arXiv:2601.15128v1 [math.CO] 21 Jan 2026

通过拟阵理论分解统计学中的行列式簇

作者：Alexandersson、Yulia Alexandr、Emiliano Liwski、Fatemeh Mohammadi、Pardis Semnani

摘要

我们研究来自含隐变量的条件独立模型的行列式簇，重点关注其不可约分解、维数、次数和 Gr¨obner 基。每个簇都编码了一组拟阵，其平坦集刻画了变量之间的代数依赖。我们运用这一方法，系统描述这些分支、它们的维数及定义方程，并提出一种用于计算行列式簇次数的组合框架。我们的方法凸显了拟阵结构在研究行列式簇中的核心作用，其适用范围也超越了当前计算技术的能力。

关键词： 行列式簇、条件独立、拟阵、平坦集格、不可约分解、Gr¨obner 基、超图簇

2020年数学主题分类： 14M12, 13P10,14A10,05B35, 62R01

1 引言

动机。 行列式簇在代数几何和组合代数中发挥着核心作用，自然地出现于张量模型、超图与拟阵理论以及结构化矩阵的研究中 [5]。它们提供了一个统一的框架，用于理解变量集合之间的代数依赖，以及其背后的组合结构。一项基本问题是描述这类簇的不可约分支，并刻画维数、次数和格¨罗布纳基等代数不变量。对于由一般矩阵子式定义的行列式理想，这些问题已有充分研究；但当施加额外的组合约束时，情况就会复杂得多 [10, 14, 16, 27, 28]。在这些结构化情形中，尤其是由超图或拟阵诱导的情形，相应的簇往往呈现出难以用标准代数方法描述的分解。

从条件独立到行列式理想。 本文研究一族由结构化子式定义的行列式簇，它们源自带隐变量的条件独立（*CI*）模型的代数表述；例如，参见 [1, 8, 9, 10, 27]。条件独立是统计建模的基石 [20, 31], ，其代数形式已在代数统计学 [11, 32] 和组合学 [2, 6]中得到广泛研究。在这一框架下，满足给定一组 CI 陈述的概率分布对应于由多项式约束定义的代数簇，这些约束所生成的理想称为条件独立理想。当某些变量不可观测（即为隐变量）时，所得理想通常由不同大小的子式生成，而其分解则编码了统计性质（如交性质 [25, 26, 30]）的代数类比。

模型。 我们重点研究一个隐变量的状态空间大小为 $t-1$ 的情形。相应的条件独立模型为

$$\mathcal{C} = \{\, X \perp\!\!\!\perp Y_1 \mid Y_2, \quad X \perp\!\!\!\perp Y_2 \mid \{Y_1, H\}\,\}. \tag{1.1}$$

该族产生由 2 阶和 t 阶子式生成的行列式理想，其具体形式取决于隐变量 H的作用。相关簇可用网格和

超图进行组合描述，其分解产生新的素混合行列式理想族；这些理想的 Gr¨obner 基恰好由其生成子式构成；另请参见 [16]。我们的结果在一般拟阵框架内扩展并统一了此前对这类簇的分解。

1.1 定义

1.1.1 代数表述

我们将（1.1）中的条件独立性陈述转化为其代数对应物。每个独立性条件都对应于涉及的随机变量的联合概率张量的某个子矩阵上的秩约束，从而得到一族混合行列式理想，其几何性质反映了底层模型的结构。

定义 1.1（条件独立理想）。设 X、Y_1 和 Y_2 为观测随机变量，H 为取值于 $\mathcal{H}$ 的隐变量，其中 $|\mathcal{H}| = t-1$。令 $|\mathcal{X}| = d$、$|\mathcal{Y}_1| = k$ 和 $|\mathcal{Y}_2| = \ell$。定义 $k \times \ell$ 矩阵

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \cdots & (\ell-1)k+1 \\ 2 & k+2 & \cdots & (\ell-1)k+2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 2k & \cdots & \ell k \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

对于 $i \in [k]$ 和 $j \in [\ell]$，令

$$R_i = \{\, i,\, k+i,\, \ldots,\, (\ell-1)k+i \,\}, \quad C_j = \{\, (j-1)k+1,\, \ldots,\, jk \,\},$$

表示 $\mathcal{Y}$ 的各行和各列，并令

$$\Delta = \bigcup_{i \in [k]} \binom{R_i}{t} \cup \bigcup_{j \in [\ell]} \binom{C_j}{2}.$$

对于一个由不定元构成的 $d \times k\ell$ 矩阵 $X = (x_{i,j})$，定义

$$I_\Delta = \big\langle [A \mid B]_X : A \subset [d],\, B \in \Delta,\, |A| = |B| \big\rangle \subset \mathbb{C}[X],$$

其中，$[A \mid B]_X$ 表示通过选取由 A 索引的行和由 B索引的列得到的 X 子式，并且

$$V_\Delta = \{\, Y \in \mathbb{C}^{d \times k\ell} : \operatorname{rank}(Y_F) < |F| \text{ for all } F \in \Delta \,\},$$

其中 Y_F <style id='4'}表示由 F索引的列组成的 Y 子矩阵。理想 I_Δ 对应于（1.1）中的模型；参见 [9, 10]。

1.1.2 拟阵定义

我们简要回顾拟阵理论的基本概念，更多详细内容请参阅 [24] 。

定义 1.2。一个拟阵 M 由一个底集 $[n]$ 以及其子集的一个集合 $\mathcal{I}(M)$ 组成，该集合是 $[n]$的子集，称为独立集，并满足：

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$，(ii) 如果 $I \in \mathcal{I}$ and $I' \subseteq I$，则 $I' \in \mathcal{I}$；(iii) 如果 $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ 满足 $|I_1| < |I_2|$，则存在 $e \in I_2 \setminus I_1$ 使得 $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$。

拟阵有几种等价的描述方式（通过回路、秩或基）。下面我们回顾这些描述。

定义 1.3. 令 M 为定义在 $[n]$上的拟阵。

► $[n]$ 的一个非独立子集称为相关。所有相关子集的集合记作 $\mathcal{D}(M)$。► 回路是 $[n]$的极小相关子集。回路的集合记作 $\mathcal{C}(M)$。

▶对于 $F \subseteq [n]$，其秩记作 $\mathsf{rk}(F)$，等于 F的最大独立子集的大小。 M 的秩为 $\mathsf{rk}([n])$。▶ 基是 $[n]$的极大独立子集。所有基的集合记作 $\mathcal{B}(M)$。▶ 若元素 $x \in [n]$ 属于 $F \subseteq [n]$的闭包，记作 $x \in F$，则 $\mathsf{rk}(F \cup \{x\}) = \mathsf{rk}(F)$。若集合 F满足 $F = F$，则称其为平坦。▶ 若元素 $x \in [n]$ 满足 $\mathsf{rk}(\{x\}) = 0$，则称其为环。

1.2 贡献

本文聚焦于以下问题 .

问题 1. 确定簇 V_Δ 的不可约分解。

目前仅针对某些特殊参数取值，得到了 V_Δ 的不可约分解，例如$t = \ell$ 在 [10]， $t = 3$ 在 [9], 以及 $k = 2$， $t = d$ 在 [1]；另见 [7, 8, 27]。对于一般的（t， k， ℓ， d），该问题在计算上仍然难以处理。

拟阵理论方法。 为克服这些计算困难，我们采用拟阵理论框架，该框架为 V_Δ的分解提供组合描述，并在 $k = 2$的情形下给出明确刻画。这推广了 [1] ，并凸显了拟阵结构在条件独立簇几何中的根本作用。

更一般地，条件独立理想可以通过增加一个参数来定义 $s \geq 2$；见第 7 节。本文将讨论范围限定在 $s = 2$ 的情形。拟阵也会出现在另一种情形中：当 $d \leq s+t-3$ 时，相应的条件独立簇是一个拟阵的回路簇；见定理 7.1 和 [7]。在本稿定稿期间，第三位作者将类似的拟阵理论思想用于 $s = t = n$ 中的特殊情形 [19]。

策略概述。我们的分析按以下步骤展开。

首先，我们引入辅助簇 U_S ，对应于子集 $S \subset [k\ell]$，它们由定义 2.7 中的拟阵秩条件定义，并且是 V_Δ 的子簇，其环境空间为 $(\mathbb{C}^d)^{k\ell}$。簇 U_S 是准仿射的；也就是说，它们是扎里斯基闭子集与扎里斯基开子集的交集。接着，我们将 V_S 定义为 $(\mathbb{C}^d)^{k\ell}$ 中 U_S 的扎里斯基闭包，并证明我们的簇 V_Δ 可分解为若干此类簇 V_S 的并。一般而言，簇 V_S 可能不可约，因此我们进一步将 V_S 分解为不可约分支 $V_{S,\,i}$。由此，我们得到 V_Δ 的一个无冗余不可约分解，其分支为较小的分支 $V_{S,\,i}$；分解中出现的子集 S 是定义 2.12 中引入的可容许子集。

为了明确描述 V_Δ的这一分解，我们需要关注簇 V_S。要分解簇 V_S，只需分解准仿射簇 U_S （见定理 2.14）。为此，我们通过引入准仿射簇 F_S进一步简化问题，这些簇对每个可容许子集$S \subset [k\ell]$均有定义。它们位于更低维的空间（$\mathbb{C}^d$）$^\ell$ 中，并且也具有拟阵论解释。在定理2.19 中，我们建立了 F_S 与 U_S的不可约分支之间明确的一一对应关系。这一多步简化使我们能够通过较小簇 V_Δ 的几何来分析 F_S，并在 $k = 2$ 和 $\ell \geq t$ 为任意情形时得出明确的分解。此外，这种方法提供了一个通用框架，用于回答问题1，大大简化了问题，并为理解 V_Δ的分支几何带来了新的见解。

我们的贡献。现在我们概述本文的主要贡献。所有结果均涉及簇 V_Δ的不可约分解、维数和次数。

定理 (A)。 簇 V_Δ 具有以下无冗余不可约分解：

$$V_\Delta = \bigcup_{S} \bigcup_{i=1}^{a_S} V_{S,i}, \qquad \text{(Theorem 2.14)}$$

并集遍历所有 容许子集 $S \subset [k\ell]$ ，满足 $V_S \neq \emptyset$；其中 $V_{S,\,i}$ 表示 不可约 V_S的分支。此外：

1. 我们建立了 V_S 的不可约分支与 F_S的不可约分支之间的一一对应，并在证明中明确给出。（定理2.19）

2. 在这一对应关系下，

$$\dim(V_{S,i}) = \dim(F_{S,i}) + \ell(k-1) - |S|, \qquad \text{(Corollary 2.21)}$$

其中$F_{S,\,i}$ 在上述对应关系下映射到 $V_{S,\,i}$ 。

3. 我们明确展示如何利用理想 $I(F_{S,\,i})$ 的任意有限生成元集合，得到$V_{S,\,i}$的完整定义方程组。（命题3.7）

根据定理 (A)， V_Δ的不可约分解、其各分支的维数以及定义方程，均可归结为簇 F_S对应的问题。我们强调，经过簇 F_S 并非只是分解 V_Δ的一种便利策略，而是理解这一分解所必需的内在步骤。

我们成功应用该方法，在以下两种情况下得到了 V_Δ 的不可约分解：(i) $k=2$且 $\ell \geq t$任意；(ii) $t=\ell$ 且 k任意。此前已在 $t=\ell$ 中推导出 [10]的分解；然而，我们的方法给出了大为简化的证明，并进一步揭示了可能推广的思路。

定理 (B)。对于 $t=\ell$， V_Δ 具有如下无冗余不可约分解：

$$V_\Delta \;=\; V_\emptyset \cup \bigcup_{S\in\mathcal{R}} V_S, \qquad \text{(Corollary 2.26)}$$

其中

$$\mathcal{R} = \{S \subset [k\ell] :\ |R_i \cap S| = 1 \text{ for all } i \in [k] \text{ and } C_j \not\subset S \text{ for all } j \in [\ell]\}.$$

此外，其不可约分支的维数为

$$\dim(V_\emptyset) = \ell(k+d) - d - 1, \qquad \dim(V_S) = \ell(k+d-1) - k \text{ for each } S \in \mathcal{R}. \qquad \text{(Proposition 2.25)}$$

对于 $k=2$，此前已知的 V_Δ 分解仅限于 $d=t$，相关结果见 [1]。然而，我们注意到，该证明中的论证无法推广到一般情形 $d \geq t$。利用我们的框架，我们推导出了 V_Δ 在 $k=2$ 及任意 $d \geq t$下的显式无冗余不可约分解。

定理 (C)。对于 $k=2$， V_Δ 的无冗余不可约分解为

$$V_\Delta \;=\; V_\emptyset \cup \bigcup_{S} \bigcup_{j} V(J_{S,j}), \qquad \text{(Theorem 4.19)}$$

其中，外层并集遍历所有可容许的非空子集 $S \subset [2\ell]$；对于每个这样的 S，内层并集遍历式（ j **4.4**）中规定的所有取值。理想$J_{S,\,j}$ 的定义见式（4.5）。

此外，在推论5.2 中，我们计算了不可约分支的维数：

$$\dim(V(J_{S,j})) \;=\; d(2t-2-j) + (t-2)(u+v) + j(\ell-u-v) - \big(j^2 + 2(t-1-j)^2 + 2j(t-1-j)\big) + \ell,$$

并且在定理5.4中，我们得到了 V_Δ的维数：

$$\begin{cases} \max\{d\ell + 2t - \ell - 2,\ (t-1)(d+\ell-t+1) + \ell\} & \ell < 2t-2, \\ \max\{(t-1)(2d-2t+\ell+2),\ (t-1)(d+\ell-t+1) + \ell\} & \ell \geq 2t-2. \end{cases}$$

此外，在命题6.2 中，我们将 V_Δ 的次数表示为 $V_\emptyset$的次数：

(i) 若 $\ell > 2t-2$， V_Δ 的次数为

$$\alpha \cdot \mathbb{1}_{(t-1)(d-t+1)\geq \ell} \;+\; \deg(V_\emptyset) \cdot \mathbb{1}_{(t-1)(d-t+1)\leq \ell},$$

(ii) 若 $\ell \le 2t-2$，则 V_Δ 的次数为

$$\beta \cdot \mathbb{1}_{(d-t)(\ell-t)+d-1\ge \ell} \;+\; \deg(V_\emptyset)\cdot \mathbb{1}_{(d-t)(\ell-t)+d-1\le \ell},$$

其中

$$\alpha \coloneqq \sum_{u=t-1}^{\ell-t+1} \binom{\ell}{u} \det\!\left[\tbinom{d+u-i-j}{d-i}\right]_{i,j=1}^{t-1} \cdot \det\!\left[\tbinom{d+\ell-u-i-j}{d-i}\right]_{i,j=1}^{t-1}, \qquad \beta \coloneqq \binom{\ell}{t-1}\binom{t-1}{2t-2-\ell} d^{\,2t-2-\ell}.$$

这里，当 $a \ge b$ 时为 $\mathbb{1}_{a\ge b}=1$，否则为 0。

最后，在第 6.2 节中，我们将通过计数某些格路径，提出一种组合方法来计算 $V_\emptyset$ 的次数。对于特殊情形 $d=t$，我们得到显式公式

$$\deg(V_\emptyset) \;=\; d^{d-1}(d-1)^{\ell-d+1}\binom{\ell}{d-1}. \qquad \text{(Corollary 6.19)}$$

对于一般情形 $d \ge t$，我们给出生成函数

$$\mathcal{G}_{d,\ell,t}(z_1,\dots,z_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} z^{\min(i,t-1)} \;\cdot\; \det\left(h_{d-i}(z_j, z_{j+1},\dots,z_\ell)\right)_{1\le i,j\le t-1},$$

其中 h_i 是次数为 i 的完全齐次对称多项式，并证明

$$\deg(V_\emptyset) = \frac{\partial}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial}{\partial z_\ell}\mathcal{G}_{d,\ell,t}(z_1,\dots,z_\ell)\Big|_{z_1=\cdots=z_\ell=1}. \qquad \text{(Proposition 6.17)}$$

定理 (B) 和 (C)具有以下统计学解释。

推论1.4. 考虑条件独立模型 $\mathcal{C}$，其来自 (1.1)，其中 X、Y_1和 Y_2 是状态空间大小分别为 d、k和 ℓ的观测随机变量，并且 H 是状态空间大小为 $t-1$的隐变量。假设 d、k、ℓ和 t 是满足 $k=2$ 或 $t=\ell$ 的整数。那么，交性质成立；也就是说，

$$X \perp\!\!\!\perp \{Y_1, Y_2\} \mid H.$$

更准确地说，分解中分支 $V_\emptyset$ 所描述的是概率表中具有满支撑（即没有结构零点）的联合分布集合。该分支对应于定义上述条件独立关系的多项式。

论文概要。在第 1 节中，我们介绍基本定义、确定记号，并概述主要结果。第 2 节构建一般分解框架：我们引入簇U_S 和 V_S，并证明 V_Δ 分解为 V_S的并，再将其细化为无冗余不可约分解。在第 2.2 节中，我们引入辅助准仿射簇 F_S，并建立 V_S 的不可约分支与 F_S的不可约分支之间的对应关系，从而将分解问题化归到维数较低的情形。第 2.3 节通过还原情形 $t=\ell$来说明这一框架。第 3 节着重研究 V_Δ的不可约分支的定义方程。在第 4 节中，我们专门研究情形 $k=2$，并得到 V_Δ的完整无冗余不可约分解。第 5 节和第 6 节计算所得簇的维数和次数，从而完成对其几何描述。最后，第 7 节将我们的结果置于更广泛的拟阵理论背景中，通过用拟阵的拟积来阐释条件独立簇。

2 一般分解定理

在本节中，我们通过构建一个通用框架来分解簇 1，从而回答问题 V_Δ。主要结果定理 2.14通过将问题转化为一个更易处理的问题，给出了 V_Δ的不可约分解的隐式描述。具体而言，该定理表明，V_Δ 的分解可以用某些与子集 U_S 相关的辅助簇的不可约分支来理解，$S \subset [k\ell]$这些辅助簇将在下一小节中引入。这一转化揭示了 V_Δ 背后的组合结构，并构成所有后续结果的基础。

2.1 簇的分解 V_S

现在我们引入簇 U_S 和 V_S，它们针对子集 $S \subset [k\ell]$定义，并在 V_Δ的分解中发挥核心作用。子集 S 编码了哪些矩阵条目必须为零，而其余条目则受到由 V_Δ的几何自然导出的拟阵秩条件约束。

记号 2.1. 我们将 V_Δ 理解为由满足以下条件的所有元组 $\gamma = (\gamma_j : j \in [k\ell]) \in (\mathbb{C}^d)^{k\ell}$ 构成的簇，其中包含 $k\ell$ 个向量，且这些向量属于 $\mathbb{C}^d$：

- 对于任意 i_1，$i_2 \in [k\ell]$ 若它们属于矩阵 $\mathcal{Y}$<style id='11'}（1.2）中的同一列，则向量 $\{\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}\}$线性相关。
- 对于 $\mathcal{Y}$ 同一行中任意大小为 t 的子集 $\{i_1, \ldots, i_t\} \subset [k\ell]$，向量 $\{\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_t}\}$线性相关。

例 2.2. 设 $k = 3$、$\ell = 6$ 和 $t = d = 4$。考虑以下矩阵：

$$\begin{pmatrix} (0,0,0,0) & (0,0,0,0) & (2,0,0,2) & (2,0,0,4) & (0,3,0,3) & (0,3,0,6) \\ (0,0,1,1) & (0,0,1,2) & (0,0,0,0) & (0,0,0,0) & (0,1,0,1) & (0,1,0,2) \\ (0,0,4,4) & (0,0,4,8) & (1,0,0,1) & (1,0,0,2) & (0,0,0,0) & (0,0,0,0) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

该矩阵表示一个元素 $\gamma \in V_\Delta$，因为同一列中的任意两个向量以及同一行中的任意四个向量都线性相关。利用矩阵 $\mathcal{Y}$中各项在（1.2）中的索引，我们也可以将 γ 等价地视为由 $k\ell$ 个向量组成的元组。例如，按照该索引方式，有 $\gamma_7 = (2,\ 0,\ 0,\ 2)$ 和 $\gamma_{17} = (0,\ 1,\ 0,\ 2)$。

对于 $\gamma \in V_\Delta$ 由一个 $k \times l$ 向量矩阵表示的情形，我们按照矩阵中的条目为这些向量编号$\mathcal{Y}$，编号方式来自（1.2）。现在，我们在底集 $[\ell]$ 上为每个点 $\gamma \in V_\Delta$关联一个拟阵。

定义 2.3。 令 $\gamma = (\gamma_j :\ j \in [k\ell]) \in V_\Delta$。对于每个 $i \in [\ell]$，定义向量 $v_i \in \mathbb{C}^d$ 如下：

$$v_i = \begin{cases} 0, & \text{if } \gamma_j = 0 \text{ for all } j \in C_i, \\ \gamma_j, & \text{for any } j \in C_i \text{ with } \gamma_j \neq 0. \end{cases}$$

The 在 $[\ell]$ 上的拟阵 $\mathcal{M}_\gamma$定义为由向量元组（v_1，.....，v_ℓ）表示的拟阵 .

