\widetilde{\lambda}_{x+1})\widetilde{\mathscr{C}}_{x+1}\,. \tag{3.20c}$$

~反过来，要对不可约 Leonard 三元组进行分类，可以从两个 Leonard 对（V，Z）和（V，Z）（或与之关联的两个多项式序列）出发，并尝试确定三元组（V，V，Z）何时构成不可约 Leonard 三元组。需要强调的是，当只考虑一个 Leonard 对（V，Z）时，对 V 和 Z 作任意仿射变换，或对与该 Leonard 对相关的两个基中的向量进行归一化，都只会以平凡的方式改变双谱多项式。对于不可约 Leonard 三元组，两个 Leonard 对共享一个元素：算子 Z。因此，例如，我们可以选择向量 $\boldsymbol{z_i}$ 的归一化，使 V 具有通常的形式，但 ~ 的作用

~V 可能涉及一种归一化，从而使有理函数 $w_n(x)$ 多出一个参数。也就是说，~式（3.15）中的项 $P_i(x)$ 可能含有一个依赖于 i 的因子以及一个新参数，进而对式（ 3.16 ）中的有理函数 $w_n(x)$ 产生不可忽略的~影响。此外，正如注 2.1 所述，对于（V， V， Z）~这个 Leonard 三元组，（V， V， $Z+z_0\mathbb{I}$）、（$z_0 \in \mathbb{C}$）不一定是 Leonard 三元组。这意味着，在定义 Z 时，我们不能任意选择这个常数（例如关系式（5.1）中的常数 σ ）。选定这两个 Leonard 对后，我们可以在基 $\boldsymbol{z_i}$ 中写出关系式（3.1）和（3.2）。这会对参数 h_i 以及多项式的参数施加约束。求出所有满足这些约束的解，就能对与我们选取的两个多项式相关联的不可约 Leonard 三元组进行分类。在~第5节中，我们将依照这一方案，对（V， Z）和（V，Z）都与最一般的、与 Leonard 对相关联的有限双谱多项式相联系时的不可约 Leonard 三元组进行分类；这些多项式即 q-Racah 多项式。

4 约化 Leonard 三元组

我们刚刚定义了不可约 Leonard 三元组，不过也可以对 Leonard 三元组考虑一种略有不同的简化。下文中，不可约下（上）双对角矩阵是指其下（上）对角线上的元素均非零的下（上）双对角矩阵。

~**定义4.1**。上（下）约化 Leonard 三元组（rLT）是由 End(𝕍) 中的元素构成的有序三元组 (V,V,Z)，满足以下性质：

(i) 存在 $\mathbb{V}$ 的一个基，使得表示 V 的矩阵是对角矩阵，表示 VZ 的矩阵~是三对角矩阵，而表示 Z 的矩阵是不可约上双对角矩阵（或三对角矩阵）。~(ii) 存在 $\mathbb{V}$ 的一个基，使得表示 V 的矩阵是对角矩阵，表示 ZV 的矩阵是三对角矩阵，而表示 Z 的矩阵是不可约三对角矩阵（或下双对角矩阵）。(iii) 存在 $\mathbb{V}$ 的一个基，使得表示 Z 的矩阵是对角矩阵，表示 V 的矩阵~是不可约三对角矩阵（或下双对角矩阵），且 V 是不可约上双对角矩阵（或三对角矩阵）。

满足 Leonard 对 定义，但将三对角的性质替换为下双对角（或上双对角）这一性质的一对 (V,Z)，称为约化 Leonard 对。下文中，这类对会作为 Leonard 对 的某种极限出现。

~~**注 4.2.** 若 (V,V,Z) 是上三角 rLT，则数对 (V,Z) 是 Leonard 对，而 (V,Z) 是约化 LP。~若 (V,V,Z) 是下三角 rLT，则数对 (V,Z) 是 Leonard 对，而 (V,Z) 是约化 LP。▲

在上述定义中，我们选择了下双对角矩阵（或上双对角矩阵）。这一选择看似任意，但通过颠倒相应基中向量的顺序，我们可以从上三角矩阵得到下三角矩阵。我们作出这一选择，是为了使相应的重叠系数具有下文所示的良好性质。

4.1 当(V,Z) 是约化 LP 时 V 和 Z 的特征值约束

~设 (V,V,Z) 是一个约化 Leonard 三元组，其中 (V,Z) 是一个约化 LP。与前文一样，用$\boldsymbol{z_i}$ 表示 Z 和 ξ_i 的特征向量及相应的特征值。在这组基下， V 是上双对角矩阵，且上对角线上的元素均非零。因此， V 的作用可写为

$$V\boldsymbol{z_i} = \lambda_i \boldsymbol{z_i} + \mathcal{A}_{i-1}\boldsymbol{z_{i-1}}\,, \tag{4.1}$$

且 $\boldsymbol{v_x}$ V 的特征向量为

$$\boldsymbol{v_x} = \sum_{i=0}^{x} \zeta(x,i)\boldsymbol{z_i}\,, \tag{4.2}$$

其中 ζ 满足，对于 $i<x$,

$$(\lambda_x-\lambda_i)\zeta(x,i)=\zeta(x,i+1)\mathcal{A}_i\,. \tag{4.3}$$

Z 的作用形式为

$$Z\boldsymbol{v_x}=\xi_x\boldsymbol{v_x}+\mathscr{C}_x\boldsymbol{v_{x-1}}\,, \tag{4.4}$$

并利用表达式 (4.2)，必须验证以下约束

$$(\xi_i-\xi_x)\zeta(x,i)=\zeta(x-1,i)\mathscr{C}_x\,. \tag{4.5}$$

关系 (4.3) 和 (4.5) 允许递归地用 $\zeta(0,0)$ 表示 $\zeta(x,i)$，但得到这一结果的路径并不唯一，因此它们必须相容。通过比较用 $\zeta(x-1,i)$ 表示 $\zeta(x,i+1)$ 的两种方式，可以得到这些相容条件:

$$\zeta(x,i+1)=\frac{\lambda_x-\lambda_i}{\mathcal{A}_i}\zeta(x,i)=\frac{\mathscr{C}_x(\lambda_x-\lambda_i)}{\mathcal{A}_i(\xi_i-\xi_x)}\zeta(x-1,i) \tag{4.6}$$

$$=\frac{\mathscr{C}_x}{\xi_{i+1}-\xi_x}\zeta(x-1,i+1)=\frac{\mathscr{C}_x(\lambda_{x-1}-\lambda_i)}{\mathcal{A}_i(\xi_{i+1}-\xi_x)}\zeta(x-1,i)\,, \tag{4.7}$$

由此得到

$$\frac{\lambda_x-\lambda_i}{\lambda_{x-1}-\lambda_i}=\frac{\xi_x-\xi_i}{\xi_x-\xi_{i+1}}\,. \tag{4.8}$$

~属于 Leonard 对 (V,Z) 的 Z 的特征值 ξ_x 只能有三种不同形式[39]。第一种形式为 $\xi_x=\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1q^x+\mathfrak{a}_2q^{-x}$。利用关于 $i=0$ 的关系 (4.6)，特征值必然具有形式 $\lambda_x=\mathfrak{a}_3+\mathfrak{a}_4\frac{1-q^x}{\mathfrak{a}_1q^{x+1}-\mathfrak{a}_2}$。将此形式代入 (4.6)，可得 $\mathfrak{a}_1=0$ 或 $\mathfrak{a}_2=0$。因此，在这种情况下，可能的特征值序列只有以下两种

$$(\xi_x,\lambda_x)=(\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1q^x,\mathfrak{a}_3+\mathfrak{a}_4q^{-x})\,,\quad \text{or}\qquad (\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_2q^{-x},\mathfrak{a}_3+\mathfrak{a}_4q^x)\,. \tag{4.9}$$

在前述关系中，我们对参数 $\mathfrak{a}_3$ 和 $\mathfrak{a}_4$ 进行重新缩放，以简化表述。从第二种可能性 $\xi_x=\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1x+\mathfrak{a}_2x^2$ 出发，类似的计算只能得到一个解

$$(\xi_x,\lambda_x)=(\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1x,\mathfrak{a}_3+\mathfrak{a}_4x)\,. \tag{4.10}$$

对于第三种可能性 $\xi_x=\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1(-1)^x+\mathfrak{a}_2(-1)^xx$ ($\mathfrak{a}_2\neq0$)，不存在任何解。

需要强调的是，要使 $\mathcal{A}_i$ 和 $\mathscr{C}_x$ 成为约化 LP，并没有任何约束。当它们属于一个 rLT 时，才会出现一些约束。最后，我们证明，Z 和 V 的特征值仅有式 (4.9) 和 (4.10) 所示的可能性。我们将特征值满足式 (4.9)（分别满足式 (4.10)）的约化 Leonard 对称为 q-red（分别称为 l-red）。

~ ~当 (V,V,Z) 是一个约化 Leonard 三元组，且 ~(V,Z) 是一个约化 LP 时，也可以得到 V和 Z的特征值满足相同的约束。

4.2 Leonard 三元组的重叠系数

~设 (V,V,Z) 是一个约化 Leonard 三元组，其中 (V,Z) 是一个约化 LP。LP ~ ~(V,Z) 的重叠系数仍可用双谱正交多项式 P_i 表示:

$$\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}^{\star},\boldsymbol{z_i}\rangle=\frac{\widetilde{\omega}_x}{\widetilde{\Omega}_i}\widetilde{P}_i(x)\,. \tag{4.11}$$

求解 (4.3)，可得 $\zeta(x,i) = \prod_{j=0}^{i-1} {}^{\lambda_x-\lambda_j}_{\mathcal{A}_j}$、$(i \le x)$，与此 rLT 相关的重叠系数 $w_n(x)$ 为

$$w_n(x) = \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{\star}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v_n} \rangle = \sum_{i=0}^{N} \frac{\widetilde{\omega}_x}{\widetilde{\Omega}_i} \widetilde{P}_i(x) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_x - \lambda_j}{\mathcal{A}_j} \,. \tag{4.12}$$

