arXiv:2601.15173v1 [math.CO] 21 Jan 2026

凸体覆盖极小值的上界

´KATARINA KRIVOKUCA

摘要。我们给出了凸体覆盖极小值的两个新上界，它们取决于某些投影的覆盖极小值以及与线性子空间的交集。我们证明，其中一个上界对于两个凸体的直和是紧的，从而推广了关于直和的覆盖半径和格宽度的先前结果。我们将这些结果应用于标准终端单纯形，缩小了 Gonzal´ez-Merino 和 Schymura（2017）猜想中上界与下界之间的差距，并由此对 Codenotti、Santos 和 Schymura（2021年）关于非空心格多面体最大覆盖半径的猜想有所启示。

1. 引言

1.1. 背景。 对于 $1 \leqslant i \leqslant d$，相对于格 $\Lambda \subseteq$ 的凸体 $K \subseteq \mathrm{R}^d$的第 i 个覆盖极小值定义为

$$\mu_i(K,\Lambda) = \min\left\{\mu \geq 0 \,:\, (\mu K + \Lambda) \cap U \neq \emptyset, \text{ for all } U \in \mathcal{A}_{d-i}(\mathbb{R}^d)\right\},$$

其中， $\mathcal{A}_{d-i}(\mathrm{R}^d)$ 表示 R^d 中所有（$d-i$）维仿射子空间的集合。
对我们而言，凸体是 R^d 的一个满维紧凸子集。格是 R^d 的一个满维离散子群。如果省略格，则默认其为 Z^d。如果对于格 Λ，凸体 K 满足 $\mathrm{int}(K) \cap \Lambda = \emptyset$，则称其为空心。

覆盖极小值是数论几何中的经典参数，由 Kannan 和 Lov´asz [9] 引入，并用于证明 Khinchine [10] 首次提出的平坦常数的一个多项式界。平坦常数是在固定维数下，空心凸体所能具有的最大格宽度。凸体K 关于格 Λ 的宽度为

$$\mathrm{width}_\Lambda(K) = \inf_{f \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \max_{a,b \in K} f(a-b).$$

Lenstra [12]，对平坦常数的研究重新兴起，他将其用于一个里程碑式结果：在固定维数下以多项式时间求解整数规划。平坦常数的精确值仅在二维情形下已知（Hurkens [7]），并且有人猜想在维数 3 [4], 下存在一个极大者，且已证明其在 [2] 中是局部极大者。

对空心凸体的研究与覆盖半径密切相关，即

$$\mu(K,\Lambda) = \min\left\{\mu \geq 0 \,:\, \mu K + \Lambda = \mathbb{R}^d\right\}.$$

覆盖半径也可以等价地描述为最大的 $\mu \geqslant 0$，使得膨胀后的μK 允许存在一个空心平移副本。

Kannan 证明，计算某些单纯形的覆盖半径等价于计算弗罗贝尼乌斯数 [8]，而某些带体的覆盖半径则与孤独跑者猜想相关，如 [15]所示。

Kannan 和 Lov´asz 引入了覆盖极小值，将其定义为凸体上的一列 d泛函，用于在格宽度的倒数与覆盖半径之间进行插值。事实上，他们证明了

$$\mu_1(K,\Lambda)=\frac{1}{\operatorname{width}_\Lambda(K)},$$

且对于 $i=d$，由于与所有余维为 d 的仿射子空间相交就意味着覆盖所有点，

$$\mu_d(K,\Lambda)=\mu(K,\Lambda).$$

它们还通过投影的覆盖半径给出了覆盖极小值的一种等价描述，如下所示：

$$\mu_i(K,\Lambda)=\max\left\{\mu(\pi(K),\pi(\Lambda))\mid \pi \text{ is a rational linear projection of rank } i\right\}.$$

注意，所有覆盖极小值在凸体 K的平移下均保持不变；对于可逆矩阵 $A\in GL_d$(R)，有 $\mu_i(AK,\ A\Lambda)=\mu_i(K,\ \Lambda)$。因此，覆盖极小值在幺模变换下保持不变。幺模变换是将格映射到自身的仿射映射，也就是说，它们可以表示为 $x\mapsto BUB^{-1}x+z$，其中 $z\in\Lambda$ 且 $U\in$ GL$_d$(Z)是幺模矩阵，并且 $\Lambda=B$Z^d。

此外，注意，如果R^d 的一个子集与 $\mathcal{A}_{d-i}$(R^d)的所有元素相交（其中某个$1\leqslant i<d$），那么它也与 $\mathcal{A}_{d-i+1}$(R^d)的所有元素相交。这意味着覆盖极小值构成一个单调递增序列，即

$$\mu_1(K,\Lambda)\leqslant\cdots\leqslant\mu_d(K,\Lambda).$$

Kannan 和 Lov´asz 给出的平坦常数多项式上界，源于应用他们针对中间覆盖极小值所证明的不等式。然而，与格宽度和覆盖半径相比，中间覆盖极小值似乎更难理解，除 Kannan 和 Lov´asz 的原始研究外，相关研究也较为有限。

Gonz´alez Merino 和 Schymura [16]重新表述了 Makai Jr. [13] 的一个猜想，并将其推广为覆盖积的下界；覆盖积是给定凸体的所有覆盖极小值与其体积的乘积。这可以看作闵可夫斯基第二基本定理中连续最小值乘积与体积的对偶形式。覆盖积的猜想极小化对象之一是标准终端单纯形 $T_d=$conv$(-\mathbb{1}_d,e_1,\ldots,e_d)$，他们猜想 $\mu_i(T_d)=\frac{i}{2}$。他们证明了 $i=d$的情形，也就是说，标准终端 d 单纯形的覆盖半径为 $\frac{d}{2}$。

此外，Codenotti、Santos 和 Schymura [5] 提出了这样一个问题：非空心格点多胞体 的最大覆盖半径是多少。他们猜想该值为 $\frac{d}{2}$，并证明这等价于：对于所有 $i\leqslant d$ 和 $n\geqslant d$，$\mu_i(T_n)=\frac{i}{2}$。他们证明，在维数不超过 3 时，非空心格点多胞体族中覆盖半径的最大化者，在单模等价意义下，等价于标准终端单纯形平移后的直和。我们将这些直和称为终端多胞体。

