arXiv:2601.15157v1 [math.SP] 21 Jan 2026

典型双曲曲面具有最优谱隙

Laura Monk

《数学当前进展 2025》

摘要

双曲曲面的第一个非零拉普拉斯特征值，也称其谱隙，衡量了曲面的连通程度：谱隙较大的曲面难以被切割成若干部分，直径较小，混合时间也较短。对于面积较大或亏格较大的大双曲曲面 g，我们知道其谱隙的渐近上界为 $1\ 4$。本系列讲座旨在介绍我与 Nalini Anantharaman 的合作研究；我们证明，大多数双曲曲面都具有近最优谱隙。也就是说，我们证明，对于任意 $\epsilon > 0$，亏格为 g 的双曲曲面具有大于 $\frac{1}{4} - \epsilon$ 的谱隙的 Weil–Petersson 概率，会随着 g 趋于无穷而趋近于一。这一结论类似于 Alon 在 1986年提出的正则图猜想，该猜想由 Friedman 于 2003年证明。我将介绍我们的方法；这一方法与 Friedman 的工作有许多相似之处，同时还将介绍我们为解决这一问题而开发的新工具和新思路。

目录

1 引言：紧致双曲曲面的谱隙 2

1.1 双曲曲面与高亏格极限.2 1.2 拉普拉斯算子的谱隙.3 1.3 具有较大谱隙的曲面.4 1.4 高亏格的典型双曲曲面.5 1.5 与 d-正则图的联系.6 1.6 未解决的问题.8 1.7 本讲义的组织结构.8

2 迹方法：正则图与双曲曲面 9

2.1 正则图的迹方法.9 2.2 迹方法中的主角.12 2.3 通过卷积保持 Friedman–Ramanujan 性质的稳定性 . . 14

3 Weil–Petersson 体积函数 **19**
3.1 拆分平均值与局部拓扑类型 . . . . . 20 3.2 写成积分.24 3.3 关于 $1/g$ 的幂次渐近展开.29 3.4 Teichm¨uller 空间上的新坐标系 30 3.5 长度函数的表达式.36 3.6 结论.40

1 引言：紧致双曲曲面的谱隙

1.1 双曲曲面与高亏格极限

在整个讲座中，我们将研究的对象是大亏格紧致双曲曲面。对于整数 $g \geq 2$，根据曲面分类，我们知道存在且仅存在一个亏格为 g的定向、连通、闭（即紧致且无边界）曲面；我们将这样的曲面记作 S_g 。我们关注双曲曲面，即定义在拓扑曲面 S_g 上的常曲率黎曼度量 -1。这样的双曲曲面总是与双曲平面 $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ 的一个商空间等距

$$\mathbb{H} = \{x + iy, y > 0\} \quad \text{equipped with} \quad \mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2} \tag{1}$$

该商空间由福克斯群 Γ作用得到，福克斯群是$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$的一个离散、余紧子群。曲面 S_g上所有双曲度量在等距变换意义下构成的集合，就是模空间 $\mathcal{M}_g$。

根据高斯–博内定理，亏格为 g 的双曲曲面的面积始终为 $2\pi(2g-2)$。我们将关注大亏格区域，这也可以理解为大尺度区域。

我们将在叙述中遇到的主要对象之一是闭测地线及其长度。曲面 X 上的一个环路$\mathbf{c}$ 是一个分段光滑映射$\mathbf{c}$:$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to X$ ，其导数处处不为零。特别要注意，我们所有的环路都是有向的。如果存在一个连续映射 $[0,1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to X$ ，使得当第一个变量分别固定为 0 和 1 时，该映射分别与$\mathbf{c}_0$ 和$\mathbf{c}_1$ 相匹配，则称两个环路$\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_1$ 是同伦的。如果一个环路是简单的（没有自交点）且不可缩，则称其为曲线。我们将这些定义扩展到多重环路$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)$和多重曲线（在后一种情况下，我们假设整个多重环路没有自交点，并且对于 $i \neq j$，$\mathbf{c}_i$ 不同伦于$\mathbf{c}^j$ ，也不同伦于$\mathbf{c}_j^{-1}$）。

由于负曲率，在 X 的每个非平凡同伦类中都存在唯一的长度极小曲线，它是一条闭测地线。我们将 $\mathcal{G}(X)$记作 X上的本原闭测地线集合，即不是某条闭测地线的迭代的闭测地线。对于 $\gamma \in \mathcal{G}(X)$，我们将 $\ell_X(\gamma)$记作 γ在 X上的闭测地线的长度。集合 $\{\ell_X(\gamma)\ \gamma \in \mathcal{G}(X)\}$ 被称为长度谱；它包含关于双曲曲面 X的大量信息。

1.2 拉普拉斯算子的谱隙

这些笔记的核心内容是拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱，或称拉普拉斯算子。拉普拉斯算子是平方可积函数空间 L^2上的正无界算子。其定义性特征之一是它在等距变换下保持不变。拉普拉斯算子 Δ 的谱定义为复数集合 λ，其中的复数满足算子 $\Delta - \lambda\mathrm{Id}$不具有定义在 L^2上的连续逆。

在双曲平面 $\mathbb{H}$ 上，拉普拉斯算子用坐标表示非常简单，即为 $\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$。其谱纯粹为连续谱，且恰好等于区间$[\frac{1}{4}, +\infty)$。这个特殊值 $_{14}$ 是本讨论的核心，它源于这样一个观察:– 对于任意光滑的 L^2 函数 f 在-$\mathbb{H}$上，我们有

$$\int_{\mathbb{H}} f\Delta f \geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{H}} f^2$$

只需简单应用柯西–施瓦茨不等式和分部积分即可得到。换言之，算子 $\Delta - \frac{1}{4}\mathrm{Id}$ 在 $L^2(\mathbb{H})$ [McK70]上是正的。–

考虑紧致双曲曲面 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ 上的拉普拉斯算子，相当于将 $\mathbb{H}$ 上的拉普拉斯算子的定义域限制为 Γ-周期函数。由于我们研究的曲面是紧致的，此时的谱是一列离散的特征值

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{2}$$

第一特征值 $\lambda_0 = 0$ 对应于常值特征函数（由于曲面面积有限，这些函数属于 $L^2(X)$）。其重数为一，因为常值函数空间的维数等于连通分支的数量，而此处只有一个连通分支。谱隙 是第一个非平凡特征值 $\lambda_1 > 0$。

通过捏缩一条分离闭测地线，可以很容易地构造出任意亏格且 λ_1 很小的双曲曲面，如图 1所示。这就是我们在谱几何中常说的哑铃 。其思路是，在极限情况下，曲面分成两个连通分支，因此 λ_1 会趋于 0，而被捏缩的闭测地线的长度 ϵ 也趋于 0。

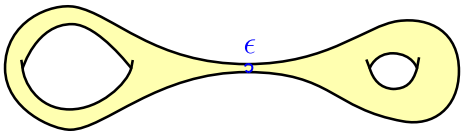

图 1：哑铃示例。

哑铃曲面的连通性很差（用剪刀将其剪开就能轻易使其断开）。当 ϵ 趋近于 0 时，其直径趋于无穷大，因此曲面上的某些点会相距非常遥远。双曲曲面由于具有负曲率，是混沌系统的简单例子，因此是很有趣的动力学研究对象。当 ϵ 较小时，该曲面存在一个瓶颈，这意味着从哑铃一侧出发的粒子或随机游走将

需要很长时间才能到达另一侧；这意味着混合时间异常漫长。

所有这些观察实际上都是具有小谱隙的曲面的刻画，下面给出这些概念之间的关系（精确表述请参见相关参考文献）。

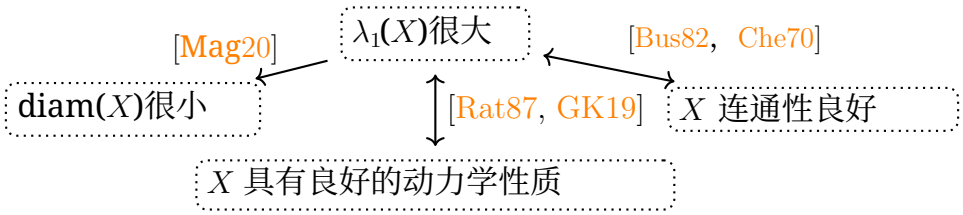

图2：谱隙与曲面其他性质之间的关系。

1.3 具有大谱隙的曲面

既然我们已经知道，大谱隙是一种理想性质，那么接下来的问题是：谱隙能有多大？我们认为，谱隙最大的双曲曲面是 Bolza曲面，它是通过粘合一个各内角均为 $\pi/4$ 的正则双曲八边形的相对边得到的，如图3所示。对于这个曲面，Strohmaier 和 Uski 给出了非常精确的数值近似 [SU13]，

$$\lambda_1 \approx 3.83888725884219951858662245043546459708191501 57.$$

尽管迄今为止，“该曲面在所有双曲曲面中使 λ_1 最大”这一点仍是一个猜想，但近期的研究已将上界推进到极其接近的范围，比这一数值高出不到 2.10^{-5} [KMP24, Bon22]。

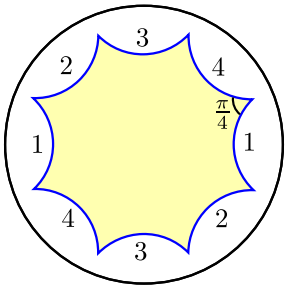

图3：Bolza曲面的构造。

然而，Bolza曲面的亏格为 $g = 2$，而我们关注的是大亏格区域。当亏格 g 趋于无穷时，可以认为，由于曲面在“变大”，它会开始“看起来像”双曲平面 $\mathbb{H}$，尤其是整个区间 $[\frac{1}{4}, +\infty)$ 都会被特征值填满。更准确地说，Huber 在 [Hub74] 中证明了

$$\limsup_{g\to+\infty} \sup\{\lambda_1(X), X \in \mathcal{M}_g\} \leq \frac{1}{4} \tag{3}$$

或者，等价地，$\lambda_1 \leq \frac{1}{4} + o(1)$，当 $g \to +\infty$。这意味着数值$\frac{1}{4}$渐近地是可能达到的最大谱隙。Buser 在 [Bus84]中猜想3）是等式，这意味着存在一个序列 $(X_n)_{n\geq 1}$ 由亏格趋于无穷的紧致双曲曲面组成，并且使得 $\lim_{n\to+\infty} \lambda_1(X_n) = \frac{1}{4}$。这个广受关注的未解问题近期由 Hide 和 Magee 在一篇著名论文 [HM23]中使用随机覆盖得到了肯定回答。

1.4 典型的大亏格双曲曲面

本系列讲座旨在证明以下结论，这是我与 Nalini Anantharaman 合作研究的两部分成果中的主要结果 [AM23, AM25]。

定理 1.1。对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{g\to+\infty} \mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}\left(\lambda_1 \geq \frac{1}{4} - \epsilon\right) = 1.$$

这里，$\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}$表示模空间 $\mathcal{M}_g$上的魏尔–彼得松概率测度。这是一种自然的连续模型，由 Mirzakhani 推广开来，用于描述固定亏格 g的典型双曲曲面。因此，定理 1.1告诉我们，具有近最优谱隙的双曲曲面不仅存在，而且在大亏格极限下是典型情形。

这是若干逐步精确的部分结果陆续得出的结论，这些结果列于表 1。值得指出的是，Mirzakhani 的首个一致谱隙是 [Mir13] 中通过对切格常数进行相当粗略的估计得到的。从 Wu–Xue 两个独立团队取得重大突破、将结果推进到 $\frac{3}{16} - \epsilon$ 之后的所有结果 [WX22]以及 Lipnowski–Wright [LW24], , 都采用了同一种称为迹方法的方法。迹方法背后的思路将在第 2节讨论；我们也将借此机会探讨这些逐步改进最终导向最优结果的原因。

所得间隔	与 $\frac{1}{4}$ 的比较	参考资料
$\lambda_1 \geq \frac{1}{4}\left(\frac{\log 2}{\log 2+\pi}\right)^2$	$\left(\frac{\log 2}{\log 2+\pi}\right)^2 \approx 0.03267$	[Mir13]
$\lambda_1 \geq \frac{3}{16} - \epsilon$	$\frac{3}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$	[WX22]和 [LW24]
$\lambda_1 \geq \frac{2}{9} - \epsilon$	$\frac{2}{9} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{9}$	[AM23]
$\lambda_1 \geq \frac{1}{4} - \epsilon$	最优。	[AM25]

表 1：使用魏尔–彼得松概率测度抽样得到的高亏格随机紧双曲曲面谱隙问题的历史。

注记 1.2（塞尔伯格$\frac{1}{4}$猜想）。若不简要提及谱

几何、双曲曲面的几何与算术领域中最重要的未解难题之一，本文就不算完整：塞尔伯格$_{1\ 4}$ 猜想。这是一个关于同余覆盖的问题：双曲曲面是 $\mathbb{H}$ 被这些群作用后得到的商空间

$$\Gamma(N) = \{M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \,:\, M \equiv \mathrm{Id} \,(\mathrm{mod}\ N)\}. \tag{4}$$

对于 $N \geq 2$，商空间 $X(N) = \Gamma(N) \backslash \mathbb{H}$ 是一个有限面积的非紧致双曲曲面，其亏格的增长趋势如 N^3。Selberg 在 [Sel65] 中指出，如果能证明同余曲面具有某种谱隙，就能由此在某些算术和中得到有趣的消去。这促成了如今著名的塞尔伯格 $_{1\ 4}$ 猜想，该猜想最早发表于 [Sel65]:

$$\forall N \geq 1, \quad \lambda_1(X(N)) \geq \frac{1}{4}. \tag{5}$$

这相当于塞尔伯格 ζ 函数的黎曼猜想。在他的文章中，Selberg 得到了部分结果 $\lambda_1(X(N)) \geq \frac{3}{16}$(据我理解，来自算术曲面与随机曲面的这两个$_{3\,16}$是不同的)。令我非常感兴趣的是,与随机双曲曲面的情形一样，谱隙方面对此界限的任何改进，都会对某些量的消去产生影响：对 Selberg 而言是算术和，对我们而言则是几何平均值。目前已知的最佳界限由 Kim 和 Sarnak 给出，他们证明了 $\lambda_1(N) \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{49}{1024}\right)$，见于 [Kim03]。与随机双曲曲面的情形相比，似乎极难找到一种消去机制，使谱隙达到最优值$_{1\ 4}$。

请注意，同余覆盖是一个可数集合，而魏尔–彼得森测度没有原子，因此定理 1.1 对塞尔伯格$_{1\ 4}$猜想的情形没有任何启示。从某种意义上说，这两种方法是正交的：我们研究随机双曲曲面，对所有可能的度量进行平均，并将测地线的长度视为某种均匀分布；相反，同余覆盖是具有高度对称性的、非常刚性的对象。

1.5 与 d-正则图的联系

从这项研究计划开始之初，我的合作者 Nalini Ananthara- man 和我便从d-正则图领域汲取了一些灵感。一个 d-正则图是一种图，其中每个顶点恰有 d 个邻点。这些离散对象在图论中已得到广泛研究，其行为与双曲曲面极为相似。事实上，它们是齐次的（任意一点的小邻域总是相同的），而且球的大小会随半径增大而呈指数级增长。表2列出了这两种情形之间的简明对照。请注意，为了使论述简单，在本文中我们始终假设 G 不是二分图[1]。与双曲曲面的情形一样，我们关注大尺度范围，也就是说，假设图的 n 顶点数很大。

[1]二分图是一种图，其顶点集可以拆分为 $V = V_1 \sqcup V_2$，使得每条边的一个端点位于 V_1，另一个位于 V_2；这样的图还有一个额外的平凡特征值 $-d$，它对我们的讨论几乎没有影响，但会使书写稍显繁琐。

对象	双曲曲面 X	d-正则图 $G=(V,\ E)$
Size	亏格 $g\to+\infty$	顶点数 $n\to+\infty$
局部几何 R球的大小	双曲球 $\approx e^R$	每个顶点有 d 个邻点 $\approx(d-1)^R$
算子 谱 平凡特征值 谱隙	拉普拉斯算子 Δ $0=\lambda_0<\lambda_1\leq\ldots\to+\infty$ $\lambda_0=0$ λ_1	邻接矩阵 A $d=\lambda_1>\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n>-d$ $\lambda_1=d$ $d-\lambda_+,\lambda_+=$最大值$\{\lambda_2,-\lambda_n\}$
万有覆盖 及其谱	双曲平面 $\mathbb{H}$ $[\frac{1}{4},+\infty)$	d-正则树 $[-2\sqrt{d-1},2\sqrt{d-1}]$

表 2：双曲曲面与正则图的比较 s.