在这种情况下，根据定义，Z 是上双对角的，因此系数 $Z_{n+1,\ n}$ 为零。递推广义特征值问题 (2.10) 简化为

$$X_{n+1,n}\, w_{n+1}(x) + X_{n,n}\, w_n(x) + X_{n-1,n}\ w_{n-1}(x) = \widetilde{\lambda}_x \Big(Z_{n,n}\, w_n(x) + Z_{n-1,n}\, w_{n-1}(x) \Big) \,, \tag{4.13}$$

并成为一个 R_I 递推关系。

对于 (Z, V) 是一个约化 Leonard 三元组，且 $(V,\ Z)$ 是一个约化 LP 的情况，简化并变为 R_I 型的是差分广义特征值问题 (2.11)。

4.3 q-Racah 型 LP 的极限及约化 LP

本节将说明如何从 q-Racah 型 LP 得到约化 LP。为此，我们考虑 q-Racah 多项式 $R_n^{(qR)}$（定义和性质见附录 A），以及由下式定义的函数 $r_n(x;\ \alpha,\ \gamma,\ \delta)$，其中 $\gamma = q^{-N-1}$，

$$r_n(x;\alpha,\gamma,\delta) = \lim_{\beta\to 0} \beta^n R_n^{(qR)}(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta/\beta) \,. \tag{4.14}$$

利用 (A.14)，可得

$$r_n(x;\alpha,\gamma,\delta) = \frac{(q^{-x};q)_n}{(\alpha q, \gamma q, \delta q; q)_n} \left(\gamma\delta q^{x+1}\right)^n \,. \tag{4.15}$$

注意，对于 $n > x,\ \ r_n(x)$ 为零。将此极限代入 q-Racah 多项式的递推关系和差分方程（见 (A.4) 和 (A.9)），可得到关于 r_n 的以下关系：

$$\gamma\delta q^{x+1} r_n(x) = (1-\alpha q^{n+1})(1-\delta q^{n+1})(1-\gamma q^{n+1}) r_{n+1}(x) + \gamma\delta q^{n+1} r_n(x) \,, \tag{4.16}$$

$$q^{-n} r_n(x) = (1-q^{-x}) r_n(x-1) + q^{-x} r_n(x) \,. \tag{4.17}$$

按照第 3.2 小节中针对 Leonard 对所采用的步骤，可以通过算子 V 和 Z 对向量 $\boldsymbol{z_i}$ 的作用来定义这两个算子：

$$Z\boldsymbol{z_i} = q^{-i}\boldsymbol{z_i} \,, \qquad V\boldsymbol{z_i} = (1-\alpha q^i)(1-\delta q^i)(1-\gamma q^i)\boldsymbol{z_{i-1}} + \gamma\delta q^{i+1}\boldsymbol{z_i} \,. \tag{4.18}$$

定义新向量如下：

$$\boldsymbol{v_n} = \sum_{i=0}^{N} r_i(n;\alpha,\gamma,\delta)\boldsymbol{z_i} \,, \tag{4.19}$$

利用前面的关系，可以证明

$$Z\boldsymbol{v_n} = (1-q^{-n})\boldsymbol{v_{n-1}} + q^{-n}\boldsymbol{v_n} \,, \qquad V\boldsymbol{v_n} = \gamma\delta q^{n+1}\boldsymbol{v_n} \,. \tag{4.20}$$

由此可得，(V, Z) 构成一个约化 LP。值得注意的是，这对算子的特征值与第 4.1 小节中的结果相符。

5 不可约的 q-Racah 型 Leonard 三元组

本节将按照第 3.3 小节末尾所述的步骤，对 q-Racah 型的不可约 Leonard 三元组进行分类。其他族对应的解可通过不同的极限得到，如下一节所示。

5.1 获得 Leonard 三元组的约束

~在基 $\boldsymbol{z_i}$ 中定义算子 Z、 V 和 V，其中 Z 以对角形式作用，并且 (V,Z)、~(V,Z) 是 q-Racah 型的 Leonard 对：

$$Z\boldsymbol{z_i} = \underbrace{(q^{-i}+\alpha\beta q^{i+1}+\sigma)}_{=\zeta_i}\boldsymbol{z_i}\,, \tag{5.1}$$

$$V\boldsymbol{z_i} = C_{i+1}^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\boldsymbol{z_{i+1}} + B_i^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\boldsymbol{z_i} + A_{i-1}^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\boldsymbol{z_{i-1}}\,, \tag{5.2}$$

$$\widetilde{V}\boldsymbol{z_i} = C_{i+1}^{(qR)}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta})\nu_{i+1}\boldsymbol{z_{i+1}} + B_i^{(qR)}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta})\boldsymbol{z_i} + A_{i-1}^{(qR)}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta})\frac{1}{\nu_i}\boldsymbol{z_{i-1}}\,, \tag{5.3}$$

其中 $A^{(qR)}$、 $B^{(qR)}$ 和 $C^{(qR)}$ 在附录 A 中定义。我们已经利用注 2.1 中说明的不同对称性，减少可能参数的数量。例如，我们利用对称性 $V \to v_1 V + v_0\mathbb{I}$ 来选择 V 作用中的整体因子，并得到 $B_i^{(qR)}$ 由 (A.7) 给出。如第 3.3 小节末尾所述，经过这些简化之后，仍需确定 Z 的特征值中的参数 σ，以及 V 作用中的归一化因子 ν_i。由于算子的维数必须相同，且 V 和 V 共享同一个伙伴 Z，因此这些参数必须满足：

$$\widetilde{\beta} = \alpha\beta/\widetilde{\alpha}\,, \qquad \widetilde{\gamma} = \gamma = q^{-N-1}\,. \tag{5.4}$$

我们提一下 与其考虑作用 (5.3)，我们也可以考虑下面的作用 n:

$$\widetilde{V}\boldsymbol{z_i} = C_{N-i+1}^{(qR)}(\widetilde{\alpha}',\widetilde{\beta}',\widetilde{\gamma}',\widetilde{\delta}')\nu'_{i-1}\boldsymbol{z_{i-1}} + B_{N-i}^{(qR)}(\widetilde{\alpha}',\widetilde{\beta}',\widetilde{\gamma}',\widetilde{\delta}')\boldsymbol{z_i} + A_{N-i-1}^{(qR)}(\widetilde{\alpha}',\widetilde{\beta}',\widetilde{\gamma}',\widetilde{\delta}')\frac{1}{\nu'_i}\boldsymbol{z_{i+1}}\,. \tag{5.5}$$

~ ~ ~ ~然而，令 $\widetilde{\alpha}' = \widetilde{\gamma}/\beta$、 $\beta' = \widetilde{\gamma}/\widetilde{\alpha}$、 $\widetilde{\gamma}' = \widetilde{\gamma}$、 $\delta' = \delta$ 和 $\nu'_i = 1/\nu_{i+1}$ 取为.....时，这两个作用是等价的。

~一般而言，我们可以证明 (V,V,Z) 不是一个不可约 Leonard 三元组，但我们希望找到关于参数的约束，使该三元组成为不可约 Leonard 三元组。如前所述，要证明该三元组 (V,V,Z) 的某些特化~是不可约 Leonard 三元组，只需证明存在参数 h_i，使得关系 (3.1) 和 (3.2) 成立。

将关系 (3.1) 和 (3.2) 作用于 $\boldsymbol{z_i}$，并提取 $\boldsymbol{z_{i+1}}$、 $\boldsymbol{z_i}$ 和 $\boldsymbol{z_{i-1}}$ 前的系数，可得以下约束：

$$\zeta_i C_{i+1}^{(qR)}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta})\nu_{i+1} = (h_2 + h_3\zeta_i + h_4\zeta_{i+1})C_{i+1}^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,, \tag{5.6a}$$

$$\zeta_i B_i^{(qR)}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta}) = h_0 + h_1\zeta_i + (h_2 + (h_3+h_4)\zeta_i)B_i^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,, \tag{5.6b}$$

$$\zeta_i A_{i-1}^{(qR)}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta})\frac{1}{\nu_i} = (h_2 + h_3\zeta_i + h_4\zeta_{i-1})A_{i-1}^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,, \tag{5.6c}$$

and

$$\zeta_{i+1} C_{i+1}^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (h_7 + h_8\zeta_i + h_9\zeta_{i+1})C_{i+1}^{(qR)}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta})\nu_{i+1}\,, \tag{5.7a}$$

$$\zeta_i B_i^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = h_5 + h_6\zeta_i + (h_7 + (h_8+h_9)\zeta_i)B_i^{(qR)}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta})\,, \tag{5.7b}$$

$$\zeta_{i-1} A_{i-1}^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (h_7 + h_8\zeta_i + h_9\zeta_{i-1})A_{i-1}^{(qR)}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta})\frac{1}{\nu_i}\,. \tag{5.7c}$$

我们将前面的关系视为关于 q^i 的有理函数。考察 (5.6b) 和 (5.7b) 的首项系数，可推得

$$h_1 = h_6 = 0\,. \tag{5.8}$$

为简化后续计算，定义新参数 $sh_{3,\,4}$、$h_{4,\,3}$、$h_{8,\,9}$、$h_{9,\,8}$、 μ_2 和 μ_7 如下：

$$\begin{aligned}
&\sigma = -1/s - qs\alpha\beta\,, \quad h_{n,m} = h_n + qh_m \quad \text{for } (n,m) \in \{(3,4),(4,3),(8,9),(9,8)\}\,,\\
&h_2 = -h_{4,3}/\mu_2 - h_{3,4}\alpha\beta\mu_2 - \sigma(h_3+h_4)\,, \quad h_7 = -h_{9,8}/\mu_7 - h_{8,9}\alpha\beta\mu_7 - \sigma(h_8+h_9)\,,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

以及函数 ψ 如下：

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = q(\alpha+\gamma)(1+\beta\delta) + q(\beta+\gamma)(\alpha+\delta)\,. \tag{5.10}$$

关系（5.6a）可用于求出 ν_i 的一个表达式，将其代入（5.7a）可得到如下关系：

$$\zeta_{i-1}\zeta_i = (h_2 + h_3\zeta_{i-1} + h_4\zeta_i)(h_7 + h_8\zeta_{i-1} + h_9\zeta_i)\,, \tag{5.11}$$