注意，元组（v_1，.....，v_ℓ）可能取决于非零向量 $\gamma_j \in C_i$的选择。然而，拟阵 $\mathcal{M}_\gamma$ 是定义良好的，因为对于每个 $i \in [\ell]$，任意两个满足 j_1，$j_2 \in C_i$的非零向量 γ_{j_1} 和 γ_{j_2} 都是彼此的数乘。

例 2.4. 考虑例 $\gamma \in V_\Delta$ 中的元素 2.2。定义

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) = ((0,0,1,1), (0,0,1,2), (1,0,0,1), (1,0,0,2), (0,1,0,1), (0,1,0,2)).$$

显然，对于每个 $j \in C_i$，向量 γ_j 是 v_i的标量倍数。相应的拟阵 $\mathcal{M}_\gamma$由 $(v_1, \ldots, v_6)$ 确定。在此情形下，它是一个底集为 $[6]$、秩为 4 的拟阵，其非生成回路集为 $\{\{1,2,3,4\},\ \{3,4,5,6\},\ \{1,2,5,6\}\}$.

记号 2.5. 令 $S \subset [k\ell]$。对于每个 $i \in [k]$，我们定义 $S_i = \{\, j \in [\ell] : \mathcal{Y}_{i,j} \notin S \,\} \subset [\ell]$.

例 2.6. 令 $k = 3$、$\ell = 6$ 和 $S = \{1, 4, 8, 11, 15, 18\}$。那么

$$(S_1, S_2, S_3) = \{\{3,4,5,6\},\ \{1,2,5,6\},\ \{1,2,3,4\}\}.$$

接下来，我们为每个子集 $S \subset [k\ell]$ 关联一个簇。

定义 2.7。 对于每个子集 $S \subset [k\ell]$，将 $U_S \subset V_\Delta$ 定义为满足以下条件的所有向量组 $\gamma = (\gamma_j :\ j \in [k\ell]) \in V_\Delta$ 的集合：

- $\gamma_j = 0$ 当且仅当 $j \in S$；
- 对于每个 $i \in [k]$，集合 S_i 是拟阵 $\mathcal{M}_\gamma$中的一个秩为 $t - 1$ 的平坦。

此外，令 V_S 表示 $(\mathbb{C}^d)^{k\ell}$中 U_S 的扎里斯基闭包。

例 2.8。 设 $k=3$， $\ell=6$，以及 $d=t=4$，并设 $S=\{1,4,8,11,15,18\}$。考虑以下元素：$\gamma \in V_\Delta$ 来自例 2.2。我们有 $\gamma \in U_S$ 因为 $\gamma_j=0$ 当且仅当 $j \in S$，并且因为这些集合

$$(S_1,S_2,S_3)=\{\{3,4,5,6\},\ \{1,2,5,6\},\ \{1,2,3,4\}\}$$

是拟阵 $\mathcal{M}_\gamma$中秩为三的平坦，如例 2.4中已经证明。

引理 2.9。 对于每个子集 $S \subset [k\ell]$，集合 U_S 是 $(\mathbb{C}^d)^{k\ell}$ 中的准仿射簇。

证明。 向量组 $\gamma=(\gamma_j : j \in [k\ell])$ 属于 U_S 当且仅当满足以下条件：

(i) $\gamma \in V_\Delta$；(ii) $\gamma_j=0$ 当且仅当 $j \in S$；(iii) 对于每个 $i \in [k]$ 和每个 $r \in [\ell] \setminus S_i$，都存在一个 $(t-1)$-子集 $\{i_1,\dots,i_{t-1}\} \subseteq \cup_{j \in S_i} C_j$ 和一个元素 $i_t \in C_r$，使得向量 $\{\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_t}\}$ 线性无关。

条件 (iii) 等价于要求每个 S_i都是拟阵 $\mathcal{M}_\gamma$中秩为 $t-1$的平坦。由于 V_Δ是扎里斯基闭的，条件 (ii) 施加了消失和非消失约束，而条件 (iii) 施加了多项式秩约束，因此可知 U_S 是 $(\mathbb{C}^d)^{k\ell}$ 的一个扎里斯基闭子集与扎里斯基开子集的交集。因此， U_S 是一个准仿射簇。 □

本小节的主要结果是定理 2.14，我们在其中计算了簇 V_Δ的无冗余不可约分解，从而为问题1提供了部分答案。说它是部分答案，是因为该结果将问题归结为确定簇 U_S的不可约分支，其中 $S \subset [k\ell]$ 是定义 2.12中定义的可容许子集。

在以下所有证明中，我们将使用下文介绍的无穷小运动这一概念。

定义 2.10. 无穷小运动（或扰动）是指可以任意小的修改。我们称对 x 的扰动会产生集合 X 中的一个元素，如果 x 属于 X的欧几里得闭包；等价地，对于每个 $\varepsilon>0$，都存在对 x 的扰动，其距离至多为 ε，且属于 X。

例 2.11. 我们以 [7, 注记 5。10]为基础。设 $k=2$， $\ell=5$ 和 $d=t=3$。考虑向量组 $\gamma=(\gamma_j : j \in [10])$，其由矩阵表示

$$\begin{pmatrix} (1,0,0) & (1,1,0) & (0,0,0) & (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,0,0) & (0,0,0) & (0,1,1) & (0,0,1) \end{pmatrix}.$$

显然， $\gamma \in V_\Delta$，因为同一列中的任意两个向量以及同一行中的任意三个向量都线性相关。按照定义2.3，从每列选取一个代表元，令

$$(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)=((1,0,0),(1,1,0),(0,0,0),(0,1,1),(0,0,1)).$$

相应的拟阵 $\mathcal{M}_{\gamma_0}$在 [5] 上的秩为 3，其唯一的非张成回路为 $\{3\}$，这是一个环。这些向量由矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 表示。考虑子集 $S=\{2,4,7,9\} \subset [10]$，它确定了 $(S_1,\ S_2)=\{\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$。

注意， $\gamma \notin U_S$，因为 $\gamma_5=\gamma_6=0$而5， $6 \notin S$。然而，我们可以证明 $\gamma \in V_S=U_S$，只需对 γ 施加任意小的扰动，使其产生 U_S中的一个元素。具体而言，图1 展示了如何将 A扰动为

$$A(\epsilon)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

这对应于移动 v_3，使其非零并位于由 $\{v_1,v_2\}$ 和 $\{v_4,v_5\}$ 张成的平面的交集处。由此得到扰动后的元组

$$\gamma(\epsilon)=\begin{pmatrix} (1,0,0) & (1,1,0) & (0,\epsilon,0) & (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,0,0) & (0,\epsilon,0) & (0,1,1) & (0,0,1) \end{pmatrix}.$$

现在很容易验证 $\gamma(\epsilon) \in U_S$。由于 $\gamma(\epsilon)$ 可以任意接近 γ，我们得出结论 $\gamma \in U_S = V_S$。下文中，我们将这种移动统称为扰动。

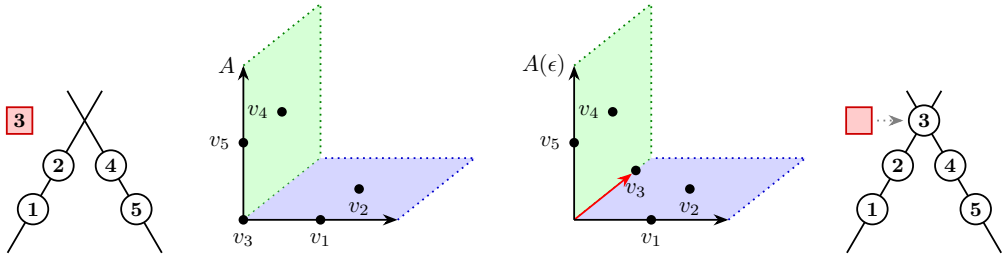

图 1：向量 v_3 在例2.11中的扰动示意图。

定义 2.12。若子集 $S \subset [k\ell]$ 满足以下两个条件，则称其为可容许的：

- 对每个 $i \in [k]$，都有 $|R_i \setminus S| \geq t-1$；
- 对每个 $j \in [\ell]$，列集 C_j 并非完全包含于 S中。

例2.13。设 $k=3$，$\ell=6$和 $d=t=4$，并考虑例 $S=\{1,4,8,11,15,18\}$ 中的子集2.8。对每个 $i \in [3]$，都有 $|R_i \setminus S| = 4 \geq t-1 = 3$。此外，没有列集 C_j 完全包含于 S。因此 S 是可容许的。

对于每个容许集 $S \subset [k\ell]$，令 $U_{S,1}, \ldots, U_{S,a_S}$ 为 U_S 的不可约分支。我们将 V_S 中相应的不可约分支记为

$$V_{S,1}, \ldots, V_{S,a_S}, \quad \text{where } V_{S,i} = \overline{U_{S,i}}.$$

现在我们给出簇 V_Δ 的无冗余不可约分解。

定理 2.14. 簇 V_Δ 具有如下无冗余不可约分解：

$$V_\Delta = \bigcup_S \bigcup_{i=1}^{a_S} V_{S,i}, \tag{2.2}$$

*whe*其中，并集遍历所有可容许子集 $S \subset [k\ell]$，它们来自定义 *2.12* 且满足 $V_S \neq \emptyset$.

证明。我们首先证明 $V_\Delta = \cup_S V_S$。根据定义，每个 U_S 都包含于 V_Δ中，因此$V_S = U_S \subset V_\Delta$。为证明反向包含关系，设 $\overline{\gamma} = (\gamma_j : j \in [k\ell])$ 是 V_Δ 中的一个向量组。我们证明，对于某个可容许子集 S，γ 属于 $V_S = U_S$。为此，我们对 γ 中的向量进行扰动，得到一个新的元组 $\tilde{\gamma}$，使得对于某个可容许的 S，有 $\tilde{\gamma} \in U_S$。$\tilde{\gamma}$ 的构造如下。

步骤 1。假设存在 $i \in [\ell]$ 使得 $\gamma_j = 0$ 对所有 $j \in C_i$均成立。考虑矩阵元素 $ki = \mathcal{Y}_{k,i}$来自（1.2）。由于 $\gamma \in V_\Delta$，向量集合 $\{\gamma_j : j \in R_k\}$ 张成的子空间维数至多为 $t-1$。我们可以对零向量 $\gamma_{ki} = 0$施加扰动，将其替换为该张成空间中的一个非零向量。所得构型仍属于 V_Δ，并确保列 C_i 中的向量不全为零。对所有列依次进行这种扰动后，我们得到一个元组 $\gamma^1 \in V_\Delta$，使得对每个 $i \in [\ell]$，此性质均成立。

步骤 2。接下来，我们对 γ^1 施加扰动，得到一个满足 $\mathbf{rk}(\gamma^2) \geq t-1$的元组 $\gamma^2 \in V_\Delta$。选择扰动时确保不会引入环，从而对每个 $i \in [\ell]$，对应的列 C_i 都不全为零。

步骤 3。令 M_{γ^2} 表示与集合 $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ 相关联的拟阵，如定义 2.3所述，并令 $\mathbf{rk}$ 为其秩函数。定义 $S = \{j \in [k\ell] : \gamma_j^2 = 0\}$则：

- 对于每个 $j \in [\ell]$，向量 $\{\gamma_p^2 : p \in C_j\}$ 都是 v_j 的数乘。• 因此，对于每个 $i \in [k]$，我们有 $\mathbf{rk}\{\gamma_p^2 : p \in R_i\} = \mathbf{rk}(S_i)$。

假设对于某个 $i \in [k]$，集合 S_i 不是 $t-1$ 中的秩为 M_{γ^2}的平坦。那么存在 $r \in [\ell] \setminus S_i$使得 $\mathbf{rk}(S_i \cup \{r\}) \leq t-1$。考虑元素 $i+k(r-1) = \mathcal{Y}_{i,\,r}$ 在 (1.2) 中。由于 $r \notin S_i$，我们有$i+k(r-1) \in S$，这意味着 $\gamma^2_{i+k(r-1)} = 0$。条件 $\mathbf{rk}(S_i \cup \{r\}) \leq t-1$ 给出

$$\mathrm{rk}\{v_j : j \in S_i \cup \{r\}\} \leq t-1.$$

接下来，我们扰动零向量 $\gamma^2_{i+k(r-1)}$，将其替换为 v_r 的一个非零标量倍。由于 C_r 中的所有向量都是 v_r 的标量倍数，列 C_r 的秩仍为一，而行 R_i 的秩至多为 $t-1$。因此，扰动后的元组仍属于 V_Δ，此时满足 $\gamma^2_{i+k(r-1)} \neq 0$。

重复这一过程，我们得到 $\gamma^3 \in V_\Delta$；记 $S' = \{j \in [k\ell]\colon\ \gamma^3_j = 0\}$，则每个 S'_i 都是 M_{γ^3} 中秩为 $t-1$ 的平坦。

可容许性 S'。现在我们证明子集 S' 是可容许的。为此，注意到 t hat:

- 由于每个 S'_i 都是秩为 $t-1$ 的平坦，因此对于所有 $i \in [k]$，都有 $|R_i \setminus S'| = |S'_i| \geq t-1$。
- 对于每个 $i \in [\ell]$，列 C_i 中至少有一个元素非零，因此没有任何 C_i 完全包含在 S'中。

最后，由于对于每个 $i \in [k]$，$\gamma^3_j = 0$ 当且仅当 $j \in S'$，且 S'_i 是 M_{γ^3} 中秩为 $t-1$ 的平坦，我们得出 $\gamma^3 \in U_{S'}$，正如所需。因此，$V_\Delta = \cup_S V_S$。

不可约冗余分解。为证明（2.2）中的分解是不可约冗余的，反设存在两个不同的可容许子集 $S^{(1)}$、$S^{(2)} \subset [k\ell]$ 使得

$$V_{S^{(1)},a} \subset V_{S^{(2)},b} \quad \text{and} \quad V_{S^{(1)},a} \neq \emptyset.$$

由引理 2.9可知，簇 $U_{S^{(1)}}$ 是准仿射的，因此$V_{S^{(1)}}$ 的每个不可约分支都与$U_{S^{(1)}}$ 非平凡相交。因此，我们可以选取一个向量组

$$\gamma = (\gamma_j : j \in [k\ell]) \in V_{S^{(1)},a} \cap U_{S^{(1)}}.$$

由于 $\gamma \in V_{S^{(1)},\,a} \subset V_{S^{(2)},\,b}$，可知对所有 $j \in S^{(2)}$都有 $\gamma_j = 0$。另一方面，由于 $\gamma \in U_{S^{(1)}}$，$\gamma_j = 0$ 当且仅当 $j \in S^{(1)}$。因此，我们必有 $S^{(1)} \supsetneq S^{(2)}$。

现在，由于 $S^{(1)} \supsetneq S^{(2)}$，存在 $p \in [k]$，使得 $R_p \setminus S^{(1)} \subsetneq R_p \setminus S^{(2)}$；等价地，${S^{(1)}}_p \subsetneq {S^{(2)}}_p$，其中 R_p 表示矩阵 $\mathcal{Y}$（来自 (1.2)）的第 p^{th} 行。由于 $\gamma \in V_{S^{(1)},\,a} \subset V_{S^{(2)},\,b}$，集合 ${S^{(2)}}_p$ 在 $\mathcal{M}_\gamma$中的秩至多为 $t-1$。然而，由于 $\gamma \in U_{S^{(1)}}$，${S^{(1)}}_p$是 $\mathcal{M}_\gamma$中秩为 $t-1$的平坦。这是不可能的，因为 ${S^{(1)}}_p \subsetneq {S^{(2)}}_p$且 $\mathbf{rk}({S^{(2)}}_p) \leq t-1$，因此 (2.2) 中的分解确实是不可约的。 □

定理 2.14 将求 V_Δ 的不可约分解问题转化为以下问题。

Que题 2. 给定一个可容许子集 $S \subset [k\ell]$，确定 U 的不可约分解 $_S$.

2.2 簇 F_S 的分解

如定理 2.14所示，确定 V_Δ 的不可约分支可归结为求可容许子集 $S \subset [k\ell]$对应的簇 U_S 的不可约分解。现在，我们通过引入维数更低的辅助簇 $F_S \subset (\mathbb{C}^d)^\ell$，进一步简化这一任务。这些辅助簇的不可约分支与 U_S的不可约分支间接对应；参见定理 2.19。这种对应关系使得所有关于 V_Δ 的几何问题都可以在更简单的簇 F_S中处理。

定义 2.15。对于公共向量空间中的一组向量 $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$，我们用 $\mathcal{N}_\gamma$ 表示由这些向量确定的、定义在 $[n]$ 上的拟阵。设 $S \subset [k\ell]$ 为一个可容许子集。我们将 $F_S \subset (\mathbb{C}^d)^\ell$ 定义为满足以下条件的所有向量组 $\gamma = (\gamma_i : i \in [\ell]) \in (\mathbb{C}^d)^\ell$ 所构成的集合：

- $\gamma_i \neq 0$ 对所有 $i \in [\ell]$;
- 对于每个 $i \in [k]$，集合 S_i 是 $\mathcal{N}_\gamma$ 中秩为 $t-1$ 的平坦。

通过与引理 2.9 类似的论证，我们得到：

引理 2.16. 对于每个子集 $S \subset [k\ell]$，集合 F_S 是 $\mathbb{C}^{d\ell}$ 中的准仿射簇。

例 2.17. 设 $k = 3$，$\ell = 6$，以及 $d = t = 4$，并考虑子集 $S = \{1, 4, 8, 11, 15, 18\}$ 和元组 $\gamma \in V_\Delta$，如例 2.8所示。在此情形下，我们有 $\gamma \in U_S$。

关联拟阵 M_γ 是通过从（2.1）中的矩阵的每一列选取一个代表向量得到的。在这里，我们可以选择

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) = ((0,0,1,1), (0,0,1,2), (1,0,0,1), (1,0,0,2), (0,1,0,1), (0,1,0,2)),$$

as 在 M_γ 的构造中所述。容易验证，$(v_1, \ldots, v_6) \in F_S$。

正如例 2.17 所示，任意元素 $\gamma \in U_S$ 都会自然地确定 F_S中的一组元素，它们都是通过从每一列 C_j中选取一个代表元（相差一个非零标量）得到的。反过来，正如我们将在定理2.19中看到的， F_S 中的每个元素都可以通过多项式映射提升回 U_S

$$F_S \times (\mathbb{C}^*)^{|[k\ell]\setminus S|} \longrightarrow U_S.$$

注意， U_S 中的每个向量组都由 $[k\ell]$的元素索引，对应于矩阵 $\mathcal{Y}$ （1.2）中的各项；而在 F_S 中，向量则由 $[\ell]$索引。这使环境空间的维数大幅降低。

记号 2.18。 对于集合 A，我们用 $\mathbb{C}^A$ 表示由复数 $(\lambda_a)_{a\in A}$构成、以 A的元素为索引的所有集合。

下述定理确立了簇 U_S 与 F_S之间所需的联系 .

定理 2.19. U_S 的不可约分支与 F_S的不可约分支一一对应 .