对于具有 n 个顶点的非二分 d-正则图 $G=(V,\ E)$，我们可以研究其谱

$$d=\lambda_1>\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n>-d \tag{6}$$

邻接矩阵（注意，由于图的正则性，邻接矩阵与拉普拉斯矩阵相差 dId，因此二者是相同的对象）。平凡特征值为 $\lambda_1=d$，对应于常值特征函数。谱隙的对应概念是平凡特征值 d 与 $\lambda_+=\max\{\lambda_2,-\lambda_n\}$ 之间的间距。

d-正则图中与 Huber 界 (3) 等价的结果是 Alon–Boppana 界 [Nil91, Alo 86], , 它指出 $\lambda_2\geq2\sqrt{d-1}-o(1)$ 当 $n\to+\infty$ 时成立。数值 $2\sqrt{d-1}$ 发挥着与 1 4 完全相同的作用，因为它是所有^-d-正则图的万有覆盖—— d-正则树——的谱边界。Alon 曾著名地在 [Alo86]中猜想，大多数大型 d-正则图都具有近最优谱隙。多年后，Friedman 用一篇长达 120 页的证明证实了这一猜想 [Fri03]。如今已有若干现代证明，最早的是 Bordenave 的证明 [Bor20], ；最近，Chen、Garza-Vargas、Tropp 和 Van Handel 提出了一种全新的方法 [CGTvH25]。这些讲座结束后不久，Magee、Puder 和 Van Handel 进一步拓展了这一新方法 [MPvH25], , 证明在高次数极限下，紧致双曲曲面的随机覆盖通常具有近最优谱隙。

在尝试证明定理1.1的过程中，我们自然而然地采用了 Fried- man 的方法，只是一开始并未意识到这一点。后来发现我们走上了相似的道路，这为 Friedman 的工作带来了新的视角，也让我们得以深入理解并欣赏这项工作；因此，我们将本项目中引入的一些对象以他的名字命名。Friedman 的证明中的一些要素及其与我们工作的关系，将在第2节讨论。

1.6 未解问题

尽管由于 Huber 的结果，我们无法通过将$1/4$替换为更大的常数来改进我们的结果，但仍有许多更精细且有趣的问题——其中一些问题预计会非常困难。

问题 1.3. 找出一个序列 $\epsilon_g \to 0^+$ 使得

$$\lim_{g\to+\infty} \mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}\left(\lambda_1 \geq \frac{1}{4} - \epsilon_g\right) = 1. \tag{7}$$

对于哪种缩放范围（即ϵ_g 作为 g的函数如何变化），这一结论不再成立？关于$\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}\left(\lambda_1 \geq \frac{1}{4} + \epsilon_g\right)$也有同样的问题：在哪种缩放下，这个概率为零或非零？

问题 1.4. 证明存在一个数 $p \in (0,1)$，使得

$$\lim_{g\to+\infty} \mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}\left(\lambda_1 \geq \frac{1}{4}\right) = p. \tag{8}$$

p的值是多少？

这两个问题都源于这样一种直觉：体谱边缘处特征值的统计分布遵循 Tracy–Widom 分布。证明这一结论将令人振奋不已，但与正则图领域相比，在现阶段看来仍遥不可及。事实上，定理 1.4 最近刚刚得到肯定的回答，其取值为 $p \approx 69\%$，由 Huang、McKenzie 和 Yau 得出 [HMY25]。这些进展远晚于 Friedman 的证明，原因在于迹方法过于粗略，无法达到如此高的精度。事实上，深入剖析我们的证明并把所有细节明确写出，或许能够得到一个ϵ_g 按 log(g的负幂衰减的量。然而，与随机矩阵理论和正则图的情形相比，人们实际预期的有趣尺度是 g的负幂。Huang、McKenzie 和 Yau 的突破依赖于格林函数理论中的一系列令人兴奋的新发现，而这些发现原则上似乎并不适用于双曲曲面。

1.7 本讲义的组织结构

讲义按照与两场讲座相契合的结构编排。第一场讲座旨在介绍并阐释这一结果，随后讨论*Friedman–Ramanujan* 函数及其在卷积下的稳定性；也就是说，内容涵盖第1 节和第2节。第二场讲座则将全程聚焦于研究体积函数，这些函数描述随机双曲曲面上闭测地线长度的分布；相关内容对应第3节。

2 迹方法：正则图与双曲曲面

由于我们迹方法背后的思路以及消去论证已在 [AM23] 和我们的阐述性文章[AM24], 中详细介绍，因此这里不再重复完整解释，而是以稍有不同的方式呈现这些思路。希望这样能让我们有更多时间讨论证明的其他方面，其中有些内容对[AM25]而言是新的。

2.1 正则图的迹方法

设 $G = (V, E)$ 是一个非二部 d-正则图，含有 n 个顶点。回顾一下，邻接矩阵 A 的谱记作

$$d = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > -d \tag{9}$$

并将 G 的谱隙定义为 $d - \lambda_+$，其中 $\lambda_+ = \max(\lambda_2, -\lambda_n)$。

2.1.1 迹方法

迹方法的基本思路是将图 G 的谱 $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ 与其几何性质联系起来，例如其闭合路径及其长度。一种简单且我认为颇有启发性的方法是，选取一个整数 $\ell > 0$，并观察：

$$\mathrm{Tr}(A^\ell) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^\ell = \sum_{v \in V} \#\{\text{loops of length } \ell \text{ based at } v\}. \tag{10}$$

第一个等式显然是矩阵 A 可对角化这一事实的推论。第二个等式则是由以下观察得到的：矩阵 A^ℓ 的元素恰好统计了顶点对之间长度为 ℓ的路径数。由于迹是对对角元素求和，因此我们统计的路径实际上是环路，也就是闭合路径。

由（9）和（10），我们可以得出以下关于环路计数函数的界

$$\left| \sum_{v \in V} \#\{\text{loops of length } \ell \text{ based at } v\} - d^\ell \right| \leq n \lambda_+^\ell \tag{11}$$

这使我们能够了解其在 $\ell \gg 1$ 时的渐近行为。换言之，环路几何计数的首阶项形式为 d^ℓ，并与平凡特征值 $\lambda_1 = d$ 的贡献有关。谱隙则体现在首阶项与次阶项增长之间的间隔上。特别是，如果我能找到一个常数 $\rho > 0$，使得

$$\left| \sum_{v \in V} \#\{\text{loops of length } \ell \text{ based at } v\} - d^\ell \right| \ll \rho^\ell \tag{12}$$

当 $n \to +\infty$ 时，那么我就可以推导出 $\lambda_+ \le \rho$；换言之，我就能得到图的谱隙下界。谱隙的优劣与我们得到的 ρ 的大小有关： ρ 越小，估计就越紧，谱隙也越好。

2.1.2 Ramanujan 函数

现在让我们改进这种迹方法，并讨论 Friedman 在证明阿隆猜想时提出的一些想法，即对于任意 $\epsilon > 0$，典型的大型 d-正则图都满足 $\lambda_+ \le 2\sqrt{d-1} + \epsilon$。

Friedman 计数的几何量是不可约回路，也就是图 G 上的闭合路径，在连续两步中不会沿着同一条边来回移动。我们定义计数函数

$$N_G^{\mathrm{irr}}(\ell) := \#\{\text{irreducible loops of length } \ell \text{ on } G\}.$$

由于路径的每一步中，我们现在只有 $d-1$ 种下一步的选择，而不是 d 种，因此这个量的增长率是 $(d-1)^\ell$，而不是 d^ℓ。

现在，可以通过以下方式将上述启发式论证精确化。Friedman 定义了以下一类函数，并称之为 Ramanujan 函数；这应当会让人联想到方程（12）。

定义 2.1 ([Fri03]). 若存在多项式函数 $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{C}$，则称其为 *$d$-Ramanujan* 函数，如果存在多项式函数 p 和常数 c，使得

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad |f(\ell) - p(\ell)(d-1)^\ell| \le c\,\ell^c (d-1)^{\ell/2}.$$

Lubotzky、Phillips 和 Sarnak 在 [LPS88]中指出，如果计数函数 $N_G^{\mathrm{irr}}(\ell)$ 是 d-Ramanujan，那么$\lambda_+ \le 2\sqrt{d-1}$。具有最优谱隙的此类图称为拉马努金图——这也解释了为何选用这个名称。

项 $p(\ell)(d-1)^\ell$ 称为主项；它是我们自然预期由平凡特征值 $\lambda_1 = d$ 产生的贡献。这一估计的关键特征在于指数之间的间隔，从 $(d-1)^\ell$ 到 $(d-1)^{\ell/2}$。最优谱隙结果正是由这个间隔的大小带来的：当 n 很大时，更强的估计不可能成立，而较弱的界只能得到次优的谱隙。

请注意，成为 Ramanujan 函数是一项非常强的要求：我们要求一种非常特定的展开式，其中包含一个具有指定形式的较大首项，以及一个小得多得多的余项。主项总会干扰我们的估计，因此在下文中，我们将投入大量精力来处理平凡特征值所造成的影响。

2.1.3 将概率纳入其中

这一切都很好，但我们绝不可能证明，对于一个固定的一般 d-正则图 G，其计数函数 $N_G^{\mathrm{irr}}(\ell)$ 是 d-Ramanujan 的（与 Lubotzky、Phillips 和 Sarnak 不同，他们研究的是特定图族中的

具有代数结构的图 [LPS88]）。现在，我们需要采用概率视角和平均化技术。我们引入平均计数函数

$$N_{d,n}^{\mathrm{irr}}(\ell) := \mathbb{E}_{d,n}[N_G^{\mathrm{irr}}(\ell)]$$

其中，期望是相对于一个具有 n 个顶点的随机 d-正则图模型定义的，我们不再具体说明该模型。

根据马尔可夫不等式，如果能证明平均计数函数 $N_{d,n}^{\mathrm{irr}}(\ell)$ 是一个 d-Ramanujan 函数，就可以推断典型的 d-正则图具有接近最优的谱隙。

从单个计数函数转向其平均版本，是一种非常有力的方法。在这一新框架下，大尺度渐近行为 $n \to +\infty$ 的作用变得清晰得多：我们需要研究在 d 固定且 $n \gg 1$ 时，函数 $N_{d,n}^{\mathrm{irr}}(\ell)$ 的行为。Friedman 证明，对于他的随机 d-正则图模型，我们有如下形式的渐近展开：

$$N_{d,n}^{\mathrm{irr}}(\ell) = \sum_{k=0}^{K} \frac{f_{d,k}(\ell)}{n^k} + \mathcal{O}_{d,K}\left(\frac{\ell^{4K+2}(d-1)^{\ell}}{n^{K+1}}\right).$$

因此，谱隙问题与系数 $(f_{d,k}(\ell))_{k\geq 0}$ 及其关于 ℓ 的行为密切相关。例如，在 [Fri91]，中，Friedman 证明，当 $k \leq \sqrt{d} - 1/2$ 时，函数 $f_{d,k}(\ell)$ 是 d-Ramanujan 函数。随后他推导出，$\lambda_+ \leq 2\sqrt{d-1} + 2\log(d) + C$ 通常成立，其中 C 是一个普适常数。要达到最优谱隙并证明 $\lambda_+ \leq 2\sqrt{d} - 1 + \epsilon$，就需要理解系数 $(f_{d,k}(\ell))_{k\geq 0}$ 的全部内容，也就是说，在 $n \to +\infty$ 时，以任意精度估计计数函数 $N_{d,n}^{\mathrm{irr}}(\ell)$。

2.1.4 对固定环拓扑的限制

所以，现在我们有了一个新目标！我们“只需”证明，对于所有 k，函数 $f_{d,k}(\ell)$ 都是 Friedman–Ramanujan 函数。遗憾的是……这是错误的。Friedman 在 [Fri03 定理 2.12] 中证明，对于其随机 d-正则图模型，存在 k，使得 $f_{d,k}(\ell)$ 不是 d-Ramanujan 函数。这个证明体现了该方法的强大之处：基本上，如果所有 $(f_{d,k}(\ell))_{k\geq 0}$ 都是 d-Ramanujan 函数，那么我们就能对出现较小谱隙的概率给出非常好的界，并且该概率会随着 $n \to +\infty$ 快速衰减。然而，利用连通性较差的例子，可以证明出现较小谱隙的概率会以某种方式缓慢趋于零。这与计数函数的系数全都是 d-Ramanujan 的事实相矛盾。

这是证明中一个非常专业的部分，此处呈现它有一个特定目的：说明引入类型特定计数函数的动机。事实上，要解决上文预示的问题，需要采取的步骤之一是按类型拆分计数函数：

$$N_{d,n}^{\mathrm{irr}}(\ell) = \sum_{\mathbf{T}} N_{d,n}^{\mathbf{T}}(\ell) \tag{13}$$

现在$\mathbf{T}$ 表示不可约环路的一种“类型”，而$N_{d,n}^{\mathbf{T}}(\ell)$统计这种类型的环路。类型的例子包括简单环（没有自交点的环路）和八字曲线（恰有一个自交点的环路）。

这些受限计数函数的表现远比总体计数函数 $N_{d,n}^{\mathrm{irr}}(\ell)$ 好：Friedman 证明，它们关于 $1/n$ 的渐近展开中的所有项确实都是 d-Ramanujan 函数。实际上，总体计数函数 $N_{d,n}^{\mathrm{irr}}(\ell)$ 的系数之所以不是 d-Ramanujan 函数，是因为上面的求和中类型$\mathbf{T}$的数量呈指数级增长，而这与谱隙较小的曲面有关。因此，尽管每一项都具有正确的渐近展开，但项数增长过快，无法将它们求和。

2.2 我们迹方法中的主角

现在让我们回到这些讲座的重点：紧致双曲曲面。第2.1节介绍的所有方面对于 d-正则图和双曲曲面都适用——由于图的情形是离散的，其中对象的定义较为简单。这里请允许我稍作跳跃，并相信迹方法的讨论可以加以改编（更多细节见 [AM23, AM24]）。我们使用的迹公式是塞尔伯格迹公式 [Sel56]，其形式如下：

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\hat{h}(r_j)=(g-1)\int_{\mathbb{R}}r\hat{h}(r)\tanh(\pi r)\,\mathrm{d}r+\sum_{\gamma\in\mathcal{G}(X)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ell_X(\gamma)\,h(k\ell_X(\gamma))}{2\sinh\left(\frac{k\ell_X(\gamma)}{2}\right)} \tag{14}$$

ˆ其中，h是适当的测试函数，h 是其傅里叶变换，r_j 是满足 $\lambda_j=\frac{1}{4}+r_j^2$的复数。与图的情形一样，该公式将拉普拉斯算子的谱（λ_j）$_{j\geq 0}$ 与一个几何计数函数联系起来；这里，该函数对本原闭测地线 $\gamma\in\mathcal{G}$（X）进行计数。

上述针对图所概述的迹方法在这里转化为一个新的目标：我们希望为某些平均几何计数函数建立*Ramanujan* 性质。下面来解释这两个概念，它们是我们研究方法的核心。

2.2.1 Weil–Petersson 体积函数

首先，我们引入体积函数，它们相当于计数函数$N_{d,\ n}^{\mathbf{T}}(\ell)$。体积函数的研究是我们研究方法的核心，也可以说是本项工作的一项重要创新。我们在 [AM23、AM25], 中给出了全新的闭表达式和渐近结果，并将在第3节中详细介绍。

令 $g\geq 2$，并以 $\mathrm{Vol}_g^{\mathrm{WP}}$ 表示模空间上的 Weil–Petersson 测度

$$\mathcal{M}_g=\{\text{compact hyperbolic surfaces of genus } g\}\big/\{\text{isometries}\}. \tag{15}$$

Weil–Petersson 概率 $\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}$通过对测度进行归一化来定义

$\mathrm{Vol}_g^{\mathrm{WP}}$，再除以其总质量 V_g。相应的期望为

$$\mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}[\phi] := \frac{1}{V_g}\int_{\mathcal{M}_g} \phi(X)\,\mathrm{dVol}_g^{\mathrm{WP}}(X). \tag{16}$$

在 [AM23], 中，我们引入了一个“计数”函数 $V_g^{\mathrm{all}}(\ell)$, 它使我们能够研究亏格为 g 的随机双曲曲面上的长度谱分布。

命题 2.2 ([AM23])。 对于任意 $g \geq 2$，存在唯一的局部可积函数 $V_{\mathrm{all}g}$：$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 使得，对于任意测试函数 F，

$$\langle F\rangle_g^{\mathrm{all}} := \mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{G}(X)} F(\ell_X(\gamma))\right] = \frac{1}{V_g}\int_0^{+\infty} F(\ell)V_g^{\mathrm{all}}(\ell)\,\mathrm{d}\ell. \tag{17}$$

注记 2.3。 在全文中，我们所说的测试函数 F是指一个可测函数 $F:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$，它有界且具有紧支撑。

总体体积函数 $V_g^{\mathrm{all}}(\ell)$ 是随机双曲曲面的总体计数函数 N_d^{irr}、$_n(\ell)$ 的类似物。它计算随机双曲曲面上长度为 ℓ、亏格为 g的原始闭测地线的数量。

与图的情形一样，函数 $V_g^{\mathrm{all}}(\ell)$ 过于复杂，无法直接研究；按照我们希望研究的测地线的拓扑类型对其进行分解，将会大有裨益：

$$V_g^{\mathrm{all}}(\ell) = \sum_{\mathbf{T}} V_g^{\mathbf{T}}(\ell) \tag{18}$$

其中求和遍历亏格为 g**的曲面上闭测地线的所有局部类型** T。局部类型概念的精确定义推迟到第3节给出。现在，我们可以把局部类型理解为测地线本身的拓扑（我们不关心它如何嵌入亏格为 g的曲面中）。局部类型的例子包括简单局部类型（没有自交点的测地线）和八字曲线（恰有一个自交点的测地线）。

