arXiv:2601.15215v1 [math.PR] 21 Jan 2026

二部图独立性：五种自然独立性的混合

NICOLAS GILLIERS 和 DAVID JEKEL

ABSTRACT. 我们引入非交换概率空间中 *multiple* 代数的一种非交换联合独立性概念。这些代数之间的 *pairwise* 关系由一个含有两组边集的图来编码——这种组合结构我们称之为 *bigraph*——并自然涵盖五种基本的独立性：张量独立性、自由独立性、（反）单调独立性和布尔独立性。它包含 Arizmendi–Mendoza–Vazquez-Becerra 的 BMT 独立性（当所有成对关系均为布尔、（反）单调或张量关系时），以及 M-lotkowski 的 ϵ 或 Λ-独立性（当成对关系为张量关系和自由关系时）。我们给出明确的组合矩公式、希尔伯特空间构造，以及该框架下自然的 *associativity* 关系。此外，我们证明，二部图独立性会出现在相对于向量态的张量积随机矩阵模型的渐近行为中；其中，Charlesworth–Collins 模型是 ε-独立性的一个特例，并为 BMT 独立性提供了一种随机矩阵视角。

CONTENTS

1. 引言 1
1.1 动机 1.2 二部图独立性 1
1.3 矩阵模型 1.4 进一步问 3
题 1.5 组织结构 1.6 致谢 5
7
7
7

2. 二部图独立性及其与其他独立性的关系 8
2.1 组合框架 2.2 五种自然独立性、 ε-独立性和 BMT 独立性 2.3 通过布尔累积 8
量和经典累积量定义二部图独立性 2.4 树框架中的自由–（反）单调–布尔混合 9
2.5 树 operad 结合性 11
18
19

3. 希尔伯特空间模型 23
3.1 乘积希尔伯特空间的构造 3.2 向量的归纳计算 23
27

4. 随机矩阵模型 32
4.1 快速化简 32
4.2 Weingarten 演算 34
4.3 期望收敛 35
4.4 几乎必然收敛 39
参考文献 40

1. INTRODUCTION

1.1. 动机。 自由概率主要源于 Voiculescu 在 20 世纪 80 年代的工作，此后逐渐发展成为研究随机矩阵理论中高维现象的一个极其有效的框架；除此之外，Voiculescu 理论还取得了许多其他成就。虽然作为经典独立性的非交换对应形式，自由性是 Voiculescu 工作的主要 focus，但人们很快意识到，非交换独立性的概念

在 21 世纪初得到形式化，它所包含的内容不仅有自由性和经典随机独立性。特别是，Speicher [Spe97], Sch¨urmann、Ben Ghorbal [GS02] 和 Muraki [Mur03] 分别独立地对五种“自然的”非交换独立性进行了分类（这些独立性源于非交换概率空间上的一个结合的二元乘积）：张量（或经典）、自由、布尔、单调和反单调 独立性。这五种独立性之间的相似之处令人惊叹地深远：多个独立随机变量的联合矩可以利用累积量的组合工具来描述，即将联合矩表示为累积量之和 [NS06, SW97, AHLV15, Leh04]，这些累积量按划分进行索引（对于张量独立性，使用所有划分；对于自由独立性，使用非交叉分拆；对于布尔独立性，使用区间划分；对于单调独立性，则使用满足某种排序条件的带标记划分）。此外，还存在相应的中心极限定理（以及一般意义下关于迭代卷积的极限定理），并且同时具有加法和乘法版本 [NS06, SW97, Mur00, Tuc10]。

除了这五种自然独立性之外，还出现了许多构造，它们以“独立”的方式连接非交换概率空间，从而将这一概念拓展到历史上的范畴论表述之外。一般而言，非交换独立关系是指一种规则，用来根据非交换概率空间 $(A,\ \varphi)$中若干子代数A_1、.....、 A_N各自的矩$\varphi|_{A_j}$，计算来自这些子代数的元素的联合矩 。对于五种自然独立性，任意数量 N 个代数的这一规则都可由 $N = 2$处的规定推出。然而，情况并非总是如此——而在本文中，确实并非如此。

我们关注混合 非交换独立性，其中 A_i 与 A_j 之间的成对关系 可以是 Muraki 的五种类型中的任意一种。因此，不同的代数对可能呈现不同的独立性：例如， A_1 和 A_2 可能自由独立，A_2 和A_3 可能张量独立，而 A_1 和 A_3 可能布尔独立。重要的是，仅凭这些两两关系并不能确定 A_1、 A_2和 A_3 的联合矩（见注 1.6）；混合独立关系必须明确规定这些矩。

文献中已有若干此类混合独立性的例子，见于多种背景，包括代数的图乘积、随机矩阵模型和算子代数。特别是，我们提及以下几种：

- 张量独立性与自由独立性的混合见于 [M lo04] (Λ or ε 独立性）研究。这源于冯·诺伊曼代数的图乘积。
- 自由独立性、布尔独立性与单调独立性（反单调独立性）的混合见于 [JL20, JOW25]。这是对 [Wys10] 中单调独立性与布尔独立性的混合，以及 [KW13]中自由独立性与布尔独立性的混合的推广。
- 布尔独立性、单调独立性（反单调独立性）与张量积的混合见于[AMVB25]。

因此，两个不同的模型给出了 [AMVB25] 和 [JOW25]所述的布尔独立性、单调独立性和反单调独立性之间的成对关系。除此之外，在涉及两个或更多个态的框架中，还存在多种结合不同独立性概念的方法，例如 Bo˙zejko、Leinert 和 Speicher 的c-自由独立性 [BLS96]。然而，在本文中，我们将注意力限制在具有单一态的非交换概率空间上。我们还提及交通独立性、交通空间，以及近期提出的张量自由性概念 [BB24], ；这些将原有的范畴框架扩展至某个图的欧拉上的欧拉代数范畴。我们强调，本文仅关注普通标准代数，不过，我们的混合独立性的结合律将在 §2.5 中自然地用欧拉的语言来表述。

需要指出的是，在此前引用的所有研究中，所研究的混合独立性都只涉及五种自然类型中的某些类型。迄今为止，尚无混合独立关系涵盖 Muraki 的全部五种独立性。本文首次定义了一种混合独立性，允许全部五种成对关系——张量独立性、自由独立性、布尔独立性、单调独立性和反单调独立性——在同一个态下共存。我们将这一新概念称为二部图独立性，因为它由同一顶点集上的一对图刻画，用以编码这些成对关系。

我们的混合独立性推广了 [M-lo04] 的无张量图独立性和 [AMVB25], 的 BMT 独立性，因此一般而言，它不同于针对自由—布尔—（反）单调混合的 [JL20, JOW25] 。我们的二部图独立性自然出现在跨多个位置（或"弦"）的张量积上的随机矩阵模型中，如 [ML19, CC21], 所示；其中通过在某些张量因子中加入秩一投影，来模拟 [AMVB25] 的张量积模型。我们还给出了一个实现这种混合独立性的希尔伯特空间模型（见 3），从而能够构造任意非交换概率空间的独立副本。

1.2. **二部图独立性**。我们假设读者熟悉 C*-代数的基本理论。所谓 C*-概率空间，是指一对 (A, φ)，其中 A 是一个 C*-代数，且 $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ 是一个态。我们将首先介绍组合数据，并给出混合独立性模型中联合矩的公式。

定义 1.1。一个二部图 是一个三元组 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\ \mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2)$，其中

- $\mathcal{V}$ 是一个（有限或可数的）顶点集合。
- $\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是两种类型的边集。
- $\mathcal{E}_1$ 是自反的：$\Delta := \{(v,\ v)\colon v \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{E}_1$。
- $\mathcal{E}_2$ 是非自反的：$\mathcal{E}_2 \cap \Delta = \varnothing$。
- $\mathcal{E}_2$ 是对称的：$(v,\ w) \in \mathcal{E}_2 \iff (w,\ v) \in \mathcal{E}_2$。