证明。 考虑多项式映射

$$\psi : (\mathbb{C}^*)^{|[k\ell]\setminus S|} \times F_S \longrightarrow U_S, \qquad \psi((\lambda_i)_{i\in[k\ell]\setminus S}, \gamma)_p = \begin{cases} 0, & \text{if } p \in S, \\ \lambda_p \gamma_j, & \text{if } p \in C_j \setminus S, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中，指标 j 和 p 分别对应于它们在各自元组中向量的位置。根据 U_S 和 F_S 的定义，映射 ψ 定义良好，其像包含于 U_S，且它是满射。

令 $F_{S,1}$，……，F_{S,b_S} 表示 F_S 的不可约分支，为简化记号，设

$$F_i := (\mathbb{C}^*)^{|[k\ell]\setminus S|} \times F_{S,i}, \quad i \in [b_S].$$

我们断言 U_S 有不可约分解 $U_S = \bigcup_{i=1}^{b_S} \psi(F_i)$，等价地，

$$V_S = \bigcup_{i=1}^{b_S} \overline{\psi(F_i)}. \tag{2.4}$$

(2.4) 中的等式由 ψ的满射性得出。每个$F_{S,i}$ 都是不可约的，并且由于不可约簇的乘积仍为不可约，每个 F_i 也都是不可约的。此外， ψ 作为多项式映射是连续的，而不可约集在连续映射下的像仍然不可约。因此，每个 $\psi(F_i)$ 都是不可约的，并且 (2.4) 中的每个分支都是不可约的。为完成证明，还需验证该分解没有冗余项。

反设存在不同的指标 i， $j \in [b_S]$ 使得

$$\overline{\psi(F_i)} \subset \overline{\psi(F_j)}. \tag{2.5}$$

令 π_2 表示投影到 F_S 中（2.3）所出现的乘积的第二因子上的投影。我们断言

$$\pi_2\big(\psi^{-1}(\overline{\psi(F_j)})\big) \subset \overline{F_{S,j}}.$$

假设 $\psi(\lambda, \gamma) \in \psi(F_j)$，其中 $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^{|[k\ell]\setminus S|}$ 且 $\gamma \in F_S$。由于 $\gamma = \pi_2(\psi^{-1}(\psi(\lambda, \gamma)))$，只需证明 $\gamma \in F_{S,j}$。令 $\tau = \psi(\lambda, \gamma) \in \overline{U_S}$。对每个 $i \in [\ell]$，选取 $p_i \in [k\ell] \setminus S$，使得每个向量 τ_{p_i} 都是 γ_i的非零标量倍。因此，元组 $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell)$ 和 $(\tau_{p_1}, \ldots, \tau_{p_\ell})$ 仅相差一个重新缩放。

由于 $F_{S,\ j}$ 是准仿射的，因此 $\psi(F_j)$ 也是；于是其扎里斯基闭包与其欧几里得闭包重合。因此，通过对坐标施加任意小的扰动，$\tau \in \psi(F_j)$ 可以由 $\psi(F_j)$ 中的点逼近。此外，$\psi(F_j)$可以描述为

$$\psi(F_j) = \{\kappa \in V_\Delta : M_\kappa \in F_{S,j}\}.$$

因此，可以对 τ 中的向量进行轻微扰动，以得到 $\psi(F_j)$ 中的一个元组，这意味着 $(\tau_{p_1}, \dots, \tau_{p_\ell}) \in F_{S,j}$。由于该元组与 γ 的差异仅在于非零标量，因此可得 $\gamma \in F_{S,j}$，如所需。

现在注意到 $F_{S,i} \subset \pi_2\big(\psi^{-1}(\psi(F_i))\big)$。对（2.5）两边应用 $\pi_2 \circ \psi^{-1}$，得到

$$F_{S,i} \subset \pi_2\big(\psi^{-1}(\overline{\psi(F_i)})\big) \subset \pi_2\big(\psi^{-1}(\overline{\psi(F_j)})\big) \subset \overline{F_{S,j}}.$$

因此 $F_{S,i} \subset F_{S,j}$，这与以下事实矛盾：$F_{S,i}$ 和$F_{S,j}$ 是 F_S 的不同分支。这个矛盾表明（2.4）中的分解是不可约的冗余分解，证明完毕。 □

记号 2.20。根据定理 2.19 中建立的对应关系，对于每个 $i \in [a_S]$，我们将与 $U_{S,i}$ 对应的 F_S 的不可约分支记为 $F_{S,i}$。

定理 2.19 表明，问题 2 可归结为以下问题。

Que问题 3. 给定一个可容许子集 $S \subset [k\ell]$，确定 F 的不可约分解 $_S$.

因此，确定 V_Δ 的不可约分支，可归结为描述簇 F_S 的不可约分解。在接下来的两个小节中，我们将对两个族明确地完成这一工作：第 $t = \ell$ 节 2.3 中的情形，以及第 $k = 2$ 节 4 中的情形。

2.2.1 任意 k 下 V_Δ 的分支维数

作为定理 2.19 证明的直接推论，我们可以根据相关簇 $F_{S、\,i}$ 计算分解式（2.3）中出现的簇 $V_{S、\,i}$ 的维数。

推论 2.21。设 $S \subset [k\ell]$ 为一个可容许子集。那么，对于每个 $i \in [a_S]$，

$$\dim(V_{S,i}) = \dim(U_{S,i}) = \dim(F_{S,i}) + \ell(k-1) - |S|. \tag{2.6}$$

证明。考虑式（2.3）中定义的映射 ψ。对每个 $i \in [a_S]$，令 $F_i := (\mathbb{C}^*)^{|[k\ell]\setminus S|} \times F_{S,i}$。根据定理 2.19 的证明，我们有 $U_{S,\,i} = \psi(F_i)$。由于 $U_{S,i}$ 是准仿射的，其维数与其扎里斯基闭包的维数相同，因此 $\dim(V_{S,i}) = \dim(U_{S,i})$。此外，$\dim(F_i) = \dim(F_{S,i}) + k\ell - |S|$。对于任意 $\gamma \in U_{S,i}$，纤维 $\psi^{-1}(\gamma)$ 同构于 $(\mathbb{C}^*)^\ell$。因此 $\dim(U_{S,i}) = \dim(F_i) - \ell = \dim(F_{S,i}) + \ell(k-1) - |S|$。 □

例 2.22。在例 2.8 的设定下，我们有 $\dim(V_{S,i}) = \dim(F_{S,i}) + 6$。

2.3 例：V_Δ 在 $t = \ell$时的不可约分解

在 V_Δ 当 $t = \ell$ 时的不可约分支已由 [10]确定。在此，我们利用基于簇 F_S 和 U_S的框架重新推导这些结果，从而大大简化证明。全文中，我们固定 $t = \ell$，并首先确定满足 $S \subset [k\ell]$ 的可容许子集 $F_S \neq \emptyset$。

引理 2.23。设 $S \subset [k\ell]$ 是满足 $F_S \neq \emptyset$ 的可容许子集。那么，要么 $S = \emptyset$，要么 S 满足

$$|S \cap R_i| = 1 \quad \textit{for all } i \in [k] \quad \textit{and} \quad C_j \not\subset S \quad \textit{for all } j \in [\ell].$$

证明。根据定义 2.12，子集 $S \subset [k\ell]$ 是可容许的，当且仅当 $|R_i \setminus S| \geq t-1$ 对所有 $i \in [k]$ 以及 $C_j \not\subset S$ 对所有 $j \in [\ell]$都成立。由于 $|R_i| = \ell = t$，这等价于 $|S \cap R_i| \leq 1$ 对所有 $i \in [k]$ 以及 $C_j \not\subset S$ 对所有 $j \in [\ell]$都成立。如果 $|S \cap R_i| = 1$ 对每个 i都成立，那么 S 满足这些条件。

现在假设存在 $i \in [k]$ 满足 $S \cap R_i = \emptyset$。由于 $F_S \neq \emptyset$，取 $\gamma \in F_S$。根据定义 2.15，每个 S_j 都是拟阵 $\mathcal{N}_\gamma$中的一个秩为 $t-1$ 的平坦。条件 $S \cap R_i = \emptyset$ 蕴含 $S_i = [\ell]$，因此 $[\ell]$ 是 $\mathcal{N}_\gamma$中秩为 $t-1$ 的平坦。由于 $[\ell]$ 是该秩下唯一的平坦，故对所有 $S_j = [\ell]$ $j \in [k]$都有 $S = \emptyset$。 □

记号 2.24。 我们定义以下由 $[k\ell]$ 的子集构成的子集族:

$$\mathcal{R} = \{S \subset [k\ell] : \ |R_i \cap S| = 1 \text{ for all } i \in [k] \text{ and } C_j \not\subset S \text{ for all } j \in [\ell]\}.$$

我们证明，对于 $S = \emptyset$ 或 $S \in \mathcal{R}$，簇 F_S 是不可约的，并计算其维数。

命题 2.25. 设 $t = \ell$。则以下结论成立:

(i) 簇 $F_\emptyset$ 非空且不可约，并且 维数$(V_\emptyset) = \ell(k+d) - d - 1$.(ii) 对于每个 $S \in \mathcal{R}$，簇 F_S 非空且不可约，并且 维数$(V_S) = \ell(k+d-1) - k$.

证明。 **(i)** 根据定义 2.15，簇 $F_\emptyset$ 由所有满足以下条件的 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\ell) \in (\mathbb{C}^d)^\ell$ 组成，其中 $\gamma_i \neq 0$ 对所有 i均成立，且 $\mathbf{rk}\{\gamma_1, \dots, \gamma_\ell\} = \ell - 1$。因此 $F_\emptyset$ 是一个非空的扎里斯基开子集

$$W = \{\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\ell) \in (\mathbb{C}^d)^\ell : \gamma_1, \dots, \gamma_\ell \text{ are linearly dependent}\}.$$

它是不可约的。因此 $F_\emptyset$ 是不可约的。由于维数$(W) = d\ell - (d+1-\ell)$，我们有维数$(F_\emptyset) = d\ell - (d+1-\ell)$，且推论 2.21 给出维数$(V_\emptyset) =$ 维数$(F_\emptyset) + \ell(k-1) = \ell(k+d) - d - 1$。

(ii) 根据定义 2.15， F_S 由满足以下条件的所有向量组 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\ell) \in (\mathbb{C}^d)^\ell$ 组成:

$$\gamma_i \neq 0 \text{ for all } i \in [\ell], \quad \mathrm{rk}\{\gamma_1, \dots, \gamma_\ell\} = \ell, \quad \text{and} \quad \mathrm{rk}\{\gamma_p : p \in S_i\} = \ell - 1 \text{ for every } i \in [k].$$

由于每个 S_i 的大小为 $\ell - 1$， F_S 是 $(\mathbb{C}^d)$ 中的非空扎里斯基开子集$^\ell$，因而是不可约的。因此 $\dim(F_S) = d\ell$，命题 2.21 给出 $\dim(V_S) = \dim(F_S) + \ell(k-1) - k = \ell(k+d-1) - k$. □

现在，在 $t = \ell$的情况下，我们可以推导出 V_Δ 的无冗余不可约分解。

推论 2.26。 V_Δ 的无冗余不可约分解为 $V_\Delta = V_\emptyset \cup \bigcup_{S \in \mathcal{R}} V_S$.

证明。 该结论由定理 2.14 和 2.19 以及命题 2.25共同推出。 □

例 2.27. 设 $k = 3$ 和 $\ell = 6$。则 $|\mathcal{R}| = 6^3 - 6$，且 V_Δ 有 $6^3 - 5 = 211$ 个不可约分支。

3 V_Δ的分支的定义方程

在上一节中，我们将 V_Δ 的不可约分解及其各分支的维数归结为研究簇 F_S。本节将说明， V_Δ 各分支的定义方程也可以通过相应的 F_S各分支的数据得到。

3.1 定义方程

我们来讨论 V_Δ的不可约分支的定义方程。对于分支 $V_{S,\ i}$，我们的目标是描述一组完备的定义方程，即其理想在根基意义下的生成元。我们将说明，这些方程可以直接由相应簇 $F_{S,\ i}$的定义方程得到。

记号 3.1. 我们先引入一些记号。

- 令 $X = (x_{i,j})$ 表示一个 $d \times k\ell$ 不定元矩阵。对于每个 $j \in [k\ell]$，我们用 X_j 表示 X的第 j_{th}列。
- 令 $Y = (y_{i,j})$ 为一个 $d \times \ell$ 不定元矩阵，其列由 $[\ell]$中的元素索引。对于每个 $j \in [\ell]$，我们将 Y的第 j_{th} 列记为 Y_j。
- 当我们提到准仿射簇 $\underline{A}$的定义方程时，指的是其扎里斯基闭包 A的定义方程。这些方程恰好是那些在 A的所有点上都消失的多项式 p，或者等价地说，是 $I(A)$ 的元素。
- 对于 A，完整定义方程组是指一组生成元，其根基为 $I(A)$；也就是说，这是一组满足 $V(\{p_1, \dots, p_r\}) = A$ 的多项式 $\{p_1, \dots, p_r\}$。

固定一些记号后，我们接下来将说明如何从 $I(F_{S,i})$ 中的多项式得到 $I(V_{S,i})$ 中的多项式。

记号 3.2 节。 对于每个可容许子集 S 以及每个 $i \in [a_S]$，我们采用以下约定 :

- 每个 $p \in I(V_{S,i})$ 都被视为关于 $\mathbb{C}[X]$ 的多项式，其中 $X = (x_{i,j})$ 是一个 $d \times k\ell$ 不定元矩阵。
- 每个 $p \in I(F_{S,i})$ 都被视为关于 $\mathbb{C}[Y]$ 的多项式，其中 $Y = (y_{i,j})$ 是一个 $d \times \ell$ 不定元矩阵，如上所述。
- 若子集 $T = \{t_1, \ldots, t_\ell\} \subset [k\ell]$ 满足对于所有 $i \in [\ell]$ 均有 $t_i \in C_i \setminus S$，则称其为一个 S-代表元 。我们用 $\mathcal{T}(S)$ 表示所有 S-代表元的集合。

对于每个 $p \in \mathbb{C}[Y]$ 以及每个 S-代表元 T，我们现在关联一个相应的多项式 $p_T \in \mathbb{C}[X$].

定义 3.3。 令 $p \in \mathbb{C}[Y]$，并令 $T = \{t_1, \ldots, t_\ell\} \subset [k\ell]$ 为一个 S-代表元。我们通过代数态射定义多项式 $p_T \in \mathbb{C}[X]$

$$\phi_T : \mathbb{C}[Y] \longrightarrow \mathbb{C}[X], \qquad y_{i,j} \longmapsto x_{i,t_j} \ (i \in [d],\, j \in [\ell]),$$

并令 $p_T = \phi_T(p)$。此外，对于 $\gamma = (\gamma_j : j \in [k\ell]) \in V_\Delta$ 以及一个 S-代表元 $T = \{t_1, \ldots, t_\ell\}$，se t

$$\gamma_T \coloneqq (\gamma_{t_1}, \ldots, \gamma_{t_\ell}).$$

例 3.4。令 $k = 3$、 $l = 6$和 $S = \{1, 4, 8, 11, 15, 18\}$ 如例 2.8 中所述。在此情形下，子集 $T = \{2, 5, 7, 12, 13, 17\} \subset [18]$ 是一个 S-代表元。相关态射 ϕ_T： $\mathbb{C}[Y] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ 由下式给出： $y_{i,\,1} \mapsto x_{i,}$、 2、 $y_{i,\,2} \mapsto x_{i,}$、 5、 $y_{i,\,3} \mapsto x_{i,}$、 7、 $y_{i,\,4} \mapsto x_{i,}$、 12、 $y_{i,\,5} \mapsto x_{i,}$、 13、 $y_{i,\,6} \mapsto x_{i,}$、 17。

引理 3.5. 设 $\gamma \in U_{S,i}$ ，且令 $T \subset [k\ell]$ 为一个 S-代表元。则 $\gamma_T \in F_{S,i}$。

证明. 令 ψ 为由（2.3）定义的多项式映射，并设 $F_i \coloneqq (\mathbb{C}^*)^{|[k\ell]\setminus S|} \times F_{S,i}$。由定理 2.19 的证明可知， $U_{S,i} = \psi(F_i)$。假设 $\gamma = \psi(\lambda, \tau)$，其中 $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^{|[k\ell]\setminus S|}$ 且 $\tau \in F_{S,i}$。根据 S-代表元 $T = \{t_1, \ldots, t_\ell\}$ 的定义，每个 $t_j \in C_j \setminus S$。因此，根据 ψ 的定义，对所有 $j \in [\ell]$，坐标 γ_{t_j} 是 τ_j 的非零标量倍。于是， γ_T 和 τ 只相差非零标量倍。由于 $F_{S,i}$ 在非零标量乘法下封闭，因此 $\gamma_T \in F_{S,i}$。 □

命题 3.6. 设 $p \in I(F_{S,i})$ ，且设 $T \subset [k\ell]$ 为一个 S-代表元。则 $p_T \in I(V_{S,i})$。

证明。 只需证明 p_T 在 $U_{S,i}$的每个元素上都消失。设 $\gamma \in U_{S,i}$。 由于 p_T的支集只涉及由 T索引的变量，因此 $p_T(\gamma) = p(\gamma_T) = 0$；最后一个等式由$p \in I(F_{S,i})$ 和引理 3.5得出，这意味着 $\gamma_T \in F_{S,i}$，从而完成证明。 □

现在我们证明， $F_{S,i}$ 的定义方程可导出 $V_{S,i}$的定义方程。

命题 3.7. 设 $\{p_1, \ldots, p_r\} \subset \mathbb{C}[Y]$ 是 $F_{S,i}$的一组完整定义方程。则 $\mathbb{C}[X]$ 中的下列多项式组构成 $V_{S,i}$的一组完整定义方程:

$$\{x_{i,j} : j \in S\} \cup \bigcup_{j=1}^{\ell} I_2(X_{C_j \setminus S}) \ \cup \ \bigcup_{m=1}^{r} \{\, (p_m)_T : T \in \mathcal{T}(S) \,\}, \tag{3.1}$$

其中， $X_{C_j \setminus S}$ 表示 X 的子矩阵，其列由 $C_j \setminus S$索引； $I_2(X_{C_j \setminus S})$ 表示其2阶子式的集合。

证明。 令 $\mathcal{F}$ 表示式（3.1）中的多项式族，并设

$$\mathcal{F}_1 = \{x_{i,j} : j \in S\}, \qquad \mathcal{F}_2 = \bigcup_{j=1}^{\ell} I_2(X_{C_j \setminus S}), \qquad \mathcal{F}_3 = \bigcup_{m=1}^{r} \{\, (p_m)_T : T \in \mathcal{T}(S) \,\}.$$

我们旨在证明 $V(\mathcal{F}) = V_{S,i}$，其中 $V_{S,i} = U_{S,i}$。

步骤 1：($V_{S,i} \subseteq V(\mathcal{F})$) 为了证明这一包含关系，只需证明 $\mathcal{F} \subseteq I(U_{S,i})$。由于对于所有 $j \in S$ 和 $\gamma \in U_S$，$\gamma_j = 0$，我们得出 $\mathcal{F}_1 \subseteq I(U_{S,i})$。根据 V_Δ 的定义，我们有 $\bigcup_{j=1}^{\ell} I_2(X_{C_j}) \subseteq I(V_\Delta)$，这意味着 $\mathcal{F}_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\ell} I_2(X_{C_j}) \subseteq I(V_\Delta) \subseteq I(U_{S,i})$。此外，根据命题 3.6，每个 $(p_m)_T$ 都属于 $I(U_{S,i})$，因此 $\mathcal{F}_3 \subseteq I(U_{S,i})$ 也成立。因此，$\mathcal{F} \subseteq I(U_{S,i})$，由此得到 $V_{S,i} \subseteq V(\mathcal{F})$。

步骤 2： ($V(\mathcal{F}) \subseteq V_{S,\,i}$) 设 $\gamma \in V(\mathcal{F})$，我们将证明 $\gamma \in V_{S,\,i}$。由于 $\gamma \in V(\mathcal{F}_1)$，可知对所有 $j \in S$，都有 $\gamma_j = 0$。由于 $\gamma \in V(\mathcal{F}_2)$，对于每个 $j \in [\ell]$，集合 $\{\gamma_u \colon u \in C_j \setminus S\}$ 的秩至多为一。因此，存在一个 S-代表元 $T = \{t_1, \ldots, t_\ell\}$，使得对于每个 $j \in [\ell]$，所有向量 $\{\gamma_u \colon u \in C_j \setminus S\}$ 都是 γ_{t_j} 的数乘。

由于 $\gamma \in V(\mathcal{F}_3)$，对所有 $m \in [r]$，都有 $(p_m)_T(\gamma) = 0$，从而得到 $p_m(\gamma_T) = (p_m)_T(\gamma) = 0$。因此 $\gamma_T \in \overline{F_{S,i}}$，因为 $\{p_1, \ldots, p_r\}$ 是 $F_{S,i}$ 的完整定义方程组。由于 $F_{S,i}$ 是准仿射的，γ_T 属于其扎里斯基闭包，因此可以用 $F_{S,i}$ 中的一组向量任意逼近它。γ 中的每个向量都是 γ_T 中某个向量的数乘，因此在 $F_{S,i}$ 内对 γ_T 作微小扰动，会在 $U_{S,i}$ 内对 γ 产生相应的扰动。因此 $\gamma \in U_{S,i} = V_{S,i}$。证明至此完成。 □

利用这些结果，我们得到以下结论。

注 3.8. 根据定理 2.14 和 2.19、推论 2.21 和命题3.7，确定 V_Δ 的不可约分支及其维数和定义方程，可归结为分析相应簇 F_S 的相关性质，其中 S 遍历所有可容许子集。

例 3.9. 设 k、ℓ、t、d 和 S 与例 2.8 中相同。若 $\{p_1, \ldots, p_r\}$ 是 $F_{S,\,i}$ 的一组完整定义方程，则 $V_{S,\,i}$ 的一组完整定义方程为

$$\{x_{i,j} : j \in \{1,4,8,11,15,18\}\} \cup I_2(X_{2,3}) \cup I_2(X_{5,6}) \cup I_2(X_{7,9})$$
$$\cup\ I_2(X_{10,12}) \cup I_2(X_{13,14}) \cup I_2(X_{16,17}) \cup \bigcup_{m=1}^{r} \{\, (p_m)_T : T \in \mathcal{T}(S) \,\}.$$

3.2 构造 $I(F_S)$中的多项式

在本小节中，我们利用拟阵平坦交集产生的秩约束，构造 $I(F_S)$ 中的多项式。这些约束转化为适当子式的消失条件，从而得到关于 F_S 的显式方程。我们回顾拟阵的一条经典性质；参见 [24]。

引理 3.10. 设 M 是一个拟阵，且 F 和 G 是平坦，使得 $F \not\subseteq G$。那么 $F \cap G$ 也是一个平坦，并且满足 $\mathrm{rk}(F \cap G) < \mathrm{rk}(F)$。

现在我们引入一些额外的概念。

定义 3.11. 设 $\mathcal{F}$ 是 $[n]$ 的一个子集族。若存在元素 $F_1, \ldots, F_r \in \mathcal{F}$，使得：则称子集 $F \subset [n]$ 为一个 r-交集。

$$\bigcap_{i=1}^{j} F_i \not\subseteq F_{j+1} \text{ for every } j \leq r-1; \quad \text{and} \quad F = \bigcap_{i=1}^{r} F_i.$$

F对于每个 $r \geq 1$，我们用 $\mathcal{F}_r \subset 2^{[n]}$ 表示由以下集合构成的子集族：$\mathcal{F}_r = \{F \subset [n] \colon F \text{ 是一个 } r\text{-交集}\}$.