每种局部类型$\mathbf{T}$ 都有一个绝对欧拉示性数 $\chi(\mathbf{T}) \geq 0$，且只有简单局部类型的绝对欧拉示性数等于 0。基于 Mirzakhani 的积分与拓扑递归公式，我们在 [AM23]中证明，与图的情形一样，函数 $V_g^{\mathbf{T}}(\ell$可按 $1/g$的幂作渐近展开：

$$\frac{V_g^{\mathbf{T}}(\ell)}{V_g} = \sum_{k=\chi(\mathbf{T})}^{K} \frac{f_k^{\mathbf{T}}(\ell)}{g^k} + \mathcal{O}_{\epsilon,K,\chi(\mathbf{T})}\left(\frac{e^{(1+\epsilon)\ell}}{g^{K+1}}\right). \tag{19}$$

系数 $(f_k^{\mathbf{T}}(\ell))_{k\geq 0}$ 是这个故事的主角。

2.2.2 Friedman–Ramanujan 函数

我们这场冒险的第二位主角，是 Friedman–Ramanujan 函数这一概念，我们在 [AM23] 中介绍了它。

定义 2.4。对于两个整数 K，N，我们将集合 $\mathcal{F}^{\mathrm{K},\ \mathrm{N}}$ 定义为局部可积函数 f：$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ 的集合，其中存在一个次数为 $<$K 的多项式函数 p和一个常数 c，使得：

$$\forall \ell \geq 0, \quad |f(\ell) - p(\ell)e^{\ell}| \leq c(\ell+1)^{\mathrm{N}-1}e^{\ell/2}. \tag{20}$$

这样的函数称为 Friedman–Ramanujan 函数 （次数为 (K,N)）。集合 $\mathcal{F}^{\mathrm{K},\mathrm{N}}$ 配备了范数

$$\|f\|_{\mathcal{F}^{\mathrm{K},\mathrm{N}}} = \|p\|_{\infty} + \sup_{\ell \geq 0} \frac{|f(\ell) - p(\ell)e^{\ell}|}{(\ell+1)^{\mathrm{N}-1}e^{\ell/2}}, \tag{21}$$

其中 $\|p\|_{\infty}$ 是多项式空间上的 ℓ^{∞}-范数。集合*Friedman– Ramanujan* 余项 $\mathcal{R}^{\mathrm{N}} \subset \mathcal{F}^{\mathrm{K},\ \mathrm{N}}$定义为 $\mathcal{F}^{0,\mathrm{N}}$，也就是说，它是满足 $p = 0$ 的 Friedman– Ramanujan 函数的集合。

我们类似地定义弱空间 $\mathcal{F}^{\mathrm{K},\ \mathrm{N}}_{,w}$和 $\mathcal{R}^{\mathrm{N}}_{w}$，并配备弱范数$\|\cdot\|^{w}_{\mathcal{F}^{\mathrm{K},\mathrm{N}}}$，方法是将定义 (20) 替换为积分形式：

$$\forall \ell \geq 0, \quad \int_0^{\ell} |f(s) - p(s)e^{s}|\,\mathrm{d}s \leq c(\ell+1)^{\mathrm{N}-1}e^{\ell/2}. \tag{22}$$

顾名思义，强定义蕴含弱定义。值得注意的是，在 Friedman 的工作中，函数定义在 $\mathbb{Z}_{>0}$ 上而非 $\mathbb{R}_{\geq 0}$上，因此弱定义与强定义之间并无区别。

现在我们可以陈述用于证明谱隙结果的关键论证了。

定理 2.5。 设 **T** 是一个非“简单环”的局部类型。那么，对于任意 $k \geq 0$，函数 $\ell \mapsto f_k^{\mathbf{T}}(\ell)$ 在弱意义下是一个 *Friedman–Ramanujan* 函数。此外，其次数和范数均可由一个仅依赖于阶数 k 和 $\chi(\mathbf{T})$的常数界定。

之所以在该表述中特别指出简单局部类型，是因为其函数在 0 处有一个一阶极点，因此需要乘以 $\ell \mapsto \ell$。尽管这并非 [WX22所采用的方法，LW24], 概率谱隙$\lambda_1 \geq \frac{3}{16} - \epsilon$ 与定理2.5 对简单局部类型成立有关。我们在 χ（**T**） $\in \{0, 1\}$ 中的情形下证明了定理 [AM23], 2.5，这是我们证明 $\lambda_1 \geq \frac{2}{9} - \epsilon$概率界的主要步骤之一。在一般情形下证明定理2.5 是我们新文章 [AM25]的主要篇幅。

2.3 通过卷积实现 Friedman–Ramanujan 性质的稳定性

最后，我们将介绍一个基本观点，以此结束本节；我们的定理 2.5的证明正是建立在这一观点之上：Friedman–Ramanujan 假设在卷积下的稳定性。

2.3.1 通常卷积的情形

Friedman 在 [Fri03] 中提到，d-Ramanujan 函数类在卷积下保持稳定。我们的 Friedman–Ramanujan 假设也有这一性质，我们可以作如下初等观察。

命题 2.6. 若 $f_i \in \mathcal{F}^{\mathrm{K}_i,\mathrm{N}^i}$ 对于 $i \in \{1,2\}$ 成立，则卷积

$$f_1 * f_2(\ell) = \int_0^\ell f_1(\ell_1) f_2(\ell - \ell_1)\,\mathrm{d}\ell_1$$

属于 $\mathcal{F}^{\mathrm{K},\mathrm{N}}$ 对于 $\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$ 以及 $\mathrm{N} = \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2$。

我们可以通过直接（但并非完全显而易见的）计算来证明这一点：在卷积中用近似值替换 f_1、f_2 时，逐项考察出现的各项。不过，还有一种更优雅的方法可以证明这种稳定性，我们将在此介绍，因为在更复杂的情形中我们也会采用这种方法。

首先要注意，定理 2.6 在两个函数都是弗里德曼–拉马努金余项的情形下，只需一行即可给出上界：

$$|f_1 * f_2(\ell)| \le c_1 c_2 \int_0^\ell (\ell_1+1)^{\mathrm{N}_1-1}(\ell-\ell_1+1)^{\mathrm{N}_2-1} e^{\frac{\ell}{2}}\,\mathrm{d}\ell_1 \le c_1 c_2 (\ell+1)^{\mathrm{N}-1} e^{\frac{\ell}{2}}.$$

这一点实际上很重要：假设 $\mathcal{R}^{\mathrm{N}}$ 是一个相当简单的性质，因为只需给出一个上界即可确立它。相比之下，$\mathcal{F}^{\mathrm{K},\mathrm{N}}$ 的定义要困难得多，因为我们希望证明该函数具有非常具体的渐近行为，且精度要求很高。

第二个关键观察是将 Friedman–Ramanujan 函数空间刻画为积分方程。该刻画依赖于一个关键事实：指数函数是微分算子 ∂ –Id 的核；更一般地，对于多项式 p，形如 $p(\ell)e^\ell$ 的函数是其迭代算子的核。我们将这些微分方程转化为积分方程，以避免处理正则性问题；为此，我们定义了两个作用于局部可积函数的算子：$\mathcal{P} = \mathcal{P}_x = \int_0^x$（取在 0 处为零的原函数）和 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_x = \mathrm{Id} - \mathcal{P}_x$。显然但很有用的是，$\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{L}$ 保持 $\mathcal{F}^{\mathrm{K},\,\mathrm{N}}$ 和 $\mathcal{R}^{\mathrm{N}}$，弱版本也同样如此。我们有以下结果。

引理 2.7. 设 K、N 为两个整数，且 $f\colon \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ 局部可积，

$$f \in \mathcal{F}^{\mathrm{K},\mathrm{N}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^{\mathrm{K}} f \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}}.$$

证明. 我们运用标准的常微分方程技巧和积分上界，并结合以下事实：函数 $p(\ell)e^\ell$（其中 p 是次数为 $<\mathrm{K}$ 的多项式）构成积分算子 $\mathcal{L}^{\mathrm{K}}$ 的核。 □

第三个也是最后一个关键要素，是以下通常卷积与积分算子 $\mathcal{L}$之间的交换关系：

$$\mathcal{L}^{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}(f_1 * f_2) = \mathcal{L}^{\mathrm{K}_1} f_1 * \mathcal{L}^{\mathrm{K}_2} f_2. \tag{23}$$

现在我们准备通过卷积证明 Friedman–Ramanujan 假设的稳定性。

证明。 如果 $f_i \in \mathcal{F}^{\mathrm{K}_i,\ \mathrm{N}^i}$，那么 $\mathcal{L}^{\mathrm{K}_i} f_i \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}_i}$ 根据定理 2.7。因此，利用 Friedman–Ramanujan 余项情形下的稳定性，我们得到

$$\mathcal{L}^{\mathrm{K}}(f_1 * f_2) = (\mathcal{L}^{\mathrm{K}_1} f_1) * (\mathcal{L}^{\mathrm{K}_2} f_2) \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}}, \tag{24}$$

这意味着 $f_1 * f_2 \in \mathcal{F}^{\mathrm{K},\ \mathrm{N}}$ 根据定理 2.7 亦可再次得出，这正是我们要证明的结论。 □

2.3.2 不过……我们为什么要讨论卷积?

下面我们非正式地粗略说明卷积这一概念与我们的问题有何关联。回想一下，为了证明谱隙结果，我们希望研究的函数是平均几何计数函数，它们用于统计随机对象上具有固定拓扑的环路。例如，在图的情形中，我们将统计随机图上长度为 ℓ 的所有 8 字形环路。此时，自然可以将这样的 8 字形环路看作两个简单环的拼接，它们的长度分别为 ℓ_1 和ℓ_2，且满足 $\ell_1 + \ell_2 = \ell$；见图 4。从某种意义上说，这意味着8字形环路的计数函数会“类似于”对长度分别为 ℓ_1 和 $\ell - \ell_1$的简单环对的计数函数求和，其中 ℓ_1 从 0 到 ℓ变化；换句话说，这就是离散卷积。

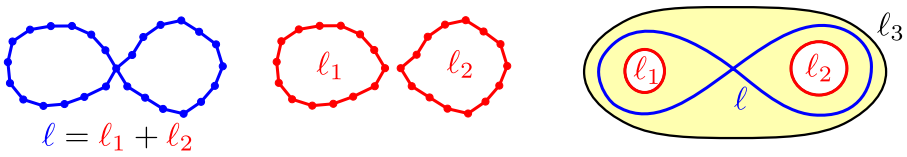

图 4：将八字曲线拆分成更简单的环路，适用于图和双曲曲面。

因此，为了证明八字曲线（或更复杂拓扑类型）的计数函数是 Ramanujan 函数，可以尝试将其写成 Ramanujan 函数的卷积，并利用这一类函数的稳定性。随着我们研究最优谱隙问题所要求的极其复杂的拓扑类型，这种方法会更加有用。

对于双曲曲面，情况相同，但复杂得多；这些差异也是核心挑战之一，在图的情形中并无对应问题。我们可以认为，从离散 $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$转向连续 $\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一种困难，这确实如此。然而，主要困难实际上在于，我们只计数闭测地线，而不是任意闭环路。例如，长度为 ℓ的八字曲线，并不能分解为两条长度之和为 ℓ的闭测地线。要确定双曲曲面情形下图4所示的几何，还需要一个额外的几何参数（例如 ℓ_3 裤子曲面第三个边界分量的长度）。在这种情况下，我们有

$$\cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) = 2\cosh\left(\frac{\ell_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{\ell_2}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\ell_3}{2}\right), \tag{25}$$

这是一个相当不错的公式，但可以说比 $\ell = \ell_1 + \ell_2$ 更复杂。

在 [AM23], 中，我们证明八字曲线的体积函数实际上可以视为 Friedman–Ramanujan 函数的卷积，其中带有一个

额外的角度参数（即八字曲线交点处的角度）。很难看出如何将这种方法推广到任意复杂的拓扑类型。在第3.5节中，我们将给出与式（25）类似的长度函数的一般表达式。重要的是，我们注意到，若 $\ell_1,\ \ell_2 \gg 1$ 且 ℓ_3 固定，则式（ $\ell \approx \ell_1 + \ell_2$ 25）中有。我们的表达式也将满足类似的性质，从而使我们能够以精确的意义，将体积函数与真正的 Friedman–Ramanujan 函数卷积进行比较。

2.3.3 伪卷积与稳定性

鉴于上一段所揭示的挑战，我们需要定义一种伪卷积，以推广通常的卷积概念。

定义 2.8. 我们将函数 $(f_i)_{1\le i\le n}$ 的伪卷积 定义为：其水平函数为 h，权重为 φ，并令

$$f_1 \star \ldots \star f_n|_\varphi^h(\ell)\,\mathrm{d}\ell = \int_{h(\mathbf{x})=\ell} \varphi(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\ell}$$

其中，~~$\mathrm{d}\mathbf{x}$~~ $\mathrm{d}\ell$ 表示由 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度在高度函数 h的水平集 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} : h(\mathbf{x}) = \ell\}$ 上诱导的体积。

在对所涉及的函数作出合理假设的前提下，这一定义是成立的。值得注意的是，我们希望上述 h的水平集具有良好的结构：希望能够将方程 $h(x_1,\ldots,x_n) = \ell$ 的解 x_1 表示为定义域上的 $\ell, x_2, \ldots, x_n$ 的良好函数，并且满足反函数定理的假设，从而能在积分域上写出 $\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\ell = \frac{\partial x_1}{\partial \ell}\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$（对于任何选择的显式变量，也有相应的等价表达式）。

请注意，通常卷积的情形对应于 $h(\mathbf{x}) = x_1 + \ldots + x_n$和 $\varphi \equiv 1$。因此，这里我们允许卷积不再发生在水平集 $x_1 + \ldots + x_n = \ell$上，而是发生在更一般类型的水平集上，并且进一步引入一个权重。我们将在第3.2节看到这类积分自然出现。

对于一般的 h 和 φ，伪卷积这一概念的范围很广，可能与实际的卷积完全不同。不过，我们将在关于 h 和 φ的附加假设下进行研究，精确量化 (h,φ)-卷积与通常卷积相差多远。我们定义以下几类函数。

定义 2.9。设 $a > 0$。

- 我们将 $E_{(a)n}$ 记作满足以下条件的 $\mathcal{C}^\infty$ 函数 $\varphi : [a,+\infty)^n \to \mathbb{R}$ 空间：对于每个满足 $\alpha \neq (0,\ldots,0)$ 的多重指标 $\alpha \in \{0,1\}^n$，

$$\sup_{x\in[a,+\infty)^n} \left\{ e^{\alpha\cdot x} |\partial^\alpha \varphi(x)| \right\} < +\infty. \tag{26}$$

- 我们令 $\mathcal{E}_{(a)n}$ 为满足以下条件的函数空间：函数 $h : [a,+\infty)^n \to \mathbb{R}$ 使得函数 $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto h(x_1,\ldots,x_n) - \sum_{j=1}^n x_j$属于 $E_{(a)n}$。

我们证明以下关于 Friedman–Ramanujan 猜想的稳定性结论（在函数 h 和 φ 满足使 (h,φ)-伪卷积有定义的自然假设下）。

定理 2.10。 设 $a>0$。我们假设 $h\in\mathcal{E}_n^{(a)}$和 $\varphi\in E_n^{(a)}$。若$(f_j)^{1\le j\le n}$是 $\mathcal{F}$中的连续函数，则 $f_1\star\ldots\star f_n|_\varphi^h\in\mathcal{F}$。

虽然该陈述本身并未直接用于定理 1.1的证明，但其证明与我们用于建立定理 2.5的技巧极为相似。因此我们在此略述其证明。

证明。 证明思路与通常卷积的证明相同，不过由于这两种运算之间存在差异，且此处的定义更加繁复，证明也更为复杂。更确切地说，对于每个 $1\le j\le n$，我们令 $(\mathrm{K}j,\ \mathrm{N}j)$ 为 f_j的 Friedman–Ramanujan 阶，从而 $f_j\in\mathcal{F}^{\mathrm{K}_j,\ \mathrm{N}^j}$。由定理 2.7， $\mathcal{L}^{\mathrm{K}j}f_j\in\mathcal{R}^{\mathrm{N}_j}$。对于 $\mathrm{K}=\sum_{j=1}^n\mathrm{K}j$和 $\mathrm{N}=\sum_{j=1}^n\mathrm{N}j$，我们证明伪卷积 $f_1*\ldots*f_n|_\varphi^h$ 在算子 $\mathcal{L}^{\mathrm{K}}$ 作用下的像属于 $\mathcal{R}^{\mathrm{N}+n}$，这意味着，根据定理 2.7，再次有 $f_1*\ldots*f_n|_\varphi^h\in\mathcal{F}^{\mathrm{K},\ \mathrm{N}+n}$。为方便起见，不失一般性地假设，对于每个$1\le j\le n$，$\mathrm{K}_j\le\mathrm{N}j$ 。

首先，与通常卷积的情形一样，我们来处理对所有 j都有 $\mathrm{K}_j=0$ 的情形，即所有函数都是弗里德曼–拉马努金余项的情形。证明只需给出一个简单的上界。事实上，对 $\ell\ge0$，根据定义，

$$f_1*\ldots*f_n|_\varphi^h(\ell)=\int\varphi(x_1,\ldots,x_n)\prod_{j=1}^n f_j(x_j)\,\frac{\partial x_1}{\partial\ell}\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n \tag{27}$$

其中积分遍历满足方程h(${x_1}$、……、 ${x_n}$) $=\ell$有解 $x_1=x_1$(${\ell}$、 ${x_2}$、……、 ${x_n}$)的所有取值 ${x_2}$、……、 ${x_n}$。关于 h 和 φ 的全局假设之一是，它们 $\left|\frac{\partial x_1}{\partial\ell}\right|$ 和 $|\varphi|$ 一致有界。我们还注意到，如果$\overline{h}\in\mathcal{E}_n^{(a)}$，那么存在 $l_0>0$ 使得

$$\sum_{j=1}^n x_j\le h(x_1,\ldots,x_n)+l_0. \tag{28}$$

我们称这种不等式为比较估计。对每个 f_j应用弗里德曼–拉马努金假设，我们得到如下形式的上界

$$\Big|\prod_{j=1}^n f_j(x_j)\Big|\le C\prod_{j=1}^n(x_j+1)^{\mathrm{N}_j-1}e^{x_j/2} \tag{29}$$

这意味着，利用比较估计（28），

$$\Big|\prod_{j=1}^n f_j(x_j)\Big|\le C'(\ell+1)^{\mathrm{N}-n}e^{\ell/2} \tag{30}$$

在水平集 $h(x_1, \ldots\ldots, x_n) = \ell$ 上，其中 C' 是一个依赖于 l_0 的常数。综上所述，我们可以得出

$$\left|f_1 * \ldots * f_n|_{\varphi}^{h}(\ell)\right| \leq C''(\ell+1)^{\mathrm{N}-n} e^{\ell/2} \int_{\sum_{j=2}^{n} x_j \leq \ell + l_0} \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n, \tag{31}$$

由此得出该结论，因为上面的积分有界于 $(\ell + l_0)^{n-1}$.