我们还记作 $\mathcal{E}_1^{\top} := \{(v,\ w) \in \mathcal{V}^2\colon (w,\ v) \in \mathcal{E}_1\}$。

注意，$(\mathcal{V},\ \mathcal{E}_1)$ 是带有自反环的有向图，而 $(\mathcal{V},\ \mathcal{E}_2)$ 是无向无环图。在命题 1.5 中，我们展示布尔、单调、自由和张量两两关系如何由这两个边集编码。设 $(A,\ \varphi)$ 为一个非交换概率空间，并设 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$是 A的一个子代数族。我们的目标是，对于$a_j \in A_{c(j)}$，给定一个标记 $c\colon [k] \to \mathcal{V}$，表示 $\varphi(a_1 \cdots a_k)$。如 usual，共同矩公式由 $[k]$ 的集合划分索引。一个划分 π 是由若干两两不相交的非空块组成的族，其并集为 $[k]$；所有划分的集合记作 $\mathcal{P}(k)$。对于 $i,\ j \in [k]$，如果 i 和 j 位于 π的同一个块中，我们记作 $i \sim_\pi j$。

定义 1.2. 给定一个二部图 $\mathcal{G}$, $k \in \mathbb{N}$，以及一个标记 $c\colon [k] \to \mathcal{V}$，定义 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{P}(k)$为满足以下条件的划分集合 π：

(1) 若 $i \sim_\pi j$，则 $c(i) = c(j)$。(2) 若 $i_1 < j < i_2$ 且 $i_1 \sim_\pi i_2$，则 $(c(i_1),\ c(j)) \in \mathcal{E}_1$。

(3) 若 $i_1 < j_1 < i_2 < j_2$ 且 $i_1 \sim_\pi i_2$ 且 $j_1 \sim_\pi j_2$ 且 $i_1 \not\sim_\pi j_1$，则 $(c(i_2),\ c(j_1)) \in \mathcal{E}_2$。

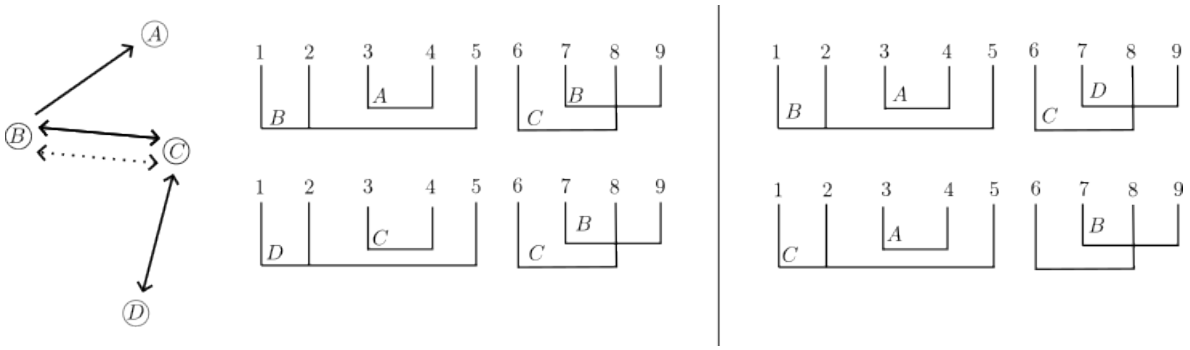

FIGURE 1. 左侧为二部图 $\mathcal{G}$ 的示例：类型 1 的边以黑色实线绘制，类型 2 的边以虚线绘制。右侧：最左列中的划分属于 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，最右列中的划分则不属于 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。

注记 1.3. 集合 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ 仅取决于 $\mathrm{Im}(c)$ 上的诱导子二图；因此，若 $\mathcal{G}_{|c}$表示 $\mathcal{G}$在出现在 c 中的顶点上的限制，则 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G}) = \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G}_{|c})$。

设 $k \geqslant 1$ 和 $\pi \in \mathcal{P}(k)$ 为一个划分，有时使用着色c 会更方便：$[k] \to \mathcal{V}$；有时则使用定义在 π的块上的着色，即函数 $\pi \to \mathcal{V}$。空间 $\mathcal{V}^{\pi}$ 可以自然地识别为 $\mathcal{V}^k$ 的子空间，其中的函数在每个块上都是常数。在本文余下部分中，我们始终采用这一识别。

定义 1.4（二部图独立性）。设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ 为一个二部图。在非交换概率空间 (A, φ)中，子代数族 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 是 $\mathcal{G}$-独立的，如果对于任意 $k \in \mathbb{N}$、标记 $c : [k] \to \mathcal{V}$以及元素 $a_j \in A_{c(j)}$，

$$\varphi(a_1 \cdots a_k) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})} K_{\pi}^{\mathrm{free}}(a_1, \ldots, a_k), \tag{1.1}$$

其中 K_{π}^{free}表示 分块自由累积量（见 [NS06]）。

这个定义并非空泛：在第3节中，我们构造了任意 C*-概率空间的 $\mathcal{G}$-独立副本。此外，布尔独立性、（反）单调独立性、自由独立性和张量独立性的两两关系，恰好由集合 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$ 编码如下。

命题 1.5。考虑定义 *1.4* 中的情形。设 v、$w \in \mathcal{V}$ 满足 $v \neq w$。则 A_v和 A_w 为：

（*1*）当 $(v, w) \in \mathcal{E}_{\mathrm{Bool}} := \mathcal{V} \times \mathcal{V} \backslash (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_1)$时为布尔独立；（*2*）当 $(v, w) \in \mathcal{E}_{\mathrm{mono}} := \mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_1$时为单调独立；（*3*）当 $(v, w) \in \mathcal{E}_{\mathrm{mono}} = \mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_1$时为反单调独立；（*4*）当 $(v, w) \in \mathcal{E}_{\mathrm{free}} := (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1) \backslash \mathcal{E}_2$时为自由独立；（*5*）当 $(v, w) \in \mathcal{E}_{\mathrm{ten}} := \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$时为张量独立；（*6*）若 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$，则根据 [M-lo04]，相对于 $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_2)$，$(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 为图独立（ε-独立）；（*7*）若 $\mathcal{E}_2 \supseteq (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1) \backslash \Delta$，则根据 [AMVB25]，相对于有向图 $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_1 \backslash \Delta)$，$(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 为 *BMT*-独立。

证明见第2.2节。

注记 1.6。在 $\mathcal{E}_2 = \varnothing$ 的情形下，代数之间的成对关系将是自由、（反）单调或布尔独立性。因此，自然有必要将这些二部图独立性的情形与有向图独立性产生的混合进行比较，见 [JOW25]。从 [JOW25，注记 3.24] 中我们已经可以看出，当成对关系仅为（反）单调和布尔关系时，这些独立性会给出不同的联合矩，因为在这种情形下，二部图独立性与 BMT 独立性一致 [AMVB25]。对于一般的自由、（反）单调和布尔混合，二部图独立性和有向图独立性都是 [JL20] 中树独立性的特例；因此，可以根据该文中的矩公式计算二者的联合矩，并证明它们并不一致。

注记 1.7。读者可能会注意到，$\mathcal{E}_2 \backslash (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1)$ 中的边在定义中并未起任何作用。事实上，在定义 1.2 (3) 中，若 $i_1 < j_1 < i_2 < j_2$ 且 $i_1 \sim_{\pi} i_2$ 且 $j_1 \sim_{\pi} j_2$，则由 (2) 可得 $(c(i_1), c(j_1)) \in \mathcal{E}_1$，并且 $(c(j_1), c(i_2)) \in \mathcal{E}_1$，因此 $(c(i_1), c(j_1))$ 自动属于 $\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1$。此外，在命题 1.5 中，若 $(v, w) \notin \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1$，则 A_v 与 A_w 的成对关系不会因 $(v, w) \in \mathcal{E}_2$ 而改变。因此，一般而言，我们不妨 通过从 $\mathcal{E}_2$ 中删去其他元素，假设 $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1$，这样定义 $\mathcal{G}$-独立性不会受到影响。不过，在选择 $\mathcal{E}_2$ 时保留更大的灵活性，有助于表述定理 1.10 中的随机矩阵构造。