设 R$^d=V\oplus W$ 是一个由互补线性子空间构成的分解，且$K\subseteq V$和 $L\subseteq W$ 是都包含原点的凸体。 K 与 L的直和 定义为

$$K\oplus L:=\{\lambda x+(1-\lambda)y\ :\ x\in K,\ y\in L\ ,\lambda\in[0,1]\}\subseteq\mathbb{R}^d.$$

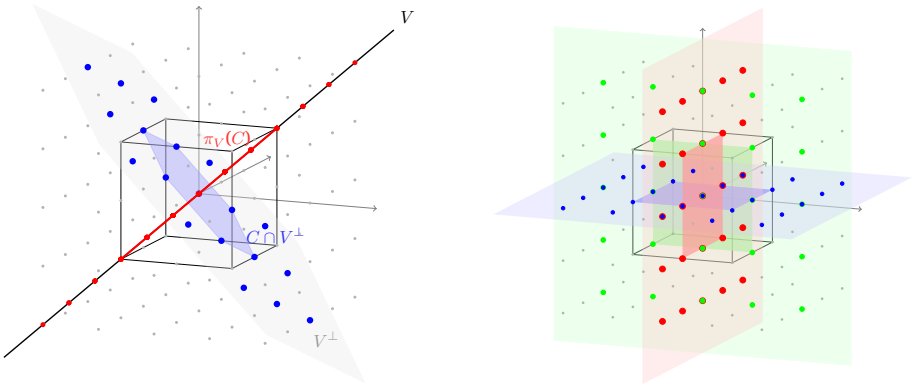
两个格 $\Lambda \subseteq V$和 $\Gamma \subseteq W$ 的直和定义为:

$$\Lambda \oplus \Gamma := \{a+b \,:\, a \in \Lambda,\, b \in \Gamma\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Codenotti、Santos 和 Schymura [5] 还证明了覆盖半径关于直和具有可加性。Codenotti 和 Santos [4]的工作表明，直和的格宽度等于各个加项格宽度的最小值；因此，若讨论第一个覆盖极小值，则对应的是最大值。受此启发，我们提出这样一个问题：直和的 i个覆盖极小值与各加项的覆盖极小值之间有何关系?

就上述猜想中关于覆盖极小值的部分而言，很容易看出，对于所有 $i < d$、$\mu_i(T_d) \geqslant \frac{i}{2}$，但要证明 $\frac{i}{2}$ 是一个上界似乎更为困难。 [9], 已经给出了覆盖极小值的一般上界，但这些上界依赖于差体的连续最小值。请注意， [9]和 [3] 证明了覆盖极小值之间还满足其他不等式关系。相比之下，连续最小值可以取任意递增的正实数序列中的值。因此，我们推测覆盖极小值存在不依赖于连续最小值的其他不等式。

1.2. **我们的贡献**。 受上述背景启发，我们旨在研究凸体覆盖极小值的一般上界，这些上界仅取决于某些导出凸体的覆盖极小值。



(a) 定理 1.1 对于 $[-1,1]^3$ 和 V: $x = y = z$。

(b) 定理 1.3 对于 $[-1,1]^3$ 和 i=2。

图 1. 我们结果之间的依赖关系

定理 1.1. 设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 为包含原点的凸体， $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ 为格， $V \subseteq \mathbb{R}^d$ 为有理线性子空间，且 维数$V = \ell$ 且 $i \in [d]$。若 π_V表示从 $\mathbb{R}^d$ 到 V的正交投影，则下列不等式成立:

$$\mu_i(K,\Lambda) \leqslant \max_{\substack{0\le j\le \ell \\ 0\le i-j\le d-\ell}} \mu_j(\pi_V(K),\pi_V(\Lambda)) + \mu_{i-j}(K\cap V^\perp, \Lambda \cap V^\perp) \tag{1}$$

这推广了 [5], 中出现并在 [14] 中进一步使用的基本引理。Reis 和 Rothvoss [17] 在证明其突破性成果时也使用了同一引理，该成果给出了平坦常数的近乎最优界。

这个界取决于凸体和格在一个固定有理子空间上的投影的覆盖极小值，以及它们与给定有理子空间的正交补的交集，如图 1 (a) 所示。

定理 1.1 中界限的结构特别适用于凸体的直和，我们证明该界限对于直和确实是紧的。特别地，我们推导出以下结果，它用各个直和项的覆盖极小值来描述直和的所有覆盖极小值，从而统一了上述关于直和的覆盖半径和格宽度的结果。

定理 1.2. 令 $\mathbb{R}^d = V \oplus W$, $\dim(V) = \ell$，其中 $\dim(W) = d - \ell$。设 $K \subseteq V$和$L \subseteq W$ 是包含原点的凸体，$\Lambda \subseteq V$和 $\Gamma \subseteq W$ 是格。那么，对每个 以及 $i \in [d]$，以下等式成立：

$$\mu_i(K \oplus L, \Lambda \oplus \Gamma) = \max_{\substack{0 \leq j \leq \ell \\ 0 \leq i-j \leq d-\ell}} \mu_j(K, \Lambda) + \mu_{i-j}(L, \Gamma).$$

与定理 1.1 中给出的界限不同，我们的下一个结果仅取决于某些覆盖半径的有限多个取值。具体而言，它是凸体与格在维数对应于覆盖极小值指标的坐标超平面上的交集的覆盖半径的最大值，如图 1(b) 所示。

定理 1.3。设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$为一个凸体，$\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$为一个格，且 $\{f_1, \dots f_d\}$是 Λ的一个基。对于 $I \in \binom{[d]}{i}$，记 $L_I = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{f_i \mid i \in I\}$ 为与 I 及给定基对应的$\mathbb{R}^d$中的 i 维线性子空间。如果对于每个 $I \in \binom{[d]}{i}$，$\dim(K \cap L_I) = i$，那么：

$$\mu_i(K, \Lambda) \leqslant \max\left\{\mu(K \cap L_I, \Lambda \cap L_I) \mid I \in \binom{[d]}{i}\right\}.$$

这种形式的界限非常值得关注，因为覆盖半径是比覆盖极小值更容易理解的函数。此外，已有用于计算有理多胞体覆盖半径的高效算法，参见 [1]和 [6], ；但据我们所知，目前尚无用于计算一般覆盖极小值的高效算法。