现在我们继续讨论一般情形。为此，我们描述算子 $\mathcal{L}$如何作用于伪卷积，并将（23）推广到伪卷积的情形。关键是要确保将出现的各项拆分开来，以便证明每一项都满足所需的界。我们证明

$$\mathcal{L}^{\mathrm{K}}(f_1 * \ldots * f_n|_{\varphi}^{h}) = \sum_{\pi, t, t'} \mathcal{L}^{t} \mathcal{P}^{t'} (\partial^{\pi_1} \Phi_1 * \ldots * \partial^{\pi_n} \Phi_n|_{\partial^{\pi_0}\varphi}^{h}) \tag{32}$$

其中，求和遍历如下的一组取值 (π, t, t'):

- 整数 t 和 t' 满足 $0 \leq t + t' \leq \mathrm{K}$;
- $\pi = (\pi_0, \ldots\ldots, \pi_n)$ 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的一个由互不相交子集组成的族，满足：对每个 $1 \leq j \leq n$， $j \notin \pi_j$; 并且对所有 j， $\partial^{\pi_j} := \prod_{i \in \pi_j} \partial_{x_i}$;
- 每个函数 Φ_j 都可由 f_j 通过以下某种变换得到:
  - we may have $\Phi_j = \mathcal{L}_{x_j}^{\mathrm{K}_j} f_j \times \partial_{x_j} h$;
  - or $\Phi_j = f_j \times (1 - \partial_{x_j} h)$;
  - or $\Phi_j = \mathcal{P}_{x_j}\left(\mathcal{L}_{x_j}^{t} f_j \times (1 - \partial_{x_j} h)\right) \times \partial_{x_j} h$ for an integer $0 \leq t < \mathrm{K}_j$;
  - or $\Phi_j = \mathcal{P}_{x_j}\left(\mathcal{L}_{x_j}^{t} f \times \partial_{x_j} h\right)$ for a $0 \leq t < \mathrm{K}_j$, in which case $j \in \pi_0$.

然后，我们利用 Friedman–Ramanujan 假设（该假设表明，当 $t < \mathrm{K}j$ 时，$\mathcal{L}^t f_j$ 的增长至多为 $(\ell+1)^{\mathrm{N}_j - 1} e^{x_j}$，并且当 $t =$Kj时，指数因子可改进为 $e^{x_j/2}$），以及关于 h 和 φ 的假设，证明如下形式的界

$$\left|\partial^{\pi_0}\varphi \prod_{j=1}^{n} \partial^{\pi_j} \Phi_j\right| \leq C \prod_{j=1}^{n} (x_j + 1)^{\mathrm{N}_j} e^{x_j/2}. \tag{33}$$

更准确地说，在上述前三种情形中，借助关于 $\partial^{\pi_j}\Phi_j$ 的假设，我们可以分别将函数界定为 $(x_j+1)^{\mathrm{N}_j} e^{x_j/2}$，这仅需用到关于 f_j 和 h 的假设；在最后一种情形中，我们利用关于 φ 的假设以及 $j \in \pi_0$ 这一事实，在$e^{-x_j/2}$的衰减中得到一项 $\partial^{\pi_0}\varphi$，从而抵消$\ell+1)^{\mathrm{N}_j} e^{x_j}$的增长率 $\partial^{\pi_j}\Phi_j$。因此，当 K33时，方程 (29)自然由方程 ($_j = 0$)取代，结论与之前相同。 □

3 韦伊–彼得森体积函数

在第二场讲座中，我们将聚焦于第 V_g^{all}节中引入的体积函数 $\ell)V_g^{\mathbf{T}}$（ℓ）2.2.1。我们将给出

体积函数 $V_{\mathbf{T}g}(\ell)$ 的闭表达式，并给出比值 $V_g^{\mathbf{T}}(\ell)/V_g$关于 $1/g$的完整渐近展开。尽管我们最初研究这些体积函数的动机，是为了证明关于随机双曲曲面谱隙的定理 1.1 ，但这些对象和结果纯粹属于几何范畴，我们希望它们能用于研究随机双曲曲面几何的其他方面。

3.1 分解平均值与局部拓扑类型

回顾一下，总体计数函数 $V_g^{\mathrm{all}}(\ell)$ 由以下性质确定

$$\langle F\rangle_g^{\mathrm{all}} := \mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{G}(X)} F(\ell_X(\gamma))\right] = \frac{1}{V_g}\int_0^{+\infty} F(\ell)V_g^{\mathrm{all}}(\ell)\,\mathrm{d}\ell \tag{34}$$

其中，$\mathcal{G}(X)$ 是 X 上的本原闭测地线集合；对于任意 $\gamma\in\mathcal{G}(X)$，$\ell_X(\gamma)$ 表示 γ 的长度。为理解和研究平均值$\langle F\rangle_g^{\mathrm{all}}$及其相关的总体体积函数 $V_{\text{全部}g}(\ell)$，自然可以根据其中闭测地线的拓扑对求和进行拆分：

$$\langle F\rangle_g^{\mathrm{all}} = \sum_{\mathbf{T}}\langle F\rangle_g^{\mathbf{T}} \quad \text{with} \quad \langle F\rangle_g^{\mathbf{T}} := \mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\gamma\sim\mathbf{T}} F(\ell(\gamma))\right] \tag{35}$$

其中，我们写作 $\gamma\sim\mathbf{T}$ 表示 γ “具有拓扑类型 $\mathbf{T}$”。这意味着我们将总体体积函数改写为

$$V_g^{\mathrm{all}}(\ell) = \sum_{\mathbf{T}} V_g^{\mathbf{T}}(\ell) \tag{36}$$

其中 $V_g^{\mathbf{T}}\colon \mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是由以下性质定义的体积函数：对于任意测试函数 F，

$$\langle F\rangle_g^{\mathbf{T}} = \frac{1}{V_g}\int_0^{+\infty} F(\ell)V_g^{\mathbf{T}}(\ell)\,\mathrm{d}\ell. \tag{37}$$

3.1.1 简单环与非简单

文献中有一种特定的体积函数已得到深入研究：函数 $V_g^{\mathbf{s}}(\ell)$ 定义如下

$$\langle F\rangle_g^{\mathbf{s}} = \mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\gamma\ \text{simple}} F(\ell(\gamma))\right] = \frac{1}{V_g}\int_0^{+\infty} F(\ell)V_g^{\mathbf{s}}(\ell)\,\mathrm{d}\ell, \tag{38}$$

即简单闭测地线对总体平均值的贡献 $\langle F\rangle_g^{\mathrm{all}}$。Mirzakhani 在 [Mir07] 给出了 $V_g^{\mathbf{s}}(\ell)$ 关于模空间体积的一个简洁表达式，我们将在第3.2.2节介绍。

在 $g\to+\infty$ 情形下，可以证明体积函数 $V_g^{\mathrm{all}}(\ell)$ 可以由简单闭测地线的贡献 $V_g^{\mathbf{s}}(\ell)$ 很好地近似。这

一观察最早由 Mirzakhani 和 Petri 在 [MP19], 中提出，随后在 [WX22],中得到极大改进，其中 Wu 和 Xue 证明了

$$V_g^{\mathrm{all}}(\ell) = V_g^{\mathbf{s}}(\ell) + \mathcal{O}_\epsilon\left(\frac{e^{(1+\epsilon)\ell}}{g}\right). \tag{39}$$

我们可以将其视为按类型划分的一个例子：拓扑类型分为“简单”和“非简单”。这种划分非常粗略，缺乏精确性。事实上，接下来我们会看到， $1/g^K$ 阶的渐近展开$V_g^{\mathrm{all}}(\ell)/V_g$ 中的项，包含越来越复杂的非简单测地线的贡献；随着精度 K 提高，我们需要逐一描述这些测地线。

3.1.2 MCG 类型

文献中还有另一种方法，即根据闭测地线的 MCG 类型 对求和 $\langle F\rangle_g^{\mathrm{all}}$进行划分。

曲面 X 的映射类群 MCG(X) 是曲面 X上保向微分同胚模同痕构成的集合。该群自然作用于曲面 X上的环路；如果存在 MCG(X) 中的一个元素，将环路 γ_1 映到一个与 γ_2同伦的环路，我们就称曲面 X 上的两个环路 γ_1 和 γ_2 具有相同的 MCG 类型。

按 MCG 类型拆分求和（34），是我们能够采用的最精细的拆分方式，同时也使平均值 $\langle F\rangle_g^{\mathbf{T}}$有了明确意义。这种方法在 Mirzakhani 的工作中十分常见，其中这些类型被称为拓扑类型。

随后将简单闭测地线分为 g 种不同的拓扑类型：非分离的，以及将曲面分成两个连通分支的情形，其中环路左侧的亏格为 $1 \le i \le g-1$，右侧的亏格为 $g-i$。见图5。

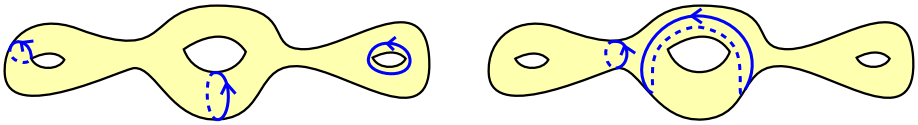

图 5：亏格为 3 的曲面上的简单环示例：左侧为非分离环，右侧为分离环，将曲面分为亏格分别为 1 和 2 的两部分。

3.1.3 局部类型

在我们的工作中，我们引入了一种按局部拓扑类型拆分求和的新方法。这种拆分比 Mirzakhani 的方法粗略，但比简单环与非简单环的拆分精细得多。它恰好处于一个合适的折中点：既足够精细，能够为每一项 $V_g^{\mathbf{T}}(\ell)$ 写出简单的表达式，又能将许多相似的贡献归为一组，从而减少繁琐拓扑枚举的需要。

我们的局部类型概念，就是放大观察 X上的闭测地线 γ 及其邻域，同时忽略这个邻域之外发生的事情。因此，例如，所有简单闭测地线都属于

同一种局部类型，因为从局部来看，它们都“像”圆柱 $[-1,1]\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$内的圆 $\{0\}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。

我们自然希望通过取测地线的正则邻域 γ 来定义其邻域 $\mathcal{N}$，然后考虑这一对（$\mathcal{N}$，γ），如同上文对简单闭测地线所做的那样。然而，（$\mathcal{N}$，γ）这一对并非仅由 γ 的同伦类作为函数确定。这是个问题，因为当我们改变度量时，同一环路同伦类在两种不同度量下的测地线代表可能并不同痕。图图6展示了这一现象的一个例子。

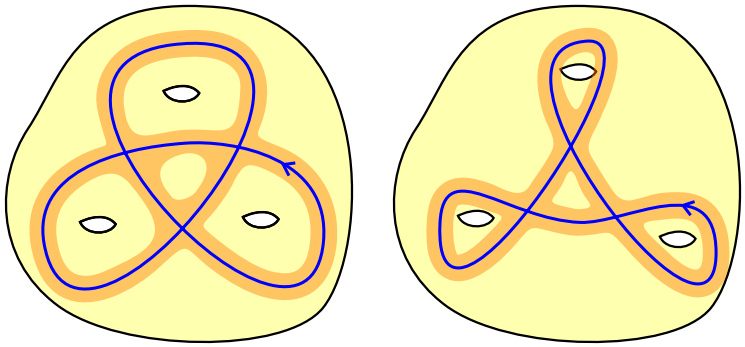

图6：两条蓝色环路同伦但不同痕。

幸运的是，根据 [GS97] ，我们知道，任意两条处于最小位置的同伦环路，只相差有限次第三类 Reidemeister 变换以及一次同痕。这种变换恰好对应于图6中两条环路之间的差异。它与 $\mathcal{N}$在 X中的补集里的可缩连通分支有关。这启发我们给出以下定义。

定义3.1。 若 γ 是 X上的一条环路，我们将通过把 $X\setminus\mathcal{N}$的任意可缩连通分支粘到其正则邻域 $\mathcal{N}$上，来定义由 γ 填充的曲面 $S(\gamma)$。

于是，曲面 $S(\gamma)$由 γ填充，也就是说，$S(\gamma)\setminus\gamma$ 的所有连通分支都是可缩的。对 γ的同伦类而言，数对$(S(\gamma)\ \gamma)$定义良好，且在同痕意义下唯一。

例3.2。 由一条不可缩简单环填充的曲面是一个圆柱。一条八字曲线填充一个裤子曲面，如图4所示。在图 6中，将中心圆盘添加到正则邻域中构造出填充曲面，从而得到一个亏格为0 且有4 个边界分支的曲面。请注意，这两条环路在 $S(\gamma)$ 中同伦， $\mathcal{N}$中则不同伦。

现在我们可以定义局部类型这一概念了。

定义3.3。 设 X 为一紧致双曲曲面。若存在保向同胚$S(\gamma_1)\to S(\gamma_2)$，将 γ_1 映到一条与 γ_2同伦的环路上，则称 X上的两个环路 γ_1、 γ_2 属于同一局部类型 。

如此构造的局部类型概念涵盖了测地线本身的局部拓扑，但不包括它在亏格为 g 的曲面中的嵌入方式。局部类型的概念与同伦类中代表元的选择无关。具有相同 MCG 类型的两个环路也具有相同的局部类型，因此这一概念较为粗略。

例 3.4。若 γ_1，γ_2 是曲面 X上的两条不可缩简单环路$S(\gamma_1)$ 上的 $S(\gamma_2)$ 和 γ_1 上的 γ_2，那么它们各自填充一个圆柱，并且很容易定义一个同胚，将$S(\gamma_1)$ 上的 $S(\gamma_2)$ 和 γ_1 上的 γ_2相互对应。因此，所有简单闭测地线都归入同一种局部类型，即简单局部类型，与平均值 $\langle F\rangle_g^{\mathrm{s}}$ 和体积 $V_g^{\mathrm{s}}(\ell)$ 相关，这些内容已在第 *3.1.1* 节中介绍。

正如简单环的情形所示，从 MCG 类型转到局部类型时，我们“忘记”的信息是补集 $X \setminus S(\gamma)$ 的拓扑。因此，我们可以按以下方式内在地定义局部类型。

记号 3.5。对于满足 $2g_{\mathbf{S}} - 2 + n_{\mathbf{S}} \geq 0$ 的任意一对整数 $(g_{\mathbf{S}},\ n_{\mathbf{S}})$，我们关联一个固定的 光滑定向曲面 $\mathbf{S}$，其型为 $(g_{\mathbf{S}},\ n_{\mathbf{S}})$。我们用 $\chi(\mathbf{S}) = 2g_{\mathbf{S}} - 2 + n_{\mathbf{S}}$ 表示 $\mathbf{S}$ 的绝对欧拉示性数。这对整数 $(g_{\mathbf{S}},\ n_{\mathbf{S}})$ 的数据，或等价地，曲面 $\mathbf{S}$，称为填充类型。

定义 3.6。局部环路是一个有序对（$\mathbf{S}$，$\mathbf{c}$），其中$\mathbf{S}$ 是一个填充类型，$\mathbf{c}$ 是填充$\mathbf{S}$的本原环路。若以下两个条件成立，则称两个局部环路（$\mathbf{S}$，$\mathbf{c}$）和（$\mathbf{S}'$，$\mathbf{c}'$）局部等价：