注记 1.8. 布尔、（反）单调、自由和张量独立性的任意成对组合，都可以由某个二部图实现，并且还可以取为 $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1$。事实上，假设给定一个顶点集 $\mathcal{V}$ 和若干集合

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Bool}}, \mathcal{E}_{\mathrm{mono}}, \mathcal{E}_{\mathrm{free}}, \mathcal{E}_{\mathrm{ten}} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$$

满足条件

- $\mathcal{V} \times \mathcal{V} = \mathcal{E}_{\mathrm{Bool}} \sqcup \mathcal{E}_{\mathrm{mono}} \sqcup \overline{\mathcal{E}}_{\mathrm{mono}} \sqcup \mathcal{E}_{\mathrm{free}} \sqcup \mathcal{E}_{\mathrm{ten}}$,

- $\overline{\mathcal{E}}_{\mathrm{Bool}} = \mathcal{E}_{\mathrm{Bool}}$ and $\overline{\mathcal{E}}_{\mathrm{free}} = \mathcal{E}_{\mathrm{free}}$.
- $\Delta \subseteq \mathcal{E}_{\mathrm{free}}$.

然后我们可以设定

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{\mathrm{mono}} \cup \mathcal{E}_{\mathrm{free}} \cup \mathcal{E}_{\mathrm{ten}}, \qquad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{\mathrm{ten}},$$

而这一选择将满足

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Bool}} = (\mathcal{V} \times \mathcal{V}) \backslash (\mathcal{E}_1 \cup \overline{\mathcal{E}}_1), \quad \mathcal{E}_{\mathrm{mono}} = \mathcal{E}_1 \backslash \overline{\mathcal{E}}_1, \quad \mathcal{E}_{\mathrm{free}} = \mathcal{E}_1 \cap \overline{\mathcal{E}}_1 \backslash \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{E}_{\mathrm{ten}} = \mathcal{E}_1 \cap \overline{\mathcal{E}}_1 \cap \mathcal{E}_2.$$

在第 3 节中，我们为二部图独立性提供一个希尔伯特空间模型（定理 3.5），借此可以实现任意 C*-概率空间的 $\mathcal{G}$-独立副本。

命题 1.9。设 $\mathcal{G}$ 是一个二部图，且 (A_v, φ_v) 是C*-概率空间。那么，存在一个C*-概率空间 (A, φ) 以及保态的 $*$-同态 $\lambda_v : A_v \to A$，使得 $(\lambda_v(A_v))_{v\in\mathcal{V}}$ 是 $\mathcal{G}$-独立的。

我们指出，例如，与单调独立和布尔独立的情形一样，映射 λ_v 不必是幺正的。我们的希尔伯特空间模型包含 [M-lo04], 的自由张量图乘积希尔伯特空间作为特例，并且可嵌入 [AMVB25]的 BMT 希尔伯特空间模型。该希尔伯特空间是由字母表 $\mathcal{V}$上的词索引的子空间的直和；我们同时限制哪些词可以出现，这与 [JL20、JOW25] 中的做法相同；此外，我们还考虑在 $\mathcal{E}_{\mathrm{ten}}$ 中通过交换由一条边连接的相邻字母而得到的等价词，这与[M-lo04]中的做法相同。定理 3.13]的证明表明，该希尔伯特空间构造产生了定义 1.4 中 $\mathcal{G}$-独立性的矩关系，其思路与许多先前研究类似，例如 [JOW25。

1.3. **矩阵模型**。接下来，我们将说明二部图独立性如何自然地从张量积框架下的随机矩阵模型中产生，这些模型推广了 [CC21] 的构造。**定理 1.10**。

- 考虑两个集合 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{V}$。• 对于每个 $v \in \mathcal{V}$，令 $S_v^{(1)}, S_v^{(2)}, S_v^{(3)}$为 $\mathcal{S}$ 的一个划分，使得 $S_v^{(1)}$非空。• 令 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$，其中

$$\mathcal{E}_1 = \{(v, w) : S_v^{(1)} \cap S_w^{(2)} = \varnothing\}, \qquad \mathcal{E}_2 = \{(v, w) : S_v^{(1)} \cap S_w^{(1)} = \varnothing\}.$$

- 令 $\mathbb{M}_N$表示复矩阵的集合；固定一个单位向量 $\xi \in \mathbb{C}^N$；并将$\mathbb{M}_N{}^{\otimes\mathcal{S}}$视为一个非交换概率空间，其态由向量 $\xi^{\otimes\mathcal{S}}$给出。• 定义（不一定保单位元的） $*$-同态

$$\lambda_v^{(N)} : \mathbb{M}_N{}^{\otimes S_v^{(1)}} \to \mathbb{M}_N{}^{\otimes\mathcal{S}}, \qquad \lambda_v^{(N)}(A) = A \otimes (\xi\xi^*)^{\otimes S_v^{(2)}} \otimes I_N^{\otimes S_v^{(3)}},$$

其中 $\xi\xi^*$ 表示投影到 ξ张成空间上的秩一投影。

- 对于每个 $v \in V$，令 I_v 为一个有限指标集，并令 $\mathbf{A}_i^{(N)} = (A_v^{(N)}{}_{,\ i})_{i\in I_v}$ 为随机矩阵，满足几乎必然地，

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|A_{v,i}^{(N)}\| < \infty.$$

- 对于每个 $v \in \mathcal{V}$，令 $U_v^{(N)}$ 为 $\mathbb{M}_N{}^{\otimes S_v^{(1)}}$ 中的 ***Haar*** 随机酉矩阵，使得 $v \in \mathcal{V}$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 对应的$U_v^{(N)}$与 $v \in \mathcal{V}$、 $i \in I_v$和 $N \in \mathbb{N}$对应的 $(A_v^{(N)}{}_i)$, 相互独立，并令

$$\mathbf{B}_v^{(N)} = (\lambda_v^{(N)}(U_v^{(N)} A_{v,i}^{(N)} (U_v^{(N)})^*))_{i\in I_v}.$$

那么，几乎必然地，族 $\mathbf{B}_v^{(N)}$对于 $v \in \mathcal{V}$ 在以下意义下渐近 $\mathcal{G}$-独立：对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $c : [k] \to \mathcal{V}$，以及变量由 $I_{c(j)}$ 索引且没有常数项的非交换多项式 p_j，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \left| \left\langle \xi^{\otimes\mathcal{S}}, p_1(\mathbf{B}_{c(1)}^{(N)}) \dots p_k(\mathbf{B}_{c(k)}) \xi^{\otimes\mathcal{S}} \right\rangle - \sum_{\pi\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})} K_{\mathrm{free},\pi}(p_1(\mathbf{B}_{c(1)}^{(N)}), \dots, p_k(\mathbf{B}_{c(k)})) \right| = 0 \quad (1.2)$$

几乎必然地，其中自由累积量是相对于由 $\xi^{\otimes\mathcal{S}}$ 给出的态计算的。我们还要指出，对于每个 v 和没有常数项的多项式 p，

$$\lim_{N\to\infty}\left|\left\langle \xi^{\otimes\mathcal{S}}, p(\mathbf{B}_v^{(N)})\xi^{\otimes\mathcal{S}}\right\rangle - \mathrm{tr}_{N^{S_v^{(1)}}}[p(\mathbf{A}_v)]\right| = 0 \text{ almost surely.} \tag{1.3}$$

该定理推广了 [CC21]。事实上，来自 [CC21] 的随机矩阵模型是在对所有 v 都有 $S_v^{(2)} = \varnothing$ 时出现的（在这种情况下，如同我们的定理那样使用固定的向量态，其渐近结果与像 [CC21] 那样使用迹相同）。当 $S_v^{(2)} = \varnothing$ 时，则有 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{V}\times\mathcal{V}$。因此，在命题 1.5 中，我们会得到 $\mathcal{E}_{\mathrm{ten}} = \mathcal{E}_2$ 和 $\mathcal{E}_{\mathrm{free}} = (\mathcal{V}\times\mathcal{V})\backslash\mathcal{E}_2$，从而恢复了 [M-lo04]中的 ε-独立性设定。