当 $\mathcal{F}$ 是一个固定秩拟阵的平坦族时，我们得到如下推论。

引理 3.12. 设 M 是定义在 $[n]$ 上的一个拟阵，且 $m \leq n$ 是一个固定的正整数。令 $\mathcal{F}$ 表示 M 中秩为 m 的平坦族。那么，对于任意 $F \in \mathcal{F}_r$，有 $\mathrm{rk}(F) \leq m - r + 1$.

证明。 该结论可通过连续应用引理 3.10得出。 □

我们利用前一个引理构造在 F_S 上为零的 $\mathbb{C}[Y]$ 中的多项式。

定义 3.13. 设 $S \subset [k\ell]$ 是可容许的，并设 $\mathcal{F}^S = \{S_1, \ldots, S_k\}$ 是$[\ell]$ 在定义 2.3中给出的子集族。对于 $r \geq 1$，用 $\mathcal{F}_r^S$表示 r-交集的集合 $\mathcal{F}^S$。

例3.14. 设 $k=3$、$\ell=8$、$d=t=4$ 和 $S=\{1,4,8,11,15,18\}$。在此情形下，

$$\mathcal{F}^S=\{S_1,S_2,S_3\}=\big\{\{3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,7,8\}\big\}.$$

由于 $S_1\cap S_2\cap S_3=\{7,8\}$ 和 $S_1\cap S_2\not\subseteq S_3$，$\{7,8\}$ 是一个 3-交，或等价地，$\{7,8\}\in\mathcal{F}_3^S$。

注意，根据 F_S的定义，对于任意 $\gamma=(\gamma_j:\ j\in[k\ell])\in F_S$，集合 $\mathcal{F}^S=\{S_1,\dots,S_\ell\}$ 包含于与 γ相关联的拟阵的秩为 $t-1$的平坦族中。这一观察促成了在 $I(F_S)$中构造多项式的方法。

命题3.15。令 Y_A 表示由 A索引列组成的 Y 的子矩阵，并令 $I_{t-r+1}(Y_A)$表示该子矩阵的所有（$t-r+1$）-子式的集合。则，对于每个 $r\in[t]$，有

$$\{I_{t-r+1}(Y_A):A\in\mathcal{F}_r^S\}\subset I(F_S),$$

证明。只需证明对于每个 $A\in\mathcal{F}_r^S$，$F_S\subset V(I_{t-r+1}(Y_A))$。令 $\gamma=(\gamma_j:\ j\in[k\ell])\in F_S$，并令 $\mathcal{N}_\gamma$ 为由 γ中的向量确定的、定义在 $[\ell]$上的拟阵。根据定义 2.15，$\mathcal{F}^S$ 中的每个元素都是 $\mathcal{N}_\gamma$中秩为 $t-1$ 的平坦。应用引理 3.12，我们得到对于每个 $A\in\mathcal{F}_r^S$，$\mathrm{rk}\{\gamma_a:\ a\in A\}\le t-r$。因此，$Y_A$ 的所有（$t-r+1$）-子式在 γ处均为零，从而得证。

□

例3.16。设 k、ℓ、d、t 和 S如例 3.14 中所述。由于 $\{7,8\}\in\mathcal{F}_3^S$，命题 3.15 推出$I_2(Y_{7,8})\subset I(F_S)$，也就是说，$Y$ 中由第 7 列和第 8 列构成的子矩阵的所有二阶子式在 F_S 上都为零。

我们还可以推导出一个确保 F_S 非空的必要条件。

引理3.17。如果 $\mathcal{F}_t^S\neq\emptyset$，那么 $F_S=\emptyset$。

证明。反设存在 $\gamma=(\gamma_1,\ .....,\ \gamma_\ell)\in F_S$。根据定义，对每个 $i\in[k]$，集合 S_i是拟阵 $\mathcal{N}_\gamma$中的一个秩为 $\mathcal{F}_t^S\neq\emptyset$，因此存在一个非空子集 $A\subset[n]$使得 $A\in\mathcal{F}_t^S$。应用引理 3.12，得到秩$(A)\le 0$。因此，A 中的每个元素都是 $\mathcal{N}_\gamma$中的环，这意味着 $\gamma_a=0$ 对所有 $a\in A$都成立，这与 γ 中的向量均非零的假设矛盾。

□

4 V_Δ 的不可约分解（针对 $k=2$）

本节中，我们在假设 $k=2$ 的条件下，确定 V_Δ 的不可约分支。我们注意到，对于 $k=2$，此前仅解决了特殊情形 $d=t$（见 [1]）；因此，本文给出的结果是对其的重大推广。我们的第一步是证明簇 F_S^j 的不可约性。

4.1 分解 F_S 簇（针对 $k=2$）

本小节中，我们关注 $k=2$ 的情形，并将每个 F_S 分解为一族准仿射子簇 F_S^i 的并，其中 S 为可容许子集，定义如下。

定义 4.1。定义 $[\ell]$的子集

$$A:=\{j\in[\ell]:\mathcal{Y}_{1,j}\notin S\}\quad\text{and}\quad B:=\{j\in[\ell]:\mathcal{Y}_{2,j}\notin S\},$$

其中 $\mathcal{Y}$ 表示式（1.2）中的矩阵。此外，令

$$u:=\ell-|A|=|S\cap R_1|\quad\text{and}\quad v:=\ell-|B|=|S\cap R_2|,$$

并且我们称 S 为 类型 (u,v)。对于每个 j，我们定义准仿射簇

$$F_S^j:=\big\{\gamma\in F_S:\dim\big(\mathrm{Span}\,\gamma_A\cap\mathrm{Span}\,\gamma_B\big)=j\big\},\quad\text{where }\gamma_A=\{\gamma_i:i\in A\}.$$

例 4.2。设 $\ell=10$、$t=5$、$d=6$ 和 $S=\{1,3,5,16,18,20\}$。在这种情况下，

$$A=\{4,5,6,7,8,9,10\},\qquad B=\{1,2,3,4,5,6,7\},\qquad u=v=3.$$

例如，准仿射簇 F_S^2 由满足以下条件的所有向量组 $\gamma=(\gamma_i:\ i\in[10])$ 构成：A 和 B 均为 N_γ中的秩为 4 的平坦，且

$$\dim(\mathrm{Span}\{\gamma_i:4\le i\le 10\}\ \cap\ \mathrm{Span}\{\gamma_i:1\le i\le 7\})=2.$$

于是，我们得到 F_S 作为准仿射簇 F_S^i之并的一个分解；这些簇原则上不一定不可约，也不一定是冗余的。

定理 4.3. 对于任意可容许子集 $\emptyset \neq S \subseteq [2\ell]$，我们有 $F_S = \cup_{j\in\mathcal{P}(S)} F_S^j$，其中

$$\mathcal{P}(S) = [x(S), t-2],$$
$$x(S) = \begin{cases} \max\{1, t-1-|A\setminus B|, t-1-|B\setminus A|, 2t-2-d\} & \text{if } A\cap B \neq \emptyset, \\ \max\{0, 2t-2-d\} & \text{if } A\cap B = \emptyset. \end{cases}$$

证明. 首先注意，对于所有 $\gamma \in F_S$，我们有

$$\begin{aligned} d \geq \mathrm{rk}(\gamma) &= \dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A) + \dim(\mathrm{Span}\,\gamma_B) - \dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A \cap \mathrm{Span}\,\gamma_B) \\ &= \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - \dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A \cap \mathrm{Span}\,\gamma_B) = 2t-2-\dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A \cap \mathrm{Span}\,\gamma_B), \end{aligned}$$

因此，$\dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A \cap \mathrm{Span}\,\gamma_B) \geq 2t-2-d$。此外，若 $A\cap B \neq \emptyset$，则有

$$t-1 = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}((A\setminus B)\cup(A\cap B)) \leq \mathrm{rk}(A\setminus B) + \mathrm{rk}(A\cap B) \leq |A\setminus B| + \mathrm{rk}(A\cap B),$$

因此，

$$\dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A \cap \mathrm{Span}\,\gamma_B) \geq \mathrm{rk}(\gamma_{A\cap B}) = \mathrm{rk}(A\cap B) \geq t-1-|A\setminus B|.$$

类似地，$\dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A \cap \mathrm{Span}\,\gamma_B) \geq t-1-|B\setminus A|$。因此，对于所有 $\gamma \in F_S$，我们有 $\dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A \cap \mathrm{Span}\,\gamma_B) \geq x(S)$。另一方面，

$$\dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A \cap \mathrm{Span}\,\gamma_B) \leq \dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A) - 1 = t-2,$$

否则，$\mathrm{Span}\,\gamma_A = \mathrm{Span}\,\gamma_B$。但由于 A 和 B 都是平坦，这意味着 $A=B$，或等价地，$S=\emptyset$。因此，对于所有 $\gamma \in F_S$，$\dim(\mathrm{Span}\,\gamma_A \cap \mathrm{Span}\,\gamma_B) \in \mathcal{P}(S)$。 □

例 4.4。设 ℓ，t，d，以及 S 如例 4.2所述。在此情形下，我们有 $x(S)=2$。因此，由定理 4.3可得分解 $F_S = F_S^2 \cup F_S^3$。

4.2 簇 F_S^j 的理想

在本小节中，我们给出簇 F_S^j 的一组完整定义方程。这些方程由不定元矩阵 $d \times \ell$ $(y_{i,\ j})$ 的子式给出。

定理 4.5. 对于任意可容许子集 $\emptyset \neq S \subseteq [2\ell]$ 以及任意 $j \in \mathcal{P}(S)$，我们有 $F_S^j = \overline{V}(I_{S,\ j})$，其中 re

$$I_{S,j} \coloneqq I_t(Y_A) + I_t(Y_B) + I_{j+1}(Y_{A\cap B}) + I_{2t-j-1}(Y).$$

证明。首先，注意到 $I_{S,\ j}$ 中的所有多项式在 F_S^j 中的矩阵上都必须为零，这是由定义可知的。因此，$\overline{F_S^j} \subseteq V(I_{S,\ j})$。

为证明另一个包含关系，取 $\gamma \in V(I_{S,j})$。对于每个 $\varepsilon > 0$，我们证明存在 $\gamma' \in B_\varepsilon(\gamma)$ 使得 $\gamma' \in F_S^j$。由于子式 $I_{j+1}(Y_{A\cap B})$ 在 γ 上为零，因此 $\mathrm{rk}(\gamma_{A\cap B}) = j_0$，其中 $j_0 \leq \min\{j, |A\cap B|\}$。因此，我们可以选取一个大小为 j_0 的基 $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathbb{R}^d$，使其张成空间 $\mathrm{Span}\,\gamma_{A\cap B}$，且对于某个系数矩阵 $N_2 \in \mathbb{R}^{j_0\times|A\cap B|}$，有 $\gamma_{A\cap B} = (\mathcal{B}_2)N_2$。现在定义 $a \coloneqq \mathrm{rk}(\gamma_A)$，并将 $\mathcal{B}_2$ 扩充为 γ_A 的一组基 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$，使得 $|\mathcal{B}_1| = a - j_0$ 且对于某些系数矩阵 $N_{11} \in \mathbb{R}^{(a-j_0)\times|A\setminus B|}$ 和 $N_{12} \in \mathbb{R}^{j_0\times|A\setminus B|}$，有 $\gamma_{A\setminus B} = (\mathcal{B}_1)N_{11} + (\mathcal{B}_2)N_{12}$。最后将 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 扩充为 γ 的一组基 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$。定义 $b \coloneqq \mathrm{rk}(\gamma_B)$。那么对于某个满足 $|C| = b - j_0 - |\mathcal{B}_3|$ 的 $C \subseteq \mathcal{B}_1$，$C \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ 是 $\mathrm{Span}(\gamma_B)$ 的一组基。我们考虑以下情形：

1. 假设 $0 \leq b - j - |\mathcal{B}_3|$。 由于 $j_0 \leq j$，我们可以选取 $C' \subseteq C$ 使得 $|C'| = b - j - |\mathcal{B}_3|$。那么存在系数矩阵 $N_{31} \in \mathbb{R}^{(j-j_0)\times|B\setminus A|}$，$N_{32} \in \mathbb{R}^{j_0\times|B\setminus A|}$，$N_{33} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{B}_3|\times|B\setminus A|}$ 和 $N_{34} \in \mathbb{R}^{(b-j-|\mathcal{B}_3|)\times|B\setminus A|}$，使得

$$\gamma_{B\setminus A} = \begin{pmatrix} C\setminus C' & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{31} \\ N_{32} \\ N_{33} \\ N_{34} \end{pmatrix}.$$

现在根据上述构造，$\gamma = M \cdot N$ 其中

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 0_{d\times(t-1-a)} & \mathcal{B}_1 \setminus C & C' & C \setminus C' & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 & C' & 0_{d\times(t-1-b)} \end{array} \right), \quad N = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline N_{11} & 0 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ N_{31} \end{matrix} \\ \hline N_{12} & N_2 & N_{32} \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} N_{33} \\ N_{34} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

注意，由于 $a = \mathrm{rk}(\gamma_A) \leq t-1$ 和 $b = \mathrm{rk}(\gamma_B) \leq t-1$，矩阵 M 是良定义的。定义$\ell_0 := \min\{j, |A \cap B|\}$。现在我们可以上移矩阵 N 中的第二条水平线，使第三个块中的行数等于 ℓ_0，然后移除第一条和第四条水平线。因此，不妨设 $\gamma = M \cdot N$ 使得

$$M \in \mathbb{R}^{d\times(2t-2-j)},\ N = \left(\begin{array}{c|c|c} K_{11} & 0 & \begin{matrix} 0 \\ K_{31} \end{matrix} \\ \hline K_{12} & K_2 & K_{32} \\ \hline 0 & 0 & K_{33} \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} \text{with } K_{11} \in \mathbb{R}^{(t-1-\ell_0)\times|A\setminus B|}, K_{12} \in \mathbb{R}^{\ell_0\times|A\setminus B|}, \\ K_2 \in \mathbb{R}^{\ell_0\times|A\cap B|}, K_{31} \in \mathbb{R}^{(j-\ell_0)\times|B\setminus A|}, \\ K_{32} \in \mathbb{R}^{\ell_0\times|B\setminus A|}, K_{33} \in \mathbb{R}^{(t-1-j)\times|B\setminus A|}. \end{array}$$

2. 假设 $b - j - |\mathcal{B}_3| < 0 \leq t - 1 - j - |\mathcal{B}_3|$。 在这种情况下，由于 $C \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_1$ 是 γ_B的一个基，因此存在系数矩阵 $N_{31} \in \mathbb{R}^{(b-j_0-|\mathcal{B}_3|)\times|B\setminus A|}$、$N_{32} \in \mathbb{R}^{j_0\times|B\setminus A|}$ 和 $N_{33} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{B}_3|\times B\setminus A}$ 使得

$$\gamma_{B\setminus A} = \begin{pmatrix} C & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{31} \\ N_{32} \\ N_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

因此，$\gamma = M \cdot N$ 使得

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0_{d\times(t-1-a)} & \mathcal{B}_1 \setminus C & C & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 & 0_{d\times(t-1-j-|\mathcal{B}_3|)} \end{array} \right), N = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline N_{11} & 0 & \begin{matrix} 0 \\ N_{31} \end{matrix} \\ \hline N_{12} & N_2 & N_{32} \\ \hline 0 & 0 & N_{33} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

矩阵 M 定义良好，因为 $a = \mathrm{rk}(\gamma_A) \leq t-1$。同样，我们将 N 中的第二条水平线上移，使第三个块中的行数等于 ℓ_0，然后移除第一条和第四条水平线。于是得到 $\gamma = M \cdot N$，其中

$$M \in \mathbb{R}^{d\times(2t-2-j)},\ N = \left(\begin{array}{c|c|c} K_{11} & 0 & \begin{matrix} 0 \\ K_{31} \end{matrix} \\ \hline K_{12} & K_2 & K_{32} \\ \hline 0 & 0 & K_{33} \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} \text{with } K_{11} \in \mathbb{R}^{(t-1-\ell_0)\times|A\setminus B|}, K_{12} \in \mathbb{R}^{\ell_0\times|A\setminus B|}, \\ K_2 \in \mathbb{R}^{\ell_0\times|A\cap B|}, K_{31} \in \mathbb{R}^{(j-\ell_0)\times|B\setminus A|}, \\ K_{32} \in \mathbb{R}^{\ell_0\times|B\setminus A|}, K_{33} \in \mathbb{R}^{(t-1-j)\times|B\setminus A|}. \end{array}$$

3. 假设 $t - 1 - j - |\mathcal{B}_3| < 0$。 在这种情况下，注意到（4.1）仍然成立。因此，$\gamma = M \cdot N$ 使得

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0_{d\times(2t-2-j-a-|\mathcal{B}_3|)} & \mathcal{B}_1 \setminus C & C & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{array} \right), N = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline N_{11} & 0 & \begin{matrix} 0 \\ N_{31} \end{matrix} \\ \hline N_{12} & N_2 & N_{32} \\ \hline 0 & 0 & N_{33} \end{array} \right).$$

矩阵 M是良定义的，因为 $a + |\mathcal{B}_3| = \mathrm{rk}(\gamma) \leq 2t - 2 - j$。现在我们将 N 中的第二条水平线向上移动，使得 N 中的第三个块有 ℓ_0 行。然后我们移除第一条水平线。因此，

我们得到 $\gamma = M \cdot N$，其中

$$M \in \mathbb{R}^{d\times(2t-2-j)},\ N = \left(\begin{array}{c|c|c} K_{11} & 0 & \begin{matrix}0\\K_{31}\end{matrix} \\ \hline K_{12} & K_2 & K_{32} \\ \hline \begin{matrix}K_{13}\\0\end{matrix} & 0 & K_{33} \end{array}\right) \text{ with } \begin{matrix} K_{11} \in \mathbb{R}^{(2t-2-j-\ell_0-|\mathcal{B}_3|)\times|A\setminus B|}, K_{12} \in \mathbb{R}^{\ell_0\times|A\setminus B|}, \\ K_{13} \in \mathbb{R}^{(-t+1+j+|\mathcal{B}_3|)\times|B\setminus A|}, K_2 \in \mathbb{R}^{\ell_0\times|A\cap B|}, \\ K_{31} \in \mathbb{R}^{(t-1-\ell_0-|\mathcal{B}_3|)\times|B\setminus A|}, K_{32} \in \mathbb{R}^{\ell_0\times|B\setminus A|}, \\ K_{33} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{B}_3|\times|B\setminus A|}. \end{matrix}$$

在所有情形下，对矩阵进行扰动，使得 M 变为满列秩矩阵 M'，而 $\begin{pmatrix}K_{11}\\K_{13}\end{pmatrix}$、$K_2$ 和 $\begin{pmatrix}K_{31}\\K_{33}\end{pmatrix}$ 分别变为满行秩矩阵 $\begin{pmatrix}K'_{11}\\K'_{13}\end{pmatrix}$、$K'_2$ 和 K'_{31}。这是可行的，因为 M 的列数大于或等于其行数，而其他矩阵的行数均大于或等于其列数。我们可以证明 $\gamma' = M' \cdot N' \in F_S^j$。

□

例 4.6. 考虑 ℓ，t，d，以及 S，如例 4.2中所示，并令 $Y = (y_{i,\ j})$ 为 6×10 变量矩阵。将定理4.5 应用于此情形，得到

$$I_{S,2} = I_5\big(Y_{4,5,6,7,8,9,10}\big) + I_5\big(Y_{1,2,3,4,5,6,7}\big) + I_3\big(Y_{4,5,6,7}\big), \tag{4.2}$$

and

$$I_{S,3} = I_5\big(Y_{4,5,6,7,8,9,10}\big) + I_5\big(Y_{1,2,3,4,5,6,7}\big) + I_4\big(Y_{4,5,6,7}\big) + I_6(Y), \tag{4.3}$$

其中 Y_A 表示 Y 的子矩阵，其列由 A索引。在生成$I_6(Y)$的 210 个 6 阶子式中，有 79 个同时也是 $I_{S,\ 3}$ 的极小生成元，这一点可通过 Macaulay2 计算验证。

4.3 簇 F_S^j 的不可约性

在这里，我们证明簇 F_S^j 的不可约性。证明思路是将 F_S^j 表示为一个不可约簇到其上的多项式映射的像，并证明其扎里斯基闭包与 F_S^j 重合。

定理 4.7. 对于每个可容许子集 $S \subset [2\ell]$ 以及每个 $j \in \mathcal{P}(S)$，簇 F_S^j 不可约 .