其显式形式为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s^2}(q^i - sq)(q^i - s)(\alpha\beta sq^i - 1)(\alpha\beta sq^{i+1} - 1) \\
=&\frac{1}{\mu_2\mu_7}(q^i - \mu_2)(q^i - \mu_7)(\alpha\beta\mu_2 h_{3,4}q^i - h_{4,3})(\alpha\beta\mu_7 h_{8,9}q^i - h_{9,8})\,.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

计算首项系数可得

$$h_{8,9} = \frac{q}{h_{3,4}}\,. \tag{5.13}$$

对（5.6c）和（5.7c）进行类似计算可得

$$h_{4,3} = \frac{\widetilde{\delta}q}{\delta h_{3,4}}\,, \qquad h_{9,8} = \frac{\delta h_{3,4}}{\widetilde{\delta}}\,. \tag{5.14}$$

利用前面的所有关系，(5.6b) 和 (5.7b) 的首项系数给出了关于 h_0 和 h_5 的以下表达式：

$$h_0 = \psi(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta}) - \frac{\delta h_{3,4}^2 + q\widetilde{\delta}}{\delta h_{3,4}(1+q)}\psi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,, \tag{5.15a}$$

$$h_5 = \psi(\alpha,\beta,\gamma,\delta) - \frac{\delta h_{3,4}^2 + q\widetilde{\delta}}{\widetilde{\delta} h_{3,4}(1+q)}\psi(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma},\widetilde{\delta})\,. \tag{5.15b}$$

将关系 (5.12) 理解为关于 q^i 的两个多项式之间的等式，它们的根必然相同，由此得到集合之间的等式：

$$\left\{sq, s, \frac{1}{\alpha\beta s}, \frac{1}{\alpha\beta sq}\right\} = \left\{\mu_2, \mu_7, \frac{\widetilde{\delta}q}{h_{3,4}^2\alpha\beta\delta\mu_2}, \frac{\delta h_{3,4}^2}{\alpha\beta\widetilde{\delta}\mu_7 q}\right\}\,. \tag{5.16}$$

左侧集合中 4 个元素的乘积等于右侧集合中 4 个元素的乘积。因此，比较这两个集合只能得到三个独立方程。我们可以确定例如 μ_2、 μ_7 和 δ。由此得到 4!=24 个不同的解。

下面我们假设参数 α、 β 和 δ 是一般的，并寻找参数 $\widetilde{\alpha}$、 δ、 σ 以及函数 ν_i ，使得前述关系成立。借助数学软件，我们检验剩余方程中的 24 个不同解，并求出关于 $h_{3,\,4}$， $\widetilde{\alpha}$ 的解

$\widetilde{}$和 s。我们只考虑能为 V 提供不同表达式的解（这里的“不同”是指这些表达式不成比例，且不能通过对其余自由参数进行变换而相互关联）。最后，我们发现元组 $(\widetilde{\alpha},\ \delta,\ \mu_2,\ \mu_7,\ h_{3,\,4},\ s)$ 有多种可能。然而，要求满足条件 (2.14) 和 (2.15) 后，我们最终只得到一个解：

$$(\widetilde{\alpha},\widetilde{\delta},\mu_2,\mu_7,h_{3,4},s)=(\alpha,\alpha/(\beta\delta),s,1/(\alpha\beta s),1/(\beta\delta s),s)\,. \tag{5.17}$$

在下一个小节中，我们将详细介绍由此解得到的不可约 Leonard 三元组，并证明相应的重叠系数与 Wilson 有理函数成正比。

5.2 Wilson 有理函数与不可约 Leonard 三元组

从现在起，设关系式 (5.17) 成立。我们将证明，与该 Leonard 三元组相关的重叠系数就是 Wilson 有理函数。

基 $\boldsymbol{z_i}$。 Z 在 $\boldsymbol{z_i}$ 上的作用是对角的，具体为：

$$Z\boldsymbol{z_i}=(\lambda^{(qR)}(i;\alpha\beta)+\sigma)\boldsymbol{z_i}=(q^{-i}-1/s)(1-\alpha\beta sq^{i+1})\boldsymbol{z_i}\,, \tag{5.18}$$

其中， $\lambda^{(qR)}(i;\alpha\beta)$ 的定义见附录 A。归一化 ν_i 变为

$$\nu_i=\frac{\beta(s-q^i)(\delta-\alpha q^i)}{(1-\beta\delta q^i)(1-\alpha\beta sq^i)}\,, \tag{5.19}$$

$\widetilde{}$以及 V和 V的三对角作用为

$$V\boldsymbol{z_i}=C_{i+1}^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\boldsymbol{z_{i+1}}+B_i^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\boldsymbol{z_i}+A_{i-1}^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\boldsymbol{z_{i-1}}\,, \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{V}\boldsymbol{z_i}=&C_{i+1}^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))\frac{\beta(s-q^{i+1})(\delta-\alpha q^{i+1})}{(1-\beta\delta q^{i+1})(1-\alpha\beta sq^{i+1})}\boldsymbol{z_{i+1}}+B_i^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))\boldsymbol{z_i}\\&+A_{i-1}^{(qR)}(\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))\frac{(1-\beta\delta q^i)(1-\alpha\beta sq^i)}{\beta(s-q^i)(\delta-\alpha q^i)}\boldsymbol{z_{i-1}}\,,\end{aligned} \tag{5.21}$$

其中我们回顾一下，函数 $A_i^{(qR)}$ 、 $B_i^{(qR)}$ 和 $C_i^{(qR)}$ 在附录 A 中定义。

代数 Heun 算子。在这种情况下，根据（5.9）和（5.15），可以明确给出代数 Heun 算子定义中涉及的参数，而关系（3.1）和（3.2）变为

$$\widetilde{V}Z=h_0\mathbb{I}+\frac{(1-\alpha\beta s^2)(1-\alpha\beta q^2s^2)}{\beta\delta s^2(1+q)}V+\frac{1}{1-q^2}\left(\frac{\alpha qs}{\delta}[Z,V]_q+\frac{1}{\beta\delta s}[V,Z]_q\right)\,, \tag{5.22}$$

$$ZV=h_5\mathbb{I}+\frac{\delta(1-\alpha\beta s^2)(1-\alpha\beta q^2s^2)}{\alpha s^2(1+q)}\widetilde{V}+\frac{1}{1-q^2}\left(\frac{\delta}{s\alpha}[Z,\widetilde{V}]_q+q\beta\delta s[\widetilde{V},Z]_q\right)\,, \tag{5.23}$$

其中 $[Z,V]_q=ZV-qVZ$ 和

$$h_0=\psi(\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))-\frac{1+qs^2\alpha\beta}{\beta\delta s(1+q)}\psi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,, \tag{5.24}$$

$$h_5=\psi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)-\frac{\delta(1+qs^2\alpha\beta)}{\alpha s(1+q)}\psi(\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))\,. \tag{5.25}$$

除关系式 (5.22) 和 (5.23) 外，以下命题还给出了另外两个类似的关系式。

命题 5.1。 以下关系式成立

$$(Z+\rho\mathbb{I})\widetilde{V}=\widetilde{h}_0\mathbb{I}+\frac{q(1-s^2\alpha\beta)^2}{\beta\delta s^2(1+q)}V+\frac{1}{1-q^2}\left(\frac{s\alpha}{\delta}[Z,V]_q+\frac{q}{\beta\delta s}[V,Z]_q\right), \tag{5.26}$$

$$V(Z+\rho\mathbb{I})=\widetilde{h}_5\mathbb{I}+\frac{q\delta(1-s^2\alpha\beta)^2}{\alpha s^2(1+q)}\widetilde{V}+\frac{1}{1-q^2}\left(\frac{q\delta}{s\alpha}[Z,\widetilde{V}]_q+s\beta\delta[\widetilde{V},Z]_q\right), \tag{5.27}$$

其中 $\rho=(1-q)(1/s-\alpha\beta s)$ 以及

$$\widetilde{h}_0=\psi(\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))-\frac{q+s^2\alpha\beta}{\beta\delta s(1+q)}\psi(\alpha,\beta,\gamma,\delta), \tag{5.28}$$

$$\widetilde{h}_5=\psi(\alpha,\beta,\gamma,\delta)-\frac{\delta(q+s^2\alpha\beta)}{\alpha s(1+q)}\psi(\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta)). \tag{5.29}$$

证明。 该命题的关系由（5.22）和（5.23）推出，见推论 3.5。 □

~前一个命题的陈述表明，$(Z+\rho\mathbb{I})V$ 是与 LP $(V,\ Z)$ 相关联的代数 Heun 算子~，而 $V(Z+\rho\mathbb{I})$ 是与 LP $(V,\ Z)$ 相关联的代数 Heun 算子。这是获得 $w_n(x)$ 的双正交伙伴的双谱性质的一种方法（参见本小节末尾的评论）。

如命题 2.3 所述， $w_n(x)$ 的双谱关系由 Z、~ VZ 对 $\boldsymbol{v_n}$ 的作用，以及 Z、 ZV 对 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}$ 的作用得到。接下来的两段将给出这些作用。

基 $\boldsymbol{v_n}$。 如第 3.2 小节所述，使 V 对角化的向量 $\boldsymbol{v_n}$ 可以通过以下方式用 $\boldsymbol{z_i}$ 表示，其中 $n=0,\ 1,\ \ldots\ \ldots,\ N$,

$$\boldsymbol{v_n}=\sum_{i=0}^{N}R_i^{(qR)}(n;\alpha,\beta,\gamma,\delta)\ \boldsymbol{z_i}, \tag{5.30}$$

其中， $R_i^{(qR)}$ 是附录 A 中定义的 q-Racah 多项式。利用 q-Racah 多项式的递推关系（A.4），可以证明

$$V\boldsymbol{v_n}=\lambda^{(qR)}(n;\gamma\delta)\boldsymbol{v_n}. \tag{5.31}$$

q-Racah 多项式的差分关系（A.9）意味着

$$Z\boldsymbol{v_n}=A_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta)\boldsymbol{v_{n+1}}+\big(B_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta)+\sigma\big)\boldsymbol{v_n}+C_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta)\boldsymbol{v_{n-1}}, \tag{5.32}$$