我们将 [16] 和 [5]中的猜想等价关系扩展为包含第三个命题。具体而言，我们证明，关于标准终端单纯形的覆盖极小值的猜想值应与终端多胞体的覆盖极小值相同。

命题 1.4。对于每个 $d \in \mathbb{N}$，以下命题等价：

i) $\mu(P) \leqslant \frac{i}{2}$对于每个 $i \leqslant d$以及每个非空心格 i-多胞体 P。 *ii)* $\mu_i(T_n) = \frac{i}{2}$ 对于每个 $n \geq d$ 以及每个 $i \leqslant d$。 *iii)* $\mu_i(T) = \frac{i}{2}$ 对于每个 $n \geq d$、每个终端 n-多胞体 T以及每个 $i \leqslant d$。

我们还给出了关于标准终端单形覆盖极小值的两个新上界。

1.3. **论文结构**。定理 1.1 和 1.2 的证明见第 2 节。定理 1.3 的证明见第 3 节。我们还证明了定理 1.3 中的界对局部反阻塞体是紧的。在第 4 节中，我们概述 Codenotti、Santos 和 Schymura 的猜想 [5], ，并证明命题 1.4。最后，在第 5 节中，我们将所得的界应用于终端单纯形及某些加权推广，并将这些计算置于第 4 节的背景下。

2. 覆盖极小值的投影界

在本节中，我们证明定理 1.1 和 1.2。

记号 2.1. 对于凸体 $K \subseteq \mathrm{R}^d$ 和格 $\Lambda \subseteq \mathrm{R}^d$，为方便起见，我们记 $\mu_0(K,\ \Lambda) := 0$。注意，这与覆盖极小值的定义一致，因为事实上 $0K + \Lambda = \{\mathbb{0}_d\} + \Lambda = \Lambda$ 与 R^d 相交，而这正是 R^d 中唯一的 d 维仿射子空间。

一般来说，要证明某个 $\mu > 0$ 是 $\mu_i(K,\ \Lambda)$ 的上界，需要证明 $\mu K + \Lambda$ 与 R^d 中每个 $(d-i)$ 维仿射子空间都相交。界 (1) 的结构可分为右侧的两部分——一部分来自投影到所选有理线性子空间，另一部分来自与其正交补的交集。该界中的最大值源于任意 $(d-i)$ 维仿射子空间对应的投影和交集的维数不同。

定理 *1.1* 的证明。设 $x + U$ 是 R^d 中任意一个 $(d-i)$ 维仿射子空间，其中 $x \in \mathrm{R}^d$ 且 $U \subseteq \mathrm{R}^d$ 是一个线性子空间。只需证明，对于某个 $0 \le j \le \ell,\ 0 \le i-j \le d-\ell$，$x+U$ 与 $(\mu_j(\pi_V(K)\ \pi_V(\Lambda)) + \mu_{i-j}(K \cap V^\perp, \Lambda \cap V^\perp))K + \Lambda$ 相交。

设 $\dim(\pi_V(U)) = \ell - j$，且 $\dim(U \cap V^\perp) = (d-i) - (\ell - j) = (d-\ell) - (i-j)$。为简洁起见，令 $\mu_j := \mu_j(\pi_V(K)\ \pi_V(\Lambda))$，并令 $\mu_{i-j} := \mu_{i-j}(K \cap V^\perp, \Lambda \cap V^\perp)$。

由于 $\pi_V(x)+\pi_V(U)$ 是 V 中一个 $(\ell-j)$ 维仿射子空间，因此存在 $u_1 \in U$、$p \in K$ 和 $a \in \Lambda$，使得

$$\pi_V(x) + \pi_V(u_1) = \mu_j \pi_V(p) + \pi_V(a) \tag{2}$$

记 $y = \pi_{V^\perp}(x) + \pi_{V^\perp}(u_1) - \mu_j \cdot \pi_{V^\perp}(p) - \pi_{V^\perp}(a) \in V^\perp$。注意，$y \in V^\perp$ 意味着 $\dim((y+U) \cap V^\perp) = \dim(U \cap V^\perp) = (d-\ell) - (i-j)$。由于 $(y+U) \cap V^\perp$ 是 $V^\perp$ 中一个 $((d-\ell) - (i-j))$ 维仿射子空间，因此存在$u_2 \in U \cap V^\perp$、$q \in K \cap V^\perp$ 和 $b \in \Lambda \cap V^\perp$，使得

$$\begin{gathered} y + u_2 = \mu_{i-j} q + b \\ \Rightarrow \pi_{V^\perp}(x) + \pi_{V^\perp}(u_1) - \mu_j \cdot \pi_{V^\perp}(p) - \pi_{V^\perp}(a) + u_2 = \mu_{i-j} \cdot q + b \\ \Rightarrow \pi_{V^\perp}(x) + \pi_{V^\perp}(u_1) = \mu_j \cdot \pi_{V^\perp}(p) + \mu_{i-j} \cdot q + \pi_{V^\perp}(a) + b \end{gathered} \tag{3}$$

现在，将方程 2 和 3 相加可得：

$$\begin{gathered} x + u_1 + u_2 = \mu_j \cdot p + \mu_{i-j} \cdot q + a + b \\ \Rightarrow x + u_1 + u_2 = (\mu_j + \mu_{i-j}) \left(\frac{\mu_j}{\mu_j + \mu_{i-j}} p + \frac{\mu_{i-j}}{\mu j + \mu_{i-j}} q \right) + a + b. \end{gathered}$$

这一点表明，$x+U$与（$\mu_j + \mu_{i-j}$）$K+\Lambda$相交。由于 j取决于 U，并且根据构造，j可以取满足 $0 \le j \le \ell,\ 0 \le i-j \le d-\ell$的任意值，因此可知，对于该指标集中的所有 j，μ_i（$K,\ \Lambda$）的上界不超过 $\mu_j + \mu_{i-j}$的最大值。□

我们的下一个目标是证明：将刚刚证明的上界用于两个凸体的直和时，该上界是紧的，其中所选的有理线性子空间及其正交补恰好构成 R^d 的分解，并且该分解对应于这个直和。

定理 *1.2* 的证明。该上界直接由定理 1.1 得出，因为$\pi_V(K \oplus L) = K, \pi_V(\Lambda \oplus \Gamma) = \Lambda$, $K \oplus L \cap W = L$ 并且 $\Lambda \oplus \Gamma \cap W = \Gamma$。

对于下界，只需证明对于每个 j，使得 $0 \leqslant j \leqslant l$ 且$0 \leqslant i-j \leqslant d-l$,

$$\mu_i(K \oplus L, \Lambda \oplus \Gamma) \geq \mu_j(K, \Lambda) + \mu_{i-j}(L, \Gamma)$$