- $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$（即 $g_{\mathbf{S}} = g_{\mathbf{S}'}$ 且 $n_{\mathbf{S}} = n_{\mathbf{S}'}$）；
- 存在一个保向同胚 $\psi : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$，它可以置换$\mathbf{S}$的边界分支，并且 $\psi \circ \mathbf{c}$ 与$\mathbf{c}'$同伦。

这定义了局部环路上的一个等价关系。该关系下的等价类记作 $\mathbf{T} = [\mathbf{S},\ \mathbf{c}]_{\mathrm{loc}}$，称为环路的局部（拓扑）类型。局部类型的绝对欧拉示性数定义为 $\chi(\mathbf{T}) := \chi(\mathbf{S})$。

定义 3.7。设 X 为一个紧致双曲曲面。对于 $\gamma \in \mathcal{G}(X)$，称$\gamma$ 具有局部拓扑类型 $\mathbf{T}$，并记为 $\gamma \sim \mathbf{T}$，若局部环路（$S(\gamma)$ γ）是等价类$\mathbf{T}$的一个代表元。

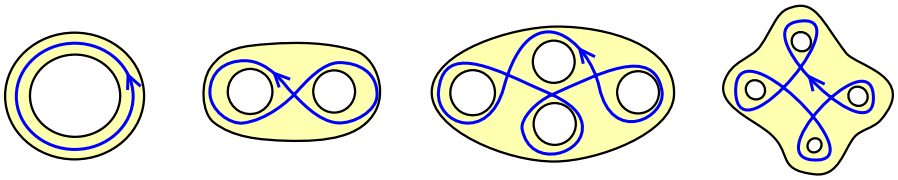

图 7：局部拓扑类型的示例。

局部类型的示例见图 7。最左侧的是简单局部类型，它填充一个圆柱。第二个是八字曲线，它填充一个裤子曲面。最后两个示例属于填充类型 $(0,\ 4)$：第一个是广义 8 字形环路这一类的示例，这是我们接下来要研究的对象。

3.2 写成积分

现在我们已经定义了局部类型 $\mathbf{T}$，以及体积函数 $V_g^{\mathbf{T}}(\ell)$，接下来将介绍计算它的方法。第一步是像我们在 [AM23].中所做的那样，将其写成积分。

3.2.1 带边界的双曲曲面与 Teichm¨uller 空间

下文中，由于我们将沿若干条测地线切割紧曲面，因此需要考虑带边界的双曲曲面。对于满足 $2g-2+n>0$ 且 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_{>0}$ 的两个整数 (g,n)，记 $\mathcal{M}_{g,n}(\mathbf{x})$ 为亏格为 g 、具有 n 个标记的测地边界分支且其长度分别为 $x_1,\dots,x_n$ 的双曲曲面模空间，其中按保持边界分支标记的等距变换取商。

$\mathcal{M}_{g,n}(\mathbf{x})$ 的万有覆盖是 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{x})$，可按如下方式实现。$\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{x})$ 的一个元素由一对 (X,ϕ) 构成，其中 X 是如上所述的双曲曲面，而 $\phi:S_{g,n}\to X$ 是一个标记，即从固定的型为 (g,n) 的基曲面 $S_{g,n}$ 到 X 的保向微分同胚。若且唯若存在等距变换 $i:X_1\to X_2$，使得 $i\circ\phi_1$ 与 ϕ_2 同伦，我们才将 $\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{x})$ 中的两对 (X_1,ϕ_1)、(X_2,ϕ_2) 视为等同。

映射类群 $\mathrm{MCG}_{g,n}$ 在$S_{g,n}$ 上的作用$\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{x})$由对标记进行预合成给出：$\psi\cdot(X,\phi):=(X,\phi\circ\psi^{-1})$。于是，模空间$\mathcal{M}_{g,n}(\mathbf{x})$是$\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{x})$在此作用下的商。

空间$\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{x})$配备了 Weil–Petersson辛形式，由此诱导出 Weil–Petersson体积形式 $\mathrm{Vol}^{\mathrm{WP}}_{g,n,\mathbf{x}}$。该体积形式在映射类群的作用下保持不变，因此下降为模空间$\mathcal{M}_{g,n}(\mathbf{x})$上的体积形式，仍记作同一符号。尽管$\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{x})$的体积无穷大，$\mathcal{M}_{g,n}(\mathbf{x})$的体积却有限，我们将其记为$V_{g,n}(\mathbf{x})$。Mirzakhani 在 [Mir07] 证明，$V_{g,n}(\mathbf{x})$是关于$\mathbf{x}$ 的多项式函数，并给出了用于计算它的递归公式。

3.2.2 简单局部类型的情形

在一篇开创性论文中 [Mir07], Mirzakhani 证明，可以用一个巧妙的论证计算体积函数 $V_g^{\mathbf{s}}(\ell)$。如果一条亏格为 X g 的双曲曲面包含一条长度为 ℓ的简单闭测地线，那么沿着这条闭测地线将曲面 X 切开后，我们会得到一个新的双曲曲面，其边界上有两个长度恰好为 ℓ 的测地线边界分支（所得曲面可能连通，也可能不连通，这取决于 γ的 MCG 类型）。为了还原初始曲面，我们应沿测地线将这个曲面重新粘合起来，其中有一个自由度，即扭转参数，它是 $\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$的一个元素。

由此可知，亏格为 g 且包含一条长度恰好为 ℓ 的简单闭测地线的双曲曲面集合，可以与带有两个长度为 ℓ 的边界分支的带边界双曲曲面模空间的并集相对应，并附加一个取值于 $\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$ 中的扭转参数。这一论证可以严格化，并且

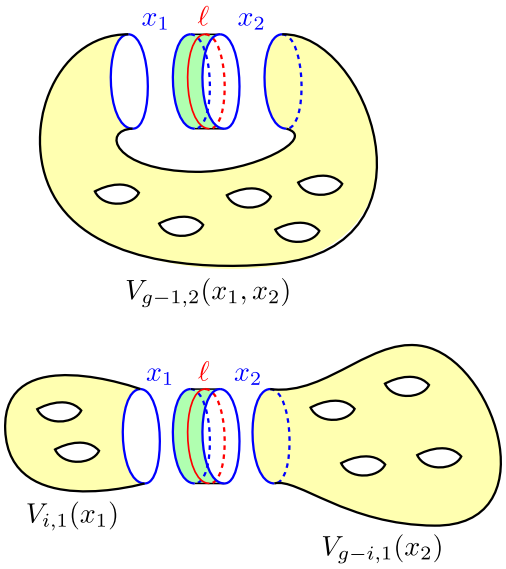

图8：简单测地线情形下公式的示意图。

得到漂亮的闭表达式

$$V_g^{\mathbf{s}}(\ell) = \ell V_{g-1,2}(\ell,\ell) + \ell \sum_{i=1}^{g-1} V_{i,1}(\ell) V_{g-i,1}(\ell). \tag{40}$$

该求和枚举了沿简单闭测地线切割亏格 g 曲面后所得曲面的所有可能拓扑类型，或者说，我们的局部类型中的所有 MCG 类型。我们在图8中表示了这一枚举。需要注意的是，实际上，Mirzakhani 证明的是与 MCG 类型相关的体积函数的这一表达式，而方程（40）则是将所有这些体积函数求和后得到的。

我答应过要给出积分形式的公式。让我们用一种稍显愚蠢的方式来做这件事——对于一般局部类型而言，这样会更有意义。由一条简单闭测地线填充的曲面是一个圆柱。圆柱上的黎曼度量空间自然可识别为 $\mathbb{R}_{>0}$。如果将圆柱的两个边界分支视为自由变量 x_1、x_2，那么我们也可以将这个空间看作 $\mathbb{R}^2_{>0}$，并赋予测度

$$\mathrm{dVol}_{0,2}^{\mathrm{WP}}(x_1,x_2) := V_{0,2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \quad \text{where} \quad V_{0,2}(x_1,x_2) = \frac{1}{x_1}\delta(x_1-x_2)$$

而 δ 是狄拉克 δ 函数[2]。于是我们可以改写为

$$V_g^{\mathbf{s}}(\ell) = \int_{x_1=x_2=\ell} \Phi_g^{(0,2)}(x_1,x_2) \frac{\mathrm{dVol}_{0,2}^{\mathrm{WP}}(x_1,x_2)}{\mathrm{d}\ell} \tag{41}$$

其中：

[2]在 $V_{0,2}(x_1,x_2)$ 的定义中除以 x_1，对应于这样一个事实：将两个边界分支粘合到圆柱的两侧时，我们多出了一个扭转参数。

• 积分是在满足 $x_1 = x_2 = \ell$ 的 $(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2_{>0}$ 集合上进行的，而测度 $\mathrm{dVol}_{\mathrm{WP}0,\ 2}(x_1,\ x_2)/\,\mathrm{d}\ell$ 是由 $\mathrm{dVol}_{\mathrm{WP}0,\ 2}(x_1,\ x_2)$ 在此水平集上诱导的测度；

- 函数

$$\Phi_g^{(0,2)}(x_1,x_2) := x_1x_2V_{g-1,2}(x_1,x_2) + x_1x_2\sum_{i=1}^{g-1} V_{i,1}(x_1)V_{g-i,1}(x_2) \tag{42}$$

用于计算亏格为 g 的曲面中，边界长度分别为 x_1 和 x_2 的圆柱补集可能具有的度量。

3.2.3 一般局部类型

我们证明，对于一般局部类型 $V_g^{\mathbf{T}}(\ell$，体积函数 $\mathbf{T} = [\mathbf{S},\mathbf{c}]_{\mathrm{loc}}$ 见 [AM23，§5]。

积分域 在这种情况下，积分将在填充曲面$\mathbf{S}$上的标记双曲度量空间中进行，该空间

$$\mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}} = \{(\mathbf{x},Y), \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n_\mathbf{S}}_{>0}, Y\in\mathcal{T}_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}(\mathbf{x})\}. \tag{43}$$

这个空间自然带有测度

$$\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}(\mathbf{x},Y) = \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S},\mathbf{x}}(Y) \tag{44}$$

其中 $\mathbf{dx}$表示 $\mathbb{R}^{n_\mathbf{S}}_{>0}$ 上的勒贝格测度。有时我们会省略对 $\mathbf{x}$ 的提及；当我们不想特别强调 Y 的边界长度 $\mathbf{x}$ 时，就写作 $Y \in \mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}$ 。

由于 $Y \in \mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}$ 是一个带标记的曲面，我们可以将 $\mathbf{S}$ 上任意环路 $\mathbf{c}$ 的同伦类视为 Y 上环路的同伦类。于是，我们定义长度函数 $\mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}} \ni Y \mapsto \ell_Y(\mathbf{c})$：取 Y 上双曲度量下与 $\mathbf{c}$ 同伦的测地线代表元的长度。

这使得我们可以定义水平集

$$\{Y \in \mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}} : \ell_Y(\mathbf{c}) = \ell\} \tag{45}$$

对 $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$。Weil–Petersson 体积测度 $\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}(\mathbf{x}\ Y)$ 在这些水平集上自然诱导出一个体积，记作 $\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}(\mathbf{x}\ Y)/\mathrm{d}\ell$，其定义满足如下性质：对于任意可积函数 $F\colon \mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}} \to \mathbb{R}$，

$$\int_{\mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}} F(\mathbf{x},Y)\,\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}(\mathbf{x},Y) = \int_0^{+\infty}\Big(\int_{\ell_Y(\mathbf{c})=\ell} F(\mathbf{x},Y)\frac{\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}(\mathbf{x},Y)}{\mathrm{d}\ell}\Big)\,\mathrm{d}\ell.$$

这种在水平集上分解积分的思路，应当会让人联想到我们在第 2.3.3 节引入的伪卷积概念。事实上，稍后我们会将所得到的积分视为定义在空间 $\mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}$ 上、对应高度函数 $h_\mathbf{c}\colon Y \mapsto \ell_Y(\mathbf{c})$ 的伪卷积。

拓扑枚举 与简单环的情形一样，我们将枚举把填充曲面 S 嵌入亏格为 g 的曲面的所有方式。为此，我们定义 AM23, §4], 中的实现 $\mathfrak{R}$in [概念，它是曲面中 S 的补集的拓扑组合数据。更确切地说，一个实现 $\mathfrak{R}$ 由一个整数 $\mathfrak{q} \geq 1$、一个划分 $\vec{I} = (I_1, \ldots, I_{\mathfrak{q}})$ of$\{1, \ldots, n_{\mathbf{S}}\}$ 以及整数 $(g_1, \ldots, g_{\mathfrak{q}})$ 组成，并满足：若 $n_i := \#I_i$，则 $2g_i - 2 + n_i > 0$or $(g_i, n_i) = (0, 2)$。此外，再加上划分 $\vec{I}$ 的编号固定、使得 $i \mapsto \min(I_i)$ 按递增顺序排列这一约束，我们便能精确枚举 S 嵌入亏格为 g 的曲面的所有方式。我们将这类实现的集合记为 $R_g(\mathrm{S})$。

对于一种实现，我们可以关联一个体积函数

$$V_{\mathfrak{R}}(x_1, \ldots, x_{n_{\mathbf{S}}}) = \prod_{i=1}^{\mathfrak{q}} V_{g_i, n_i}(x_j, j \in I_i) \tag{46}$$

约定 $V_{0,2}(x, y) = \frac{1}{x}\delta(x - y)$。然后我们定义

$$\Phi_g^{\mathbf{S}}(x_1, \ldots, x_{n_{\mathbf{S}}}) := x_1 \ldots x_{n_{\mathbf{S}}} \sum_{\mathfrak{R} \in R_g(\mathbf{S})} V_{\mathfrak{R}}(x_1, \ldots, x_{n_{\mathbf{S}}}). \tag{47}$$

分布 $\Phi_g^{\mathbf{S}}$ 统计在亏格为 g 的曲面中，$\mathbf{S}$ 的补集上的可能度量。它是公式（42）的直接推广，该公式适用于圆柱，即填充类型（0,2）。注意，$\Phi_g^{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ 是一个分布而非函数，这是因为其中存在狄拉克 δ 函数，它与$\mathbf{S}$的补集中可能出现的圆柱相关。

例 3.8。下面明确写出裤子曲面$\mathbf{P}$的分布 $\Phi_g^{\mathbf{P}}(x_1, x_2, x_3)$，即填充类型$(0,3)$。这需要枚举亏格为 g 的曲面中裤子曲面$\mathbf{P}$ 的所有嵌入。我们发现

$$\begin{aligned}\Phi_g^{\mathbf{P}}(x_1, x_2, x_3) = {} & x_1 x_2 x_3 V_{g-2,3}(x_1, x_2, x_3) \\ & + x_1 x_2 x_3 \sum_{\substack{\{i_1, i_2, i_3\} \\ = \{1,2,3\}}} \sum_{i=0}^{g-2} V_{i,2}(x_{i_1}, x_{i_2}) V_{g-i-1,1}(x_{i_3}) \\ & + x_1 x_2 x_3 \sum_{g_1 + g_2 + g_3 = g} V_{g_1,1}(x_1) V_{g_2,1}(x_2) V_{g_3,1}(x_3)\Big]\end{aligned} \tag{48}$$

如图 9所示。注意，第二个求和中含有 $i = 0$ 的项对应于将一个圆柱粘接到$\mathbf{P}$的两个分支上的情形。

我们的公式现在我们可以陈述我们的公式了。

定理 3.9。设$\mathbf{T} = [\mathbf{S}, \mathbf{c}]_{\mathrm{loc}}$ 为一种局部拓扑类型。对于任意 $g \geq 3$,

$$V_g^{\mathbf{T}}(\ell) = \frac{1}{n(\mathbf{T})} \int_{\ell_Y(\mathbf{c}) = \ell} \Phi_g^{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \, \frac{\mathrm{dVol}_{g_{\mathbf{S}}, n_{\mathbf{S}}}^{\mathrm{WP}}(\mathbf{x}, Y)}{\mathrm{d}\ell} \tag{49}$$

其中积分取遍水平集 $\{Y \in \mathcal{T}^*_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}} : \ \ell_Y(\mathbf{c}) = \ell\}$，分布 $\Phi_g^{\mathbf{S}}$ 定义于 (47)，整数系数 $n(\mathbf{T})$ 是将 $\mathbf{S}$ 上的同伦类 $\mathbf{c}$保持不变的保向同胚群在同痕意义下的基数。

让我们通过一个非简单的基础例子明确写出该公式：填充类型为 (0，3) 的局部类型，即环路填充一个裤子曲面。

例 3.10。 裤子曲面的一个关键性质是，其度量完全由其边界分支的长度以及 $\mathcal{T}^*_{0,3} = \mathbb{R}^3_{>0}$ 决定。令 $\mathbf{c}$