这里我们回顾 $\sigma=-\alpha\beta sq-1/s$。与 LP（$V,\ Z$）相关的 Heun 算子在基 $\boldsymbol{v_n}$ 下是三对角的~。因此，根据表达式（5.22）， VZ 在 $\boldsymbol{v_n}$ 上的作用可以计算为:

$$\begin{aligned}\widetilde{V}Z\boldsymbol{v_n}=&\frac{1}{q\beta\delta s}\lambda^{(qR)}(n;\alpha\beta\gamma\delta s^2q^2)A_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta)\boldsymbol{v_{n+1}}+\frac{\alpha sq}{\delta}\lambda^{(qR)}(n;\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta q^2s^2})C_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta)\boldsymbol{v_{n-1}}\\&+\left(h_0-\frac{\alpha}{\delta}(1+q)\lambda^{(qR)}(n;\gamma\delta)-\frac{\sigma\lambda^{(qR)}(n;\gamma\delta)}{\beta\delta\,(1+q)}B_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta)\right)\boldsymbol{v_n},\end{aligned} \tag{5.33}$$

其中， h_0 由（5.24）给出。

~**基 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}$**。 类似地，对角化 V的向量 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}$由下式给出，其中 $x=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ N$,

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=0}^{N}\frac{(\beta\delta s)^i(q/s,q\alpha/\delta;q)_i}{(\beta\delta q,\alpha\beta sq;q)_i}R_i^{(qR)}(x;\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))\boldsymbol{z_i}, \tag{5.34}$$

其中， $R_i^{(qR)}$ 是附录 A 中定义的 q-Racah 多项式。前述关系中 q-Racah 多项式前面的归一化因子由关系 (5.21) 中的因子 ν_i 解释。该因子为 $\prod_{k=1}^{i}\nu_k$。

与前面一样，利用 q-Racah 多项式的性质，可以证明

$$\widetilde{V}\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} = \lambda^{(qR)}(x;\alpha\gamma/(\beta\delta))\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}\,, \tag{5.35}$$

并且

$$Z\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} = A_x^{(qR)}(\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta)\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x+1}} + (B_x^{(qR)}(\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta)+\sigma)\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} + C_x^{(qR)}(\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta)\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x-1}}\,. \tag{5.36}$$

利用这些结果和关系 (5.23)，可以证明 ZV 的作用由下式给出

$$\begin{aligned} ZV\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}} = {}& \beta\delta s\lambda^{(qR)}(x;\frac{\gamma}{\beta^2\delta s^2})A_x^{(qR)}(\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta)\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x+1}} + \frac{\delta}{\alpha s}\lambda^{(qR)}(x;\frac{\alpha^2\gamma s^2}{\delta})C_x^{(qR)}(\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta)\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x-1}} \\ & + \left(h_5 - (1+q)\beta\delta\lambda^{(qR)}(x;\alpha\gamma/(\beta\delta)) - \frac{\sigma\delta\lambda^{(qR)}(x;\alpha\gamma/(\beta\delta))}{\alpha(1+q)}B_x^{(qR)}(\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta)\right)\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}\,. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Du代数特征向量。我们选择标量积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 使得，对于 $i,\ j=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ N$ ，

$$\langle \boldsymbol{z_i}, \boldsymbol{z_j}\rangle = \delta_{i,j}\,. \tag{5.38}$$

由于向量空间 $\mathbb{V}$ 是有限维的，因此总可以选择这样的标量积。对于这一选择， $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}$ 的对偶向量 $\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\star}_{\boldsymbol{x}}$ 由下式显式给出

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\star}_{\boldsymbol{x}} = M_{\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta}\Omega_{x;\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta}\sum_{i=0}^{N}\frac{(\beta\delta q,\alpha\beta sq;q)_i}{(\beta\delta s)^i(q/s,q\alpha/\delta;q)_i}\Omega_{i;\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta)}R_i^{(qR)}(x;\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))\boldsymbol{z_i}\,, \tag{5.39}$$

其中， M 和 Ω 由 (A.11) 定义。我们选择参数，使权函数为正。为了证明 $\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\star}_{\boldsymbol{x}},\ \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{y}}\rangle = \delta_{x,\ y}$，我们使用 q-Racah 多项式满足的正交关系 (A.10)。

Wilson 有理函数。 利用关系式 (5.30) 和 (5.39)，可得到重叠系数 $w_n(x)$ 关于 q-Racah 多项式的如下表达式:

$$\begin{aligned} w_n(x) = \langle\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\star}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v_n}\rangle = {}& M_{\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta}\Omega_{x;\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta} \\ & \times\sum_{i=0}^{N}\Omega_{i;\alpha,\beta,\gamma,\alpha s}R_i^{(qR)}(x;\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))R_i^{(qR)}(n;\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,, \end{aligned} \tag{5.40}$$

其中，函数 M 和 Ω 由 (A.11) 定义。这些函数与 Wilson 有理函数 W_n 密切相关，其定义在附录 B 中回顾，具体如以下命题所述。

命题5.2。 由 (5.40) 定义的重叠系数 $w_n(x)$ 可表示如下:

$$\begin{aligned} w_n(x) = {}& M_{\alpha,1/(q\alpha s),\gamma,\alpha/(\beta\delta)}\ \Omega_{x;\alpha,\gamma/(\beta\delta),\gamma,1/(sq\gamma)} \\ & \times\frac{(\delta/(\alpha s),\gamma q/\beta;q)_n(\alpha\beta sq)^n}{(\beta\delta q,\alpha\gamma sq^2;q)_n}W_n(x;\alpha\gamma sq,\gamma\delta,\alpha\gamma/(\beta\delta),1/\gamma,1/\alpha,\beta/\gamma)\,, \end{aligned} \tag{5.41}$$

其中， W_n 是根据 (B.1) 中给出的 q超几何函数 ${}_{10}\phi_9$ 定义的 *Wilson* 有理函数。

证明。 利用命题 2.3 的结果以及前几段中得到的不同表示，可以计算出 $w_n(x)$ 所满足的递推关系和差分方程。将其与归一化 Wilson 有理函数所满足的方程 (B.3)（(5.41) 的右端）进行比较可知，这些归一化 Wilson 有理函数等于 w_n，相差一个与 n 和 x 无关的比例常数。剩下需要证明的是，该常数为 1。为此，从其表达式 (5.40) 出发，计算 $w_0(0)$:

$$w_0(0)=\frac{M_{\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta}}{1-\alpha\beta q}\sum_{i=0}^{N}\frac{(\alpha q,\gamma q,\alpha\beta q,\alpha\beta sq;q)_i(1-\alpha\beta q^{2i+1})}{(\alpha\gamma qs)^i(q,\alpha\beta q/\gamma,\beta q,q/s;q)_i}=\frac{(q\beta\delta,1/(\alpha s);q)_N}{(\beta\delta/\alpha,q/s;q)_N}\,. \tag{5.42}$$

最后一个等式由 q-Racah 多项式的正交关系 (A.10) 得出，适用于$n=m=0$ 和 $\alpha\to\gamma,\quad \beta\to\alpha s,\quad \gamma\to\alpha,\quad \delta\to\beta$。因此，$n=x=0$ 对应的表达式 (5.40) 与 (5.41) 右边相同，由此证明得证。 □

前一个命题的结果给出了 Wilson 有理函数用 q-Racah 多项式表示的表达式。事实上，利用 M 和 Ω 的显式表达式，可以证明关系 (5.41) 等价于

$$\begin{aligned}W_n(x;\alpha\gamma sq,\gamma\delta,\alpha\gamma/(\beta\delta),1/\gamma,1/\alpha,\beta/\gamma)&=\frac{(\alpha q/\delta,\alpha\gamma sq^2;q)_x}{(1/(\beta\delta s),\gamma q/\beta;q)_x(\alpha\beta sq)^x}\frac{(\beta\delta q,\alpha\gamma sq^2;q)_n}{(\delta/(\alpha s),\gamma q/\beta;q)_n(\alpha\beta sq)^n}\\&\times M_{\gamma,\alpha s,\alpha,\beta}\sum_{i=0}^{N}\Omega_{i;\alpha,\beta,\gamma,\alpha s}R_i^{(qR)}(x;\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))R_i^{(qR)}(n;\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,.\end{aligned} \tag{5.43}$$

双正交伙伴。 利用 q-Racah 多项式的正交性 (A.10)，我们可以证明 $\boldsymbol{v_n}$ 的对偶向量为:

$$\boldsymbol{v_n^\star}=M_{\gamma,\delta,\alpha,\beta}\Omega_{n;\gamma,\delta,\alpha,\beta}\sum_{i=0}^{N}\Omega_{i;\alpha,\beta,\gamma,\delta}R_i^{(qR)}(n;\alpha,\beta,\gamma,\delta)\;\boldsymbol{z_i}\,, \tag{5.44}$$

由此可得双正交伙伴的以下表达式（使用 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}$的表达式 (5.34)）:

$$\begin{aligned}\widetilde{w}_n(x)=\langle\boldsymbol{v_n^\star},\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}\rangle&=M_{\gamma,\delta,\alpha,\beta}\Omega_{n;\gamma,\delta,\alpha,\beta}\\&\times\sum_{i=0}^{N}\Omega_{i;\alpha,\beta,\gamma,1/(\beta s)}R_i^{(qR)}(x;\alpha,\beta,\gamma,\alpha/(\beta\delta))R_i^{(qR)}(n;\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,.\end{aligned} \tag{5.45}$$

与表达式 (5.40) 比较可得

$$\widetilde{w}_n(x)=M_{\gamma,\delta,\alpha,\beta\delta/(\alpha q)}\frac{\Omega_{n;\gamma,\delta,\alpha,\beta}}{\Omega_{x;\gamma,\alpha/(\beta\delta),\alpha,\beta}}\;w_n(x)\big|_{s\to1/(\alpha\beta s)}\,. \tag{5.46}$$

由此可推知，双正交伙伴也是双谱的。这些关系的显式表达式此处不予列出，但可以根据 $w_n(x)$ 的表达式轻松计算得出。需要强调的是，这些双谱关系也可以通过类似于命题 2.3 证明中的计算，并结合命题 2.4 的结果计算得出。