与此同时，当 $\mathcal{S} = \mathcal{V}$ 且对每个 v 都有 $S_v^{(1)} = \{v\}$ 时，该矩阵模型也将 [AMVB25] 的 BMT 乘积构造作为一个特例。此时，我们的张量积就简化为 $\mathbb{M}_N{}^{\otimes\mathcal{V}}$，而 λ_v 则只是将第 v 个张量因子嵌入，并在由 $S_v^{(2)}$ 索引的顶点上放置 $\xi\xi^*$ 的副本。当然，在 [AMVB25], 中，不会有随机酉矩阵共轭；酉共轭实际上会改变态在每个 $\mathbf{A}_v$ 上多项式对应的取值，但在我们更一般的设定中，为了获得渐近自由独立性，这是必需的。我们还指出，对于满足 $\mathcal{E}_{\mathrm{free}} = \varnothing$ 的图，我们的矩阵模型为 BMT 独立性提供了并不显然的模型。事实上，在我们的模型中，当 $(v, w) \notin \mathcal{E}_{\mathrm{ten}}$ 时，集合 $S_v^{(1)}$ 和 $S_w^{(1)}$ 可以重叠，尽管 BMT 独立性的确定性构造要求它们互不相交。通过酉共轭与秩一投影之间的相互作用，我们的模型仍能渐近地产生 BMT 独立性。

定理 1.10 在 §4 中的证明也沿用了与 [CC21] 类似的思路，使用 Weingarten 演算，并结合额外的组合论论证，根据秩一投影的行为得到 $\mathcal{G}$-独立性。

注记 1.11。类似于 [CC21], ，每个二部图 $\mathcal{G}$ 都可以使用集合 $\mathcal{S}$ 和 $S_v^{(j)}$来实现，其中$v \in \mathcal{V}$ 和 $j \in \{1,\ 2,\ 3\}$ 如定理 1.10 中所述。事实上，固定一个二部图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\ \mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2)$。令

$$\mathcal{S} = \mathcal{V}\times\mathcal{V}.$$

对于每个 $v \in \mathcal{V}$，令

$$S_v^{(1)} = \{(v,w),(w,v) : w \in \mathcal{V} \text{ such that } (v,w) \notin \mathcal{E}_2\},$$

并令

$$S_v^{(2)} = \{(w,w) : w \in \mathcal{V} \text{ such that } (w,v) \notin \mathcal{E}_1\}$$

最后令

$$S_v^{(3)} = \mathcal{S}\backslash(S_v^{(1)} \cup S_v^{(2)}).$$

我们声称，由集合 $S_v^{(j)}$诱导的二部图就是原二部图 $\mathcal{G}$。事实上，首先注意到，由于 $\mathcal{E}_2$ 是非自反的，$S_v^{(1)}$包含 $(v,\ v)$; 特别地，$S_v^{(1)}$非空。实际上，$S_v^{(1)} \cap \Delta = \{(v,\ v)\}$。我们还构造了 $S_w^{(2)}$，使得 $S_w^{(2)} \subseteq \Delta$。因此，$S_v^{(1)} \cap S_w^{(2)} \neq \varnothing$ 当且仅当 $(v,\ v) \in S_w^{(2)}$当且仅当 $(v,\ w) \notin \mathcal{E}_1$。因此，

$$\{(v,w) : S_v^{(1)} \cap S_w^{(2)} = \varnothing\} = \mathcal{E}_1.$$

与此同时，注意对于 $v \neq w$，我们有

$$S_v^{(1)} \cap S_w^{(1)} = \begin{cases} \{(v,w),(w,v)\} & \text{if } (v,w) \notin \mathcal{E}_2 \\ \varnothing & \text{if } (v,w) \in \mathcal{E}_2, \end{cases}$$

因此

$$\mathcal{E}_2 = \{(v,w) : S_v^{(1)} \cap S_w^{(1)} = \varnothing\}.$$

1.4. **进一步的问题**。我们提出以下问题，作为本研究的自然延续：

(1) 证明关于相对于满足以下条件的二部图序列 $\mathcal{G}_n$ 的独立随机变量之和的中心极限定理、泊松极限定理以及更一般的极限定理

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\operatorname{Hom}(\mathcal{G}', \mathcal{G}_n)|}{|\mathcal{V}_n|^{|\mathcal{V}'|}}$$

对每个二部图 $\mathcal{V}'$ 都存在。注意，在许多情况下，极限可由到某个二图*on*的同态来描述，这提供了图on收敛的对应形式。我们预期，类似于 [JOW25, 定理 1.1] 和 [CSY, 定理 1.1] 的极限定理也将成立。主要挑战在于将结果推广到具有无界支集的测度，因为我们尚未建立适当的卷积解析理论。

(2) 证明关于独立变量乘积的类似定理。我们指出，这种情况下的一个挑战是，独立子代数 A_v 可能并未酉地 包含于 A 中；不过，根据 [JL20, §10.3]， A_v 中的酉元可以通过添加 $1_A - 1_{A_v}$ 扩展为 A 中的酉元。

（3）给定一个二图on，构造一个 Fock空间及适当的算子，以模拟中心极限定理分布，以及更一般地说，无穷可除分布的对应形式。这样的构造应推广 [CSY, §2] ，并以类似于[JOW25, §6]的方式进行

（4）定理 1.10 中的矩阵模型可以通过各种方式加以推广。例如，自然的做法是考虑从固定 $\mathbb{C}\xi^{\otimes A}\otimes(\mathbb{C}^n)^{\otimes B}$ 的子群中选取的 Haar随机酉元，其中 A是一些互不相交的子集， $B \subseteq \mathcal{S}$。例如，我们可以强制作用于 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes S_j^{(1)}}$ 的酉元固定此形式的一个子空间。原则上，也可以使用结合 Weingarten 演算的相同技术来分析这一模型，从而有望得到新的矩条件。

（5）在定理 1.10 中，也可以考虑用均匀随机置换矩阵代替 Haar随机酉矩阵，并尝试使用类似于 [ACD$^+$21] 和 [CdSH$^+$25]的技术来分析这些模型。

1.5. **文章结构**。 本文其余部分分为三节。

在第2节中，我们证明了一个公式，该公式用布尔累积量表示 $\mathcal{G}$-独立变量的联合矩。我们利用该公式将这种独立性与其他已有的独立性进行比较。本节末尾，我们还证明，在某种意义上，我们的 $\mathcal{G}$-独立性具有结合性。

在第3节中，我们构造了一个希尔伯特空间及其嵌入，从而可以构造变量的 $\mathcal{G}$-独立副本。

最后，在第4节中，我们提出了一个随机矩阵模型，该模型呈现渐近 $\mathcal{G}$-独立性。

1.6. **致谢**。 NG感谢纽约大学阿布扎比分校提供的资金支持。这项工作始于他在纽约大学阿布扎比分校资助下进行博士后研究期间，当时由 Marwa Banna 指导。DJ获得了丹麦独立研究基金的部分资助，资助编号为1026-00371B；此外还获得了“地平线欧洲”玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动 FREEINFOGEOM 项目的资助，项目101209517。

我们感谢 Patrick Oliveira Santos、Marwa Banna 和 Pierre Youssef 于 2024年12月 在纽约大学阿布扎比分校参与讨论。这项工作便由此开始，尤其感谢 Patrick Oliveira Santos 指出了有向图独立性与 ε-独立性的矩公式之间的相似之处，提示了将二者结合的可能性。这些讨论是在 DJ 访问阿布扎比并于阿布扎比随机性日发表演讲期间进行的，此次访问的旅费由纽约大学阿布扎比分校和阿布扎比索邦大学提供。NG 于 2025年11月 访问哥本哈根的旅费由玛丽·居里资助项目和 Universit´e Paris Cit´e 提供。