成立。

注意，$K\oplus L$和 $\Lambda\oplus\Gamma$ 分别投影到 K和 Λ，因此 $\mu_i(K\oplus L, \Lambda\oplus\Gamma) \geq \mu_i(K, \Lambda)$, 这对应于情形 $j = i$。类似地，对于 $j = 0$，我们有 $\mu_i(K \oplus L, \Lambda \oplus \Gamma) \geq \mu_i(L, \Gamma)$。

假设 j, $i - j \neq 0$，此外，$\mu_j := \mu_j(K, \Lambda) > 0$ 且 $\mu_{i-j} := \mu_{i-j}(L, \Gamma) > 0$。

设 $\mu_i(K \oplus L, \Lambda \oplus \Gamma) < \mu_j + \mu_{i-j}$，并取满足 $c+c' = \mu_i(K\oplus L, \Lambda\oplus\Gamma)$ 的 $0 < c < \mu_j$ 和 $0 < c' < \mu_{i-j}$。那么存在一个 $(l-j)$ 维线性子空间$U_V \leqslant V$以及 $x \in V$，使得 $(x+U_V) \cap cK = \emptyset$；还存在一个 $(d-l-i+j)$ 维线性子空间 $U_W \leqslant W$ 以及 $y \in W$，使得 $(y+U_W) \cap c'L = \emptyset$。

那么 $\dim(U_V \oplus U_W) = (d-i)$，因此 $x + y + (U_V \oplus U_W)$ 与 $(c+c')(K \oplus L) + (\Lambda \oplus \Gamma)$ 相交。因此，存在 $v \in U_V, w \in U_W, p \in K, q \in L, \lambda \in [0,1], a \in \Lambda$ 和$b \in \Gamma$，使得

$$x + y + v + w = (c + c')(\lambda p + (1 - \lambda)q) + a + b.$$

该和是直和，因此 $x+v = (c+c')\lambda p+a$ 且 $y+w = (c+c')(1-\lambda)q+b$。由于$\mathbb{0}_d \in K$ 且 $\mathbb{0}_d \in L$, $\lambda p \in K$ 和 $(1-\lambda)q \in L$。此外，因为 $(x + U_V) \cap cK = \emptyset$且 $(y + U_W) \cap c'L = \emptyset$，我们可以得出 $(c + c')\lambda > c$ 且 $(c + c')(1 - \lambda) > c'$。这等价于 $c'\lambda > c(1 - \lambda)$ 且 $c(1 - \lambda) > c'\lambda$，这是不合理的。□

单模单纯形的覆盖极小值已在 [9] 中计算得出，所用方法是基于差体的连续最小值给出的上界。此外，标准交叉多胞体的覆盖极小值已在 [16] 中计算得出。定理 1.2 的一种用途是简便地计算线段直和的所有覆盖极小值；线段直和构成的多胞体族同时包含单模单纯形和标准交叉多胞体。

例 2.2。令 $a_j < b_j$ 和 $b_j - a_j \leqslant b_{j-1} - a_{j-1}$。线段唯一非零的覆盖极小值是其覆盖半径 μ_1，它等于给定线段长度的倒数。利用定理 1.2 计算线段直和 $[a_j, b_j]$ 的第 i 个覆盖极小值，可得：

$$\mu_i\left(\bigoplus_{j=1}^{d}[a_j e_j, b_j e_j]\right) = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{b_j - a_j}.$$

代入 $a_j = 0$和 $b_j = 1$，可得标准单模单纯形的第 i个覆盖极小值为 i。

现在，代入 $a_j = -1$ 和 $b_j = 1$，可得标准交叉多胞体的第 i 个覆盖极小值为 $\frac{i}{2}$。

3. 覆盖极小值的交集界

本节的目标是用有限多个覆盖半径的最大值从上方界定 $\mu_i(K)$。通过维数论证很容易验证，R^d 中的每个$(d-i)$维仿射子空间都与至少一个 i维坐标子空间相交。因此，如果 K 的某个伸缩体覆盖了所有 i维坐标子空间，那么它至少是第 i个覆盖极小值

。

记号 3.1。对于 $I \in \binom{[d]}{i}$，用 $L_I = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{f_i \mid i \in I\}$ 表示与 I及格 Λ的给定基 $\{f_1, \ldots, f_d\}$ 相对应的 $\mathbf{R}^d$ 中的 i维线性子空间。当格为 $\mathbf{Z}^d$时，我们假设其为标准基 $\{e_1, \ldots, e_d\}$。

定理 *1.3* 的证明。 设 U是 $\mathbf{R}^d$中的任意一个 $(d-i)$ 维仿射子空间，并设 $I \in \binom{[d]}{i}$ 满足 $U \cap L_I \neq \emptyset$。限制在 L_I上，由于 $K \cap L_I$是满维的，且 $\Lambda \cap L_I$是 L_I中的一个格，因为 f_1，……，f_d是格基，根据覆盖半径的定义：

$$\mu(K \cap L_I, \Lambda \cap L_I)(K \cap L_I) + \Lambda \cap L_I = L_I$$

$$\Rightarrow \mu(K \cap L_I, \Lambda \cap L_I)K + \Lambda \supseteq L_I$$

$$\Rightarrow (\mu(K \cap L_I, \Lambda \cap L_I)K + \Lambda) \cap U \supseteq L_I \cap U \neq \emptyset.$$

令 $t \geq 0$。前面的计算表明，要使 $(tK + \Lambda) \cap U$ 非空，只需 t大于或等于 $\mu(K \cap L_I, \Lambda \cap L_I)$。因此，要使 $tK + \Lambda$ 与所有 $(d-i)$ 维仿射子空间相交，只需在迭代$I \in \binom{[d]}{i}$时令 t 取这些值中的最大值。□

请注意，假设凸体与所有坐标 i 子空间的交集非空，并不过分苛刻——若要求 K 的内部包含原点，这一条件便可满足；而覆盖极小值是平移不变的。然而，凸体的截面显然不是平移不变的，因此，同一凸体经过不同平移后，这个界会取不同的值。