广义特征值问题。 Wilson 有理函数的广义特征值问题见附录 B，这里我们用构造过程中自然出现的记号重述如下。Wilson 有理函数 $W_n(x)=W_n(x;\alpha\gamma sq,\ \gamma\delta,\ \alpha\gamma/(\beta\delta)\ 1/\gamma,\ 1/\alpha,\ \beta/\gamma)$ 的递推广义特征值问题为:

$$\begin{aligned}&\mathcal{X}_{n+1,n}\,W_{n+1}(x)+\mathcal{X}_{n,n}\,W_n(x)+\mathcal{X}_{n-1,n}W_{n-1}(x)\\=&(1-q^x)(q^{-x}-\alpha\gamma q/(\beta\delta))\Big(\mathcal{Z}_{n+1,n}\,W_{n+1}(x)+\mathcal{Z}_{n,n}\,W_n(x)+\mathcal{Z}_{n-1,n}\,W_{n-1}(x)\Big)\,,\end{aligned} \tag{5.47}$$

其中

$$\mathcal{Z}_{n+1,n} = A_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta)\frac{q(\alpha s-\delta q^n)(\beta-\gamma q^{n+1})}{(1-\alpha\gamma s q^{n+2})(1-\beta\delta q^{n+1})}\,, \tag{5.48}$$

$$\mathcal{Z}_{n-1,n} = C_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta)\frac{(1-\alpha\gamma s q^{n+1})(1-\beta\delta q^{n})}{q(\alpha s-\delta q^{n-1})(\beta-\gamma q^{n})}\,, \tag{5.49}$$

$$\mathcal{Z}_{n,n} = B_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta) - \alpha\beta s q - 1/s\,, \tag{5.50}$$

and

$$\mathcal{X}_{n+1,n} = A_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta)\frac{(\alpha s-\delta q^n)(\beta-\gamma q^{n+1})(1-\beta\delta s q^{n+1})}{\beta\delta s q^n(1-\beta\delta q^{n+1})}\,, \tag{5.51}$$

$$\mathcal{X}_{n-1,n} = C_n^{(qR)}(\gamma,\delta,\alpha,\beta)\frac{(1-\alpha\gamma s q^{n+1})(1-\beta\delta q^{n})(\beta s-\gamma q^{n})}{\beta\delta s q^n(\beta-\gamma q^{n})}\,, \tag{5.52}$$

$$\mathcal{X}_{n,n} = -\mathcal{X}_{n+1,n} - \mathcal{X}_{n-1,n}\,. \tag{5.53}$$

Wilson 有理函数的差分广义特征值问题可由其递推关系 (5.47) 得到，利用 W_n 满足的对偶性质如下:

$$W_n(x;\alpha\gamma s q,\gamma\delta,\alpha\gamma/(\beta\delta),1/\gamma,1/\alpha,\beta/\gamma) = W_x(n;\alpha\gamma s q,\alpha\gamma/(\beta\delta),\gamma\delta,1/\gamma,1/\alpha,\beta/\gamma)\,. \tag{5.54}$$

这种对偶性是通过交换变量 x 和次数 n，并进行参数变换 $\delta\to\alpha/(\beta\delta)$ 实现的。

6 Wilson 有理函数的极限

众所周知，其他值得关注的有理函数，特别是 q-Askey 方案中的多项式，都可以由 Wilson 有理函数得到（例如例如 [21, 14]）。

6.1 q-Racah 多项式

位于 q-Askey 方案顶端的 q-Racah 多项式，可通过考虑极限 $s\to 0$ 得到；其他多项式也可利用已知极限得到（参见例如 [30]）。关于 q-Racah 多项式的这一结果，可以从不同角度推导。对 ${}_{10}\phi_9$ 直接取极限，可得到 q-Racah 多项式的 ${}_4\phi_3$ 形式（A.3）。另一种方法是在关系式（5.47）中取极限（先整体乘以 s），从而得到 q-Racah 多项式的常见递推关系（A.4）。最后，我们还可以指出，在此极限下，相应的 ~ ~Leonard 三元组变为（V，V，$-\mathbb{I}$），其中（V，V）是与 q-Racah 多项式相关的 Leonard 对。下文将给出一些细节，特别是关系式（5.43）的极限，并由此得到这些多项式的一些重要公式。

Wilson 有理函数 $W_n(x;\alpha\gamma sq,\ \gamma\delta,\ \alpha\gamma/(\beta\delta)\ 1/\gamma,\ 1/\alpha,\ \beta/\gamma)$ 的 ${}_{10}\phi_9$ 形式在 $s\to 0$ 下的极限给出 $R_n^{(qR)}(x;\ \gamma/\beta,\ \beta\delta,\ \gamma,\ \alpha/(\beta\delta))$。将这个结果用于 (5.43)，得到

$$\begin{aligned} R_n^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho}_1) = {}& \frac{(\delta q^{-x}/\alpha;q)_x}{(\gamma q/\beta;q)_x}\frac{(q^{-n}/(\beta\delta);q)_n}{(\gamma q/\beta;q)_n}\frac{(\beta q;q)_N(\alpha q)^N}{(\alpha\beta q^2;q)_N} \\ & \times\sum_{i=0}^{N}\frac{(\alpha q,q^{-i}/\gamma,\alpha\beta q;q)_i}{(q,\alpha\beta q/\gamma,\beta q;q)_i}\frac{(1-\alpha\beta q^{2i+1})}{(1-\alpha\beta q)(\alpha q)^i}R_i^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho}_2)R_i^{(qR)}(n;\boldsymbol{\rho}_3)\,, \end{aligned} \tag{6.1}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_1 = \gamma/\beta,\ \beta\delta,\ \gamma,\ \alpha/(\beta\delta)$、$\boldsymbol{\rho}_2 = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha/(\beta\delta)$，以及 $\boldsymbol{\rho}_3 = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$。刚刚证明的三个 q-Racah 多项式之间的关系称为 Racah 关系。该关系对于 $q\to 1$ 出现在李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 的 $6j$-符号研究中（例如参见 例如 [32]），并已利用 Racah 代数 [10] 的表示论，在一般参数情形下得到证明。当考虑李代数的 $6j$-符号时，

若改为考虑量子群 $U_q(\mathfrak{su}(2))$，则存在一个类似的关系，其中涉及具有特定参数 [29] 的 q-Racah 多项式；其一般参数情形下的推广可利用 Askey–Wilson 代数 [9] 得到证明。本文提出的构造为这一关系提供了一种新的证明。

6.2 q-Racah型有理函数

Wilson 有理函数及其对应的 Leonard 三元组的一个极限情形出现在 $U_q(\mathfrak{su}(2))$ 的表示论中，参见 [19]。在 Wilson 有理函数（5.43）中令 $\alpha = \beta$ 和 $s = \sigma/\alpha$，并令 $\alpha \to 0$，我们得到一个非常良态的 ${}_8\phi_7$-函数；利用 Watson 变换 [18, (III.18)]，可将其变换为一个平衡的 ${}_4\phi_3$-函数

$$\mathscr{R}_n^{(3)}(x) = \frac{(\gamma\sigma q^2, q^{-n}/\delta; q)_n}{(\sigma q^{-n}/\delta, \gamma q; q)_n} {}_4\phi_3\left(\left.\begin{matrix} q^{-n},\ \gamma\delta q^{n+1},\ \sigma q,\ \sigma\delta \\ \gamma\sigma q^{x+1},\ \sigma\delta q^{-x},\ \delta q \end{matrix}\right| q; q\right).$$

在此极限下，（5.43）中的两个 q-Racah多项式都变为对偶 q-Krawtchouk 多项式，而（5.43）则化为一个将 $\mathscr{R}_n^{(3)}(x)$ 表示为两个对偶 q-Krawtchouk 多项式乘积之和的公式。这与 [19, 第 2], 节中的结果直接相关，其中 q-Racah型有理函数 $\mathscr{R}_n^{(3)}(x)$ 的某个倍数作为 $U_q(\mathfrak{su}(2))$-模的两组基之间的重叠系数出现，这两组基由对偶 q-Krawtchouk 多项式组成。这些有理函数的递推关系通过两个（几乎）扭曲原始元和一个标准 Cartan 元的作用得到；按照本文的语言，它们构成一个不可约 Leonard 三元组：

$$V = \pi_N(\widetilde{X}_{1,s}), \quad \widetilde{V} = \pi_N(\widetilde{X}_{v,t}), \quad Z = \pi_N(K^2),$$

其中我们使用 [19] 中的记号。

6.3 约化 Leonard 三元组

Wilson 有理函数的一些极限会导出与约化 Leonard 三元组相关的一些函数。例如，对 Wilson 有理函数 (5.43) 取极限 $\alpha \to 0$，得到 [1]

$$\mathscr{R}_n^{(1)}(x) = {}_4\phi_3\left(\left.\begin{matrix} q^{-n},\ \gamma\delta q^{n+1},\ q^{-x},\ \gamma s q \\ \gamma q,\ \gamma q/\beta,\ \beta\delta s q^{1-x} \end{matrix}\right| q; q\right). \tag{6.2}$$

在这种情况下，公式 (5.43) 变为：

$$\mathscr{R}_n^{(1)}(x) = \frac{(q^{-n}/(\beta\delta); q)_n}{(1/(\beta\delta s); q)_x (\gamma q/\beta; q)_n} \sum_{i=N-x}^{N} \frac{(q^{i+1}/s; q)_{N-i} (q^{-x}, \beta\delta q^{N-x+1}; q)_{i+x-N}}{(q; q)_{i+x-N} (\beta\delta s q^{-x})^{i+x-N}} R_i^{(dqH)}(n; \boldsymbol{\rho}), \tag{6.3}$$

其中 $R_i^{(dqH)}$ 是由 (A.13) 定义的对偶 q-Hahn 多项式，$\boldsymbol{\rho} = \beta\delta,\ \gamma/\beta,\ q^{-N-1}$. 相应的广义特征值问题为

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}_{n+1,n} \mathscr{R}_{n+1}^{(1)}(x) + \mathcal{X}_{n,n} \mathscr{R}_n^{(1)}(x) + \mathcal{X}_{n-1,n} \mathscr{R}_{n-1}^{(1)}(x) \\ =&(q^{-x} - 1)\Big(\mathcal{Z}_{n+1,n} \mathscr{R}_{n+1}^{(1)}(x) + \mathcal{Z}_{n,n} \mathscr{R}_n^{(1)}(x) + \mathcal{Z}_{n-1,n} \mathscr{R}_{n-1}^{(1)}(x)\Big), \end{aligned} \tag{6.4}$$