2. Bigraph independence and relations to other independences

2.1. 组合框架。 我们首先介绍一些后文将会用到的组合定义和引理。

定义 2.1（分拆）。我们使用记号 $[k] = \{1, ..., k\}$。$[k]$ 的一个划分 是 π 个 $[k]$的非空子集组成的集合，这些子集称为块，并且满足 $[k] = \bigsqcup_{B\in\pi} B$。$[k]$的划分集合记为 $\mathcal{P}(k)$。

定义 2.2（交叉、非交叉分拆）。对于 $[k]$的一个划分 π，如果指标序列 $i < i' < j < j'$ 满足 i 和 j 属于某个块 B，且 i' 和 j' 属于某个块 $B' \neq B$，则称其为一个交叉。在这种情况下，我们也称 B 和 B' 是交叉的。

如果一个划分 π 没有交叉，我们就称其为非交叉。我们用 $\mathcal{NC}(k)$ 表示 $[k]$的非交叉分拆集合。

定义 2.3（嵌套块）。若 π 是 $[k]$ 和 B'，$B \in \pi$ 的一个划分，我们称 B' 嵌套于 B 内，如果存在 i，$j \in B$，使得 $i < j$ 且 $B' \subseteq \{i+1, ..., j-1\} \subseteq [k]\backslash B$；换言之，在 i 和 j 之间没有 B 的其他指标，并且 B' 完全位于 i 和 j 之间。在这种情况下，我们记作 $B \prec B'$。

定义 2.4（分离块）。若 π 是 $[k]$ 和 B，$B' \in \pi$ 的一个划分，我们称 B 和 B' 分离，如果存在 $j \in [k]$，使得以下情况之一成立：$B \subseteq \{1, ..., j\}$ 且 $B' \subseteq \{j+1, ..., k\}$；或者 $B' \subseteq \{1, ..., j\}$ 且 $B \subseteq \{j+1, ..., k\}$。

引理 2.5。设 $\pi \in \mathcal{P}(k)$，且 B 和 B' 是 π 中两个不同的块。那么以下情况恰有一种成立：

- B 和 B' 交叉。
- B 和 B' 分离。
- B 嵌套在 B' 内部。
- B' 嵌套在 B 内部。

这一事实众所周知。证明见 [JOW25, 引理 2.6]；注意，在那里假设整个划分 π 是非交叉的，但证明表明，如果两个块 B 和 B' 非交叉，则 B 和 B' 要么分离，要么其中一个嵌套在另一个内部。

接下来我们描述二部图的自然态射选择，这将使我们能够用二部图的态射来重新表述定义 1.2。

定义 2.6（二部图态射）。设 $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}^{(1)}, \mathcal{E}_1^{(1)}, \mathcal{E}_2^{(1)})$ 和 $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}^{(2)}, \mathcal{E}_1^{(2)}, \mathcal{E}_2^{(2)})$ 是两个二部图（见定义 1.1）。二部图态射 $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ 是一个集合映射 $f\colon \mathcal{V}^{(1)} \to \mathcal{V}^{(2)}$，将一条类型 1 的边（分别地，类型 2 的边）映射为一条类型 1 的边（分别地，类型 2 的边），即

$$(v, w) \in \mathcal{E}_i^{(1)} \implies (f(v), f(w)) \in \mathcal{E}_i^{(2)}$$

对于 $i = 1$，2 和 v，$w \in \mathcal{V}$。

$[k]$ 的每个划分都自然关联着一个二部图，定义如下。

定义 2.7（与划分关联的二部图）。设 π 是 $[k]$的一个划分。我们定义一个二部图 $\mathcal{G}(\pi) = (\pi, \mathcal{E}_1(\pi), \mathcal{E}_2(\pi))$，其中顶点是 π 的块，两个边集定义如下：

$$\mathcal{E}_1^\pi = \{(B, B') \in \pi \times \pi\colon \exists i_1, i_2 \in B, j \in B', i_1 < j < i_2\} \cup \Delta,$$

其中 $\Delta = \{(B, B)\colon B \in \pi\}$，并且

$$\mathcal{E}_2^\pi = \mathcal{E}_1^\pi \cap \overline{\mathcal{E}_1^\pi}\backslash\Delta,$$

注记 2.8。根据引理 2.5，对于划分 π 和 B，$B' \in \pi$：

- $(B, B') \in \mathcal{E}_1(\pi)$ 当且仅当 B' 和 B 交叉，或者 B' 嵌套在 B 内部。
- $(B, B') \in \mathcal{E}_2(\pi)$ 当且仅当 B 和 B' 交叉。

命题 2.9。设 $\pi \in \mathcal{P}(k)$，使得 c 在 π 的各块上为常数，则 $\pi \in \mathcal{P}(c、\mathcal{G})$ 成立，当且仅当标记 c 定义了一个二部图态射 $\mathcal{G}(\pi) \to \mathcal{G}$。

证明。 设 $\pi \in \mathcal{P}(k)$ ，使得 c 在 π的各块上为常数。标记 c 定义了一个二部图态射 $\mathcal{G}(\pi) \to \mathcal{G}$ ，当且仅当对于任意两个块 B， $B' \in \pi$,

$$(B, B') \in \mathcal{E}_1^\pi \Rightarrow (c(B), c(B')) \in \mathcal{E}_1,$$

$$(B, B') \in \mathcal{E}_2^\pi \Rightarrow (c(B), c(B')) \in \mathcal{E}_2.$$

根据 $\mathcal{E}_1^\pi$ 和 $\mathcal{E}_2^\pi$的定义，这等价于定义 1.2 的条件 (2) 和 (3)。根据假设，条件 (1) 成立。□

2.2. **五种自然独立性、 ε-独立性和 BMT 独立性**。在本小节中，我们证明命题 1.5，讨论二部图独立性中的代数之间的两两关系，以及它与 ε-独立性 [M-lo04]和 BMT 独立性[AMVB25]之间的关系。我们将先证明命题 1.5 的 (6) 和 (7)，再由此推导出这些两两关系。

首先，我们讨论它与 ε-独立性（即图独立性）之间的关系，见 [M-lo04]（M-lotkowski 的原始论文使用 Λ 代替 ε，但我们遵循 Speicher 和 Wysocza´nski[SW16]的做法，使用 ε）。按照 [SW16]的术语， ε 是一个以 $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为指标的 $\{0,1\}$-值矩阵（即图的邻接矩阵）。我们也可以将 ε 等价地视为 $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$的一个子集。我们将证明，若 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$，则二部图独立性退化为满足 $\varepsilon = \mathcal{E}_2$的 ε-独立性，由此可证命题 1.5 (6)。

¯**命题 2.10.** 设 $\mathcal{G}$ 是一个满足 $\mathcal{V} \times \mathcal{V} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1$的二部图。那么，关于 $\mathcal{G}$ 的二部图独立性等价于满足 $\varepsilon = \mathcal{E}_2$ [M-lo04, SW16]的 ε-独立性。

证明。 比较我们的矩公式与 [SW16 中关于 ε-独立性的矩公式（定理 5.2]），即可得到结论。固定一个满足 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$的二部图 $\mathcal{G}$，并设 $\varepsilon = \mathcal{E}_2$。设 (A, φ) 是一个 C*-概率空间，并设 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 是 $*$-子代数。固定 $c : [k] \to \mathcal{V}$，并令 $a_j \in A_{c(j)}$ （$j = 1, \ldots, k$）。若 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$在 [M-lo04], 的意义下是 $\mathcal{E}_2$-独立的，那么根据 [SW16 定理 5.2], ，有

$$\varphi(a_1 \ldots a_k) = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}^\varepsilon[c]} K_\pi^{\text{free}}[a_1, \ldots, a_k], \tag{2.1}$$