证明。 对于 $S \neq \emptyset$，令 $u := \ell - |A|$ 且 $v := \ell - |B|$。定义映射

$$\begin{aligned} &\varphi : \mathbb{C}^{d\times(2t-2-j)} \times \mathbb{C}^{(t-1)\times u} \times \mathbb{C}^{j\times(\ell-u-v)} \times \mathbb{C}^{(t-1)\times v} \to \mathbb{C}^{d\times\ell} \\ &(M, N_1, N_2, N_3) \mapsto \begin{pmatrix} M[1,t-1]\cdot N_1 & M[t-j,t-1]\cdot N_2 & M[t-j,2t-2-j]\cdot N_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

我们将证明 $\mathrm{Im}(\varphi) = \overline{F_S^j}$。由于 φ 的定义域是一个不可约簇，这将证明 F_S^j 不可约。事实上，考虑矩阵 $\gamma = \varphi(M, N_1, N_2, N_3)$。那么，$\gamma$ 的前 $\ell - v$ 列由 $M[1, t-1]$ 张成，而最后 $\ell - u$ 列按构造由 $M[t-j, 2t-2-j]$ 张成。这意味着 $\mathrm{rk}(\gamma_A) \le t-1$ 且 $\mathrm{rk}(\gamma_B) \le t-1$。因此，理想 $I_t(Y_A)$ 和 $I_t(Y_B)$ 必须在 γ 上消失。同理，按构造 $\mathrm{rk}(\gamma_{A\cap B}) \le j$。因此，理想 $I_{j+1}(Y_{A\cap B})$ 在 γ 上消失。此外，按构造，γ 的列由 M 的列张成；又由于 M 有 $2t-2-j$ 列，理想 $\overline{I_{2t-j-1}(Y)}$ 在 γ 上消失。由定理 4.5，我们得出 $\gamma \in F_S^j$。

对于另一个方向，考虑一个 $d \times \ell$矩阵 $\gamma \in F_S^j$。根据 F_S^j的定义，$\dim(\mathrm{Span}\ \gamma_A \cap \mathrm{Span}\ \gamma_B) = j$.因此，我们可以为 $\mathrm{Span}\ \gamma_A \cap \mathrm{Span}\ \gamma_B$选取一个大小为 j的基 $\mathcal{B}_2$。注意，$\mathrm{Span}\,\mathcal{B}_2 \supseteq \mathrm{Span}^{\gamma_{A\cap B}}$。另一方面，$A$ 是 $\mathcal{N}_\gamma$中秩为 $t-1$ 的平坦集。特别地，γ_A 中的向量张成一个秩为 $t-1$的空间，其中包含 $\mathrm{Span}\ \mathcal{B}_2$。因此，我们可以将 $\mathcal{B}_2$扩展为 $\mathrm{Span}\,\gamma_A$的一个基 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$。类似地，我们可以将 $\mathcal{B}_2$ 扩展为 $\mathrm{Span}\ \gamma_B$的一个基 $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$。因此，令

$$M := \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{pmatrix},$$

并选取 N_1, N_2, N_3 以包含适当的系数，我们得到 $\gamma = \varphi(M, N_1, N_2, N_3)$。因此，$F_S^j \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$. 取扎里斯基闭包，即得到所需结果。 □

Cor推论 4.8。 对于每个可容许子集 $S \subseteq [k\ell]$ 以及每个 $j \in \mathcal{P}(S)$，理想 $I_{S,\ j}$ 是素 $e.$

证明。 由 [29], 理想的规范生成集$I_{S,\,j}$ 根据定理4.5 是该理想的 Gröbner 基。特别地，$I_{S,\,j}$ 具有平方自由 Gröbner 基，因此是根基。另一方面，根据定理 4.5，$V\,(I_{S,\,j}) = F_S^j$。由于根据定理 4.7，F_S^j 是不可约的，我们得出 $I_{S,\,j}$ 是素的。 □

例 4.9. 在例 4.6的设定下，理想 $I_{S,\,2}$ 和$I_{S,\,3}$ 由 (4.2) 和 (4.3) 给出，且均为素理想。

4.4 确定极大簇 F_S^j

固定一个可容许子集 S，并考虑 F_S^j 在定理 F_S 4.3的分解中对应的簇 $j \in \mathcal{P}(S)$。若不存在满足 F_S^j 极大 的 $i \in \mathcal{P}(S)$，使得 $i \neq j$，则称 $F_S^j \subseteq F_S^i$。

下面的定理刻画了使 F_S^j 为极大的指标 $j \in \mathcal{P}(S)$。

定理 4.10. 设 $\emptyset \neq S \subseteq [k\ell]$ 是一个可容许子集，且 $j \in \mathcal{P}(S)$。那么，当且仅当以下条件成立时，F_S^j 是极大的

$$j \in \begin{cases} [x(S),\, |A \cap B|], & \text{if } x(S) \le |A \cap B| \le t-2, \\ [x(S),\, t-2], & \text{if } |A \cap B| > t-2, \\ \{x(S)\}, & \text{if } |A \cap B| < x(S). \end{cases} \tag{4.4}$$

证明。 设 $j = x(S)$ 或 $x(S) < j \le \min\{t-2, |A \cap B|\}$。我们证明 F_S^j 是极大的。反设存在某个 $i \in \mathcal{P}(S)$，使得 $F_S^j \subseteq F_S^i$ 且 $i \neq j$。一方面，对所有 $\gamma \in F_S^j$，有

$$\dim(\operatorname{Span}\gamma) = \dim(\operatorname{Span}\gamma_A) + \dim(\operatorname{Span}\gamma_B) - \dim(\operatorname{Span}\gamma_A \cap \operatorname{Span}\gamma_B) = 2t-2-j.$$

由于 $\gamma \in \overline{F_S^i} = V(I_{S,\,i})$，我们有 $\dim(\operatorname{Span}\ \gamma) \le 2t-2-i$。因此，$2t-2-j \le 2t-2-i$，这意味着 $i \le j$。这已经在 $j = x(S)$ 的情况下导出了矛盾，从而证明在这种情况下 F_S^j 是极大的。

另一方面，由于 $2t-2-j \le d$，我们可以选取 $2t-2-j$ 个线性无关向量$v_1, \ldots, v_{2t-2-j} \in \mathbb{R}^d$。考虑任意的满秩矩阵 $N_1 \in \mathbb{R}^{(t-1-j)\times u}$、$N_2 \in \mathbb{R}^{j\times(\ell-u-v)}$ 和 $N_3 \in \mathbb{R}^{(t-1-j)\times v}$，使得它们都没有 0 列。定义

$$\gamma := \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ v_1 & \cdots & v_{t-1-j} \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} N_1 \quad \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ v_{t-j} & \cdots & v_{t-1} \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} N_2 \quad \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ v_t & \cdots & v_{2t-2-j} \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} N_3 \in \mathbb{R}^{d\times\ell}.$$

由于 $j \ge x(S)$，我们有 $t-1-j \le |A \setminus B| = v$ 和 $t-1-j \le |B \setminus A| = u$。因此，$\operatorname{rk}(N_1) = \operatorname{rk}(N_3) = t-1-j$。于是，$\dim(\operatorname{Span}^{\gamma_{A\setminus B}}) = \dim(\operatorname{Span}^{\gamma_{B\setminus A}}) = t-1-j$。此外，$j \le |A \cap B| = \ell-u-v$，所以 $\operatorname{rk}(N_2) = j$。因此，$\dim(\operatorname{Span}\gamma_{A\cap B}) = j$。所以，$\gamma \in F_S^j$，且 $\dim(\operatorname{Span}\ \gamma_A \cap \operatorname{Span}\ \gamma_B) = \dim(\operatorname{Span}\ \gamma_{A\cap B}) = j$。现在，由于 $\gamma \in F_S^j$，我们有 $\gamma \in F_S^i$，因而 $\gamma \in V(I_{i+1}(Y_{A\cap B}))$。所以，$j = \dim(\operatorname{Span}\ \gamma_{A\cap B}) \le i$。因此，$j = i$，这与之矛盾，从而证明了 F_S^j 的极大性。

现在我们证明，对于具有 $j \neq x(S)$和 $j > |A \cap B|$的 $j \in \mathcal{P}(S)$，簇F_S^j 不是极大的。为此，我们证明，对于某个 $j \neq i \in \mathcal{P}(S)$，有$I_{S,\,i} \subseteq I_{S,\,j}$。特别地，若 $x(S) \le |A \cap B|$，则取$i = |A \cap B|$；若 $|A \cap B| < x(S)$，则取 $i = x(S)$。 □

例4.11. 参见例 4.2，可得 $x(S) = 2$ 且 $|A \cap B| = 4 > 3 = t-2$。根据定理4.10，F_S^j对于 $j \in \{2, 3\}$是极大的，且 $F_S = F_S^2 \cup F_S^3$是 F_S的无冗余不可约分解。

4.5 V_Δ的不可约分解

在本小节中，我们描述 V_Δ 对于 $k = 2$的不可约分解。我们首先给出可容许子集 $S \subset [2\ell]$对应的簇 F_S 和 V_S 的不可约分解。

命题 4.12. 设 $\emptyset \neq S \subset [2\ell]$ 是一个可容许子集。簇 F_S 具有无冗余不可约分解 $F_S = \bigcup_j F_S^j$，其中 j 遍历 (4.4)中指定的所有取值。

证明。 由定理 4.3可知，簇 F_S 分解为子簇 F_S^j 的并，其中 $j \in \mathcal{P}(S)$。定理 4.10指出，该分解中的极大簇对应于 j 在（4.4）中给出的取值，由此可得分解相等且无冗余。最后，由定理 4.7可知，每个分支都不可约。

□

推论 4.13. 设 $\emptyset \neq S \subset [2\ell]$ 是一个可容许子集。理想 $\mathbb{I}(F_S)$ 的初等分解为

$$\mathbb{I}(F_S) = \bigcap_j \big(I_t(Y_A) + I_t(Y_B) + I_{j+1}(Y_{A\cap B}) + I_{2t-j-1}(Y_{A\cup B})\big),$$

其中 j 遍历 (4.4) 中指定的所有取值。

证明。 该结论直接由命题4.12、定理 4.5和推论 4.8得出。 □

例 4.14. 考虑 t， ℓ， d和 S，如例 4.2所示。(F_S) 的初等分解为

$$\begin{aligned}\mathbb{I}(F_S) = &\Big(I_5\big(Y_{4,5,6,7,8,9,10}\big) + I_5\big(Y_{1,2,3,4,5,6,7}\big) + I_3\big(Y_{4,5,6,7}\big)\Big)\\ &\cap \Big(I_5\big(Y_{4,5,6,7,8,9,10}\big) + I_5\big(Y_{1,2,3,4,5,6,7}\big) + (\det(Y_{4,5,6,7})) + I_6(Y)\Big).\end{aligned}$$

现在我们着重确定 V_S 的不可约分支。

定义 4.15. 设 $\emptyset \neq S \subset [2\ell]$ 是一个可容许子集。根据定理 2.19建立的 F_S 的不可约分支与 U_S 的不可约分支之间的一一对应关系，我们定义

$$U_S^j := \psi\big((\mathbb{C}^*)^{|[k\ell]\setminus S|} \times F_S^j\big)$$

是 U_S 中与 F_S^j 对应的不可约分支，其中 ψ 表示在（2.3）中引入的映射。进一步，令 V_S^j 为 U_S^j的扎里斯基闭包。

现在，我们用不定元矩阵$X = (x_{i,\ j})$的子式来给出簇 V_S^j 的定义方程。对于子集 $D \subset [\ell]$，令 $D' := \bigcup_{j\in D}\{2j-1, 2j\}$.

命题 4.16。 设 $\emptyset \neq S \subseteq [2\ell]$ 是一个可容许子集，且 $j \in \mathcal{P}(S)$。则 $V_S^j = V(J_{S,\ j})$，其中

$$J_{S,j} := (x_{i,j} : j \in S) + \sum_{j=1}^{\ell} I_2(X_{C_j}) + I_t(X_{A'}) + I_t(X_{B'}) + I_{j+1}(X_{A'\cap B'}) + I_{2t-j-1}(X). \tag{4.5}$$

此外，理想 $J_{S,\ j}$ 是素理想。

证明。 根据定理 4.5，理想 $I_{S,\ j}$ 给出了 F_S^j 的完整定义方程组。此外，命题 3.7 说明了如何由 F_S^j的定义方程得到 V_S^j 的定义方程。在当前情形下应用这一结果，可得理想 $J_{S,\ j}$，因此 $V_S^j = V(J_{S,\ j})$。通过与推论 4.8中完全相同的论证，可得 $J_{S,\ j}$ 是素理想。

□

Pro命题 4.17. 设 $\emptyset \neq S \subset [2\ell]$ 是可容许的，并设 j 取遍 (4.4)中的各个值。它们 *en*

$$V_S = \bigcup_j V_S^j \quad \textit{and} \quad \mathbb{I}(V_S) = \bigcap_j J_{S,j}$$

给出一个不可约分解 V_S 以及 $\mathbb{I}$的初等分解(V_S)，分别 *y.*

证明。 不可约分解可由命题4.12以及 F_S 的不可约分支与 U_S 的不可约分支之间的对应关系得出，该对应关系已在定理 2.19中建立。关于 $\mathbb{I}(V_S)$的初等分解的描述则由定理4.16得出。

□

例4.18。 考虑 t, ℓ, d和 S，如例 4.2中所示。那么， $\mathbb{I}(V_S)$的初等分解为

$$\mathbb{I}(V_S) = \Big((x_{i,j} : j \in \{1,3,5,16,18,20\}) \ + \ I_2(X_{7,8}) + I_2(X_{9,10}) + I_2(X_{11,12}) + I_2(X_{13,14}) \\ + \ I_5(X_{7,\dots,20}) + \ I_5(X_{1,\dots,14}) + \ I_3(X_{7,\dots,14})\Big) \\ \cap \ \Big((x_{i,j} : j \in \{1,3,5,16,18,20\}) \ + \ I_2(X_{7,8}) + I_2(X_{9,10}) + I_2(X_{11,12}) + I_2(X_{13,14}) \\ + \ I_5(X_{7,\dots,20}) + \ I_5(X_{1,\dots,14}) + \ I_4(X_{7,\dots,14}) + \ I_6(X)\Big).$$

现在我们来到本节的主要结果，在假设 $k = 2$ 的条件下，建立 V_Δ 的无冗余不可约分解。

定理 4.19. 对于 $k = 2$，簇 V_Δ 具有如下无冗余不可约分解 :

$$V_\Delta = V_\emptyset \cup \bigcup_S \bigcup_j V(J_{S,j}),$$

其中，外层并遍历所有可容许子集 $\emptyset \neq S \subset [2\ell]$，而对于每个这样的 S，第二个并遍历 j 中指定的所有取值 (4.4)。理想$J_{S,\ j}$ 定义见 (4.5)。

证明。 该结果直接由定理2.14 和命题 4.17 得出。 □

例4.20。 设 $t = 4$ 和 $d = \ell = 5$。对于 $S \subset [10]$，若 $(|S \cap R_1|, \ |S \cap R_2|) = (u, \ v)$，则称 S 的类型为 类型 $(u, \ v)$。那么， S 是可容许的，当且仅当 $u, \ v \leq 2$，且没有任何列 C_j 包含于 S 中。因此，可容许的类型为

$$(0,0), \ (0,1), \ (0,2), \ (1,0), \ (2,0), \ (1,1), \ (1,2), \ (2,1), \ (2,2).$$

表 1 列出了 j 对每种可容许类型（u, v）的最大值，这些值由（4. 4).

type (u,v)	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
maximal values of j	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$

表1：使 F_S^j对于类型为（u, v）的可容许子集 S取最大值的 j值。

从表中可以看出，对于类型为（0，1）、（0，2）、（1，0）、（2，0）时， $F_S = \emptyset$；而对于类型为（1，1）、（1，2）、（2，1）、（2，2）时，非空且不可约。根据定理 4.19，的无冗余不可约分解为

$$V_\Delta \ = \ V_\emptyset \ \cup \bigcup_{\substack{S \text{ admissible} \\ \text{of type } (1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}} V_S.$$

最后请注意，固定类型（u, v）有 $\binom{5}{u}\binom{5-u}{v}$ 个可容许子集。因此，类型分别为（1，1）、（1，2）、（2，1）和（2，2）的子集数分别为20、30、30和30，而 V_Δ 恰好有111个不可约分支。

5 情形 $k = 2$ 下簇 F_S^j、 V_S^j 和 V_Δ 的维数

本节中，我们确定簇 V_Δ 及其不可约分支在情形$k = 2$下的维数。利用记号2.20中建立的对应关系，我们将 V_Δ 的分支维数与辅助簇 F_S的维数联系起来。我们首先计算簇 F_S^j 的维数，再将这些结果用于确定相应分支 V_S^j 及 V_Δ的维数。

The定理 5.1。 对于任意非空容许集 S 以及任意 $j \in \mathcal{P}(S)$， F_S^j 的维数为

$$\mathcal{D} \coloneqq d(2t-2-j) + (t-1)(u+v) + j(\ell-u-v) - (j^2 + 2(t-1-j)^2 + 2j(t-1-j)).$$

证明。首先，我们将通过证明参数空间上存在一个 $GL_j \times (GL_{t-1-j})^2 \times (\mathbb{C}^{j\times(t-1-j)})^2$ 的作用，且该作用保持像不变，来说明 F_S^j 的维数至多为 $\mathcal{D}$。我们将证明，对于任意一组参数 $(M,\ N_1,\ N_2,\ N_3)$，均有

$$\varphi(M,N_1,N_2,N_3)=\varphi\left(MC,\begin{pmatrix}R_1 & 0\\ Q_1 & P\end{pmatrix}^{-1}N_1,\quad P^{-1}N_2,\ \begin{pmatrix}P & Q_2\\ 0 & R_2\end{pmatrix}^{-1}N_3\right), \tag{5.1}$$

其中，对于某些 $P\in GL_j, R_1, R_2\in GL_{t-1-j}, Q_1, Q_2\in\mathbb{C}^{j\times(t-1-j)}$,

$$C=\begin{pmatrix}R_1 & 0_{(t-1-j)\times j} & 0_{(t-1-j)\times(t-1-j)}\\ Q_1 & P & Q_2\\ 0_{(t-1-j)\times(t-1-j)} & 0_{(t-1-j)\times j} & R_2\end{pmatrix}.$$

将矩阵 M 写作 $M=\begin{pmatrix}M_1 & M_2 & M_3\end{pmatrix}$，其中 $M_1, M_3\in\mathbb{C}^{d\times(t-1-j)}$ 且 $M_2\in\mathbb{C}^{d\times j}$。然后注意到 $(MC)[t-j,t-1]=M_2P$以及

$$(MC)[1,t-1]=\begin{pmatrix}M_1 & M_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_1 & 0\\ Q_1 & P\end{pmatrix}\text{ and }(MC)[t-j,2t-2-j]=\begin{pmatrix}M_2 & M_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & Q_2\\ 0 & R_2\end{pmatrix}.$$

因此，(5.1)成立，且 φ 的一般纤维维数至少为 $j^2+2(t-1-j)^2+2j(t-1-j)$.