我们的下一个目标是找出一类重要的凸体，使得定理 1.3 中的界是尖锐的。

以下这类局部反阻塞体在 [11] 中被定义为反阻塞凸体和无条件凸体的推广。

定义 3.2. 若一个凸体 $K \subseteq \mathbf{R}^d$ 满足：对于每个坐标子空间，该凸体在此子空间上的投影与其交集重合，则称其为局部反阻塞体。也就是说，对于所有 $I \subseteq [d]$，$K \cap L_I = \pi_{L_I}(K)$。

若局部反阻塞体的内部包含原点，则称其为正规。

回顾一下，覆盖极小值可视为给定凸体在所有适当维数的有理线性子空间上的投影的最大覆盖半径。更具体地说：

$$\mu_i(K, \Lambda) = \max\{\mu(\pi(K), \pi(\Lambda)) \mid \pi \text{ is a rational linear projection of rank } i\}.$$

因此，对于每个维数为 i 的有理线性子空间 $V \subseteq \mathbf{R}^d$，$\mu_i(K, \Lambda) \geqslant \mu(\pi_V(K), \pi_V(\Lambda))$。由于对局部反阻塞体而言，其在坐标子空间上的投影与交集重合，因此，定理 1.3 给出的上界中使坐标交集的覆盖半径达到最大的对象，也是该凸体覆盖极小值的一个下界。这些观察证明了以下推论：

推论 3.3. 设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个正规的局部反阻塞体，且 $i \in [d]$。那么：

$$\mu_i(K) = \max\left\{\mu(K \cap L_I) \mid I \in \binom{[d]}{i}\right\}.$$

从显式计算的角度来看，这个推论尤其值得关注，因为它将据作者所知所有已显式计算出的覆盖极小值都归结为覆盖半径的计算。更具体地说，单模单纯形 [9] 以及族 $P_{d,\ k} = C_d \cap kC_d^*$ [16]。

备注 3.4。 推论 3.3 表明，对于正规局部反阻塞体 K， $\mu_i(K)+\mathbb{Z}^d$ 包含所有维数为 i 的坐标子空间。这正是 [16], 定理3.2 (ii)中的条件，该定理给出了一个下界：

$$\mu_i(K)^d \operatorname{vol}(K) \geqslant \frac{i!^{\frac{d}{i}}}{d!}.$$

4. 非空心格多胞体的覆盖半径

回顾一下，相对于标准整数格，维数为 d 的终端单纯形 是 $T_d := \operatorname{conv}(-\mathbb{1}_d, e_1, \ldots\ldots, e_d)$。它是一个格单纯形，原点是其唯一的内部格点，并且在各种情境中都自然地作为单模单纯形的非空心版本的候选对象出现。若一个满维格多胞体可以表示为若干个终端单纯形平移后的直和，我们就称之为终端多胞体 。终端多胞体族介于终端单纯形与标准交叉多胞体之间；后者可以看作线段 $[-e_j, e_j]$ 的直和，也就是说，是维数为 1 的终端单纯形的直和。

Codenotti、Santos 和 Schymura [5] 提出了非空心格多面体的最大覆盖半径是多少这一问题，并提出了以下猜想；他们证明了该猜想在维数不超过 3 时成立。

猜想4.1. [5, 猜想 A] 设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个非空心格多面体。那么

$$\mu(P) \leqslant \frac{d}{2},$$

当且仅当 P 经过幺模变换后是一个终端 d-多胞体时，等号成立。

关于终端单纯形的覆盖极小值，Gonz´alez Merino 和 Schymura[16]提出了以下猜想：

猜想 4.2. [16,注 4.9] 对于每个 $d \in \mathbb{N}$ 和 $i \in [d]$,

$$\mu_i(T_d) = \frac{i}{2}.$$

他们证明了情形 $i = d$ [16, 命题 4.8], ，并且不难验证，标准终端单纯形的格宽度为 2，因此 $\mu_1(T_d) = \frac{1}{2}$。

以下述方式证明这两个猜想等价：

定理4.3。 [5, 定理1。2] 对于每个 $d \in \mathbb{N}$，以下命题等价：

i) $\mu(P) \leqslant \frac{i}{2}$对于每个 $i \leqslant d$ 以及每个非空心格 i-多胞体 P。

ii) $\mu_i(T_n) = \frac{i}{2}$ 对于每个 $n \geqslant d$ 以及每个 $i \leqslant d$。

考虑定理 1.2 中关于直和的覆盖极小值的结果，我们现在可以看出，如果猜想 4.2 成立，那么终端单纯形不仅会是所有非空心格多胞体中覆盖极小值的最大化者，所有终端多胞体也同样如此。

推论 4.4. 设 T 是一个终端 d-多胞体。若假设猜想 *4.2* 对维数不超过 d的情形成立，那么对于所有 $i \in [d]$,

$$\mu_i(T) = \frac{i}{2}.$$

k证明。令 $k \in$N、 l_1，…，$l_k \in$N 满足 $\sum l_i = d$，并且对 $j \in [k]$、$u_j \in \mathrm{R}^{k_j}$，存在$i=1$使得 $\mathbb{0}_{l_j} \in u_j + S(\mathbb{1}_{l_j+1})$。任意一个终端 d-多胞体都可以看作 $T = (u_1 + S(\mathbb{1}_{l_1+1})) \oplus \cdots \oplus (u_k + S(\mathbb{1}_{l_k+1}))$，而这个直和分解与 R^d 分解为 $\mathrm{R}^d = \mathrm{R}^{l_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{R}^{l_k}$相一致。

由于我们假设猜想 4.2 在维数不超过 d 时成立，因此我们知道，对每个 $j \in [k]$ 和每个 $0 \leqslant s \leqslant l_j$，都有 $\mu_s(u_j + S(\mathbb{1}_{l_j+1})) = \frac{s}{2}$。

对于任意 $i \in [d]$，利用这一点并应用定理 1.2，我们得到：

$$\mu_i(T) = \max\left\{ \sum_{j=1}^{k} \frac{s_j}{2} \,\middle|\, 0 \leqslant s_j \leqslant l_j,\ \sum_{j=1}^{k} s_j = i \right\},$$

即，$\mu_i(T) = \frac{i}{2}$。

□

结合定理 4.3 和 4.4 可得命题 1.4。

5. （加权）终端单纯形的覆盖极小值上界

本节的目标是，鉴于第 4 节中提到的猜想，将第 2 节和第 3 节中得到的上界应用于终端单纯形。

要将定理 1.1 和 1.3 应用于终端单纯形，我们将需要以下一族加权版本；该族版本是在 [5] 中引入的。

定义 5.1。令 $\omega = (\omega_0, \ldots\ldots, \omega_d) \in \mathrm{R}^{d+1}_{>0}$为一个权重向量。我们定义如下单形族：

$$S(\omega) := \mathrm{conv}(-\omega_0 \mathbb{1}_d, \omega_1 \cdot e_1, \ldots, \omega_d \cdot e_d) \subseteq \mathbb{R}^d.$$