其中， $\mathcal{NC}^\varepsilon[c]$ 是按如下方式描述的分拆集合： $\pi \in \mathcal{NC}^\varepsilon[c]$ 若 $\pi \leqslant \ker(c)$，并且每当 π 中的两个块 B 和 B' 发生交叉时，则有 $(c(B),\ c(B')) \in \varepsilon = \mathcal{E}_2$。注意，对于 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，这等价于定义 1.2 中的条件 (1) 和 (3)。同时，当 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$时，定义 1.2 (2) 为空真。因此， $\mathcal{NC}^\varepsilon[c] = \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，所以 (2.1) 化为 (1.1)，这意味着 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 相对于 $\mathcal{G}$是二部图独立的。反之，如果 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 相对于 $\mathcal{G}$ 是有向图独立的，那么它们满足 (2.1)；这意味着其联合矩与 ε独立副本 A_1、.....、 A_k的联合矩一致，因此它们是 ε独立的。□

接下来，我们证明关于 BMT 独立性的命题 1.5 (7)。首先，我们回顾 [AMVB25] 中的 BMT 独立性定义。设 $G = (V, E)$ 是一个具有 E 非自反性质的有向图。首先，根据 [AMVB25，第 2.8], 条定义，对于 $c :\ [k] \to V$，以及对于 $i_1, i_2 \in [k]$，我们称 $i_1 \sim_{G,c} i_2$，当且仅当

- $c(i_1) = c(i_2)$;
- whenever j is between i_1 and i_2 (that is, $i_1 < j < i_2$ or $i_2 < j < i_1$), then $c(j) = c(i_1)$ or $(c(j), c(i_1)) \in E$.

不难验证，$\sim_{G,c}$ 是一个等价关系。令 $\ker_G(c)$ 为 $[k]$ 的划分，其块为等价类。现在，根据 AMVB25 第 3.4], 条定义，给定一个有向图 G、一个 C*-概率空间 (A, φ) 以及 $*$-子代数 $(A_v)_{v\in V}$，如果对于 G，对每个 $c:\ [k] \to V$ 和 $a_j \in A_{c(j)}$，均有.....，则称 $(A_v)_{v\in V}$ 关于 G 是 BMT-独立的

$$\varphi(a_1 \ldots a_k) = \prod_{B \in \ker_G(c)} \varphi(\vec{\prod_{j\in B}} a_j), \tag{2.2}$$

¯其中， $\vec{\prod}$ 表示从左到右按递增顺序排列的各项的乘积。

命题 2.11。设 $\mathcal{G}$ 为一个具有 $\mathcal{E}_2 \supseteq \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1 \backslash \Delta$的二部图。那么，相对于 $\mathcal{G}$ 的二部图独立性等价于相对于 $G = (\mathcal{V}、\ \mathcal{E}_1 \backslash \Delta)$ 的 *BMT* 独立性，其含义见[AMVB25]。

为此，我们使用以下引理:

引理 2.12. 固定一个二部图 $\mathcal{G}$和 $c\colon [k] \to \mathcal{V}$。假设 $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1 \backslash \Delta$。那么 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$当且仅当 $\pi \leqslant \ker_{\mathcal{G}}(c)$ ，且 π 在$\ker_G(c)$ 的每个块上的限制均为非交叉。

证明。假设 $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1 \backslash \Delta$，我们断言，定义 1.2 (3) 可以替换为

(3') 对每个 $v \in V$， π 在 $c^{-1}(v)$ 上的限制均为非交叉。

事实上，由于$\mathcal{E}_2$ 是非自反的，(3)意味着同色的两个块之间不可能交叉，因此(3')成立。另一方面，假设(3')成立，且 $i_1 < j_1 < i_2 < j_2$和 $i_1 \sim_\pi i_2$ 和 $j_1 \sim_\pi j_2$ 和 $i_1 \not\sim_\pi j_1$。那么根据(3')，$c(i_1) \neq c(j_1)$ 。同时，根据定义 1.2 (2) 应用两次可得 $(c(i_1),\ c(j_1)) \in \mathcal{E}_1$和 $(c(j_1),\ c(i_1)) \in \mathcal{E}_1$。因此，$(c(i_1),\ c(j_1)) \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1 \backslash \Delta = \mathcal{E}_2$，故(3)成立。

现在我们证明主要结论： $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$ 当且仅当 $\pi \leqslant \ker_G(\pi)$ ，且将 π 限制在 $\ker_G(c)$ 的每个块上所得的关系是非交叉的。事实上，定义 1.2 的条件 (1) 和 (2) 等价于如下条件：若 $i_1 \sim_\pi i_2$，则$i_1 \sim_{G,c} i_2$；而这又等价于 $\pi \leqslant \ker_G(c)$。此外，假设 (1) 和 (2) 成立，则由 (3') 可知，将 π 限制在 $\ker_G(c)$ 的每个块上所得的关系是非交叉的，因为 $\ker_G(\pi)$ 的每个块都是单色的。反过来，假设 $\pi \leqslant \ker_G(c)$ ，且将 π 限制在 $\ker_G(c)$ 的每个块上所得的关系是非交叉的。设$v \in V$ 且 $i_1 < j_1 < i_2 < j_2$ ，其中 $i_1 \sim_\pi i_2$ 且 $j_1 \sim_\pi j_2$ 且 $c(i_1) = c(j_1) = c(i_2) = c(j_2) = v$。由于 $\pi \leqslant \ker_G(c)$， i_1 与 i_2 之间的所有指标都必须满足 $c(j') = v$ 或$(v, c(j')) \in \mathcal{E}_1 \backslash \Delta$。特别地， i_1 与 j_1之间的所有指标都满足这一点，因此 i_1 和 j_1 属于 $\ker_\pi(G)$的同一个块。由于 π 在该块上的限制是非交叉的， i_1 和 j_1 必须属于 π的同一个块。因此，将 π 限制在 $c^{-1}(v)$ 上所得的关系是非交叉的，故 (3') 成立。□

命题 *2.11* 的证明。设 (A, φ) 是一个 C*-概率空间，且 $(A_v)_{v \in \mathcal{V}}$ 是关于 $\mathcal{G}$ 二部图独立的 $*$ 子代数。设 $k \in \mathbb{N}$，令 $c\colon [k] \to V$，并令 $a_j \in A_{c(j)}$ 对于 $j \in [k]$。由于 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$ 当且仅当 $\pi \leqslant \ker_G(c)$ ，且 π 在 $\ker_G(c)$ 的每个块上都是非交叉的，因此存在一个双射

$$\mathcal{P}(c, \mathcal{G}) \to \prod_{B \in \ker_G(c)} \mathcal{NC}(B) \tag{2.3}$$

将 π 映射到 $(\pi|_B)_{B \in \ker_G(c)}$。因此，(1.1) 得出

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 \dots a_k) &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})} K_\pi^{\text{free}}[a_1, \dots, a_k] \\ &= \prod_{B \in \ker_G(\pi)} \sum_{\pi_B \in \mathcal{NC}(B)} K_{\pi_B}^{\text{free}}[a_j : j \in B] \\ &= \prod_{B \in \ker_G(\pi)} \varphi(\vec{\prod}_{j \in B} a_j), \end{aligned}$$

其中， $K_{\pi_B}^{\text{free}}[a_j\colon\ j \in B]$ 的各个参数从左到右排列，最后一个$\vec{}$等式由将自由矩-累积量公式应用于 $\varphi(\prod_{j \in B} a_j)$得出。这表明 $(A_v)_{v \in \mathcal{V}}$ 满足 (2.2)，也就是说，它们关于 G 是 BMT 独立的。反向推导表明，反过来，若 $(A_v)_{v \in V}$ 关于 G 是 BMT 独立的，则它们关于 $\mathcal{G}$ 是二部图独立的。□