现在，我们通过证明不存在更大的保持像不变的群作用于这些参数上，来说明这个上界可以达到。为此，假设对于两组参数 $\varphi(M,N_1,N_2,N_3)=\varphi(M',N_1',N_2',N_3')$，它们都在 φ的像中生成一个一般点。由于 M 和 M' 均为满秩矩阵，因此存在唯一的矩阵 $C\in GL_{2t-2-j}$使得 $MC=M'$。假设

$$C=\begin{pmatrix}R_1 & T_1 & T_2\\ Q_1 & P & Q_2\\ T_3 & T_4 & R_2\end{pmatrix},$$

其中 $P\in\mathbb{C}^{j\times j}$, $R_1, R_2\in\mathbb{C}^{(t-1-j)\times(t-1-j)}$, $Q_1, Q_2\in\mathbb{C}^{j\times(t-1-j)}$, $T_1, T_4\in\mathbb{C}^{(t-1-j)\times j}$, $T_2, T_3\in GL_{t-1-j}$。再次注意，我们可以将 $M=\begin{pmatrix}M_1 & M_2 & M_3\end{pmatrix}$ and $M'=\begin{pmatrix}M_1' & M_2' & M_3'\end{pmatrix}$ for $M_1, M_1', M_3, M_3'\in\mathbb{C}^{d\times(t-1-j)}$ and $M_2, M_2'\in\mathbb{C}^{d\times j}$ 写成，因此

$$M'=MC=\begin{pmatrix}M_1R_1+M_2Q_1+M_3T_3 & M_1T_1+M_2P+M_3T_4 & M_1T_2+M_2Q_2+M_3R_2\end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

现在不失一般性，对于某个 $W_1, W_1'\in\mathrm{GL}_{t-1}$ 和 $W_2, W_2'\in\mathbb{C}^{(d-t+1)\times(t-1)}$，重新写为

$$\begin{pmatrix}M_1 & M_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}W_1\\ W_2\end{pmatrix}\text{ and }\begin{pmatrix}M_1' & M_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}W_1'\\ W_2'\end{pmatrix}.$$

那么存在唯一的矩阵 $G\in\mathrm{GL}_{t-1}$，使得 $W_1G=W_1'$。现在，定义

$$N\coloneqq\begin{pmatrix}N_1 & 0_{(t-1-j)\times(\ell-u-v)}\\ & N_2\end{pmatrix},\quad N'\coloneqq\begin{pmatrix}N_1' & 0_{(t-1-j)\times(\ell-u-v)}\\ & N_2'\end{pmatrix}.$$

由于 $\begin{pmatrix}M_1 & M_2\end{pmatrix}N=\begin{pmatrix}M_1' & M_2'\end{pmatrix}N'$，我们有 $W_1N=W_1'N'$且 $W_2N=W_2'N'$。由第一个等式可得 $N=GN'$。由第二个等式，$W_2GN'=W_2'N'$。由于 S 是可容许的，我们有 $t-1\le\ell-v$，因此矩阵 N'有一个右逆。这意味着 $W_2G=W_2'$，因此$\begin{pmatrix}M_1 & M_2\end{pmatrix}G=\begin{pmatrix}M_1' & M_2'\end{pmatrix}$。将此与（5.2）结合，可得

$$\begin{pmatrix}M_1 & M_2\end{pmatrix}G=\begin{pmatrix}M_1R_1+M_2Q_1+M_3T_3 & M_1T_1+M_2P+M_3T_4\end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

由于（5.3）左边的每一列都是 M_1 和 M_2的线性组合，而（5.3）右边的每一列都是 M_1、M_2 和 M_3 的线性组合，因此可得 $T_3=0$和 $T_4=0$。接着注意，由（5.3），

$$\begin{pmatrix}M_1 & M_2\end{pmatrix}G=\begin{pmatrix}M_1 & M_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_1 & 0\\ Q_1 & P\end{pmatrix}.$$

现在，由于 $d\ge t-1$，矩阵 $\begin{pmatrix}M_1 & M_2\end{pmatrix}$ 有一个左逆，因此 $G=\begin{pmatrix}R_1 & 0\\ Q_1 & P\end{pmatrix}$，这迫使 $R_1\in\mathrm{GL}^{t-1-j}$ 和 $P\in\mathrm{GL}_j$。通过考察矩阵 $\begin{pmatrix}M_2 & M_3\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}M_2' & M_3'\end{pmatrix}$，可以类似地证明 $T_1=0$ 和 $T_2=0$。同理，$R_2\in\mathrm{GL}^{t-1-j}$，结论得证。 □

推论 5.2。 对于任意容许集 $\emptyset \neq S \subset [k\ell]$ 以及任意 $j \in \mathcal{P}(S)$， V_S^j 的维数为

$$d(2t-2-j)+(t-2)(u+v)+j(\ell-u-v)-(j^2+2(t-1-j)^2+2j(t-1-j))+\ell.$$

*P*明。 这由定理 5.1 和推论 2.21得出，从而有 $\dim V_S^j = \dim F_S^j + \ell - |S|$。 □

现在我们确定达到极大维数的簇 V_S^j 。

引理 5.3. 在所有簇 V_S^j 中，其中 $S \subset [kl]$ 是非空可容许子集，且 $j \in \mathcal{P}(S)$，最高维的簇出现在 S_0 满足 $u+v = \min\{2(\ell-t+1)\ \ell\}$ 且 $j_0 = x(S_0)$时。在这种情况下，

$$\dim V_{S_0}^{j_0} = \begin{cases} d\ell+2t-\ell-2 & \ell < 2t-2, \\ (t-1)(2d-2t+\ell+2) & \ell \geq 2t-2. \end{cases} \tag{5.4}$$

证明。 对于固定的参数 j,t,ℓ,d，我们有 $\dim(V_S^j) = (u+v)(t-2-j)+C(j,t,\ell,d)$，其中某个函数$C$。由于 $j \leq t-2$，维数在 $u+v$取最大值时达到最大，即 $u+v = \min\{2(\ell-t+1)\ \ell\}$。此外，对于任意非空可容许 S，有 $\mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(S_0)$，其中 S_0 是满足$u+v = \min\{2(\ell-t+1)\ \ell\}$的任意集合。直接计算可得

$$\dim(V_{S_0}^j) = j(2t-2-d-j+\ell-\min\{2(\ell-t+1),\ell\})+C'(t,\ell,d)$$

对于某个函数 C'。这是关于 j 的二次多项式，对其关于 j 求导，得到临界点

$$j = \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{(2t-2-d)}_{\leq x(S_0)} + \underbrace{(\ell-\min\{2(\ell-t+1),\ell\})}_{\leq x(S_0)}\Bigg),$$

根据定理 $x(S_0)$ 中 $x(S_0)$ 的定义，该值小于或等于 4.3。因此，维数极大的簇恰好是 $V_{S_0}^{j_0}$。通过逐案分析可得 $u+v$ 和 j_0的值。

$$\min\{2(\ell-t+1),\ell\} = \begin{cases} 2\ell-2t+2 & \ell < 2t-2 \leq d, \\ 2\ell-2t+2 & \ell \leq d < 2t-2, \\ \ell & d < 2t-2 \leq \ell, \\ 2\ell-2t+2 & d \leq \ell < 2t-2, \\ \ell & 2t-2 \leq d \leq \ell, \\ \ell & 2t-2 \leq \ell \leq d, \end{cases} \quad \text{and} \quad j_0 = \begin{cases} 2t-2-\ell & \ell < 2t-2 \leq d, \\ 2t-2-\ell & \ell \leq d < 2t-2, \\ 2t-2-d & d < 2t-2 \leq \ell, \\ 2t-2-d & d \leq \ell < 2t-2, \\ 0 & 2t-2 \leq d \leq \ell, \\ 0 & 2t-2 \leq \ell \leq d. \end{cases}$$

将这些值代入推论 $V_{S_0}^{j_0}$中的 dim 公式，得到 5.2 (5.4)。 □

定理 5.4。 V_Δ 的维数为

$$\begin{cases} \max\{d\ell+2t-\ell-2,\ (t-1)(d+\ell-t+1)+\ell\} & \ell < 2t-2, \\ \max\{(t-1)(2d-2t+\ell+2),\ (t-1)(d+\ell-t+1)+\ell\} & \ell \geq 2t-2. \end{cases}$$

证明。 V_Δ 的维数等于其不可约分支维数的最大值。根据引理 5.3，当 $t-1)(2d-2t+\ell+2)$ 时，最高维分支的维数为 $\ell \geq 2t-2$；否则为$d\ell+2t-\ell-2$。此外，根据定理 $V_\emptyset = (t-1)(d+\ell-t+1)+\ell$，有 [1, 5。1]。

□

例 5.5. 考虑 t， l， d如例 4.2所示。在这种情形下，我们有 $l = 10 \geq 8 = 2t-2$。因此，根据定理 5.4，我们有 $\dim(V_\Delta) = \max\{56,58\} = 58.$

注 5.6. 注意，差值的符号

$$\dim V_{S_0}^{j_0} - \dim V_\emptyset = \begin{cases} (d-t)(\ell-t)-\ell+d-1 & \ell \leq 2t-2, \\ (t-1)(d-t+1)-\ell & \ell \geq 2t-2. \end{cases} \tag{5.5}$$

决定了两种分量类型中哪一种具有极大维数。

这些结果将在下一节中用于计算 V_Δ 的次数。

6 通过格路径枚举计算 V_Δ 的次数

本节中，我们计算与理想 I_Δ （定义 1.1）相关的簇 V_Δ 在 $k=2$ 情形下的次数。利用第 5 节的维数分析，我们确定 V_Δ 中对其次数有贡献的不可约分支，并将 $\deg(V_\Delta)$ 的计算归结为分支 $V_\emptyset$ 的计算。§6.2 和 §6.3 中展开的关键观察是，$\deg(V_\emptyset)$ 具有纯粹的组合描述，可以表示为平面网格中互不相交格路族的加权计数。这将问题重新表述为 Lindstr¨om–Gessel–Viennot 类型的格路枚举问题。我们建立这一对应关系，并据此推导出显式的次数公式和生成函数。

6.1 归约为计算 $V_\emptyset$ 的次数

我们首先 回顾证明中所需的结果，以使本文内容自洽完整 .

命题 6.1。 以下陈述成立：

(i) 设 $I \subset \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ 为一个理想。则 $\deg(I) = \sum_{\mathfrak{p}} \deg(\mathfrak{p})$，其中求和遍历 I 的所有极小素理想 $\mathfrak{p}$，且这些极小素理想具有极大维数。*(ii)* 设 $I \subset \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ 和 $J \subset \mathbb{C}[y_1,\dots,y_m]$ 为理想，并记 I' 和 J' 为它们在 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ 中生成的理想。则 $\deg(I'+J') = \deg(I)\cdot\deg(J)$。*(iii)* [15, 定理 3.5] 设 $Y = (y_{i,j})_{d\times\ell}$ 为一个由变量构成的 $d\times\ell$ 矩阵，并设 $I_t(Y)$ 为由 Y 的 $t\times t$ 阶子式生成的理想。则

$$\deg(I_t(Y)) = \det\left[\binom{d+\ell-i-j}{d-i}\right]_{i,j=1,\dots,t-1}.$$

证明。 为了证明 (i)，我们利用以下事实：对于理想 I 的素理想分解，只有最高维分支会对 $\deg(I)$ [13, 命题 7。6] 有贡献。事实上，次数是希尔伯特多项式的首项系数，而希尔伯特多项式在正合列上具有可加性。因此，只需计算定理4.3 中分解所得最高维素理想分支的次数并将它们相加。

为了证明 (ii)，令 d_1 =维数 I' 以及 d_2 =维数 J'。由于 I' 和 J' 涉及互不相交的变量集，维数$(I'+J') = d_1+d_2$，且它们的希尔伯特级数 [22, 第 1] 相乘：

$$HS_{I'+J'}(z) = HS_{I'}(z)HS_{J'}(z) = \frac{P_{I'}(z)}{(1-z)^{d_1}}\cdot\frac{P_{J'}(z)}{(1-z)^{d_2}} = \frac{P_{I'}(z)P_{J'}(z)}{(1-z)^{d_1+d_2}}.$$

因此 $P_{I'+J'}(z) = P_{I'}(z)P_{J'}(z)$。对于任意标准分次 $\mathbb{C}$-代数 R ，若其维数为 d，可写作$HS_R(z) = P_R(z)/(1-z)^d$，其中 $P_R(z)$ 是一个系数为整数的多项式。由于 $(1-z)^{-d} = \sum_{q\ge0}\binom{q+d-1}{d-1}z^q$，因此对于足够大的 $q \gg 0$， R 的希尔伯特函数满足

$$h_R(q) = \frac{P_R(1)}{(d-1)!}\,q^{d-1} + \text{lower order terms}.$$

根据定义，希尔伯特多项式的首项系数给出 R 的次数（相差因子 $(d-1)!$），因此 $\deg(R) = P_R(1)$。于是 $\deg(I'+J') = P_{I'+J'}(1) = P_{I'}(1)P_{J'}(1) = \deg(I')\deg(J')$。

(iii) 的证明见 [15, 定理 3.5]。 □

下面的命题给出了 V_Δ 的次数与 $V_\emptyset$ 的次数之间的关系。

命题 6.2。 令 $\mathbb{1}_{a\ge b}$ 为 $a\ge b$ 的示性函数，即当 $a\ge b$ 时 $\mathbb{1}_{a\ge b}=1$，否则为0。*Let*

$$\alpha := \sum_{u=t-1}^{\ell-t+1}\binom{\ell}{u}\det\left[\binom{d+u-i-j}{d-i}\right]_{i,j\in[t-1]}\cdot\det\left[\binom{d+\ell-u-i-j}{d-i}\right]_{i,j\in[t-1]},\quad \beta := \binom{\ell}{t-1}\binom{t-1}{2t-2-\ell}d^{2t-2-\ell}.$$

Then

(i) 如果 $\ell > 2t-2$， V_Δ 的次数为 $\alpha\cdot\mathbb{1}_{(t-1)(d-t+1)\ge\ell} + \deg(V_\emptyset)\cdot\mathbb{1}_{(t-1)(d-t+1)\le\ell}$，(ii) 并且如果 $\ell \le 2t-2$， V_Δ 的次数为 $\beta\cdot\mathbb{1}_{(d-t)(\ell-t)+d-1\ge\ell} + \deg(V_\emptyset)\cdot\mathbb{1}_{(d-t)(\ell-t)+d-1\le\ell}$.

证明。 我们将证明分成几种情况。在所有情况下，我们都会用到命题 6.1 (i)。

情形 1. 假设 $\ell > 2t-2$ 且 $(t-1)(d-t+1) < \ell$，或者 $\ell < 2t-2$且 $(d-t)(\ell-t)+d-1-\ell < 0$。那么由 (5.5)，$V_\emptyset$ 是 V_Δ的唯一最高维分支，因此 $\deg(V_\Delta) = \deg(V_\emptyset)$。

情形 2. 假设 $\ell > 2t-2$ 且 $(t-1)(d-t+1) \geq \ell$。由 (5.5) 和引理 5.3， V_Δ 的最高维分支是 V_S^0所对应的簇，其中 S 满足 $u+v=\ell$。对于这样的 S，定义理想为

$$J_{S,0} = \langle x_{i,j} : j \in S, i \in [d] \rangle + I_t(X_{A'}) + I_t(X_{B'}),$$

其中

$$A' = \bigcup_{j\in A} \{2j-1, 2j\}, \qquad B' = \bigcup_{j\in B} \{2j-1, 2j\}.$$

矩阵 $X_{A'}$ 和 $X_{B'}$ 的大小分别为 $d \times u$ 和 $d \times (\ell - u)$。由命题 6.1 (iii),

$$\deg(I_t(X_{A'})) = \det\Big[\tbinom{d+u-i-j}{d-i}\Big]_{i,j=1}^{t-1}, \qquad \deg(I_t(X_{B'})) = \det\Big[\tbinom{d+\ell-u-i-j}{d-i}\Big]_{i,j=1}^{t-1}.$$

由于 $A \amalg B = [\ell]$，理想 $I_t(X_{A'})$ 和 $I_t(X_{B'})$ 涉及互不相交的变量集。因此，根据命题 6.1 (ii),

$$\deg(V_S^0) = \det\Big[\tbinom{d+u-i-j}{d-i}\Big]_{i,j=1}^{t-1} \cdot \det\Big[\tbinom{d+\ell-u-i-j}{d-i}\Big]_{i,j=1}^{t-1}.$$

可容许性条件要求 $u,\ v \leq \ell - t + 1$，利用 $u+v=\ell$ 可知，这等价于$t-1 \leq u \leq \ell - t + 1$。对于每个这样的数对 $(u,\ v)$，恰有 $\binom{\ell}{u}$ 个可容许子集 S 满足 $(\ell - |A|,\ \ell - |B|) = (u,\ v)$。因此， V_Δ 的次数可通过对其所有最高维分支的次数求和得到，从而得出 α的表达式。

情形 3。 假设 $\ell \geq 2t-2$ 且 $(t-1)(d-t+1) = \ell$。在这种情况下， V_Δ 的最高维分支包括情形 2 中所述的分支，以及其自身。因此，$\deg(V_\Delta) = \alpha + \deg(V_\emptyset)$。

情形 5。 假设 $\ell < 2t-2$ 且 $(d-t)\ (\ell-t)\ + d - 1 - \ell > 0$。由（5.5）和引理 5.3可知， V_Δ 的最高维分支是簇 $V_S^{2t-2-\ell}$，它们对应于满足 S 的可容许子集$u = v = \ell - t + 1$。对于每个这样的 S，其定义理想 $J_{S,\ 2t-2-\ell}$ 由（4.5）给出：

$$J_{S_0,j_0} = \big\langle x_{i,j} : j \in S,\ i \in [d] \big\rangle + \sum_{u \in A\cap B} I_2(X_{C_u}). \tag{6.1}$$

由于（6.1）中的所有理想都涉及互不相交的变量集，命题 6.1 (ii) 表明 th at

$$\deg(J_{S,\,2t-2-\ell}) = \prod_{u\in A\cap B} \deg\big(I_2(X_{C_u})\big).$$

每个 X_{C_u}都是一个 $d \times 2$变量矩阵，因此由命题 6.1(iii)，有 $\deg(I_2(X_{C_u})) = d$。此外，$|A\cap B| = 2t-2-\ell$，且恰有 $\binom{\ell}{t-1}\binom{t-1}{2t-2-\ell}$ 个可容许子集 S满足 $u = v = \ell - t + 1$。因此，$\deg V_\Delta$ 可通过将其最高维分支的次数相加得到，即 β。

情形 6。 假设 $\ell < 2t-2$ 且 $(d-t)(\ell-t)\ + d - 1 - \ell = 0$。在这种情况下， V_Δ 的顶维分支是情形 5 中所描述的那些分支，以及 $V_\emptyset$ 本身。因此，$\deg(V_\Delta) = \beta + \deg(V_\emptyset)$。 □

接下来，我们将采用组合方法来计算 $\deg(V_\emptyset)$。对于 $d = t$，这将得到一个显式公式；而在一般情况下，该问题则表述为不相交格路径的计数问题。

6.2 计算 $V_\emptyset$ 次数的组合方法

下面，我们介绍一种计算 $\deg V_\emptyset$ 的组合方法。论证分为三个步骤：

(i) 将问题重新表述为在 $[d] \times [2\ell]$ 上的某个超图中计数极小横截集；(ii) 将其化归为在 $[d] \times [\ell]$ 上的一个更小超图中计数极小横截集；

(iii) 在一般情形下，将结果解释为不相交格路径的计数。

我们先固定记号：

$$X = (x_{ij})_{d\times 2\ell}, \qquad Y = (y_{ij})_{d\times \ell}.$$

在本节中，我们将 X 视为集合 $[d]\times[2\ell]$，并将 Y 视为 $[d]\times[\ell]$。现在分别在这些集合上定义超图 $\mathcal{A}_t$、$\mathcal{B}_t$ 和 $\mathcal{C}_t$。

- $\mathcal{A}_t \subset 2^{[d]\times[\ell]}$ 是 Y 的 $t\times t$ 子矩阵的对角线的集合；
- $\mathcal{B}_t \subset 2^{[d]\times[2\ell]}$ 是 X 的 $t\times t$ 子矩阵的对角线的集合，其中对于所有 $i\in[\ell]$，其列至多包含来自每一对 $\{2i-1,2i\}$ 中的一个索引。
- $\mathcal{C}_t \subset 2^{[d]\times[2\ell]}$ 是 X 的 2×2 子矩阵的对角线的集合，其中其列由某个 $j\in[\ell]$ 所对应的形如 $\{2j-1,2j\}$ 的成对索引标记。

更确切地说，

$$\mathcal{A}_t = \Big\{\{x_{i_1,j_1},\dots,x_{i_t,j_t}\} \;\Big|\; 1\le i_1<\cdots<i_t\le d,\ 1\le j_1<\cdots<j_t\le \ell\Big\}, \tag{6.2}$$

$$\mathcal{B}_t = \Big\{\{x_{i_1,j_1},\dots,x_{i_t,j_t}\} \;\Big|\; \begin{array}{l} 1\le i_1<\cdots<i_t\le d,\ 1\le j_1<\cdots<j_t\le 2\ell,\\ |\{j_1,\dots,j_t\}\cap\{2i-1,2i\}|\le 1 \text{ for all } i\end{array}\Big\}, \tag{6.3}$$

$$\mathcal{C}_t = \Big\{\{\{x_{i,2j-1},x_{i',2j}\} : 1\le i<i'\le d, j\in[\ell]\}\Big\}, \tag{6.4}$$

为简洁起见，设

$$\mathcal{B} \coloneqq \mathcal{B}_t\cup\mathcal{C}_t. \tag{6.5}$$

步骤 1。 令 $J_\emptyset$ 表示 $V_\emptyset$的理想。回顾一下，$J_\emptyset = I_t(X)+\sum_{j=1}^{\ell} I_2(X_{C_j})$。

我们的第一个目标是将计算 $J_\emptyset$ 次数的问题改写为纯粹的组合术语。具体而言，我们将把它归结为对集合$[d]\times[2\ell]$上的某个超图的极小横截集进行计数。为此，我们首先给出以下命题，该命题用相关超图的极小横截集来表示平方自由单项式理想的次数。

为方便起见，给定一个子集 $\sigma\subset[n]$，记作 $x^\sigma=\prod_{i\in\sigma}x_i$.