具体而言，$S(\mathbb{1}_{d+1}) = T_d$。

作者进一步计算了所有加权端点单形的覆盖半径，并猜想了其他覆盖极小值的取值，同时证明了 $i = 1$ 的情形。

定理 5.2。 [5, 定理 1。4] 对于每个 $\omega \in \mathbb{R}^{d+1}_{>0}$，都有：

$$\mu(S(\omega)) = \frac{\sum\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant d} \frac{1}{\omega_i \omega_j}}{\sum\limits_{i=0}^{d} \frac{1}{\omega_i}}.$$

猜想 5.3. [5, 猜想 5.3] 对于任意 $\omega \in \mathbb{R}^{d+1}_{>0}$满足 $\omega_0 \leqslant \cdots \leqslant \omega_d$，以及任意$i \in [d]$, i阶覆盖极小值由投影到前 i个坐标取得，即：

$$\mu_i(S(\omega)) = \frac{\sum\limits_{0 \leqslant j < k \leqslant i} \frac{1}{\omega_j \omega_k}}{\sum\limits_{j=0}^{i} \frac{1}{\omega_j}}.$$

与猜想 4.2 一样（它是该猜想的特例），显然可以通过注意到 $\pi_{L_I}(S(\omega)) = S(\omega_0, (\omega_j)_{j\in I})$ 并应用定理 5.2，得到下界。然而，除覆盖极小值单调性所给出的上界外，作者尚不知道其他明确的上界。

为了给 $S(\omega)$ 的覆盖极小值建立上界，特别是 T_d 利用定理 1.1 和 1.3，我们还需要计算 $S(\omega)$ 与任意坐标子空间的交集，这正是以下引理的目的。

引理 5.4。设 $i \in [d]$、$I \in \binom{[d]}{i}$ 和 $\omega \in \mathbb{R}^{d+1}_{>0}$。那么，

$$S(\omega) \cap L_I = S\left(\frac{1}{\sum\limits_{k\notin I}\frac{1}{\omega_k}},\ (\omega_j)_{j\in I}\right) \subseteq \mathbb{R}^I,$$

其中，等式表示将左侧集合限制在 I 中的坐标上时，两集合相等。

证明。</style}点 $x \in \mathrm{R}^d$ 属于集合 $S(\omega) \cap L_I$，当且仅当它可以表示为 d $dx = -\lambda_0\omega_0\mathbb{1}_d + \sum \lambda_j\omega_j e_j$，其中对所有 $0 \leqslant j \leqslant d$，$\lambda_j \geq 0$，且对所有$j=0$ $j=0k \notin I$，$-\lambda_0\omega_0 + \lambda_k\omega_k = 0$ 成立。最后一个条件可以改写为：对所有$k \notin I$，$\lambda_k = \frac{\omega_0}{\omega_k}\lambda_0$。注意，由于 $\omega \in \mathrm{R}^{d+1}_{>}0$，$\lambda_0$ 的非负性意味着 λ_k 的非负性，其中 $k \notin I$。现在我们改写 $1 = \sum\limits_{j=0}\lambda_j = \lambda_0\omega_0\sum\limits_{k\notin I}\frac{1}{\omega_k} + \sum\limits_{j\in I}\lambda_j$。 —

考虑到这一点，我们改写

$$x = -\lambda_0\omega_0\mathbb{1}_I + \sum_{j\in I}\lambda_j\omega_j e_j = -\left(\lambda_0\omega_0\sum_{k\notin I}\frac{1}{\omega_k}\right)\cdot\frac{1}{\sum\limits_{k\notin I}\frac{1}{\omega_k}}\mathbb{1}_I + \sum_{j\in I}\lambda_j\omega_j e_j,$$

that is, $x \in S\left(\frac{1}{\sum\limits_{k\notin I}\frac{1}{\omega_k}},\ (\omega_j)_{j\in I}\right)$.

□

将 $\omega = \mathbb{1}_{d+1}$ 代入此引理，直接可得以下推论。

推论 5.5。设 $i \in [d]$ 且 $I \in \binom{[d]}{i}$。那么，$T_d \cap L_I = S((\frac{1}{d-i+1}, 1, \ldots, 1))$，其中权重向量有 $i+1$ 个元素；等号表示限制在 I中的坐标上时确实相等。

对加权终端单纯形取值进行界定，是对终端单纯形取值界定问题的推广。考虑到这一点以及推论 5.5，我们可以看到，定理 1.1 在与维数为 1 或 2 的线性子空间取交时，应用最为明确。在这些情况下，由终端单纯形与坐标子空间的交集所得到的加权终端单纯形的所有覆盖极小值，要么是覆盖半径，要么是格宽度的倒数，因此其数值已知，因为已知猜想 5.3 对 $i = 1$ 和 $i = d$ 成立。

以下是 $\mu_i(T_d)$ 的一个显式上界，它是对余维为 1 的线性子空间 V连续应用定理 1.1 得到的。

推论 5.6. 对于每个 $d \in \mathbb{N}$和 $2 \leqslant i \leqslant d$,

$$\mu_i(T_d) \leqslant \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{i-2} \frac{d-j}{d-j+1}.$$

证明。注意坐标超平面 $L = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$。于是，$\pi_L(T_d) = T_{d-1} \times \{0\}$；如引理 5.5 所示，$T_d \cap L^\perp = \{\mathbb{0}_{d-1}\} \times S(\frac{1}{d},\ 1) = \{\mathbb{0}_{d-1}\} \times \mathrm{conv}(-\frac{1}{d}e_d,\ e_d)$。由于就覆盖极小值而言，环境空间并不重要，且 $\pi_L(\mathbb{Z}^d) = \mathbb{Z}^{d-1} \times \{0\}$ 和 $\mathbb{Z}^d \cap L^\perp = \{\mathbb{0}_{d-1}\} \times \mathbb{Z}$，我们可以将它们分别视为相应标准格中的 T_{d-1} 和 $[-\frac{1}{d}, 1]$。另请注意，$\mu([-\frac{1}{d}, 1]) = \frac{d}{d+1}$，因为任意线段的覆盖半径恰好是将其缩放至长度为 1 所需的缩放量。于是，将定理 1.1 应用于 T_d 和 L，得到如下结果：

$$\mu_i(T_d) \leqslant \max_k \left(\mu_k(T_{d-1}) + \mu_{i-k}([-\frac{1}{d}, 1]) \right) = \max \left\{ \mu_i(T_{d-1}), \mu_{i-1}(T_{d-1}) + \frac{d}{d+1} \right\}.$$