为完成命题 1.5 的证明，我们还记录以下简单观察。

引理 2.13. 设 $\mathcal{G}$ 是一个二部图。设 $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$，并对 $j = 1,\ 2$，令 $\mathcal{E}_j' = \mathcal{E}_j \cap (\mathcal{V}' \times \mathcal{V}')$ 。则 $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}_1', \mathcal{E}_2')$ 是一个二部图。若 C*-概率空间 (A, φ) 中的 $*$-子代数$(A_v)_{v \in \mathcal{V}}$是$\mathcal{G}$-独立的，则 $(A_v)_{v \in \mathcal{V}'}$ 是 $\mathcal{G}'$-独立的。

$\mathcal{E}_1 = \varnothing$,	布尔独立性
$\mathcal{E}_1$ 全序	单调独立性
$\mathcal{V} \times \mathcal{V} = \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2 = \varnothing$	自由独立性
$\mathcal{V} \times \mathcal{V} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$	张量独立性
$\mathcal{V} \times \mathcal{V} = \mathcal{E}_1$	ε-独立性
$\mathcal{E}_2 = \bar{\mathcal{E}}_1 \cap \mathcal{E}_1$	BMT 独立性
$\mathcal{E}_1$ 偏序	BM 独立性

FIGURE 2. $\mathcal{G}$独立性与其他独立性的关系。我们假设了$^{-}$ $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1$。

证明. 首先，注意若 $c\colon [k] \to \mathcal{V}'$，则 $\mathcal{P}(c, \mathcal{G}) = \mathcal{P}(c, \mathcal{G}')$，这从定义 1.2 可直接看出。由此，结论可由定义 1.4 立即得到。□

命题 *1.5* 的证明。 我们已分别在命题 2.10 和命题 2.11 中证明了断言 (6) 和 (7)。对于证明的_其余部分，不失一般性，假设 $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1$（见注记）。

对于断言 (1)，设 $(v, w) \in \mathcal{E}_{\text{Bool}}$。根据引理 2.13， A_v 和 A_w 关于 $(\{v, w\}, \varnothing, \varnothing)$是二部图独立的。根据命题 2.11，它们关于 $(\{v, w\}, \varnothing)$是 BMT 独立的，这意味着根据 AMVB25，命题 3.12(ii)，它们是布尔独立的 []。

断言 (2) 的证明方法相同。若 $(v, w) \in \mathcal{E}_{\text{mono}}$，则 A_v 和 A_w 关于 $(\{v, w\}, \{(v, w)\}, \varnothing)$是二部图独立的，因此关于 $(\{v, w\}, \{(w, v)\})$是 BMT-独立的，进而根据 AMVB25，命题 3.12(iii)，是单调独立的 []。

反单调情形下的断言 (3) 可由对称性得出。

张量情形下的断言 (5) 可用关于图 $(\{v、\ w\}、\ \{(v、\ w)、\ (w、\ v)\})$ 和 [AMVB25, 命题 3.12(i)] 的 BMT 独立性，以同样的方式得出。

对于自由情形下的断言 (4)，我们同样利用命题 2.10 证明， A_v 和 A_w 关于 $(\{v、\ w\}、\ \varnothing)$是$\varepsilon$-独立的；根据 [M-lo04, SW16] 的结果，这意味着它们是自由独立的。□

注记 2.14。 断言 (5) 中的张量情形也可以用 ε-独立性来证明。当然，我们证明中的推理也适用于更一般的情形：对于顶点的任意子集，只要其诱导子二图 $\mathcal{G}'$ 具有命题 2.10 和 2.11 中的某种特殊形式，就可以结合引理 2.13、命题 2.10 和 2.11 来描述 $(A_v)_{v \in \mathcal{V}'}$ 的行为。

2.3. **通过布尔累积量和经典累积量刻画二部图独立性**。 本节将给出一个公式，用布尔累积量而非自由累积量表示 $\mathcal{G}$-独立变量的联合矩。该公式将在 §2.4、§2.5 和 §3 中用到。为此，我们需要引入 $\mathcal{P}(c, \mathcal{G})$的一个特定子类 $\mathcal{P}(c, \mathcal{G})^0$。

回顾定义 2.3 中 $\prec$的定义。下文用 $\leqslant$ 表示划分上的包含序：若 π 可由 σ 通过合并 σ中的若干块得到，则 $\sigma \leqslant \pi$, σ, π 是 $[k]$的划分。

定义 2.15。 固定 $\mathcal{G}$ 和 $c\colon [k] \to \mathcal{V}$。令 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$。我们如下定义 π 上的无障碍嵌套关系 $\prec_{un}$：令 $B \neq B'$, $B \prec_{un} B'$ 当且仅当

- $c(B) = c(B')$;• $B \prec B'$ （等价地， B' 嵌套在 B内部）；
- 若 B'' 满足 $B \prec B'' \prec B'$，则 $(c(B), c(B'')) \in \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。

定义 2.16. 我们用 $\mathcal{P}(c, \mathcal{G})^0$ 表示满足 $\prec_{un}$ 为空关系的 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$ 的集合。等价地， $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})^0$ 当 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$ 时，对于每个 B 和 $B' \in \pi$，若 $c(B) = c(B')$ 且 $B \prec B'$，则存在某个 B'' 使得 $B \prec B'' \prec B''$ 且 $(c(B), c(B'')) \notin \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。

注记 2.17. 在定义 2.15 的最后一个条件中，还需要有 $(c(B), c(B'')) \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1$，因为 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$ 且 $B \prec \overline{B''} \prec B'$。因此，我们看到 $(c(B), c(B'')) \in \mathcal{E}_{\text{free}} \backslash \Delta$。

本节的第一个主要目标是证明以下命题。

命题 2.18. 固定一个二部图 $\mathcal{G}$、一个 C*-概率空间 (A, φ)以及 $*$-子代数 $(A_v)_{v \in \mathcal{V}}$。那么，$(A_v)_{v \in \mathcal{V}}$ 关于 $\mathcal{G}$ 二部图独立，当且仅当满足以下条件：对于$k \in \mathbb{N}$ 和 $c\colon [k] \to \mathcal{V}$，且对于 $j \in [k]$，有

$$\varphi(a_1 \dots a_k) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})^0} K_\pi^{\text{Bool}}[a_1, \dots, a_k]. \tag{2.4}$$

证明的主要思路是，将布尔累积量用自由累积量表示的公式代入 (2.4)，从而得到 (1.1)。为此，我们需要证明，在 $\mathcal{P}(c, \mathcal{G})$ 中的一个划分，可以通过取 $\mathcal{P}(c, \mathcal{G})^0$ 中的一个划分，并按照不可约非交叉划分对其每个块进行细分而唯一表示（见引理 2.23）。我们先介绍一些关于 $\prec_{un}$ 和 $\mathcal{P}(c, \mathcal{G})$的技术引理。

引理 2.19. 固定如上所述的 c 和 $\mathcal{G}$，并令 $\pi \in \mathcal{P}(c、\ \mathcal{G})$。

(1) $\prec_{un}$ 是 π 上的严格偏序。*(2)* 对每个 $B \in \pi$，集合 $\{B' \in \pi :\ B' \prec_{un} B\}$ 关于 $\prec_{un}$ 全序。*(3)* 对每个 $B \in \pi$，存在唯一的 $B' \prec_{un} B$，它关于 $\prec$ 是极小的。

证明。(1) 首先注意，由于 $\prec_{un} \subseteq \prec$ 和 $\prec$ 是严格偏序，因此 $\prec_{un}$ 具有反对称性且是非自反的。因此，只需证明 $\prec_{un}$ 具有传递性。假设 $B_0 \prec_{un} B_1 \prec_{un} B_2$。那么 $c(B_0) = c(B_1) = c(B_2)$ 和 $B_0 \prec B_1 \prec B_2$，这验证了定义 2.15 的前两个条件。对于第三个条件，假设 $B_0 \prec B' \prec B_2$。我们将引理 2.5 应用于 B_1 和 B'，并注意到 B' 和 B_1 不可能分离，因为 $B' \prec B_2$ 和 $B_1 \prec B_2$。