[1] 与 [14], 相比，记号有所变化；在 [14], 中，此函数记作 $\mathscr{R}_n^{(1)}(x)$ —

其中

$$\mathcal{Z}_{n+1,n} = -\frac{\delta q^{n+1}\left(\beta-\gamma q^{n+1}\right)\left(1-\gamma q^{n+1}\right)\left(1-\gamma\delta q^{n+1}\right)}{\left(1-\gamma\delta q^{2n+1}\right)\left(1-\gamma\delta q^{2n+2}\right)}\,, \tag{6.5}$$

$$\mathcal{Z}_{n-1,n} = \frac{q\gamma\left(1-\delta q^{n}\right)\left(1-q^{n}\right)\left(1-\delta\beta q^{n}\right)}{\left(1-\gamma\delta q^{2n}\right)\left(1-\gamma\delta q^{2n+1}\right)}\,, \tag{6.6}$$

$$\mathcal{Z}_{n,n} = \frac{s-1}{s} - \frac{\left(1-\gamma q^{n+1}\right)\left(1-\gamma\delta q^{n+1}\right)\left(1-\beta\delta q^{n+1}\right)}{\left(1-\gamma\delta q^{2n+1}\right)\left(1-\gamma\delta q^{2n+2}\right)} + \frac{\gamma\delta q^{n+1}\left(1-q^{n}\right)\left(1-\delta q^{n}\right)\left(\beta-\gamma q^{n}\right)}{\left(1-\gamma\delta q^{2n}\right)\left(1-\gamma\delta q^{2n+1}\right)}, \tag{6.7}$$

and

$$\mathcal{X}_{n+1,n} = -\frac{\left(\beta-\gamma q^{n+1}\right)\left(1-\beta\delta s q^{n+1}\right)\left(1-\gamma q^{n+1}\right)\left(1-\gamma\delta q^{n+1}\right)}{\beta s\left(1-\gamma\delta q^{2n+1}\right)\left(1-\gamma\delta q^{2n+2}\right)}\,, \tag{6.8}$$

$$\mathcal{X}_{n-1,n} = \frac{q\gamma\left(1-\delta\beta q^{n}\right)\left(\gamma q^{n}-\beta s\right)\left(1-q^{n}\right)\left(1-\delta q^{n}\right)}{\beta s\left(1-\gamma\delta q^{2n}\right)\left(1-\gamma\delta q^{2n+1}\right)}\,, \qquad \mathcal{X}_{n,n} = -\mathcal{X}_{n+1,n} - \mathcal{X}_{n-1,n}\,, \tag{6.9}$$

其中 $\boldsymbol{\rho} = \beta\delta,\ \gamma/\beta,\ q^{-N-1}$。

这些函数满足如下 R_I 差分方程:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{X}}_{x,x+1}\,\mathscr{R}_n^{(1)}(x+1) + \widetilde{\mathcal{X}}_{x,x}\,\mathscr{R}_n^{(1)}(x) + \widetilde{\mathcal{X}}_{x,x-1}\mathscr{R}_n^{(1)}(x-1)\\ =&(1-q^n)(q^{-n}-\gamma\delta q)\Big(\widetilde{Z}_{x,x}\,\mathscr{R}_n^{(1)}(x) + \widetilde{\mathcal{Z}}_{x,x-1}\,\mathscr{R}_n^{(1)}(x-1)\Big)\,,\end{aligned} \tag{6.10}$$

其中

$$\widetilde{\mathcal{Z}}_{x,x-1} = \frac{\left(1-q^{x}\right)\left(\beta\delta-\gamma q^{x}\right)}{\beta\delta s - q^{x-1}}\,, \qquad \widetilde{\mathcal{Z}}_{x,x} = \gamma q^{x+1} - \frac{1}{s}\,, \tag{6.11}$$

and

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{x,x+1} = \frac{\left(1-\gamma q^{x+1}\right)\left(\beta\delta s - q^{x}\right)\left(\beta-\gamma q^{x+1}\right)}{\beta s q^{x}}\,, \tag{6.12}$$

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{x,x-1} = \frac{\left(1-q^{x}\right)\left(\beta\delta-\gamma q^{x}\right)\left(\beta s-\gamma q^{x}\right)}{\beta s q^{x-1}}\,, \qquad \widetilde{\mathcal{X}}_{x,x} = -\widetilde{\mathcal{X}}_{x,x+1} - \widetilde{\mathcal{X}}_{x,x-1}\,. \tag{6.13}$$

我们可以得出结论，这些函数是某个 rLT 的重叠系数。我们可以证明，相关的 Leonard 对属于对偶 q-Hahn 型。

6.4 与 Leonard 三元组相关的函数

通过取其他极限，我们可以得到一些与不可约 Leonard 三元组或 rLT 无关的函数。这些函数已在第 6.1 小节中讨论过，对应于 q-Racah 多项式。不过，如下文所述，还存在其他可能性。

将 $\beta \to \beta/s$ 代入有理函数 $\mathscr{R}_n^{(1)}$，并取极限 $s \to 0$，即可得到在 [5] 中研究的有理函数。

$$\mathscr{H}_n^{(1)}(x) = {}_3\phi_2\left(\left.\begin{matrix}q^{-n},\ \gamma\delta q^{n+1},\ q^{-x}\\ \gamma q,\ \beta\delta q^{1-x}\end{matrix}\right| q;q\right)\,. \tag{6.14}$$

相应的递推广义特征值问题为

$$\begin{aligned}&\mathcal{X}_{n+1,n}\,\mathscr{H}_{n+1}^{(1)}(x) + \mathcal{X}_{n,n}\,\mathscr{H}_n^{(1)}(x) + \mathcal{X}_{n-1,n}\mathscr{H}_{n-1}^{(1)}(x)\\ =&(q^{-x}-1)\Big(\mathcal{Z}_{n+1,n}\,\mathscr{H}_{n+1}^{(1)}(x) + \mathcal{Z}_{n,n}\,\mathscr{H}_n^{(1)}(x) + \mathcal{Z}_{n-1,n}\,\mathscr{H}_{n-1}^{(1)}(x)\Big)\,,\end{aligned} \tag{6.15}$$

其中

$$\mathcal{Z}_{n+1,n} = -\frac{\left(1-\gamma\delta q^{n+1}\right)\left(1-\gamma q^{n+1}\right)\beta\delta q^{n+1}}{\left(1-\gamma\delta q^{2n+2}\right)\left(1-\gamma\delta q^{2n+1}\right)}\,, \tag{6.16}$$

$$\mathcal{Z}_{n-1,n} = -\frac{\left(1-\delta q^{n}\right)\left(1-q^{n}\right)\gamma\delta\beta q^{n+1}}{\left(1-\gamma\delta q^{2n+1}\right)\left(1-\gamma\delta q^{2n}\right)}\,, \qquad \mathcal{Z}_{n,n} = -\mathcal{Z}_{n+1,n} - \mathcal{Z}_{n-1,n} - 1\,, \tag{6.17}$$

and

$$\mathcal{X}_{n+1,n} = -\frac{\left(1-\gamma\delta q^{n+1}\right)\left(1-\gamma q^{n+1}\right)\left(1-\beta\delta q^{n+1}\right)}{\left(1-\gamma\delta q^{2n+2}\right)\left(1-\gamma\delta q^{2n+1}\right)}\,, \tag{6.18}$$

$$\mathcal{X}_{n-1,n} = \frac{\left(1-\delta q^{n}\right)\left(1-q^{n}\right)\left(\beta-\gamma q^{n}\right)\delta\gamma q^{n+1}}{\left(1-\gamma\delta q^{2n+1}\right)\left(1-\gamma\delta q^{2n}\right)}\,, \qquad \mathcal{X}_{n,n} = -\mathcal{X}_{n+1,n} - \mathcal{X}_{n-1,n}\,. \tag{6.19}$$

这些函数满足以下类型的差分关系 R_I，具体形式为

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{X}}_{x,x+1}\,\mathscr{H}_n^{(1)}(x+1) + \widetilde{\mathcal{X}}_{x,x}\,\mathscr{H}_n^{(1)}(x) + \widetilde{\mathcal{X}}_{x,x-1}\mathscr{H}_n^{(1)}(x-1)\\ =&(1-q^n)(q^{-n}-\gamma\delta q)\Big(\widetilde{\mathcal{Z}}_{x,x}\,\mathscr{H}_n^{(1)}(x) + \widetilde{\mathcal{Z}}_{x,x-1}\,\mathscr{H}_n^{(1)}(x-1)\Big)\,,\end{aligned} \tag{6.20}$$

其中

$$\widetilde{\mathcal{Z}}_{x,x-1} = \frac{\beta\delta(1-q^x)}{\beta\delta - q^{x-1}}\,, \qquad \widetilde{\mathcal{Z}}_{x,x} = -1\,, \tag{6.21}$$

$$\mathcal{X}_{x,\ x+1} = (\beta\delta - q^x)(q^{-x}-\gamma q), \tag{6.22}$$

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{x,x-1} = \delta q(\beta-\gamma q^x)(q^{-x}-1)\,, \qquad \widetilde{\mathcal{X}}_{x,x} = -\widetilde{\mathcal{X}}_{x,x+1} - \widetilde{\mathcal{X}}_{x,x-1}\,. \tag{6.23}$$

这些函数并不对应于 rLT，因为从式 (6.21) 给出的 Z 表示可以看出，该矩阵不可对角化，这与 rLT 的定义相矛盾。

7 展望

本文引入了 Leonard 三元组的概念，并阐释了它们与双谱有理函数之间的基本联系。这种方法为研究这些函数建立了代数框架，也为未来研究开辟了若干有前景的方向。它提供了一种不同于元代数计划 [47, 45, 5, 14, 12] 的视角，同时也展现出一些共同之处。若能对这两种观点加以整合并进行综述，将十分有益。此外，建立一座桥梁，将本文提出的 Leonard 三元组方法与基于有理 Heun 算子 [44] 对 Wilson 有理函数的描述联系起来，也很值得探讨。