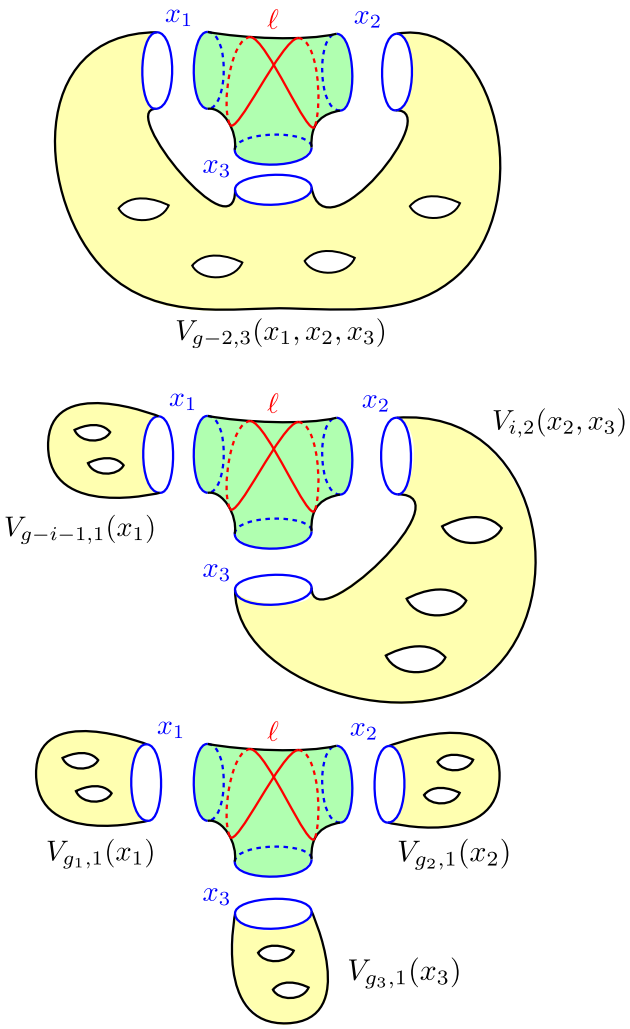

图 9：八字曲线情形下公式的示意图。

是填充裤子曲面 $\mathbf{P}$ 的环路。$\mathbf{c}$ 的长度是$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{T}^*_{0,3}$的解析函数。例如，如果$\mathbf{c}$ 是八字曲线，那么它的长度满足

$$\cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) = 2\cosh\left(\frac{x_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{2}\right) + \cosh\left(\frac{x_3}{2}\right) \tag{50}$$

因此，我们可以将 x_3 表示为 ℓ、x_1、x_2的函数：

$$x_3(\ell, x_1, x_2) = 2\,\mathrm{arg\cosh}\left(\cosh\left(\frac{\ell}{2}\right) - 2\cosh\left(\frac{x_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{2}\right)\right) \tag{51}$$

它在 双曲余弦 $\left(\frac{x_1}{2}\right)$ 双曲余弦 $\left(\frac{x_2}{2}\right) \leq M(\ell) := \frac{1}{2}$(双曲余弦 $\left(\frac{\ell}{2}\right) - 1$) 时即有定义。于是我们的公式为

$$V_g^{[P,\mathbf{c}]_{\mathrm{loc}}}(\ell) = \frac{\sinh\left(\frac{\ell}{2}\right)}{n(\mathbf{c})} \iint_{\cosh\left(\frac{x_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{2}\right) \leq M(\ell)} \frac{\Phi_g^{\mathbf{P}}(x_1, x_2, x_3(\ell, x_1, x_2))}{\sinh\left(\frac{x_3(\ell,x_1,x_2)}{2}\right)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

因为由勒贝格测度在水平集上诱导的测度为

$$\frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\partial x_3}{\partial \ell}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{\sinh\left(\frac{\ell}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x_3}{2}\right)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2. \tag{52}$$

我们可以固定 x_2 和 x_3，并将 x_1 视为 ℓ、x_2、x_3的函数，进行相同的运算，由此得到同一量的不同表达式。

公式（49）的一个显著特点是，$V_g^{\mathbf{T}}(\ell$对环境亏格 g 的依赖仅通过函数 $\Phi_g^{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$体现，该函数枚举了曲面$\mathbf{S}$ 在亏格为 g 的曲面中的所有嵌入。从某种意义上说，该公式将对体积函数 $V_g^{\mathbf{T}}(\ell)$的分析分成了两个完全独立的问题。

- 一方面，我们需要理解大亏格极限，这完全由函数 $\Phi_{\mathbf{S}g}(\mathbf{x})$ 所刻画（它只取决于填充曲面$\mathbf{S}$，而不取决于环路 $\mathbf{c}$）。

- 另一方面，我们需要理解 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}_{g\,\mathbf{s}\,n_{\mathbf{S}}}^*$ 上函数$Y \mapsto \ell_Y(\mathbf{c})$的水平集。这与环路$\mathbf{c}$的拓扑密切相关。

对于简单局部类型，或填充一个裤子曲面的局部类型，$\mathrm{dVol}_{g_{\mathbf{S}}}^{\mathrm{WP}}{}_{,\ n_{\mathbf{S}}}(\mathbf{x}\ Y)$ 的表达式非常简单，因为$\mathbf{S}$ 上的度量完全由$\mathbf{S}$边界的长度$\mathbf{x}$定义。在其他所有情况下，事实并非如此，而描述测度 $\mathrm{dVol}_{g_{\mathbf{S}}}^{\mathrm{WP}}{}_{,\ n_{\mathbf{S}}}(\mathbf{x}\ Y)/\,\mathrm{d}\ell$ 正是我们在本项目中面临的关键挑战之一。

3.3 关于 $1/g$的渐近展开

让我们先讨论上文提出的第一个问题：理解大亏格极限。我们在 [AM22]中给出了体积多项式$V_{g,\ n}(\mathbf{x})$ 在大亏格极限下的渐近展开。Mirza- khani 和 Zograf 已经在 [MZ15], 中研究过此类展开，但我们文章的新颖之处在于，我们关注渐近展开作为长度变量$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{>0}^{n_{\mathbf{S}}}$的函数时的行为，这正是我们在这里所关心的。

利用渐近展开的标准技巧，我们从 $\Phi_g^{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ 的表达式以及体积多项式 $V_{g,n}(\mathbf{x})$ 的渐近展开

推导出可以将其写成如下形式的展开

$$\frac{\Phi_g^{\mathbf{S}}(\mathbf{x})}{V_g} = \sum_{k=\chi(\mathbf{S})}^{K} \frac{\psi_k^{\mathbf{S}}(\mathbf{x})}{g^k} + \mathcal{O}_{K,\chi(\mathbf{S})}\left(\frac{(\|\mathbf{x}\|+1)^{c_K^{\mathbf{S}}}}{g^{K+1}} \exp\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n_{\mathbf{S}}}}{2}\right)\right). \quad (53)$$

最重要的是，我们得到该渐近展开的各项可以写成以下分布的线性组合

$$\prod_{i\in V} x_i^{k_i} \prod_{i\in V_+} \cosh\left(\frac{x_i}{2}\right) \prod_{i\in V_-} \sinh\left(\frac{x_i}{2}\right) \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}\delta(x_{i_j}-x_{i'_j}), \quad (54)$$

其中 V_0、V_+、V_- 是 $\{1,\ldots,n_{\mathbf{S}}\}$ 的互不相交子集，$V := V_0 \cup V_+ \cup V_-$、$(k_i)_{i\in V}$ 是整数，并且 $\{(i_j、i'_j)\}_{1\le j\le k}$ 是 V 的补集的一个完美匹配。

因此，利用定理3.9，我们得到体积函数 $V_g^{\mathbf{T}}(\ell)/V_g$ 可按 $1/g$ 的幂进行渐近展开，并且该渐近展开的各项可以表示为如下形式的函数的线性组合

$$\int_{\ell_Y(\mathbf{c})=\ell} \prod_{i\in V} x_i^{k_i} \prod_{\epsilon=\pm} \prod_{i\in V_\epsilon} \mathrm{hyp}_\epsilon\left(\frac{x_i}{2}\right) \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}\delta(x_{i_j}-x_{i'_j}) \frac{\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}}(\mathbf{x},Y)}{\mathrm{d}\ell} \quad (55)$$

这里我们引入简写记号

$$\mathrm{hyp}_\epsilon(x) := \frac{\exp(x)+\epsilon\exp(-x)}{2} = \begin{cases} \cosh(x) & \text{if } \epsilon = + \\ \sinh(x) & \text{if } \epsilon = -. \end{cases} \quad (56)$$

从此处开始，在本节余下部分中将不再提及环境亏格 g：我们将专注于描述测度 $\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}}(\mathbf{x}\ Y)/\mathrm{d}\ell$ 在 $\mathcal{T}^*_{g_{\mathbf{S}}}$ 的水平集上的取值 $n_{\mathbf{S}}$，以及形如（55）的积分的性质。

需要特别注意的是，我们所做积分的函数具有非常特殊的结构，与 Friedman–Ramanujan 假设颇为相似。实际上，我们以完全一般的方式研究如下积分

$$\int_{\ell_Y(\mathbf{c})=\ell} \prod_{j\in V} f_j(x_j) \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}\delta(x_{i_j}-x_{i'_j}) \frac{\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}}(\mathbf{x},Y)}{\mathrm{d}\ell} \quad (57)$$

其中函数 f_j 满足：对所有 $j\in V$，$f_j(x)e^{x/2}/x$ 都是 Friedman–Ramanujan 函数。证明定理1.1 的关键步骤之一是，在这一假设下，任何形如 (57) 的积分在弱意义下都是 Friedman–Ramanujan 函数。

3.4 Teichm¨uller 空间的新坐标组

现在让我们聚焦于定理 3.9提出的第二个挑战：在水平集上积分

$$\{(\mathbf{x},Y)\in\mathcal{T}^*_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}} \ :\ \ell_Y(\mathbf{c})=\ell\} \quad (58)$$

与 Weil–Petersson 体积相比较。这是一个全新的领域，我们不得不从零开始开发许多工具。值得一提的是，我们在空间 $\mathcal{T}^*_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}}$ 上引入了一族全新的坐标系。

3.4.1 打开交点与广义 8 字形环路

我们来考虑一个局部类型 $\mathbf{T} = [\mathbf{S},\mathbf{c}]_{\text{loc}}$。我们假设该类型是非简单的，因为简单环的情形早已广为人知。我们选取 $\mathbf{c}$ 的一个同伦类代表元，使其处于最小位置，且所有交点均为横截交点，并且只有双重点。令 $r \geq 1$ 表示 $\mathbf{c}$ 的自交点数。



(a) 初始交点。　　(b) 打开交点。

图 10：打开一个交点，并将其替换为一段弧。

我们考虑一族两两不相交的邻域，它们围绕 r 的自交点$\mathbf{c}$，使得环路$\mathbf{c}$在每个邻域内的限制都是一个交叉，如图10a所示。在每个邻域中，我们打开交点，如图10b所示。我们用一段有向弧段替代交点，以此记录交点的存在。

这一操作的结果称为图示，即一个多重环路 β 以及一族 r 弧条 B，其端点位于 β上，且除弧条端点外没有自交点。图11 给出了一些示例。

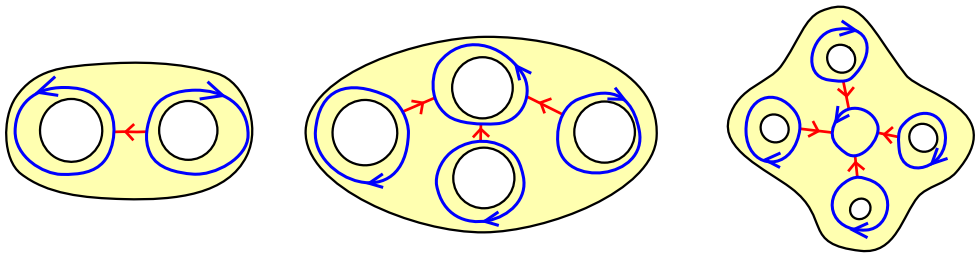

图 11：对图 7 中的示例执行开口操作后的结果。

注意，多重环路 β 并不总是多重曲线：尽管它没有自交点，但其某些分支可能是可缩的，或彼此同伦。当 $\mathbf{c}$ 的补集中存在圆盘时，就会发生这种情况，例如图 11 最右侧的示例。我们主要关注一种称为广义 8 字形环路的特定类型的环路，其定义如下。

定义3.11. 如果$\mathbf{c}$ 在$\mathbf{S}$中的正则邻域$\mathbf{c}$ 的任何一个连通分支都不是$\mathbf{S}$中的可缩空间，我们就称$\mathbf{c}$ 为广义八字曲线。

该定义有如下推论。

引理 3.12。 若$\mathbf{c}$ 是广义八字曲线，则 β 是一个多重曲线，也就是说，它的所有分支都不可缩且彼此同伦不同。图示(β, B)是唯一确定的，并且 $\chi(\mathbf{S}) = r$。

在本文剩余部分中，我们都假设$\mathbf{c}$ 是广义八字曲线。这是我们证明中最有趣的情形。图11 左侧的两个例子都是广义 8 字形环路。

3.4.2 测地线图示

现在为曲面$\mathbf{S}$ 赋予一个度量，即取一点（$\mathbf{x}$ Y）$\in \mathcal{T}^*_{g\mathbf{S},\ n\mathbf{S}}$。由于$\mathbf{c}$ 是广义八字曲线，我们可以在 Teichm¨uller 空间中选取 Y 的代表元，使得多重曲线 β 是多重测地线。于是，弧条 B 是从 β 到其自身且互不相交的路径。

我们考虑端点沿 β滑动的同伦类：若$\mathbf{S}$ 上的两条路径 γ_0,γ_1 的端点都在 β 上，且存在连续映射 $[0,1] \times [0,1] \to \mathbf{S}$，当第一个变量分别取 0 或 1 时，该映射分别与 γ_0 和 γ_1 重合，并且映射将任意坐标为（t,0）或（t,1）的点映到 β上，则称这两条路径在此意义下同伦。若 β 是度量曲面 Y 上的多重测地线，那么，任何端点沿 β 滑动的非平凡同伦类，都有唯一的最短长度代表元；该代表元是端点位于 β上的正交测地线。在所有图中，我们用大点标出这类正交测地线的端点，以表示那里有一个直角。

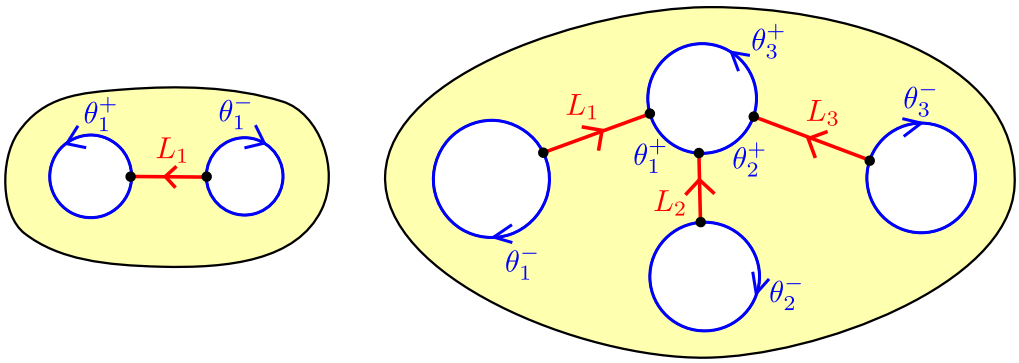

图 12：上文广义 8 字形环路的测地线图示。

我们将用正交测地线代表元替换弧段 B （这里我们利用$\mathbf{c}$ 是广义八字曲线这一事实，来确认这些同伦类均非平凡）。我们得到该图示的测地线代表元（β, B）。图12 展示了两个例子。Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}^*_{g\mathbf{S},\ n\mathbf{S}}$上的新坐标，将由这一测地线图示中自然出现的长度族构成。

3.4.3 我们坐标的定义

我们任意选取一个集合$\{1, \ldots, r\}$，为$\mathbf{c}$ 的 r 个交点编号。这意味着，记录这些交点的弧段 B现在被标记为——

B_1、……、B_r。回想一下，在图10中构造弧段时，我们采用了一种定向约定。我们将图10中按图示方向定向的弧段记为 B_1^+、……、B_r^+，而将 B_1^-、……、B_r^-记为反向定向的弧段。

在拓扑图中，刚将交点打开后，我们观察到 β 被弧段 B切分为 $2r$ 段。这些段称为 简单部分，因为它们对应于 $\mathbf{c}$ 中没有自交点的极大子段。简单部分的定向与初始环路 $\mathbf{c}$的定向一致，如图 10所示。我们用集合

$$\Theta := \{1, \dots, r\} \times \{\pm\} \tag{59}$$

令任意 $q = (j, \epsilon) \in \Theta$, $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_j^\epsilon$ 表示从弧段 $B_q = B_j^\epsilon$的末端开始的简单部分。

现在，若在$\mathbf{S}$上选取一个度量，我们将测地线代表元中与图示（β, B）里的 B_q 和 $\mathcal{I}_q$ 对应的弧段和简单部分分别记为 B_q 和 $\mathcal{I}_q$ 。注意，当我们让 B_q 的端点沿着 β滑动时，简单部分（$\mathcal{I}_q$）$_{q\in\Theta}$ 可能会改变定向，或绕着 β缠绕。

我们定义以下几何量，如图 12所示。

定义 3.13。 对于 $j \in \{1, \dots, r\}$，我们将 $L_j > 0$ 记作正交测地线 B_j的长度。对于 $q \in \Theta$，我们将 $\overline{\theta}_q$ 记作线段$\mathcal{I}_q$的代数长度；若其方向与初始图示一致，则为正，否则为负。

注意，向量 $\vec{L} = (L_1, \dots, L_r) \in \mathbb{R}^r_{>0}$和 $\vec{\theta} = (\theta_1^\pm, \dots, \theta_r^\pm) \in \mathbb{R}^\Theta$包含 $3r$ 个分支。这就是 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}$的维数。