注意到右侧所涉及的终端单纯形的维数已经降低。连续应用这个不等式，我们就能得到一个已知的值——终端单纯形的第一个覆盖极小值为 $\frac{1}{2}$，或者终端单纯形的覆盖半径为其维数的一半。具体来说，将该不等式应用于我们取最大值的那个集合中的第一个元素，可得：

$$\mu_i(T_d) \leqslant \max \left\{ \mu_i(T_{d-2}), \mu_{i-1}(T_{d-2}) + \frac{d-1}{d}, \mu_{i-1}(T_{d-1}) + \frac{d}{d+1} \right\}. \tag{4}$$

我们先证明 $\mu_i(T_d) \leqslant \max\{\frac{i}{2}, \mu_{i-1}(T_{d-1}) + \frac{d}{d+1}\}$。

由于 T_{d-1} 在投影掉最后一个坐标时投影为 T_{d-2}，因此 $\mu_{i-1}(T_{d-2}) \leqslant \mu_{i-1}(T_{d-1})$。此外，$\frac{d-1}{d} < \frac{d}{d+1}$，因此 $\mu_{i-1}(T_{d-2}) + \frac{d-1}{d} < \mu_{i-1}(T_{d-1}) + \frac{d}{d+1}$，并且可以从 (4) 中取最大值的集合里删去前者。于是得到 $\mu_i(T_d) \leqslant \max\{\mu_i(T_{d-2}), \mu_{i-1}(T_{d-1}) + \frac{d}{d+1}\}$。注意，在我们取最大值的集合的第一个元素中，终端单纯形的维数又降低了 1。将这一过程总共重复 $d-i$ 次后，我们就能得到终端单纯形的覆盖半径，这是一个已知的值：

$$\mu_i(T_d) \leqslant \max \left\{ \mu_i(T_i), \mu_{i-1}(T_{d-1}) + \frac{d}{d+1} \right\} = \max \left\{ \frac{i}{2}, \mu_{i-1}(T_{d-1}) + \frac{d}{d+1} \right\}.$$

将此不等式应用于右侧的项 $\mu_{i-1}(T_{d-1})$，得到：

$$\mu_i(T_d) \leqslant \max \left\{ \frac{i}{2}, \frac{i-1}{2} + \frac{d}{d+1}, \mu_{i-2}(T_{d-2}) + \frac{d-1}{d} + \frac{d}{d+1} \right\}.$$

现在，注意到由于 $d \geq 1$，我们有 $\frac{d}{d+1} \geq \frac{1}{2}$，即 $\frac{i-1}{2} + \frac{d}{d+1} \geq \frac{i}{2}$。此外，对于每个 $0 \leqslant j \leqslant i$，由于 $d > i$，我们有 $\frac{d-j}{d-j+1} \geq \frac{1}{2}$。因此，对 $0 \leqslant j \leqslant i-2$ 依次应用不等式 $\mu_{i-j}(T_{d-j}) \leqslant \max\{\frac{i-j}{2}, \mu_{i-j-1}(T_{d-j-1}) + \frac{d-j}{d-j+1}\}$，共 $i-1$ 次，可得：

$$\mu_i(T_d) \leqslant \max \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{i-2} \frac{d-j}{d-j+1}, \mu_1(T_{d-i+1}) + \sum_{j=0}^{i-2} \frac{d-j}{d-j+1} \right\} = \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{i-2} \frac{d-j}{d-j+1}.$$

□

注记 5.7。 注意，也可以从终端单纯形和余维为 2 的坐标子空间出发进行类似计算，也可以从加权终端单纯形和坐标超平面出发进行类似计算。

以下命题将定理 1.3 中的上界应用于任意加权终端单纯形，旨在逼近猜想 5.3 中所期望的上界。

命题 5.8。 令 $\omega \in \mathbb{R}^{d+1}_{>0}$使得 $\omega_0 \leqslant \cdots \leqslant \omega_d$。那么，对于每个 $i < d$:

$$\mu_i(S(\omega)) \leqslant \frac{\left(\frac{1}{\omega_0} + \sum\limits_{k=i+1}^{d} \frac{1}{\omega_k}\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{i} \frac{1}{\omega_j}\right) + \sum\limits_{1\leq s<t\leq i} \frac{1}{\omega_s\omega_t}}{\sum\limits_{k=0}^{d} \frac{1}{\omega_k}}.$$

证明。 结合定理 1.3 与引理 5.4，可得

$$\mu_i(S(\omega)) \leqslant \max\left\{\mu\left(S\left(\frac{1}{\sum\limits_{k\notin I}\frac{1}{\omega_k}},\ (\omega_j)_{j\in I}\right)\right) \mid I \in \binom{[d]}{i}\right\}.$$

右侧的覆盖极小值由定理 5.2 给出，为

$$\mu\left(S\left(\frac{1}{\sum\limits_{k\notin I}\frac{1}{\omega_k}},\ (\omega_j)_{j\in I}\right)\right) = \frac{\left(\sum\limits_{k\notin I}\frac{1}{\omega_k}\right)\left(\sum\limits_{j\in I}\frac{1}{\omega_j}\right) + \sum\limits_{\substack{s<t\\ s,t\in I}}\frac{1}{\omega_s\omega_t}}{\sum\limits_{k=0}^{d}\frac{1}{\omega_k}}.$$

为证明该命题，我们需要证明该表达式在 $dI = [i]$ 时取得最大值。记 $C = \sum\limits_{k=0}\frac{1}{\omega_k}$、 $L(I) = \sum\limits_{j\in I}\frac{1}{\omega_j}$以及 $Q(I) = \sum\limits_{j\in I}\frac{1}{\omega_j^2}$。我们需要最大化 $(C-L(I))L(I) + \frac{1}{2}(L(I)^2 - Q(I))C$，这归结为最大化

$$F(I) = 2C\cdot L(I) - L(I)^2 - Q(I),$$

因为 C 是一个常数。

设 $I \neq [i]$。由于 $i < d$，存在一个 $a \in I$和 $b \in [d]\setminus I$，使得 $b < a$，并记 $I' = I\setminus\{a\}\cup\{b\}$。令 $\delta = \frac{1}{\omega_b} - \frac{1}{\omega_a}$，由于$\omega_b \leqslant \omega_a$，其为非负数。