回顾一下，如果对于每个 $e\in\Delta$都有$A\cap e\neq\emptyset$，则称子集 $A\subset[n]$ 是子集族（或超图） $\Delta\subset 2^{[n]}$ 的横截集。如果一个横截集不包含大小严格更小的横截集，则称其为极小 横截集。我们用 $\mathcal{T}(\Delta)$表示 Δ的所有横截集组成的子集族，并用 $\min(\Delta)$表示其中的极小横截集集合。

命题 6.3. 设 $I\subset\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ 是由 $\{x^{\sigma_1},\dots,x^{\sigma_k}\}$ 极小生成的平方自由单项式理想，其中 $\{\sigma_1,\dots,\sigma_k\}\subset 2^{[n]}$。则：

(i) I 的极小素理想与超图 $\{\sigma_1,\dots,\sigma_k\}$ 关于包含关系极小的横截集一一对应。与极小横截集 A 对应的极小素理想为

$$\mathfrak{m}^A = (x_i : i\in A).$$

(ii) R/I 的 *Krull*维数等于

$$\min\{|A| : A \textit{ is a minimal transversal of } \{\sigma_1,\dots,\sigma_k\}\}.$$

(iii) I 的次数等于

$$|\{A\subset[n] : A \textit{ is a transversal of } \{\sigma_1,\dots,\sigma_k\} \textit{ of minimum size}\}|.$$

(iv) 若 I 是 *Cohen–Macaulay*，则所有极小横截集的大小相同，因此

$$\deg(I) = |\{A\subset[n] : A \textit{ is a minimal transversal of } \{\sigma_1,\dots,\sigma_k\}\}|.$$

证明。我们只证明 (i)，因为其余结论可由此立即推出。单项式理想 I 对应的 Stanley–Reisner 复形为 $\Delta = \{\tau \subset [n] : x^\tau \notin I\}$，见 [23, 第 1] 章。根据 [23,定理 1.7]，I 的极小素理想与 Δ 的极大面一一对应。与极大面 $\tau \in \Delta$ 对应的极小素理想为 $\mathfrak{m}^\tau = (x_i : i \in \tau^c)$，其中 τ^c 表示 τ 的补集。因此，只需证明 $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ 的极小横截集恰好是这些集合：$\{\tau^c$ 是 $\Delta\}$. 的极大面

我们首先验证，$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ 的横截集恰好是集合 $\{\tau^c : \tau \in \Delta\}$. 子集 $A \subset [n]$ 是 $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ 的横截集，当且仅当 $A \cap \sigma_i \neq \emptyset$ 对所有 i 都成立；等价地，$\sigma_i \not\subseteq A^c$ 对所有 i 都成立，或者 $x^{\sigma_i} \nmid x^{A^c}$ 对所有 i 都成立。由于 $I = (x^{\sigma_1}, \ldots\ldots, x^{\sigma_k})$，这恰好在 $x^{A^c} \notin I$ 时成立；根据定义，这意味着 $A^c \in \Delta$。因此，A 是 $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ 的横截集，当且仅当 A^c 是 Δ 的面。极小横截集恰好对应于 Δ 的极大面的补集，证明完毕。□

现在我们将这一结果应用于当前情形。

命题 6.4。 $V_\emptyset$ 的次数等于 $\mathcal{B}$ 的极小横截集的数量。

证明。理想 $J_\emptyset$ 由 X 在列 $2i-1, i$ 上的子矩阵 $X_{\{2i-1,2i\}}$ 的所有二阶子式，以及 X 的所有 t 阶子式生成，其中 $i \in [\ell]$。考虑对角项序

$$x_{11} \prec x_{21} \prec \cdots \prec x_{d1} \prec x_{12} \prec x_{22} \prec \cdots \prec x_{d,2\ell}.$$

根据 [29]，，关于此序的 $J_\emptyset$ 的 Gr¨obner 基由对应于对角线的单项式给出，即

$$\begin{aligned} &\langle x_{i,2j-1}x_{i',2j} : 1 \le i < i' \le d,\ j \in [\ell] \rangle \\ &\qquad + \langle x_{i_1,j_1} \cdots x_{i_t,j_t} : 1 \le i_1 < \cdots < i_t \le d,\ 1 \le j_1 < \cdots < j_t \le 2\ell \rangle. \end{aligned} \tag{6.6}$$

因此，初始理想 $\mathrm{in}_\prec J_\emptyset$ 由这些单项式生成。尽管 $J_\emptyset$ 本身不是平方自由的，但取初始理想时次数保持不变：

$$\deg(J_\emptyset) = \deg(\mathrm{in}_\prec J_\emptyset). \tag{6.7}$$

由于 $\mathrm{in}_\prec J_\emptyset$ 是平方自由的，命题 6.3 适用。根据描述（6.6），相应的超图为 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_t \cup \mathcal{C}_t$，定义在 $[d] \times [2\ell]$ 上，其中 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}_t$ 和 $\mathcal{C}_t$ 分别在（6.5）、（6.3）和（6.4）中定义。于是，根据命题 6.3(iii) 和 (6.7)，

$$\deg(J_\emptyset) = \text{number of transversals of minimum size of } \mathcal{B}.$$

此外，由于 $J_\emptyset$（因此在 $\prec J_\emptyset$ 中）是 Cohen–Macaulay，根据命题 6.3(iv)，所有极小横截集的大小都相同。因此，$J_\emptyset$ 的次数等于 $\mathcal{B}$ 的极小横截集数量。 □

步骤 2。 第二步将计算 $\deg V_\emptyset$ 转化为对超图 $\mathcal{A}_t$ 上某些极小横截集的计数，该超图定义在 $[d] \times [\ell]$ 上，见（6.2）。我们将说明，如何利用 $\mathcal{A}_t$ 在矩阵 Y 中对应的极小横截集，找出 $\mathcal{B}$ 在 X 中的极小横截集。为此，我们引入一个映射，将 X 的每个子集对应到 Y 的一个相应元素子集。

定义 6.5。 定义映射 $\pi : 2^{[d]\times[2l]} \to 2^{[d]\times[\ell]}$，其定义如下：

$$\pi(A) = \{(i,j) \in [d] \times [\ell] : (i, 2j-1), (i, 2j) \in A\}.$$

也就是说，π 将每个子集 $A \subset [d] \times [2l]$ 映射为索引集合 (i, j)，其中两个元素 $(i, 2j-1)$ 和 $(i, 2j)$ 均属于 A。

现在我们来描述映射 π 如何将 $\mathcal{B}_t$ 的横截集与 $\mathcal{A}_t$ 的横截集联系起来。

引理 6.6。 子集 $A \subset [d] \times [2\ell]$ 是 $\mathcal{B}_t$ 的横截集，当且仅当 $\pi(A)$ 是 $\mathcal{A}_t$ 的横截集。

证明。 首先假设 $\pi(A)$ 是 $\mathcal{A}_t$ 的一个横截集。我们断言，A 于是是 $\mathcal{B}_t$ 的一个横截集。考虑任意满足 ($\{x_{i_1,j_1}, \ldots, x_{i_t,j_t}\} \in \mathcal{B}_t$ 6.3) 的元素。我们需要证明

$$A \cap \{x_{i_1,j_1}, \ldots, x_{i_t,j_t}\} \neq \emptyset. \tag{6.8}$$

由于 $\pi(A)$ 是 $\mathcal{A}_t$ 的一个横截集，因此有 $\pi(A)\cap\{y_{i_1,\lceil j_1/2\rceil},\dots,y_{i_t,\lceil j_t/2\rceil}\}\neq\emptyset$. 于是，对于某个 $k\in[t]$，元素 $y_{i_k,\lceil j_k/2\rceil}\in\pi(A)$。根据 π 的定义，这意味着 $x_{i_k,2\lceil j_k/2\rceil-1}, x_{i_k,2\lceil j_k/2\rceil}\in A$，特别是$x_{i_k,j_k}\in A$，从而证明了 (6.8)。反过来，假设 A 是 $\mathcal{B}_t$ 的一个横截集。令 $\{y_{i_1,j_1},\dots,y_{i_t,j_t}\}$ 为 $\mathcal{A}_t$中的任意元素。我们必须证明

$$\pi(A)\cap\{y_{i_1,j_1},\dots,y_{i_t,j_t}\}\neq\emptyset. \tag{6.9}$$

反设交集为空，因此对所有 $k\in[t]$，$y_{i_k,\ j_k}\notin\pi(A)$。根据 π 的定义，这意味着对于每个 k，$x_{i_k,\ 2j_k-1}$ 或 $x_{i_k,\ 2j_k}$ 至少有一个不属于 A。设 $r_k\in\{2j_k-1,2j_k\}$ 满足 $x_{i_k,\ r_k}\notin A$。那么

$$1\le i_1<\cdots<i_t\le d,\quad 1\le r_1<\cdots<r_t\le 2\ell,\quad |\{r_1,\dots,r_t\}\cap\{2i-1,2i\}|\le 1.$$

因此 $\{x_{i_1,r_1},\dots,x_{i_t,r_t}\}\in\mathcal{B}_t$。但根据构造，该集合与 A 不相交，这与 A 是 $\mathcal{B}_t$ 的横截集相矛盾。这个矛盾证明了（6.9），并完成了证明。 □

回顾一下，我们用 $\mathcal{T}(\Delta)$ 表示子集族 Δ 的横截集所组成的集合。现在，我们为 $\mathcal{A}_t$ 的每个横截集 A 指定一个由 $\mathcal{B}$ 的横截集组成的子集族。

定义 6.7。设 A 是 $\mathcal{A}_t$ 的一个横截集，并令

$$A'=\{(i,j)\in[d]\times[2\ell]:(i,\lceil j/2\rceil)\in A\}. \tag{6.10}$$

根据构造，$\pi(A')=A$。我们定义 $\rho(A)=\min\{B\in\mathcal{T}(\mathcal{B}):A'\subset B\}$，其中 min 指包含关系意义下极小的子集。对于每个 i，令 Y_i 表示 Y 的第 i 列，并设 $m_i=|A\cap Y_i|$. 。接着我们令

$$m(A)=\prod_{i=1}^{\ell}(d-m_i).$$

引理 6.8。对于 $\mathcal{A}_t$ 的每个横截集 A，都有 $|\rho(A)|=m(A)=\prod_{i=1}^{\ell}(d-m_i)$。

证明。设 $B\subset[d]\times[2\ell]$ 是包含 A' 的任意子集。由于 $\pi(A')=A$，且 A 是 $\mathcal{A}_t$ 的一个横截集，引理 6.6 推出 B 是 $\mathcal{B}_t$ 的一个横截集。因此，要使 B 成为 $\mathcal{B}$ 的横截集，还需横截所有二阶子式。注意，在 X 的每个列块 $\{X_{2i-1},X_{2i}\}$ 中，恰有 m_i 行已被 A' 覆盖。因此，剩下 $(d-m_i)$ 行，其对应的 2×2 子式必须与之相交。对于固定的 i，有且仅有 $d-m_i$ 种极小方式可实现这一点。对所有 i 相乘，得到 $|\rho(A)|=\prod_{i=1}^{\ell}(d-m_i)$，证毕。 □

下一个命题给出了 $\mathcal{A}_t$ 的横截集与 $\mathcal{B}$的横截集之间所声称的联系。回顾一下，min(Δ)表示超图 Δ的极小横截集所组成的集合。

命题 6.9. 我们有等式 $\min(\mathcal{B})=\bigcup_{A\in\min(\mathcal{A}_t)}\rho(A)$。

证明。我们先证明包含关系“⊇”。设 $B\in\rho(A)$，其中某个 $A\in\min(\mathcal{A}_t)$，并假设为了导出矛盾，B 不是 $\mathcal{B}$的极小横截集。那么存在一个真子集 $B\subsetneq B$，它~是 $\mathcal{B}$的横截集。根据构造，我们有 $\pi(B)\subseteq\pi(B)=\pi(A')=A$，其中 A' 在 (6.10) 中定义。~ ~ ~由于 B 是 $\mathcal{B}$的横截集，引理 6.6 表明，$\pi(B)$ 是 $\mathcal{A}_t$的横截集。因为 $\pi(B)\subseteq A$ 且~ ~$A\in\min(\mathcal{A}_t)$，所以 $\pi(B)=A$，从而 $A'\subseteq B$。但根据定义，B 是~中包含 A'的横截集里的包含极小者，这与 B的存在相矛盾。

现在我们来证明反向的包含关系。设 $B\in\min(\mathcal{B})$。由引理6.6，我们知道 $\pi(B)$ 是 $\mathcal{A}_t$的一个横截集。因此，存在一个极小横截集 $A\in\min(\mathcal{A}_t)$，使得 $A\subseteq\pi(B)$。这意味着$A'\subseteq B$，其中 A' 的定义与式（6.10）相同。由于 B 是 $\mathcal{B}$中包含 A'的横截集里包含极小的一个，因此 $B\in\rho(A$。由此得到所需的包含关系。 □

这一　　因此可直接得到所需的计数。回顾一下，对于所有 $i\in[\ell$，Y_i 表示 Y 的第 i列　　].

定理 6.10。 $V_\emptyset$ 的次数等于

$$\sum_{A\in\min(\mathcal{A}_t)}\prod_{i=1}^{\ell}(d-|A\cap Y_i|).$$

证明。 根据命题 6.4，只需证明 $|\min(\mathcal{B})| = \sum_{A\in\min(\mathcal{A}_t)} m(A)$。 根据命题 6.9和引理 6.8，每个 $\rho(A)$ 恰好贡献 $m(A)$ 个元素。此外，对于不同的 $A \in \min(\mathcal{A}_t$，各族 $\rho(A)$ 两两不相交。对所有这类 A 求和，即得所述公式。 □

步骤 3。 第三步也是最后一步，是将 $V_\emptyset$ 的次数公式重新解释为对某些不相交格路径在 Y 上的计数，其中这些路径定义于 [15]。

沿用 [15], 中的记号，令 $a_i = i$ 和 $b_j = j$ 对所有 i，$j \le t-1$ 成立。这相当于考虑 t 个 $d\times\ell$ 矩阵 Y的子式。

定义 6.11。 矩阵 Y 上的一条西-南（WS）路径是由变量组成的序列 $(y_{i_1,\ j_1},\ \ldots,\ y_{i_m,\ j_m})$，满足对所有 $s\in\{2,\ldots,m\}$，均有 $(i_s - i_{s-1},\ j_s - j_{s-1}) \in \{(1,\ 0),\ (0,\ -1)\}$。 Y 上的一个不相交路径族是由 $t-1$ 条 WS 路径组成的集合，其中第 i 条路径从 $y_{i,\ \ell}$ 出发并终止于 $y_{d,\ i}$，且任意两条路径都不共用一个元素。

若 $(i_s - i_{s-1}, j_s - j_{s-1}) = (1,0)$，则称 $(y_{i_{s-1}}, y_{j_{s-1}})$ 为一个南向位置。任意 WS 路径 P均由其南向位置集合确定。

引理 6.12. 固定 $\mathcal{A}_t$ 的一个极小横截集 $\mathcal{T}$。考虑 $Y\setminus\mathcal{T}$ 中的一族 *WS* 路径 $P_1,\ldots P_{t-1}$，满足$(\cup_i P_i)\cup\mathcal{T} = Y$。令 Y_{P_i} 表示从 Y 中移除路径 P_i 上、其左侧及上方的元素后得到的子网格。那么对于所有点 $y_{(i_s,j_s)} \in Y_{P_i}$,

(i) 若对于所有满足 $j_q < j_s$ 的点 $y_{(i_s,j_q)} \in Y_P$，都有 $y_{(i_s,j_q)}\in\mathcal{T}$，且 $y_{(i_s+1,j_s)}\in\mathcal{T}$，则 $y_{(i_s,j_s)}\in\mathcal{T}$;
(ii) 若对于所有满足 $i_q < i_s$ 的点 $y_{(i_q,j_s)} \in Y_P$，都有 $y_{(i_q,j_s)}\in\mathcal{T}$，且 $y_{(i_s,j_s+1)}\in\mathcal{T}$，则 $y_{(i_s,j_s)}\in\mathcal{T}$。

证明。 为证明 (i)，假设 $a := y_{(i_s,j_s)} \notin \mathcal{T}$，并导出矛盾。于是任取一条包含 $b := y_{(i_s+1,j_s)}$ 的对角线 $\mathcal{D}$ in Y。我们将证明 $\mathcal{D}\cap\mathcal{T}$ 至少包含一个不同于 b 的元素，这意味着 $\mathcal{T}\setminus\{b\}$ 也是一个横截集，从而与 $\mathcal{T}$ 的极小性矛盾。为了导出另一个矛盾，假设 $\mathcal{D}\cap\mathcal{T} = \{b\}$。那么 $\mathcal{D}$ 不可能包含任何元素 $y_{(i_s,j_q)}$ $\in Y_P$with $j_q < j_s$。因此，对于所有满足 $j_q < j_s$ 的点 $y_{(i_q,j_q)}\in\mathcal{D}$，也就是说，对于对角线 $\mathcal{D}$ 上位于 b 左侧的所有点，都存在一条路径 $P^{(i_q,j_q)}$ 包含 $y_{(i_q,j_q)}$。注意，一条 WS 路径至多包含对角线上的一个元素。现在，我们按如下方式从 $\mathcal{D}$ 得到一条新的对角线 $\mathcal{D}'$：

如果 $\mathcal{D}$ 不包含来自第 i_s 行的元素，那么我们通过在 $\mathcal{D}$ 中用 a 替换 b，得到 $\mathcal{D}'$。现在，由于 $\mathcal{T}$ 是一个横截集，$\mathcal{D}'\cap\mathcal{T}\neq\emptyset$。但根据 $\mathcal{D}'$ 的选取，只有满足 $j_q > j_s$ 的元素 $y_{(i_q,j_q)}\in\mathcal{D}'$ 才能属于$\mathcal{T}$。任何这样的元素也属于 $\mathcal{D}$，这与我们的假设 $\mathcal{D}\cap\mathcal{T} = \{b\}$ 矛盾。

记号简便起见，将 $\mathcal{D} = \{d_1,\ldots,d_u = b,\ldots,d_t\}$ 按行/列索引递增的顺序排列。设 $d_{u-1} = y_{(i_s,j_q)}$ 满足 $j_q < j_s$。由于 $P_{(i_s,j_q)}$ 是一条 WS 路径，我们可以沿着 $P^{(i_s,j_q)}$移动 d_{u-1}，先向东再向北，直到到达路径 $P^{(i_s,j_q)}$上紧邻 d_{u-1} 之前的南向位置。将这个南向位置记作 d'_{u-1}。如果 d'_{u-1} 与 d_{u-2}位于同一行，我们就在包含 d_{u-2} 的路径上执行相同的移动，以得到 d'_{u-2}；否则，令 $d'_{u-2} := d_{u-2}$。重复这一过程可得 d'_1。这是可行的，因为这些路径互不相交，且每条路径至多包含一个对角元素。定义$\mathcal{D}'$:
$= \{d'_1,\ldots,d'_{u-1},a,d_{u+1},\ldots,d_t\}$。如前所述，这与假设 $\mathcal{D}\cap\mathcal{T} = \{b\}$矛盾。

(ii) 的证明与 (i) 类似。 □

定理 6.13. $t-1$ *WS* 路径 $P_1,\ldots,P_{t-1}$ 在 Y 上构成的族不相交，当且仅当集合 $Y\setminus\cup_{i=1}^{t-1}P_i$ 是 $\mathcal{A}_t$ 的极小横截集。

证明。 考虑一族 $t-1$ WS 不相交路径 $P_1,\ldots,P_{t-1}$ 位于 Y上。为导出矛盾，假设补集 $Y\setminus\cup_{i=1}^{t-1}P_i$ 不是横截集。那么存在一个 Y 的 t-子式，其对角线为 $\{y_{i_1,j_1},\ldots,y_{i_t,j_t}\}$，使得对每个 $s\in[t]$，都存在一条路径包含 y_{i_s,j_s}。然而，由于

所有路径都朝西南方向，因此对于任意一条对角线，每条路径至多包含一个对角点。但我们只有 $t-1$ 条路径和 t 个对角点，这就产生了矛盾。因此， $Y \setminus \cup_{i=1}^{t-1} P_i$ 是一个横截集。