作为本节的总结，我们注意到，多重测地线 β的长度可以简洁地表示为 θ-参数之和。更准确地说，我们将 Λ^β 记作 β的分支集合，使得 $\beta = (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda^\beta}$。对于每个 $\lambda \in \Lambda^\beta$，记作$y_\lambda = \ell_Y(\beta_Y)$，于是有

$$y_\lambda = \sum_{q\in\Theta_t(\lambda)} \theta_q \quad \text{where} \quad \Theta_t(\lambda) := \{q \in \Theta : B_q \text{ terminates on } \beta_\lambda\}. \tag{60}$$

（这里的记号 $\lambda \in \Lambda^\beta$ 有些奇怪，但为了与 [AM25]中的记号保持一致，我们仍沿用它。）

3.4.4 Weil–Petersson体积形式的计算

陈述我们引入变量 $\vec{L}, \vec{\theta}$，旨在为曲面 $\mathbf{S}$ 上双曲度量的 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}$ 提供一组新的坐标，使其适用于我们的环路 $\mathbf{c}$。该空间自然带有 Weil–Petersson体积形式 $\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}(\mathbf{x}\ Y) = \mathbf{dx}\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}(Y)$。我们证明如下结论。

定理 3.14。 对于任意填充曲面 $\mathbf{S}$ 的广义八字曲线$\mathbf{c}$，映射

$$\begin{cases} \mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}} & \to \mathbb{R}^r_{>0} \times \mathbb{R}^\Theta \\ (\mathbf{x}, Y) & \mapsto (\vec{L}, \vec{\theta}) \end{cases} \tag{61}$$

是一个映到其像 $\mathfrak{D}$ 上的 $\mathcal{C}^1$-微分同胚，并且

$$\begin{aligned} &2^{n_{\mathbf{S}}} \prod_{j=1}^{n_{\mathbf{S}}} \sinh\left(\frac{x_j}{2}\right) \mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}}(\mathbf{x},Y) \\ &= 2^{\#\Lambda^\beta} \prod_{\lambda\in\Lambda^\beta} \sinh^2\left(\frac{y_\lambda}{2}\right) \prod_{j=1}^{r} \sinh(L_j)\,\mathrm{d}^r\vec{L}\,\mathrm{d}^{2r}\vec{\theta} \end{aligned} \tag{62}$$

其中 y_λ 用 (60) 表示，$\mathrm{d}^r\vec{L} = \prod_{j=1}^r \mathrm{d}L_j$ 和 $\mathrm{d}^{2r}\vec{\theta} = \prod_{q\in\Theta} \mathrm{d}\theta_q$。

*R*备注 3.15。 我们在 [AM25] 中证明的结果实际上在两个方面更为一般。

- 实际上，给定的 $\mathbf{c}$ 的任意交点都有两种不同的解开方式。在 [AM25], 中，我们将图 10 中的选择称为“第一种方式”。这是我们偏好的交点消解方式，因为它保留了环路 $\mathbf{c}$ 的定向，这也是我在讲义中只介绍这种方式的原因。不过，我们可以为每个交点选择一种方式，而这实际上会在 $\mathcal{T}^*_{g_{\mathbf{S}}\,n_{\mathbf{S}}}$ 上得到不同的坐标系，且（62）仍然成立。
- 严格来说，我们需要考虑多重环路，即环路族$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{\mathfrak{n}})$，其中有 $\mathfrak{n}$ 个分支填满 $\mathbf{S}$。为使论述更加简洁，我省略了这一复杂情况，但必须考虑它，因为定理 3.14 的归纳证明需要用到这一点。尽管这种区分有时会使记号略显繁琐，但不会带来任何困难。

Wolpert 公式与裤子曲面分解 我们的证明依赖于 Wolpert 关于 Fenchel–Nielsen 坐标下 Weil–Petersson 体积的神奇公式。这些坐标通过将曲面$\mathbf{S}$ 分解为裤子曲面，并考虑由此自然出现的长度而生成。裤子曲面分解是$\mathbf{S}$上的一条多重曲线 $\Gamma = (\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，使得 Γ 的补集是型为 (0,3) 的曲面族。

这里，我们将 $\mathbf{S}$自身的边界分支也纳入裤子曲面分解中。我们将 Λ_{in} 记作 Λ的内部分支集合，即裤子曲面分解中不是$\mathbf{S}$边界分支的分支。

对于 $\lambda\in\Lambda$，我们将 y_λ 记作 Γ_λ的测地长度。如果 $\lambda\in\Lambda_{\mathrm{in}}$，即如果 Γ_λ是一条内曲线，那么我们沿着 Γ_λ选取一个扭转参数 α_λ。于是，Wolpert 的神奇公式表明

$$\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}}(\mathbf{x},Y) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{d}y_\lambda \prod_{\lambda\in\Lambda_{\mathrm{in}}} \mathrm{d}\alpha_\lambda. \tag{63}$$

对于裤子曲面分解中的每个元素，我们都有一个长度参数 y_λ，其中包括 $\mathbf{S}$ 的边界分支，因为我们将长度$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n_{\mathbf{S}}}_{>0}$ 视为 $\mathcal{T}^*_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}}$ 中的自由变量。相反，我们只有内部曲线的扭转参数。

为了应用 Wolpert 公式，我们通过依次考察与环路 $\mathbf{c}$相关的弧条，构造一个裤子曲面分解 $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$

$B_1, \ldots, B_r$。我们注意到，一条连接两个（不一定不同的）简单环且没有其他交点的简单弧会生成一个裤子曲面。因此，可以将 $\mathbf{S}$ 分解为 r 个裤子曲面，对应于r 个$\mathbf{c}$的自交点。此分解并非唯一，取决于对$\mathbf{c}$的交点进行编号的方式。图13展示了一个裤子曲面分解示例。

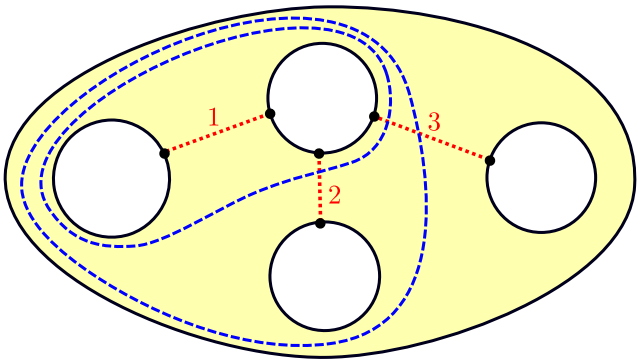

图13：我们构造的裤子曲面分解示例。集合 Λ 包含七个元素：$\mathbf{S}$ 的五个边界分支和另外两条内部曲线。

雅可比 现在我们已经在 $\mathcal{T}^*_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}}$ 上定义了两组坐标，接下来计算从这些 Fenchel–Nielsen 参数到坐标 $(\vec{L},\vec{\theta})$ 的变量替换的雅可比行列式。

下面列举证明中的几个要点。

证明。 我们对自交点的数量 r 进行归纳证明。对于 $r = 1$，需要考虑两种情况：填满一个裤子曲面的八字曲线，以及填满一个单孔环面的两条简单环。这两种情况的计算都很直接。例如，对于裤子曲面（图12左侧所示），若将 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_{>0}$记为裤子曲面的三条边界分支的长度，则有$x_1 = y_1 = \theta_1^+$且 $x_2 = y_2 = \theta_1^-$。沿其正交测地线B_1切开裤子曲面，可得到一个凸直角六边形。经典三角公式[Bus92，定理 2.4.1 (i)] 给出

$$\cosh(L_1) = \frac{\cosh\left(\frac{x_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{2}\right) + \cosh\left(\frac{x_3}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x_1}{2}\right)\sinh\left(\frac{x_2}{2}\right)}, \tag{64}$$

he nce $\sinh\left(\frac{x_3}{2}\right)\mathrm{d}x_3 = 2\sinh(L_1)\sinh\left(\frac{x_1}{2}\right)\sinh\left(\frac{x_2}{2}\right)\mathrm{d}L_1$，由此得出该结论。

对于 $r \geq 2$，我们假设结论对于移除弧段 B_r后的同一图示仍然成立，然后推导添加弧段 B_r 会如何改变我们的坐标。实际上，大多数坐标都保持不变，只增加了新的长度 L_r；此外，之前的两个简单部分现在分别在 B_r的两个端点处被切开，因此变成了四个部分。需要根据最后一条弧段的添加方式考虑两种情况；其中一种情况如图所示

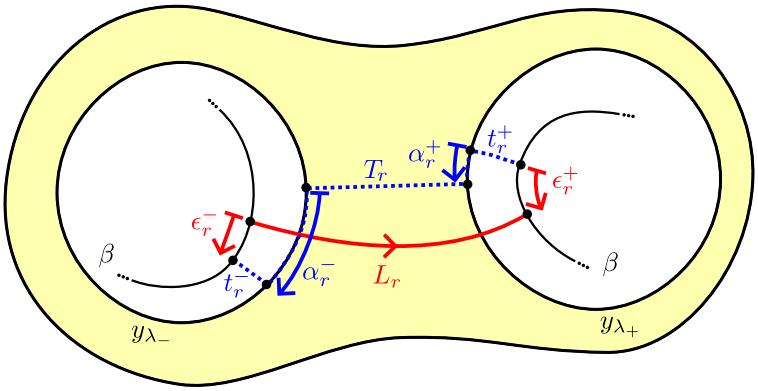

图 14：定理 3.14在一种情形下的证明。黄色部分是在步骤 r中新增的裤子曲面；在这种情形下，它连接了曲面在步骤 $r-1$中的两个不同边界分支。

图14中所示。在这两种情况下，基本思路都是将正交测地线 B_r 分解为一系列垂直测地线段，这些线段属于同一个同伦类，且端点沿着 β滑动。我们利用这些测地线段来定义扭转参数，即 $\alpha_r^{\pm}$图 14中的参数。一个关键观察是，新裤子曲面外部的正交测地线与裤子曲面上的度量无关，因此在我们的归纳证明中可以将它们视为固定不变的。于是，计算归结为计算变量替换 $(T_r,\ \alpha_r^+,\ \alpha_r^-) \to (L_r,\ \epsilon_r^+,\ \epsilon_r^-)$，并将其与我们的新 $\epsilon_r^{\pm}$参数 θ 联系起来。

□

注记 3.16。 这种证明定理 3.14 的方法不太令人满意，因为它依赖于以相当随意的方式构造曲面 $\mathbf{S}$的一个辅助裤子曲面分解，并计算变量替换。我们认为，基于 Weil–Petersson 形式以二次微分表示的定义，寻找一种更内在的证明会很有意思。

3.5 长度函数的表达式

既然我们已经在空间 $\mathcal{T}^*_{g_\mathbf{S},n_\mathbf{S}}$ 上定义了适用于广义八字曲线$\mathbf{c}$的新坐标，现在该利用它们的结构，证明一个关于$\mathbf{c}$的长度的优美公式，该公式用$(\vec{L},\vec{\theta})$表示。

3.5.1 环路 c 的重构

坐标 $(\vec{L},\ \vec{\theta})$ 之所以适合用来研究$\mathbf{c}$ 的长度，是因为我们可以通过依次沿着弧条 B_q 和简单部分 $\mathcal{I}_q$ 来重构$\mathbf{c}$ ，其中 $q \in \Theta$。更确切地说，对于 $q \in \Theta$，我们定义 $p(q) := B_q \cdot \mathcal{I}_q$ 为定向线段 B_q 和 $\mathcal{I}_q$ 的拼接（根据定义，它们彼此相连）。$p(q)$ 的端点是某个元素 $\sigma q \in \Theta$对应的弧段 $B_{\sigma q}$ 的起点。这定义了一个置换

σ 的 Θ。不难验证，σ 是一个长度为[3] 的循环 $2r$，并且环路 $\mathbf{c}$自由同伦于以下拼接

$$\mathbf{c}_{\mathrm{op}} := p(q_0)\cdot p(\sigma q_0)\cdot \ldots \cdot p(\sigma^{2r-1}q_0) \tag{65}$$

对于任意给定的起点，例如 $q_0 = (\mathbf{1}, +)$。

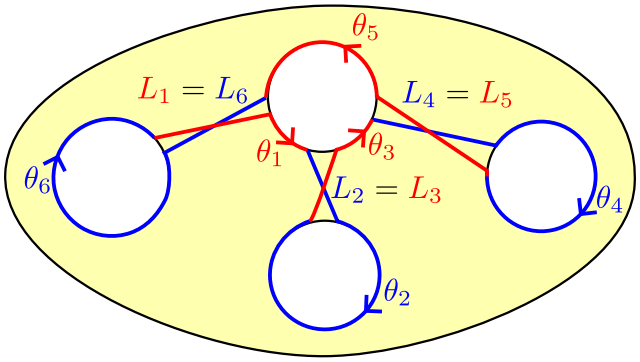

图 15：环路 $\bar{\mathbf{c}}_{\mathrm{op}}$ 的一种变形。长度用集合 $\mathbb{Z}_6$ 标记，标记顺序与环路的遍历顺序一致，参见第3.5.2 节。颜色表示弧段的符号，红色表示 $+$，蓝色表示 $-$。

现在考虑一点 $Y \in \mathcal{T}^*_{g\mathbf{S},\ n\mathbf{S}\circ}$ 与第 3.4.3 节一样，我们在 Teichmüller 空间中选取代表元，使得 β 是一条多重测地线。将弧条 B_q 替换为它们的正交测地线代表元 B_q，并相应地调整简单部分，使其成为 $\mathcal{I}_q$，我们便可将 $\mathbf{c}$ 的同伦类视为一系列正交测地线段的循环连接：

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathrm{op}} = \bar{p}(q_0)\cdot \ldots \cdot \bar{p}(\sigma^{2r-1}q_0) \tag{66}$$

其中 $\bar{p}(q) := \overline{B}_q \cdot \overline{\mathcal{I}}_{q^\circ}$。图 15 展示了一个例子。

3.5.2 对 Θ重新标记

现在，我们将按照置换 σ对 Θ 的元素重新标记。例如，可以通过双射将 Θ 与循环集 $\mathbb{Z}_{2r} = \mathbb{Z}/2r\mathbb{Z}$对应起来：

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_{2r} & \to \Theta \\ k & \mapsto \sigma^{k-1}q_0. \end{cases} \tag{67}$$

经过这一对应后，置换 σ只需通过平移 $k \mapsto k+1$即可给出。将 Θ 视为循环集是很自然的，因为记号（65）在循环移位下保持不变。

例3.17。在图*15*中的例子里，置换 σ 为

$$\sigma = \big((1,+)\quad (2,-)\quad (2,+)\quad (3,-)\quad (3,+)\quad (1,-)\big). \tag{68}$$

[3]实际上，在 [AM25], $\mathbf{c}$ 是一个多重环路，包含 $\mathfrak{n}$个分支，此时 σ 有 $\mathfrak{n}$ 个循环，每个循环对应 $\mathbf{c}$的一个分支。

本节余下部分中，按照这一将 Θ 与 $\mathbb{Z}_{2r}$相对应的约定，对于$k \in \mathbb{Z}_{2r}$，我们将记 B_k， $\mathcal{I}_k$ 分别表示表达式（ k65）中的第 k个弧段和第 p个简单段；而它们的拼接记作（k），等等。这可能导致记号略有冲突，因此我们会始终尽量说明 Θ所采用的是哪种标记方式。

出现在 $\bar{\mathbf{c}}^{\mathrm{op}}$ 中的正交测地线段具有连续的长度L_1， θ_1，……， L_{2r}， θ_{2r}。对于 $k \in \mathbb{Z}_{2r}$，我们用 L_k表示 B_k的长度，用 θ_k表示 $\mathcal{I}_k$的代数长度。注意，向量 $(L_k)_{k\in\mathbb{Z}_{2r}}$ 恰好包含 L 中每个条目的两个副本，因为每条弧段都恰好经过两次。

3.5.3 定向规则

弧段的符号在下文中非常重要，因为它们规定了 $\bar{\mathbf{c}}^{\mathrm{op}}$ 中右转的方向。事实上，根据图 10 中定义的约定，沿着 $\bar{\mathbf{c}}^{\mathrm{op}}$ 前进时，我们从左侧进入每条正弧段，并从右侧离开。负弧段则相反。图 15 展示了这一点，其中我们根据路径 $\bar{p}(k)$的符号为其着色。这些“定向规则”在 [AM25] 中起着关键作用。

对于 $k \in \mathbb{Z}_{2r}$，我们将 $\sigma^{k-1}q_0$ 的符号分量记作 $\epsilon_k \in \{\pm\}$，即探索第 k 个弧段的方向。于是，测地线代表元 $\bar{\mathbf{c}}^{\mathrm{op}}$ 的几何完全由长度序列 $(L_k)_{k\in\mathbb{Z}_{2r}}$、$(\theta_k)_{k\in\mathbb{Z}_{2r}}$ 以及符号 $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}_{2r}}$决定；这些符号指明了在每段测地线末端转向的方向。