Then $L(I') = L(I) + \delta$ and $Q(I') = Q(I) + \delta^2 + \delta\frac{1}{\omega_a}$.

$$F(I') - F(I) = 2C\delta - 2L(I)\delta - \delta^2 - \delta^2 - \delta\frac{1}{\omega_a} =$$

$$= 2\delta\left(C - L(I) - \delta - \frac{1}{\omega_a}\right) = 2\delta\left(C - L(I) - \frac{1}{\omega_b}\right).$$

回顾 C和 L（I）的定义，我们看到F（I'）$-F$（I）$= 2\delta\sum\limits_{j\notin I\cup\{b\}}\frac{1}{\omega_j}$，即非负，因为 $\delta \geq 0$ 和所有 $\omega_j > 0$。这证明了使所需表达式最小化的 $\binom{[d]}{i}$ 中的元素是 $[i]$，命题得证。

□

将权重向量指定为 $\mathbb{1}_{d+1}$，即可得到终端单纯形覆盖极小值的上界。

推论 5.9. 对于 $d \in \mathbb{N}$， $i \in [d]$，以下不等式成立：

$$\mu_i(T_d) \leqslant \frac{i}{2}\left(1 + \frac{d-i}{d+1}\right).$$

我们来比较推论 5.6 和推论 5.9 得到的上界，与根据 Kannan 和 Lov´asz 的以下结果所能得到的上界。

引理 5.10. [9]对于凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^d$、格 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ 以及 $i \in [d]$，以下不等式成立：

$$\mu_{i+1}(K,\Lambda) \leqslant \mu_i(K,\Lambda) + \lambda_{d-i}(K-K,\Lambda).$$

可以验证 $\lambda_1(T_d - T_d) = \cdots = \lambda_d(T_d - T_d) = \frac{d}{d+1}$，因此使用引理 5.10 $i-1$ 次可得上界：

$$\mu_i(T_d) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{(i-1)d}{d+1}.$$

由于对于所有 $0 \leqslant j \leqslant d$， $\frac{d-j}{d-j+1} \leqslant \frac{d}{d+1}$ 均成立，且仅当 $j = 0$ 时取等号，因此我们看到，推论 5.6 得到的上界强于 Kannan 和 Lov´asz 所给出的上界。

当 i 相对于 d较小时，推论 5.6 会比推论 y 5.9 更强；但随着 i增大，后者会明显强于前者。

致谢

作者谨向 Giulia Codenotti 致谢，感谢她介绍这一主题，并就本文进行了许多富有意义的交流。作者还感谢 Matthias Beck、Ansgar Freyer、Georg Loho 和 Matthias Schymura 提供的宝贵讨论。作者的部分经费来自德国研究联合会（DFG，德国研究基金会），资助项目为德国卓越战略下的柏林数学研究中心 MATH+（EXC-2046/1，项目编号 390685689，BMSStipend）。

参考文献

[1] David Alc´antara、Francisco Criado 和 Francisco Santos。《三维拟阵多胞体的覆盖半径与移位孤独跑者猜想》，2025年。arXiv:2506.13379。[2] Gennadiy Averkov、Giulia Codenotti、Antonio Macchia 和 Francisco Santos。《三维空心体格宽度的一个局部极大值点》。《离散应用数学》，298：129–142，2021年。[3] Gennadiy Averkov 和 Christian Wagner。《平面上无格点凸集格宽度的不等式》。《代数与几何论文集》¨，53(1)：1–23，2012年。[4] Giulia Codenotti 和 Francisco Santos。《大宽度空心多胞体》。《美国数学会会刊》，148(2)：835–850，2019年。[5] Giulia Codenotti、Francisco Santos 和 Matthias Schymura。《非空心单形的覆盖半径与离散表面积》。《离散与计算几何》，67(1)：65–111，2021年。[6] Jana Cslovjecsek、Romanos Diogenes Malikiosis、M´arton Nasz´odi 和 Matthias Schymura。《计算多胞体的覆盖半径及其在孤独跑者问题中的应用》。《组合数学》，42(4)：463–490，2022年。[7] C.A.J. Hurkens。《平面上凸集的扩张》。《线性代数及其应用》，134 128，1990 121：–。[8] Ravi Kannan。《多胞体的格平移与弗罗贝尼乌斯问题》。《组合数学》，12 177，1992 2 161( )：–。[9] Ravi Kannan 和 L´aszl´o Lov´asz。《覆盖极小值与无格点凸体》。《数学年刊》，128(3)：577–602，1988年。[10] Aleksandr Yakovlevich Khinchine。《克罗内克逼近理论的定量表述》。《苏联科学院学报·数学辑》，12：113–122，1948年。俄文。

[11] Florian Kohl、McCabe C. Olsen 和 Raman Sanyal。《无条件自反多胞体》。《离散与计算几何》，64(2)：427–452，2020年。[12] H.W. Lenstra。《固定变量数的整数规划》。《运筹研究数学》，8(4)：538–548，1983年。[13] E. Makai Jr.。《关于凸体中最薄的不可分离格》。《匈牙利数学研究》，13(1–2)：19–27，1978年。[14] Romanos Diogenes Malikiosis、Francisco Santos 和 Matthias Schymura。《线性指数级的验证足以解决孤独跑者猜想及其若干变体》。《数学论坛：*Sigma*》，13，2025年。[15] Romanos Diogenes Malikiosis 和 Matthias Schymura。《格带形的覆盖半径及其与视线遮挡和孤独跑者猜想的关系》。《数学方程》，91 352，2017 2 331( )：– 。[16] Bernardo Gonz´alez Merino 和 Matthias Schymura。《与每个i维仿射子空间相交的格配置的密度》。《离散与计算几何》，58(3)：663–685，2017年。[17] Victor Reis 和 Thomas Rothvoss。《子空间平坦性猜想与更快的整数规划》，2024年。

KATARINA KRIVOKU´CA，柏林自由大学电子邮件地址：
katarina.krivokuca@fu-berlin.de