为了证明它也是极小的，我们注意到 $\langle \mathcal{A}_t \rangle$ 是科恩-麦考利的 [3, 定理 3。1], 因此，该理想的极小素分解中所有分支的极小生成元数量都相同。但这些极小生成元与 $\mathcal{A}_t$的极小横截集一一对应。因此，极小横截集的大小必定相同。现在很容易证明，所有由$t-1$条 Y上的互不相交的西南路径构成的族，恰好经过矩阵 $d\ell-(d-t+1)(\ell-t+1$个点Y。因此，它们的补集大小也相同（$(d-t+1)(\ell-t+1)$ ，只需证明某个特殊的 $t-1$ 条不相交路径族的补集构成一个极小横截集。

考虑特殊路径集合 $P_1,\dots,P_{t-1}$，其中 $P_i=\{y_{i,\ell},y_{i,\ell-1},\dots,y_{i,i},y_{i+1,i},\dots,y_{d,i}\}$ 对所有 $i\in[t-1]$均成立。那么 $Y\setminus\cup_{i=1}^{t-1}P_i$的补集是一个右下角（$d-t+1$）$\times$（$\ell-t+1$）子矩阵 Y'，它属于Y，我们现在已经证明它是一个横截集。移除任何元素 $Y'_{t+i-1,\ t+j-1}$ 都会使子式 $\det Y_{\{1\dots,t-1,t+i-1\},\ \{1\dots,t-1,t+j-1\}}$ 的首项未被覆盖，因此 Y' 是极小的。

令 $\mathcal{T}\subseteq Y$ 为 $\mathcal{A}_t$的一个极小横截集。令 P_0 为空路径。假设我们已构造出 WS 路径 $P_1,\dots,P_{i-1}$。现在按如下方式构造 WS 路径 P_i：

令 $Y_{P_{i-1}}$ 为从 Y 中移除所有严格位于 P_{i-1}任一元素左侧或上方的条目后得到的子网格。然后，在 $Y_{P_{i-1}}$ 中递归定义 P_i 如下：从 P_i开始，对于每个不在 $Y_{P_{i-1}}$最后一行的当前位置 $y_{(a,b)}$ ，令

$$b^*=\max\{b' \mid b'\le b,\ y_{(a,b')}\in\partial Y_{P_{i-1}}\cup\mathcal{T}\},$$

并将下一个南向位置（路径 P_i的顶点）设为 $y_{(a,b^*+1)}$。根据引理6.12，横截集在 $Y_{P_{i-1}}$ 中的条目在网格的左上角构成一个阶梯形。因此，所得条目序列构成一条有效的 WS 路径 P_i ，其终点为 Q_i。 □

注 6.14。 定理 6.13 和命题6.3(i) 给出了 [15, 定理 3。3]的另一种证明。

结合命题6.10 和定理6.13，我们得到如下结果。

命题 6.15。 设 Y_i 表示 Y的第 i 列。那么

$$\deg V_\emptyset=\sum_{\substack{(P_1,\dots,P_{t-1})\\ \text{non-intersecting WS}}}\prod_{i=1}^{\ell}\Big|\Big(\bigcup_{j=1}^{t-1}P_j\Big)\cap Y_i\Big|.$$

6.3 格路径与度公式

在前面的小节中，我们已将计算 V_Δ 次数的问题转化为对带重数格路径的计数，如命题 6.15所述。这里，我们对这些路径进行计数，并给出 V_Δ 的次数显式公式。

命题 6.16。 设生成函数 $\mathcal{G}_{d,\ \ell,\ t}(z_1,\ \dots\dots,\ z_\ell)$ 表示 $t-1$ 个在 $d\times\ell$ 矩阵$Y=(y_{ij})$中的格路径，其定义如下：

$$\mathcal{G}_{d,\ell,t}(z_1,\dots,z_\ell):=\sum_{\substack{\mathbf{P}=(P_1,\dots,P_{t-1})\\ \text{non-intersecting}}}\prod_{j=1}^{\ell}z_j^{|C_j\cap\mathbf{P}|}. \tag{6.11}$$

Then

$$\mathcal{G}_{d,\ell,t}(z_1,\dots,z_\ell)=\left(\prod_{j=1}^{\ell}z_j^{\min(j,t-1)}\right)\cdot\det\left(h_{d-i}(z_j,z_{j+1},\dots,z_\ell)\right)_{1\le i,j\le t-1}, \tag{6.12}$$

其中 h_i 是次数为 j 的完全齐次对称多项式。

证明。 我们使用 Lindstr¨om–Gessel–Viennot 引理来计算不相交格路径的生成函数，参见 [18, 12]。我们考虑 $d\times\ell$ 网格，其中有 $t-1$ 个起始顶点

位于东边界上，并有 $t-1$ 个终止顶点位于南边界上，参见图 2。我们考虑具有$t-1$ 个起始顶点和 $t-1$ 个终止顶点的 SW-路径，它们由以下方式给出

$$\{(j,\ell)\}_{j=1}^{t-1} \qquad \text{and} \qquad \{(d,i)\}_{i=1}^{t-1},$$

分别。注意，网格中的顶点采用（行，列）的方式编址。

从第 i 个起始顶点到第 j 个终止顶点的路径由 $d+1-i$ 个向南步和 $\ell+1-j$ 个向东步组成。若对每个向南步赋予权重 z_j（k，j）$\to$（$k+1$，j），则构造这条路径的方式是：在列 $\{j, j+1, \ldots, \ell\}$ 中选择（允许重复） $d-i$ 个向南步。因此，所有可能路径的（加权）总和由完全齐次对称函数 $h_{d-i}($ z_j，z_{j+1}，$\ldots$，$z_\ell)$ 给出。于是，Lindstr¨om–Gessel–Viennot 引理表明，所有不相交的（$t-1$）元组路径的总和由行列式给出

$$\det\left(h_{d-i}(z_j, z_{j+1}, \ldots, z_\ell)\right)_{1\le i,j\le t-1}.$$

H然而，我们根据每列中被占据的顶点 为路径赋予权重。我们需要两个观察 s:

- 前 $\min(j, t-1)$ 条路径在 j 列相交，当 $1 \le j \le n$ 时。
- 在 j 列中，一条路径覆盖的顶点数等于与该列相交的路径数加上该列中向南步的总数。

这些 o bservations 现在推出（6.12）。例如， P_1, P_2 和 P_3 在图 2 中的顶点权重为

$$P_1 : z_1^4 z_2 z_3^2 z_4 z_5^3 z_6 z_7 z_8 z_9, \quad P_2 : z_2^3 z_3 z_4 z_5^2 z_6^2 z_7^2 z_8 z_9, \quad P_3 : z_3 z_4^2 z_5 z_6 z_7^3 z_8^2 z_9. \qquad \square$$

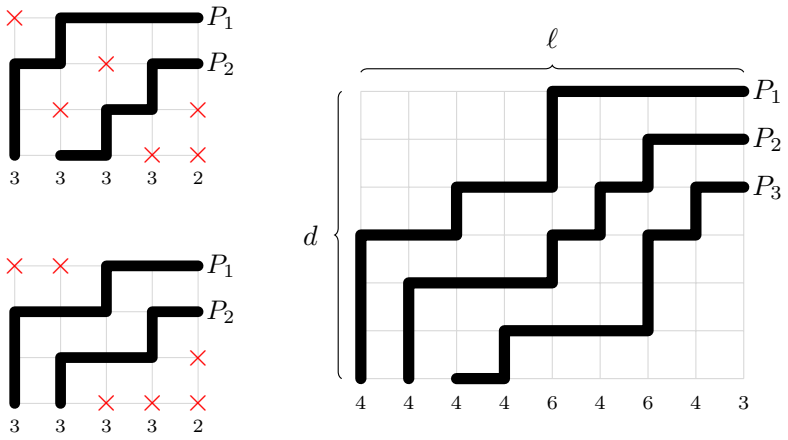

图2：（左）备注 6.18中的两个 WS 不相交路径族。（右）在 $\ell=9$, $d=7$ 和 $t-1=3$的情况下的三条格路径。路径 P_1 的边权重为 $z_1^3 z_3 z_5^2$， P_2 的权重为 $z_2^2 z_5 z_6 z_7$ ，最后 P_3 的权重为 $z_4 z_7^2 z_8$。

命题 6.17。 $V_\emptyset$ 的次数等于

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial}{\partial z_\ell} \mathcal{G}_{d,\ell,t}(z_1, \ldots, z_\ell)\Big|_{z_1=\cdots=z_\ell=1}.$$

证明。 根据命题 6.15， $J_\emptyset$ 的次数等于 $t-1$ WS 条互不相交路径 $\{P_1, \ldots, P_{t-1}\}$的族数，并按重数 $\left|\left(\bigcup_{j=1}^{t-1} P_j\right) \cap Y_i\right|$计数。对$\mathcal{G}_{d,\ell,t}$ 求偏导数即可得到这些重数。 $\square$

例如，在图 2 中，三条格路径的总权重为 $z_1^4 z_2^4 z_3^4 z_4^4 z_5^6 z_6^4 z_7^6 z_8^4 z_9^3$。偏导数随后将这个单项式乘以因子 $4\cdot4\cdot4\cdots3$，这正是重数 $m(A)$。

注 6.18。 注意，在 $\mathcal{G}_{d,\ell,t}(z_1,\ldots,z_\ell)$ 中，某些系数可能大于 1。例如，当 $d=4$、$\ell=5$、$t=3$ 以及 $(s_1,\ldots,s_5)=(3,3,3,3,2)$ 时，存在两个不同的非相交路径族，如图2（右）所示。

推论 6.19. 假设 $d=t$。那么 $V_\emptyset$ 的次数为

$$\deg(V_\emptyset) \;=\; d^{\,d-1}(d-1)^{\,\ell-d+1}\binom{\ell}{d-1}.$$

证明。 我们首先将命题化归为纯粹的组合枚举。根据命题 6.15 和推论 6.17，次数 $\deg(V_\emptyset)$ 由生成函数 $\mathcal{G}_{d,\ell,t}(z_1,\ldots,z_\ell)$ 所编码的互不相交路径族的贡献计算得到。

为明确这一化归，固定一个单项式 $\prod_{j=1}^{\ell} z_j^{e_j}$，它属于 $\mathcal{G}_{d,\ell,t}(z_1,\ldots,z_\ell)$，对应于一个由 $(d-1)$ 条路径组成的互不相交族。对于 $t=d$，每一列至少贡献 $d-1$ 个占据顶点，任何额外的贡献都来自该列中的一个向南步。互不相交性意味着任一列中至多出现一个向南步。因此，对于所有 j，都有 $e_j\in\{d-1,d\}$；又由于向南步的总数等于 $\ell-d+1$，恰有 $\ell-d+1$ 个指标满足 $e_j=d-1$。

因此，每个偏导数 $\partial_{z_1}\cdots\partial_{z_\ell}$ 都贡献相同的因子 $d^{\,d-1}(d-1)^{\,\ell-d+1}$。在 $z_1=\cdots=z_\ell=1$ 处求值，极小横截集的数量等于

$$d^{\,d-1}(d-1)^{\,\ell-d+1}\cdot\left|\binom{(d-j)+\ell-i}{d-j}\right|_{1\le i,j\le d-1}.$$

重新索引后得到

$$\left|\binom{(d-j)+\ell-i}{d-j}\right|_{1\le i,j\le d-1}=\left|\binom{i+j+1+(\ell-d+1)}{j+1}\right|_{0\le i,j\le d-2}.$$

根据 [4, 定理 1。1],该行列式的值为 $\binom{\ell}{d-1}$，证明完毕。 □

7 与拟阵拟积的联系

在最后一节中，我们将结果置于更广泛的拟阵理论背景下。尽管本文关注的是情形 $s=2$，但一般的条件独立簇 $V_{\Delta^{s,t}}$ 在 $d\le s+t-3$ 时，可以用拟阵拟积作自然解释。

为精确说明这种联系，我们先简要回顾一般设定。设 $s\le k$，$t\le\ell$ 和 d 为正整数，并令 $\mathcal{Y}$ 表示 $k\times\ell$ 中定义的整数矩阵（1.2）。考虑超图 $\Delta^{s,t}:=\bigcup_{i\in[k]}\binom{R_i}{t}\cup\bigcup_{j\in[\ell]}\binom{C_j}{s}$.，其顶点集为 $[k\ell]$。相应的条件独立簇为

$$V_{\Delta^{s,t}} \;:=\; \big\{Y\in\mathbb{C}^{d\times k\ell}:\operatorname{rank}(Y_F)<|F|\ \text{for all}\ F\in\Delta^{s,t}\big\},$$

其中，Y_F 表示由索引为 F 的列组成的 Y 子矩阵。

以下来自 [7] 的结果通过用拟阵理论术语描述 $V_{\Delta^{s,t}}$ 使这一联系变得明确。

定理 7.1。 设 $s\le k$、$t\le\ell$ 和 d 为正整数，且 $d\le s+t-3$。则

$$\mathcal{C} \;=\; \min(\Delta^{s,t}\cup\tbinom{[k\ell]}{d+1}) \tag{7.1}$$

定义了拟阵 $M^{s,t}_{k,\ell}$ 的回路集合；该拟阵的秩为 d，底集为 $[k\ell]$，其中 min 表示包含关系下极小的子集的集合。

因此，当 $d\le s+t-3$ 时，我们有

$$V_{\Delta^{s,t}}=\big\{\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_{k\ell})\in(\mathbb{C}^d)^{k\ell}:\mathcal{M}_\gamma\le M^{s,t,d}_{k,\ell}\big\},$$

其中，$\le$ 表示拟阵上的弱偏序。这一刻画自然地将 $V_{\Delta^{s,t}}$ 与拟拟阵积的概念联系起来，该概念由 [17] 引入。

定义 7.2. 设 M 和 N 分别是定义在 $[k]$ 和 $[\ell]$上的拟阵。若拟阵 Q 定义在 $[k\ell]$ 上，且对于每个 $i \in [k]$ 和 $j \in [\ell]$，限制拟阵 $Q \mid R_i$ 和 $Q \mid C_j$ 分别通过自然双射同构于 N和 M，则称 Q 为 M 和 N 的拟积 。此外，若 $\mathrm{rk}(Q) = \mathrm{rk}(M)\,\mathrm{rk}(N)$，则称 Q为 M 和 N的张量积 。

一般而言，拟阵的张量积未必存在，也未必唯一。由 M^s的回路描述 $_{k\,\ell}^{t\,d}$，见（7.1），可直接推出以下推论。这里，$U_{d,n}$ 表示定义在 $[n]$上的均匀拟阵，其独立集是所有大小至多为 d的子集。

Cor推论 7.3。若 $d \le s + t - 3$，则拟阵 $M^s_{k\,\ell}{}^{t\,d}$是$U_{s-1,k}$ 与$U_{t-1,\ell}$的拟积。

此外，$M^s_{k\,\ell}{}^{t\,d}$是所有由$U_{s-1,k}$ 和$U_{t-1,\ell}$ 构成的秩为d的拟积中唯一的极大拟阵.....

拟阵的张量积在刚性理论中发挥着重要作用，人们曾在 [21]猜想，只要两个拟阵的张量积存在，就存在一个弱序下唯一的极大拟阵。从这一观点来看，条件独立簇$V_{\Delta^{s,t}}$ 的分解可视为这些拟阵论问题的代数几何类比；对这些问题进行系统研究则留待未来工作。

致谢。我们感谢 Tibor Jord´an 和 Krist´of B´erczi 就拟阵的准乘积进行了富有见地的讨论，这些讨论启发了第7节。我们感谢 Aldo Conca 为我们指明了参考文献 [3, 15]。F.M. 衷心感谢斯德哥尔摩大学数学系的热情接待，并感谢 Samuel Lundqvist 和 Wenner-Gren基金会在她访学期间给予的支持。本研究得到 FWO 项目 G0F5921N（Odysseus）、G023721N 和 1126125N，以及鲁汶大学项目 iBOF/23/064 的资助。P.S. 获得了范尼尔加拿大研究生奖学金和不列颠哥伦比亚省研究生奖学金的资助。

参考文献

[1] Yulia Alexandr、Kristen Dawson、Hannah Friedman、Fatemeh Mohammadi、Pardis Semnani 和 Teresa Yu。含隐变量的条件独立理想的分解。《应用数学进展》，174:103003，2026。[2] Steen Arne Andersson 和 Michael D Perlman。多元正态分布的条件独立格模型。《统计学年鉴》，第1318–1358页，1993。[3] Enrico Arbarello、Maurizio Cornalba 和 Phillip Griffiths。代数曲线的几何：第二卷，*Joseph Daniel Harris* 贡献，第268卷。Springer Science & Business Media，2011。[4] Roland Bacher。与帕斯卡三角形相关的矩阵行列式。波尔多数论´杂志，14(1):19–41，2002。[5] Winfried Bruns 和 Aldo Conca。Gr¨obner基与行列式理想。载于《交换代数、奇点与计算机代数》，第9–66页。Springer Netherlands，2003。[6]Peter Caines、Fatemeh Mohammadi、Eduardo S´aenz-de Cabez´on 和 Henry Wynn。格条件独立模型与日比理想。《伦敦数学会汇刊》，9(1):1–19，2022。[7] Oliver Clarke、Kevin Grace、Fatemeh Mohammadi 和 Harshit Motwani。超图簇的拟阵分层、其实现空间与离散条件独立模型。《国际数学研究通知》，第rnac268页，2022。[8] Oliver Clarke、Giacomo Masiero 和 Fatemeh Mohammadi。可提升的点线构形：相关拟阵簇与回路簇的定义方程及不可约性。《数学》（*2227- 7390*），12(19)，2024。[9] Oliver Clarke、Fatemeh Mohammadi 和 Harshit Motwani。通过直线排列和点构形研究条件概率。《线性与多重线性代数》，70(20):5268–5300，2022。[10] Oliver Clarke、Fatemeh Mohammadi 和 Johannes Rauh。含隐变量的条件独立理想。《应用数学进展》，117:102029，2020。

[11] Mathias Drton、Bernd Sturmfels 和 Seth Sullivant。《代数统计学讲义》，第39卷。Springer Science & Business Media，2008。[12] Ira Gessel 和 G´erard Viennot。二项式行列式、路径与钩长公式。《数学进展》，58(3):300–321，1985。[13] Robin Hartshorne。《代数几何》，数学研究生教材第52卷。Springer，1977。[14] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi、Freyja Hreinsd´ottir、Thomas Kahle 和 Johannes Rauh。二项式边理想与条件独立性陈述。《应用数学进展》，45(3):317–333，2010。[15] J¨urgen Herzog 和 NgˆoViˆet Trung。Gr¨obner基以及行列式理想与帕ƒ理想的重数。《数学进展》，96(1):1–37，1992。[16] Serkan Ho¸sten 和 Seth Sullivant。相邻子式理想。《代数杂志》，277(2):615–642，2004。[17] Michel Las Vergnas。关于拟阵乘积。《离散数学》，36(1):49–55，1981。[18] Bernt Lindstr¨om。关于诱导拟阵的向量表示。《伦敦数学学会通报》，5(1):85–90，1973。[19] Emiliano Liwski。含隐变量的条件独立理想的分解：一种拟阵理论方法。arXiv预印本 arXiv:2510.12570，2025。[20] Marloes Maathuis、Mathias Drton、Steffen Lauritzen 和 Martin Wainwright。《图模型手册》。CRC出版社，2018。[21] John H Mason。将拟阵粘合在一起：研究迪尔沃思截断以及外幂和对称幂的拟阵类比。《图论中的代数方法》，1:519–561，1981。[22] Mateusz Micha˛lek 和 Bernd Sturmfels。《非线性代数导论》。数学研究生研究丛书。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2021。[23] Ezra Miller 和 Bernd Sturmfels。《组合交换代数》。Springer，2005。[24] James Oxley。《拟阵理论》。第二版，牛津大学出版社，2011。[25] Judea Pearl、Dan Geiger 和 Thomas Verma。条件独立及其表示。《控制论》，25(7):33–44，1989。[26] Jonas Peters。条件独立的交性质及其在因果发现中的应用。《因果推断杂志》，3(1):97–108，2015。[27] Gerhard Pfister 和 Andreas Steenpass。关于某些行列式超边理想的初等分解。《符号计算杂志》，103:14–21，2019。[28] Johannes Rauh。广义二项式边理想。《应用数学进展》，50(3):409–414，2013。[29] Lisa Seccia。一般矩阵的Knutson理想。《美国数学会会刊》，150(5):1967–1973，2022。[30] Bastian Steudel 和 Nihat Ay。共同祖先的信息论推断。《熵》，17(4):2304–2327，2015。[31] Milan Studeny。《概率条件独立结构》。Springer Science & Business Media，2006。[32] Seth Sullivant。《代数统计学》，第194卷。美国数学会，2023。

作者地址

Per Alexandersson，斯德哥尔摩大学 per.alexandersson@math.su.se
Yulia Alexandr，加利福尼亚大学洛杉矶分校 yulia@math.ucla.edu
Emiliano Liwski，鲁汶大学 emiliano.liwski@kuleuven.be
Fatemeh Mohammadi，鲁汶大学 fatemeh.mohammadi@kuleuven.be
Pardis Semnani，不列颠哥伦比亚大学 psemnani@math.ubc.ca