3.5.4 c 的长度公式

现在我们可以陈述并证明以长度 L_k、 θ_k 和符号 ϵ_k表示的$\mathbf{c}$ 长度公式了。

定理 3.18。 对于任意坐标$_{,n_{\mathbf{S}}}$ $(\vec{L},\vec{\theta})$的 $Y \in \mathcal{T}^*_{g_{\mathbf{S}},}$

$$\cosh\left(\frac{\ell_Y(\mathbf{c})}{2}\right) = \sum_{\substack{\delta\in\{\pm1\}^{2r}\\ \delta_1\dots\delta_{2r}=+1}} \prod_{k=1}^{2r} \mathrm{hyp}_{\delta_k}\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2r}\rho_k^{\delta}\epsilon_k L_k\right)$$

其中 $\rho_k^{\delta} = \prod_{1\le j<k}\delta_j$ （对于 $k=1$，这个空乘积等于1）。

例 3.19。 对于 $r=1$，公式为

$$\cosh\left(\frac{\ell_Y(\mathbf{c})}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\theta_1^+}{2}\right)\cosh\left(\frac{\theta_1^-}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\theta_1^+}{2}\right)\sinh\left(\frac{\theta_1^-}{2}\right)\cosh(L_1)$$

这等价于我们已知的八字曲线公式

$$\cosh\left(\frac{\ell_Y(\mathbf{c})}{2}\right) = 2\cosh\left(\frac{x_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{x_2}{2}\right) + \cosh\left(\frac{x_3}{2}\right)$$

因为 $\theta_1^- = x_1$, $\theta_1^+ = x_2$和 双曲余弦(L_1) $=$双曲余弦$\left(\frac{x_1}{2}\right)$双曲余弦$\left(\frac{x_2}{2}\right)$+$\cosh\left(\frac{x_3}{2}\right)$双曲正弦$\left(\frac{x_1}{2}\right)$双曲正弦$\left(\frac{x_2}{2}\right)$，根据直角六边形中的常用双曲恒等式。 —

注 3.20. 实际上，我们证明该结果适用于$\mathbf{c}$的交点开口的任意选择，这为$\mathbf{c}$ 的长度在不同坐标系中提供了不同表达式。该公式也适用于多重环路$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)$；在这种情况下，我们逐个分量进行证明，每个分量所涉及的长度均取自 σ 中相应的循环。

证明。这是一个经典事实：$\mathcal{T}^*_{g,\,n}$ 可以视为基本群 $\pi_1(S)$ 到 PSL(2，$\mathbb{R}$) 的离散忠实表示空间，模去共轭。此外，若 $Y \in \mathcal{T}^*_{g,\,n}$ 对应于表示 $\rho\colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$，我们便可以借助 ρ 的迹来表示所有长度：

$$2\cosh\left(\frac{\ell_Y(\gamma)}{2}\right) = |\operatorname{Tr}\rho(\gamma)|, \tag{69}$$

其中 $\rho(\gamma) \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 是 ρ 对 γ 的同伦类所作映射的像。我们用新坐标表示长度的方法，是给出 $\rho(\gamma)$ 在 (69) 中的显式表达式，方法是将γ 的同伦类的一个代表写成一系列正交测地线段。

我们回顾一下，单位切丛 $T^1\mathbb{H}$ 本身可以与 PSL(2，$\mathbb{R}$) 等同。于是，我们可以将 $T^1\mathbb{H}$ 上不同的几何作用与特定矩阵的右乘相对应： a^t 是时刻 t 的测地流作用， w^t 是测地流经角度为 $\pi/2$ 的旋转共轭后的作用，而 k^θ 是由 k^θ 作用、角度为 θ 的旋转，其中

$$a^t = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \quad w^t = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{t}{2}\right) & \sinh\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sinh\left(\frac{t}{2}\right) & \cosh\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} \quad k^\theta = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

这些变换如图16所示。

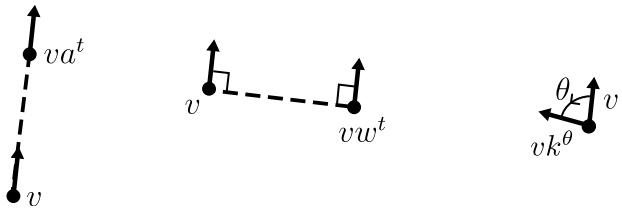

图 16：与矩阵 a^t、 w^t 和 k^θ 对应的变换。

利用将66式 $^-\mathbf{c}^{\mathrm{op}}$ 分解为一系列正交测地线，我们证明

$$\cosh\left(\frac{\ell_Y(\mathbf{c})}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(a_1 b_1 \ldots a_{2r} b_{2r}\right) \tag{70}$$

其中矩阵 a_k， b_k 定义为

$$a_k = a^{\epsilon_k L_k} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\epsilon_k L_k}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\epsilon_k L_k}{2}} \end{pmatrix} \quad b_k = w^{\theta_k} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\theta_k}{2}\right) & \sinh\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \\ \sinh\left(\frac{\theta_k}{2}\right) & \cosh\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

证明中的主要难点是消去（69）中的绝对值，我们通过连续性论证并运用定向规则来做到这一点。随后展开矩阵乘积，并通过显式计算得出结论。

□

3.6 结论

现在，我们来总结一下，并给出证明定理 2.5所需的一些要素。到目前为止，借助积分公式和渐近展开，我们已将体积函数 $V_g^{\mathbf{T}}(\ell)$ 表示为以下形式的函数的组合：

$$\int_{\ell_Y(\mathbf{c})=\ell} \prod_{j\in V} f_j(x_j) \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}\delta(x_{i_j}-x_{i'_j}) \frac{\mathrm{dVol}^{\mathrm{WP}}_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}}(\mathbf{x},Y)}{\mathrm{d}\ell} \tag{71}$$

其中，函数 f_j 满足：对于所有 $j\in V$， $f_j(x)e^{x/2}/x$ 都是 Friedman–Ramanujan 函数。

现在，我们将从 $(\mathbf{x}\ Y)\in\mathcal{T}^*_{g_{\mathbf{S}},n_{\mathbf{S}}}$ 变换为适配变量 $(\vec{L},\vec{\theta})\in\mathfrak{D}\subset\mathbb{R}^r_{>0}\times\mathbb{R}^{\Theta}$。这样做有两个后果：我们需要代入变量替换的雅可比（我们已在定理 3.14中计算过），并且需要用新变量 $(\vec{L},\vec{\theta})$ 表示所有内容。这需要将 $\mathbf{S}$ 的边界分支长度 $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_{\mathrm{in}}}$表示为 $(\vec{L},\vec{\theta})$ 的函数，我们采用的方法与第 3.5 节中的方法类似。

将所有部分计算完毕后，我们最终得到 Friedman–Ramanujan 函数的伪卷积，或者更准确地说，得到如下形式的积分

$$\int_{\vec{L},\vec{\theta}_{\mathrm{ne}}} \psi(\vec{L},\vec{\theta}_{\mathrm{ne}}) \int_{\vec{\theta}_{\mathrm{ac}}:\ell_Y(\mathbf{c})=\ell} \varphi_{\vec{L},\vec{\theta}_{\mathrm{ne}}}(\vec{\theta}_{\mathrm{ac}}) \prod_{q\in\Theta_{\mathrm{ac}}} \theta_q^{\mathrm{K}_q} e^{\theta_q} \frac{\mathrm{d}^r\vec{L}\,\mathrm{d}^{2r}\vec{\theta}}{\mathrm{d}\ell}$$

这里，我们将参数集合 $\Theta=\Theta_{\mathrm{ac}}\sqcup\Theta_{\mathrm{ne}}$ 分为活跃和中性参数，并相应地将向量 $\vec{\theta}$ 表示为 $\vec{\theta}_{\mathrm{ac}}=(\theta_q)_{q\in\Theta_{\mathrm{ac}}}$ 和 $\vec{\theta}_{\mathrm{ne}}=(\theta_q)_{q\in\Theta_{\mathrm{ne}}}$。活跃参数 $q\in\Theta_{\mathrm{ac}}$ 是上面积分中包含主项的项 $\theta_q^{\mathrm{K}_q}e^{\theta_q}$，而中性参数则不包含主项（它们是 Friedman–Ramanujan 余项）。有趣的是，所有参数 $\vec{L}$ 始终都是中性参数，因为它们不对主项作出贡献[4]。

接下来，我们将所有中性变量视为常数，并聚焦于伪卷积

$$\int_{\vec{\theta}_{\mathrm{ac}}:\ell_Y(\mathbf{c})=\ell} \varphi_{\vec{L},\vec{\theta}_{\mathrm{ne}}}(\vec{\theta}_{\mathrm{ac}}) \prod_{q\in\Theta_{\mathrm{ac}}} \theta_q^{\mathrm{K}_q} e^{\theta_q} \frac{\mathrm{d}\vec{\theta}_{\mathrm{ac}}}{\mathrm{d}\ell}. \tag{72}$$

这个伪卷积具有以下定义函数。

- 高度函数是函数 $\vec{\theta}_{\mathrm{ac}}\mapsto\ell_Y(\mathbf{c})$，我们已在第 3.5 节中对其进行了表示。

[4]之所以如此，是因为在 B_j 的轨迹中，每条弧段都会被遍历两次$\mathbf{c}$。这是一个普遍事实：如果沿着 $\mathbf{c}$ 前进时某个简单段被遍历两次，那么它就对应于中性参数（我们称这些简单段为受屏蔽的，见 [AM25]）。

• 权重函数 $\varphi_{\vec{L},\ \vec{\theta}_{\mathrm{ne}}}(\vec{\theta}_{\mathrm{ac}})$ 包含许多缺陷，这些缺陷源自我们在计算中所做的展开和代换。它特别包含定义域 $\mathfrak{D}$ 的示性函数，以及将 y_λ 表示为 $(\vec{L},\ \vec{\theta})$ 的函数时产生的项。

此时，我们希望重现定理 2.10的证明，并将算子 $\mathcal{L}$ 应用于 (72)。我们将利用伪卷积接近真正的卷积这一点，也就是说，高度函数接近 $\sum_{q\in\Theta_{\mathrm{ac}}}\theta_q$，且权重的导数较小。不过，这里有两个难点。

1. 权重函数 $\varphi_{\vec{L},\vec{\theta}_{\mathrm{ne}}}$ 的导数难以估计，尤其是示性函数的不连续性，以及在变量替换过程中将 y_λ 作为 $(\vec{L},\vec{\theta})$ 的函数代入所产生的项，都增加了估计难度。2. 虽然可以直接从坐标 $(\vec{L},\vec{\theta})$ 中的长度表达式检验高度函数确实属于类 $\mathcal{E}_n^{(a)}$，而这正是¯我们想要的，但实际上，一般而言，我们无法强制参数 θ_{ac}在整个积分定义域上都取值于形如 $(a,+\infty)^n$ 的区间中。这是因为在某些几何构型下，某些 θ_q 可能取负值（我们称之为交叉）。

我们通过引入两个单位分解来解决这两个技术问题$\mathcal{T}^*_{g_{\mathbf{S}},\ n_{\mathbf{S}}}$，每个单位分解对应一个问题，从而更好地了解哪些长度和参数会或不会趋于无穷大。随后，我们便能理解权重函数的导数。在划分的每个元素上，我们引入新的修正坐标 $\tilde{\theta}_q$，使高度函数在整个空间上确实满足一个假设 $\mathcal{E}_n^{(a)}$。

完成所有这些工作后，我们最后使用定理 2.10 的一个精细版本，并借助几何比较估计。将算子 $\mathcal{L}$ 应用足够多次以“消去”所有指数项 $\theta_q^{\mathrm{K}_q}e^{\theta_q}$后，我们再对所有中性参数积分，最终得到一个弗里德曼–拉马努金余项。

参考文献

[Alo86] Noga Alon。《特征值与扩张子》。*Combinatorica*，6(2):83–96，1986年。[AM22] Nalini Anantharaman 和 Laura Monk。《Weil–Petersson 体积多项式的高亏格渐近展开》。数学物理杂志，63(4):043502，2022年。[AM23] Nalini Anantharaman 和 Laura Monk。《随机双曲几何中的 Friedman-Ramanujan 函数及其在谱隙中的应用》。*arXiv:2304.02678*，2023年4月。[AM24] Nalini Anantharaman 和 Laura Monk。《随机双曲曲面的谱隙》。*arXiv:2403.12576*，2024年3月。

[AM25] Nalini Anantharaman 和 Laura Monk。《随机双曲几何中的 Friedman-Ramanujan 函数及其在谱隙中的应用 II》。arXiv:2502.12268，2025年2月。[Bon22] James Bonifacio。《闭双曲曲面的自举》。高能物理学杂志，2022(3):93，2022年3月。[Bor20] Charles Bordenave。《Friedman 第二特征值定理及其对随机提升的推广的新证明》。法国高等师范学校科学年刊。第四辑，53(6):1393–1439，2020年。[Bus82] Peter Buser。《关于等周常数的一则注记》。法国高等师范学校科学年刊。第四辑，15(2):213–230，1982年。[Bus84] Peter Buser。《关于图的二分划分》。离散应用数学，9(1):105–109，1984年9月。[Bus92] Peter Buser。《紧黎曼曲面的几何与谱》。Birkhäuser，波士顿，1992年。[CGTvH25] Chi-Fang Chen、Jorge Garza-Vargas、Joel A. Tropp 和 Ramon van Handel。《强收敛的新方法》。arXiv:2405.16026，2025年2月。[Che70] Jeff Cheeger。《拉普拉斯算子最小特征值的一个下界》。载于《分析中的问题》，第195–199页。普林斯顿大学出版社，1970年。[Fri91] Joel Friedman。《随机 d-正则图的第二特征值与随机游走》。Combinatorica，11(4):331–362，1991年。[Fri03] Joel Friedman。《Alon 第二特征值猜想的证明》。第三十五届美国计算机协会计算理论研讨会论文集，第720–724页，2003年。[GK19] Konstantin Golubev 和 Amitay Kamber。《双曲曲面上的截断》。几何学专论，203(1):225–255，2019年。[GS97] Maurits Graaf 和 Alexander Schrijver。《通过 Reidemeister 变换使曲线的交叉数最小化》。组合理论杂志 B辑，70:134–156，1997年。[HM23] Will Hide 和 Michael Magee。《双曲曲面的近最优谱隙》。数学年刊，198(2)，2023年9月。[HMY25] Jiaoyang Huang、Theo McKenzie 和 Horng-Tzer Yau。《随机正则图的 Ramanujan 性质与边缘普适性》。arXiv:2412.20263，2025年2月。.[Hub74] Heinz Huber。《关于紧黎曼曲面上拉普拉斯算子的第一特征值》。瑞士数学评论，49:251–259，1974年。

[Kim03] Henry H. Kim. GL_4 的外平方与 GL_2的对称四次幂的函子性。《美国数学会杂志》，16(1):139–183，2003年。[KMP24] Petr Kravchuk、Dalimil Mazac 和 Sridip Pal。《自守谱与共形自举》。《美国数学会通讯》，4(1):1–63，2024年1月。[LPS88] A. Lubotzky、R. Phillips 和 P. Sarnak。拉马努金图。《Combinatorica》，8(3):261–277，1988年。[LW24] Michael Lipnowski 和 Alex Wright。迈向大亏格下的最优谱隙。《概率年刊》，52(2):545–575，2024年3月。[Mag20] Michael Magee。致 Bram Petri 的信，2020年。[McK70] Henry P. McKean。负曲率流形上 Δ 的谱上界。《微分几何杂志》，4:359–366，1970年。[Mir07] Maryam Mirzakhani。带边黎曼曲面模空间中的简单测地线与 Weil–Petersson 体积。《Inventiones Mathematicae》，167(1):179–222，2007年。[Mir13] Maryam Mirzakhani。Weil–Petersson 体积的增长与大亏格随机双曲曲面。《微分几何杂志》，94(2):267–300，2013年。[MP19] Maryam Mirzakhani 和 Bram Petri。大亏格随机曲面上的闭测地线长度。《瑞士数学评论》，94(4):869–889，2019年。[MPvH25] Michael Magee、Doron Puder 和 Ramon van Handel。曲面群的均匀随机置换表示的强收敛。arXiv:2504.08988，2025年4月。[MZ15] Maryam Mirzakhani 和 Peter Zograf。迈向曲线模空间上交数的大亏格渐近。《几何与泛函分析》，25(4):1258–1289，2015年。[Nil91] A. Nilli。关于图的第二特征值。《离散数学》，91(2):207–210，1991年。[Rat87] Marina Ratner。测地线流与等距线流的混合速率。《遍历论与动力系统》，7(2):267–288，1987年。[Sel56] Atle Selberg。弱对称黎曼空间中的调和分析与不连续群及其在狄利克雷级数中的应用。《印度数学会杂志》，20:47–87，1956年。[Sel65] Atle Selberg。关于模形式傅里叶系数的估计。载于《纯数学专题讨论会论文集》第 VIII 卷，第 1–15 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1965年。

[SU13] Alexander Strohmaier 和 Ville Uski。一种计算双曲曲面特征值、谱 ζ 函数和 ζ 行列式的算法。《数学物理通讯》，317(3):827–869，2013年2月。[WX22] Yunhui Wu 和 Yuhao Xue。大亏格随机双曲曲面的首特征值大于 3/16-ε。《几何与泛函分析》，32(2):340–410，2022年。