Leonard 三元组的分类将有助于建立一个完整的双谱有理函数方案，类似于经典双谱多项式的（q-）Askey 方案。首要目标是完成对不可约 Leonard 三元组的分类，这将是一个重要的里程碑。尤其是，利用两个 Bannai–Ito 类型的 Leonard 对，应可定义与之相关的 Bannai–Ito 双谱有理函数；据我们所知，这种函数尚未得到研究。

要实现完整分类，关键是确定构成 Leonard 三元组的算子 V、V 和 Z 之间的代数关系~。这将推广 Leonard 对的两个元素都满足的著名 Askey–Wilson 关系（X，Y） [42]。这个 Askey–Wilson 代数将 Leonard 对与多种物理和数学问题联系起来，例如 $3nj$-符号的代数解释，或超可积模型的对称代数。我们预计，发现 Leonard 三元组背后的代数将带来类似的重大应用。

三对角对的概念于 [27]，引入，通过允许维数大于一的特征子空间，将 Leonard 对推广开来。这些对与三对角关系 [38] 以及各种特殊函数 [4, 11] 密切相关。类似的推广也可以应用于 Leonard

三元组，我们相信，这种扩展将促成新型代数和特殊函数的发现。

最后，本文所发展的方法的扩展，为继续研究 [19] 中开创的多元双谱有理函数铺平了道路。事实上，正如人们为探索多元双谱多项式而定义并研究高秩Leonard对 [25, 15], 一样，对Leonard三元组也应当可以作类似的推广。

A q-Racah 多项式

q-Askey 方案中的有限族正交多项式是用 q-超几何函数定义的 [18]:

$$ {}_{r+1}\phi_r\left(\left.\begin{matrix} q^{-n},\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r \\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r \end{matrix}\right| q;z\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},a_1,a_2,\cdots,a_r;q)_k}{(b_1,b_2,\cdots,b_r,q;q)_k}z^k\,, \tag{A.1} $$

对于 r, n 非负整数，且 q-Pochhammer 符号定义为

$$ (b_1,b_2,\cdots,b_r;q)_k=(b_1;q)_k(b_2;q)_k\cdots(b_r;q)_k\,,\qquad (b_i;q)_k=(1-b_i)(1-qb_i)\cdots(1-q^{k-1}b_i)\,. \tag{A.2} $$

q-Racah 多项式按如下方式用 q-超几何函数定义，其中 n为非负整数:

$$ R_n^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho})={}_4\phi_3\left(\left.\begin{matrix} q^{-n},\ \alpha\beta q^{n+1},\ q^{-x},\ \gamma\delta q^{x+1} \\ \alpha q,\ \beta\delta q,\ \gamma q \end{matrix}\right| q;q\right)\,, \tag{A.3} $$

其中 $\boldsymbol{\rho}=\alpha$, β, γ, δ 以及 $\alpha=q^{-N-1}$, $\beta\delta=q^{-N-1}$ 或 $\gamma=q^{-N-1}$，其中 N为非负整数。

它们满足递推关系，其中 n, $x=0,\ 1,\ \ldots N$,

$$ \lambda^{(qR)}(x;\gamma\delta)R_n^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho})=A_n^{(qR)}(\boldsymbol{\rho})R_{n+1}^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho})+B_n^{(qR)}(\boldsymbol{\rho})R_n^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho})+C_n^{(qR)}(\boldsymbol{\rho})R_{n-1}^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho})\,, \tag{A.4} $$

其中 $\lambda^{(qR)}(x;a)=q^{-x}+aq^{x+1}$，以及

$$ A_n^{(qR)}(\boldsymbol{\rho})=\frac{(1-\alpha q^{n+1})(1-\alpha\beta q^{n+1})(1-\beta\delta q^{n+1})(1-\gamma q^{n+1})}{(1-\alpha\beta q^{2n+1})(1-\alpha\beta q^{2n+2})}\,, \tag{A.5} $$

$$ C_n^{(qR)}(\boldsymbol{\rho})=\frac{q(1-q^n)(1-\beta q^n)(\gamma-\alpha\beta q^n)(\delta-\alpha q^n)}{(1-\alpha\beta q^{2n})(1-\alpha\beta q^{2n+1})}\,, \tag{A.6} $$

$$ B_n^{(qR)}(\boldsymbol{\rho})=-A_n^{(qR)}(\boldsymbol{\rho})-C_n^{(qR)}(\boldsymbol{\rho})+1+\gamma\delta q\,. \tag{A.7} $$

q-Racah 多项式满足对偶关系

$$ R_n^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho})=R_x^{(qR)}(n;\boldsymbol{\rho}')\,, \tag{A.8} $$

其中 $\boldsymbol{\rho}'=\gamma$, δ, α, β。由此对偶关系和递推关系，我们可以推导出 q-Racah 多项式所满足的差分方程:

$$ \lambda^{(qR)}(n;\alpha\beta)R_n^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho})=A_x(\boldsymbol{\rho}')R_n^{(qR)}(x+1;\boldsymbol{\rho})+B_x(\boldsymbol{\rho}')R_n^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho})+C_x(\boldsymbol{\rho}')R_n^{(qR)}(x-1;\boldsymbol{\rho})\,. \tag{A.9} $$

The q-Racah 多项式是正交的:

$$ \sum_{x=0}^{N}\Omega_{x;\boldsymbol{\rho}'}R_m^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho})R_n^{(qR)}(x;\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{M_{\boldsymbol{\rho}}\Omega_{n;\boldsymbol{\rho}}}\delta_{m,n}\,, \tag{A.10} $$

其中

$$\Omega_{n;\boldsymbol{\rho}} = \frac{(\alpha q, \gamma q, \beta\delta q, \alpha\beta q; q)_n}{(q, \alpha\beta q/\gamma, \alpha q/\delta, \beta q; q)_n} \frac{1-\alpha\beta q^{2n+1}}{(\gamma\delta q)^n(1-\alpha\beta q)}\,, \tag{A.11}$$

$$M_{\boldsymbol{\rho}} = \begin{cases} \frac{(\gamma q/\beta, \delta q; q)_N}{(1/\beta, \gamma\delta q^2; q)_N} & \text{if } \alpha = q^{-N-1} \\ \frac{(\alpha\beta q/\gamma, \beta q; q)_N}{(\alpha\beta q^2, \beta/\gamma; q)_N} & \text{if } \beta\delta = q^{-N-1} \\ \frac{(\alpha q/\delta, \beta q; q)_N}{(\alpha\beta q^2, 1/\delta; q)_N} & \text{if } \gamma = q^{-N-1} \end{cases} \tag{A.12}$$

q-Racah 多项式位于有限族经典正交多项式的 q-Askey 方案顶端。其他族可以通过取极限和特化得到。特别地，可以得到对偶 q-Hahn 多项式，其定义如下，其中 n a 为非负整数：

$$R_n^{(dqH)}(x; \alpha, \beta, \gamma) = {}_3\phi_2\left(\left.\begin{matrix} q^{-n},\ q^{-x},\ \alpha\beta q^{x+1} \\ \alpha q,\ \gamma q \end{matrix}\right| q, q\right). \tag{A.13}$$

下面的引理给出了另一个有用的极限。

引理 A.1. 对于 $\gamma = q^{-N-1}$，以下关系成立：

$$R_n^{(qR)}(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta/\beta) \underset{\beta\to 0}{\sim} \begin{cases} \frac{(q^{-x}; q)_n}{(\alpha q, \gamma q, \delta q; q)_n} \left(\frac{\gamma\delta q^{x+1}}{\beta}\right)^n, & for\ n \le x \\ \frac{(q^{-n}; q)_x}{(\alpha q, \gamma q, \delta q; q)_x} \left(\frac{\gamma\delta q^{x+1}}{\beta}\right)^x, & otherwise \end{cases} \tag{A.14}$$

证明。 将 (A.14) 左边的 q-Racah 多项式的 q-超几何表达式写成求和形式，便可得到

$$R_n^{(qR)}(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta/\beta) = {}_4\phi_3\left(\left.\begin{matrix} q^{-n},\ \alpha\beta q^{n+1},\ q^{-x},\ \gamma\delta q^{x+1}/\beta \\ \alpha q,\ \delta q,\ \gamma q \end{matrix}\right| q, q\right) \tag{A.15}$$

$$\underset{\beta\to 0}{\sim} \sum_{k=0}^{N} \frac{(q^{-n}, q^{-x}; q)_k}{(q, \alpha q, \delta q, \gamma q; q)_k} \left(-\frac{q^{x+2}\gamma\delta}{\beta}\right)^k q^{\binom{k}{2}}. \tag{A.16}$$

根据 $n-x$ 的符号，上述求和会在不同阶段终止，并给出关于 β 中等价项的不同结果。对 q-Pochhammer 符号进行一些变形后，即可得到引理的第一个结果。

□

B Wilson 有理函数

Wilson 有理函数定义为非常平衡的 q-超几何函数，如下所示，其中 na 为非负整数：

$$W_n(x; a, b, c, d, e, f) = {}_{10}\phi_9\left(\left.\begin{matrix} a,\ q\sqrt{a},\ -q\sqrt{a},\ q^{-n},\ bq^{n+1},\ q^{-x},\ cq^{x+1},\ ad,\ ae,\ af \\ \sqrt{a},\ -\sqrt{a},\ aq^{-n}/b,\ aq^{n+1},\ aq^{-x}/c,\ aq^{x+1},\ q/d,\ q/e,\ q/f \end{matrix}\right| q; q\right), \tag{B.1}$$

参数之间的关系为

$$bcdef = 1\,, \tag{B.2}$$

并且我们取 $d = q^{N+1}$，其中 N 为非负整数。

Wilson 有理函数 $W_n(x) = W_n(x;\, a, b, c, d, e, f)$ 满足以下递推广义特征值问题[36], 其中 x, n 为非负整数:

$$\begin{aligned}&\mathcal{X}_{n+1,n}\, W_{n+1}(x) + \mathcal{X}_{n,n}\, W_n(x) + \mathcal{X}_{n-1,n} W_{n-1}(x)\\ =&(\lambda(x;c) - 1 - cq)\Big(\mathcal{Z}_{n+1,n}\, W_{n+1}(x) + \mathcal{Z}_{n,n}\, W_n(x) + \mathcal{Z}_{n-1,n}\, W_{n-1}(x)\Big)\,,\end{aligned} \tag{B.3}$$

其中

$$\mathcal{Z}_{n+1,n} = A_n^{(qR)}(1/d, bd, 1/e, f/d)\frac{(a - bq^{n+1})(f - q^{n+1})}{(1 - aq^{n+1})(1 - bfq^{n+1})}\,, \tag{B.4}$$

$$\mathcal{Z}_{n-1,n} = C_n^{(qR)}(1/d, bd, 1/e, f/d)\frac{(1 - aq^n)(1 - bfq^n)}{(a - bq^n)(f - q^n)}\,, \tag{B.5}$$

$$\mathcal{Z}_{n,n} = B_n^{(qR)}(1/d, bd, 1/e, f/d) - af - qbcf/a\,, \tag{B.6}$$

and

$$\mathcal{X}_{n+1,n} = A_n^{(qR)}(1/d, bd, 1/e, f/d)\frac{(a - bq^{n+1})(f - q^{n+1})(c - aq^n)}{aq^n(1 - bfq^{n+1})}\,, \tag{B.7}$$

$$\mathcal{X}_{n-1,n} = C_n^{(qR)}(1/d, bd, 1/e, f/d)\frac{(1 - aq^n)(1 - bfq^n)(a - bcq^{n+1})}{abq^n(f - q^n)}\,, \tag{B.8}$$

$$\mathcal{X}_{n,n} = -\mathcal{X}_{n+1,n} - \mathcal{X}_{n-1,n}\,. \tag{B.9}$$

利用对称关系

$$W_n(x) = W_x(n)|_{b\leftrightarrow c}\,, \tag{B.10}$$

我们可以得到 $W_n(x)$ 所满足的差分广义特征值问题。

致谢： N. Crampé 获得法国国家科学研究中心的国际研究项目 AAPT 的部分资助。L. Vinet 的部分经费来自加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）的探索资助。Q. Labriet 和 L. Morey 获得了该资助提供的博士后奖学金。W. Groenevelt 和 C. Wagenaar 感谢蒙特利尔大学数学研究中心的盛情款待。

参考文献

[1] R. Askey 和 J. Wilson，推广雅可比多项式的一些基本超几何正交多项式，Mem. Amer. Math. Soc. 54 (1985) 319。[2] E. Bannai 和 T. Ito，代数组合学。一、关联方案，The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, 1984。[3] P. Baseilhac 和 R. A. Pimenta，*Heun–Askey–Wilson*算子的对角化、*Leonard* 对与代数贝特拟设，《核物理B》949 (2019) 114824。[4] P. Baseilhac、L. Vinet 和 A. Zhedanov，*The q-Onsager* 代数与多变量 q-特殊函数，《物理学杂志A：数学与理论》50 (2017) 395201。[5] P.-A. Bernard、A. Bouziane、S. Pellerin、S. Têtu、S. Tsujimoto、L. Vinet、M. Zaimi 和 A. Zhedanov，*Meta* 代数与双正交有理函数： *q-Hahn* 情形，Arab. J. Math. (2025)。[6] I. Bussière、J. Gaboriaud、L. Vinet 和 A. Zhedanov， *q-Hahn* 型有理函数的双谱性与双正交性，Journal of Mathematical Analysis and Applications，516 (2022) 126443。

[7] T. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York 1978，。[8] N. Crampe、L. Frappat、J. Gaboriaud、L. Poulain d'Andecy、E. Ragoucy 和 L. Vinet，《Askey–Wilson 代数及其各种形式》，《物理学杂志A：数学与理论》54（2021）063001。[9] N. Crampe、L. Frappat、J. Gaboriaud 和 E. Ragoucy，q变形的 Racah 型 Griffiths 多项式，《物理学杂志A：数学与理论》58（2025）445205。[10] N. Crampe、L. Frappat 和 E. Ragoucy，秩二 Racah 代数的表示与正交多元多项式，《线性代数及其应用》664（2023）165–215。[11] N. Crampe、J. Gaboriaud 和 S. Tsujimoto，II型三对角对的基变换，《核物理B》1018（2025）117083。[12] N. Crampe、Q. Labriet、L. Morey、S. Tsujimoto、L. Vinet 和 A. Zhedanov，Meta 代数与特殊函数：Racah 情形，编写中（2026）。[13] N. Crampe、R.I. Nepomechie 和 L. Vinet，自由费米子纠缠与正交多项式，《统计力学杂志》（2019）093101。[14] N. Crampe、S. Tsujimoto、L. Vinet 和 A. Zhedanov，Wilson 有理函数双谱性背后的代数及其 ${}_4\phi_3$ 极限，《数值算法》（2025）。[15] N. Crampe 和 M. Zaimi，因式分解的 A_2-Leonard 对，《拉马努金杂志》66（2025）25。[16] B. Curtin，模 Leonard 三元组，《线性代数及其应用》424（2007）510–539。[17] S. Gao、Y. Wang 和 B. Hou，Racah 型 Leonard 三元组的分类，《线性代数及其应用》439（2013）1834–1861。[18] G. Gasper 和 M. Rahman，《基本超几何级数》，剑桥大学出版社，第2版，2004。[19] W.G.M. Groenevelt 和 C.C.M.L. Wagenaar，量子代数方法研究单变量和多变量 q-Racah 型有理函数（2025），arXiv:2507.13483。[20] F.A. Grünbaum、L. Vinet 和 A. Zhedanov，代数 Heun 算子与带限与时限，《数学物理通讯》364（2018）1041–1068。[21] D.P. Gupta 和 D.R. Masson，邻接关系、连分数与正交性，《美国数学会汇刊》350（1998）769–808。[22] B. Hou、L. Wang 和 S. Gao，具有 Bannai/Ito 型和奇直径的 Leonard 三元组的分类，《线性代数及其应用》439（2013）2667–2691。[23] B. Hou、Y. Xu 和 S. Gao，偶直径 Bannai/Ito 型 Leonard 三元组的分类，《代数通讯》43（2015）3776–3798。[24] H. Huang，q-Racah 型 Leonard 三元组的分类，《线性代数及其应用》436（2012）1442–1472。[25] P. Iliev 和 P. Terwilliger，Rahman 多项式与李代数 $sl_3(\mathbb{C})$，《美国数学会汇刊》364（2012）4225–4238。[26] M.E.H. Ismail 和 D. Masson，广义正交性与连分数，《近似理论杂志》83（1995）1–40。

[27] T. Ito、K. Tanabe 和 P. Terwilliger，与 P-多项式和 Q-多项式关联方案相关的某些代数，DIMACS离散数学与理论计算机科学系列56（2001）167–192。[28] N. Kang、B. Hou、S. Gao，Krawtchouk 型 Leonard 三元组，线性与多重线性代数63（2015）2341–2358。[29] A.N. Kirillov 和 N.Yu. Reshetikhin，代数 $U_q(sl(2))$的表示、 q正交多项式与链环不变量，载于：《无限维李代数与群》（World Sci. Publishing，新泽西州，1989）285–339。[30] R. Koekoek、P. A. Lesky 和 R. F. Swarttouw。《超几何正交多项式及其q类比》。Springer-Verlag，Springer数学专著版，2010。[31] D.A. Leonard，正交多项式、对偶性与关联方案，SIAM数学分析杂志13（1982）656–663。[32] A. Messiah，《量子力学》，第二卷，纽约：North Holland出版社（1981）。[33] K. Nomura 和 P. Terwilliger，关于 Leonard 对的两个特征基均为三对角的线性变换，《线性代数及其应用》420（2007）198–207。[34] M. Rahman，关于 $[-1,1]$上正测度的有理函数系的双正交性，SIAM数学分析杂志22（1991）1430–1441。[35] M. Rahman 和 S.K. Suslov，经典双正交有理函数，载于《复分析与数理物理中的逼近理论方法：列宁格勒，1991年5月13日至24日》，第131–146页。Springer，1993。[36] H. Rosengren， $6j$-符号（经典、量子、有理、三角和椭圆形式）的初等方法，《Ramanujan杂志》13（2007）133–168。[37] V. Spiridonov 和 A. Zhedanov，谱变换链与一些新的双正交有理函数，《数学物理通讯》210（2000）49–83。[38] P. Terwilliger，关联方案的子构成代数（第三部分），《代数组合杂志》2（1993）177–210。[39] P. Terwilliger，两个线性变换各自相对于另一个变换的某个特征基均为三对角，《线性代数及其应用》330（2001）149–203。[40] P. Terwilliger，《Leonard对导论》，《计算与应用数学杂志》153（2003）463–475。[41] P. Terwilliger，两个线性变换各自相对于另一个变换的某个特征基均为三对角：正交多项式 Askey 方案的代数方法，arXiv:math/0408390。[42] P. Terwilliger 和 R. Vidunas，Leonard 对与 Askey–Wilson 关系，《代数及其应用杂志》03（2004）411–426。[43] S. Tsujimoto、L. Vinet 和 A. Zhedanov，Hahn 型双正交有理函数双谱性的代数描述，《美国数学会会刊》149（2021）715–728。[44] S. Tsujimoto、L. Vinet 和 A. Zhedanov，有理 Heun 算子与 Wilson 双正交函数，《Ramanujan杂志》61.1（2023）7–29。

[45] S. Tsujimoto、L. Vinet 和 A. Zhedanov，*Meta* 代数与双正交有理函数：*Hahn* 情形，Forum of Mathematics, Sigma 13（2025）e139。[46] L. Vinet、M. Zaimi 和 A. Zhedanov，R_I *Hahn* 型双正交多项式，Journal of Difference Equations and Applications 30（2024）1765–1781。[47] L. Vinet 和 A. Zhedanov，*Hahn* 多项式与有理函数的统一代数基础，Journal of Mathematical Analysis and Applications 497（2021）124863。[48] J.A. Wilson，由 *Gram* 行列式构造的正交函数，SIAM journal on mathematical anal- ysis 22（1991）1147–1155。[49] A. Zhedanov，*Askey–Wilson* 多项式的“隐藏对称性”，Theoretical and Mathematical Physics 89（1991）1146–1157。[50] A. Zhedanov，双正交有理函数与广义特征值问题，Journal of Approximation Theory 101（1999）303–329。