- 如果 B' 与 B_1交叉，那么由于 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$，我们必有 $(c(B'), c(B_1)) \in \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_2 \cup \Delta$，正如所需。
- 如果 $B_1 \prec B'$，那么 $B_1 \prec B' \prec B_2$，因此根据$B_1 \prec_{un} B_2$的定义，$(c(B'), c(B_1)) \in \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。
- 如果 $B' \prec B_1$，那么 $B_0 \prec B' \prec B_2$，因此根据 $B_0 \prec_{un} B_1$的定义，$(c(B_0), c(B')) \in \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。

因此，$B_0 \prec_{un} B_2$。

(2) 假设 $B_1 \prec_{un} B$ 且 $B_2 \prec_{un} B$。由于 $c(B_1) = c(B_2)$ 且 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$，块 B_1 和 B_2 不可能交叉。它们也不可能分离，因为 $B_1 \prec B$ 且 $B_2 \prec B$。因此，根据引理 2.5，我们有 $B_1 \prec B_2$ 或 $B_2 \prec B_1$。如果 $B_1 \prec B_2$，那么我们还必有$B_1 \prec_{un} B_2$。事实上，显然 $c(B_1) = c(B_2)$ 且 $B_1 \prec B_2$；此外，如果 $B_1 \prec B' \prec B_2$，那么 $B_1 \prec B' \prec B$，因此根据 $B_1 \prec_{un} B$的定义，$(c(B_1), c(B')) \in \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。

(3) 这由 (2) 立即得出。 □

引理 2.20. 固定如上所述的 c 和 $\mathcal{G}$。那么对于每个 $\pi \in \mathcal{P}(c、\ \mathcal{G})$，都存在唯一的 $\sigma \in \mathcal{P}(c、\ \mathcal{G})^0$，使得 $\sigma \geqslant \pi$，并且对于每个 $B \in \sigma$，最小值 $B \sim_\pi$最大值 B。

证明。对于每个块 $B \in \pi$，利用引理 2.19，令 $m(B)$ 为满足 $m(B) \prec_{un} B$ 的最小块。若 $m(B) = m(B')$，则定义 $B \sim_{un} B'$。令 σ 为一个划分，其块是 $\sim_{un}$的等价类的并。这尤其意味着，若 $B \prec_{un} B'$ 属于 π，则B 和 B' 属于 σ的同一个块。

我们首先证明，对于 $B \in \sigma$，有 $\min B \sim_\sigma \max B$。每个 $B \in \sigma$ 都是 $\sim_{un}$的某个等价类的并。根据 $\sim_{un}$的构造，该等价类有唯一的极小元素 B'。由于对于等价类中的所有其他 B''，都有 $B' \prec B''$，因此 $\min\ B = \min\ B'$ 且 $\max\ B = \max B'$。于是，$\min\ B$和 $\max\ B$属于 π的同一个块 B'。接下来，我们证明了 $\sigma \in \mathcal{P}(c\, \mathcal{G})$，签到 g 定义 1.2 的每个条件：

(1) 显然，σ 的块都是单色的，因为 $\sim_{un}$ 的每个等价类都是单色的。

(2) 假设 $i_1 < j < i_2$、 i_1 和 i_2 属于 σ的同一个块 B。必要时缩小 i_1 并增大 i_2，不失一般性地，设 $i_1 = \min B$ 且$i_2 = \max\ B$。因此，由前一段可知， $i_1 \sim_\pi i_2$。由于 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$, 我们有$(c(i_1),\ c(j)) \in \mathcal{E}_2$。

(3) 假设 σ 的两个不同的块 B_1 和 B_2 交叉。如果存在 π 的块 B_1' 和 B_2'，满足 $B_1' \subseteq B_1$ 和 $B_2' \subseteq B_2$，且 B_1' 和 B_2' 交叉，那么我们必有 $(c(B_1'),\ c(B_2')) \in \mathcal{E}_2$，因为 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$, 所以这种情况下结论成立。

因此，假设 B_1 和 B_2 中没有 π 的块彼此交叉。回想一下，$\min B_1$ 和 $\max\ B_1$ 位于 π的同一个块 B_1' 中，而 $\min B_2$ 和 $\max B_2$ 位于 π的同一个块 B_2' 中。注意， B_1' 和 B_2' 不可能分离，否则 B_1 和 B_2 就不会交叉。我们假设 B_1' 和 B_2' 不交叉，因此 $B_1' \prec B_2'$ 或 $B_2 \prec B_1'$。由对称性，不失一般性地假设 $B_1' \prec B_2'$。现在，由于B_1与 B_2 交叉， B_1 中必定存在某个元素 j，位于 $\min B_2'$ 和 $\max\ B_2'$ 之间。包含 j 的 π 的块 B_1'' 必须嵌套在 B_2' 之内（因为根据假设，它不可能与之交叉）。因此， $B_1' \prec B_2' \prec B_1''$，且 $B_1' \prec_{un} B_1''$，因为 $m(B_1'') = B_1'$。根据 $\prec_{un}$ 的定义，我们有 $(c(B_1'),\ c(B_2')) \in \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。

最后，注意到 $c(B_1)$ 不可能等于 $c(B_2)$; 事实上，若此情况发生，那么按照引理 2.19 (2) 中相同的推理， $B_1' \prec B_2' \prec B_1''$ 将意味着 $B_1' \prec_{un} B_2'$，这将迫使 B_1 等于 B_2。因此， $(c(B_1),\ c(B_2)) \in \mathcal{E}_2$ 如所需。

接下来，我们证明 $\sigma \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G})^0$。反设 $B_1 \prec_{un} B_2$ 属于 σ。对于 $j = 1$，令 2 中的 B_j'为包含 $\min\ B_j$和 $\max B_j$的 π的块。我们声称 $B_1' \prec_{un} B_2'$。显然， $c(B_1') = c(B_2')$ 且 $B_1' \prec B_2'$。设 B' 是满足 $B_1' \prec B' \prec B_2'$的 π 的一个块。令 B 为包含 B'的 σ 的块，我们将证明 $(c(B_1),\ c(B)) \in \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。若 B与 B_1 或 B_2交叉，则由 $\sigma \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G})$可知结论成立，因此证明完毕。设 B 不与 B_1 或 B_2 交叉。于是，由于 B 包含 $B' \prec B_2'$，必有 $B \prec B_2'$，从而 $B \prec B_2$。类似地，由于 B_1 包含 $B_1' \prec B'$，可得 $B_1' \prec B$，进而也有 $B_1 \prec B$，因为它们不交叉。因此，$B_1' \prec_{un} B_2'$。由此可知， B_1' 和 B_2' 必定属于 σ的同一个块，这与 $B_1 \prec B_2$矛盾。

最后，我们证明 σ 是唯一的。设 σ' 是满足引理中条件的另一个划分。首先，我们证明 $\sigma \leqslant \sigma'$; 等价地说，如果 B_1' 和 B_2' 这两个块属于 π 的同一个等价类，那么它们必定属于 σ' 的同一个块。只需证明在 σ'中， B_1' 必定与 $m(B_1')$ 属于同一个块。因此，只需证明：若 $B_1' \prec_{un} B_2'$ 属于 π，则 B_1'和 B_2' 属于 σ'的同一个块。

反设 B_1' 属于 σ 中$B_1 \neq B_2$对应的块 B_1，而 B_2' 属于块 B_2。那么我们断言 $B_1 \prec_{un} B_2$ 属于 σ'。显然， B_1 和 B_2 颜色相同。由于 B_1和 B_2 颜色相同（因此不能交叉），且 $B_1' \prec B_2'$，我们必有 $B_1 \prec B_2$。最后，设对于 σ'中的某个块 B，有 $B_1 \prec B \prec B_2$。设 B' 是 π 中包含 $\max B$和 $\min\ B$的块，并设 B_1''是 π中包含 $\max B_1$和 $\min\ B_1$的块。于是 $B_1'' \prec B' \prec B_2'$。若能证明 $B_1'' \prec_{un} B_2'$，便可得出所需结论： $(c(B_1'')$、$c(B')) \in \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。若 $B_1'' = B_1'$，这显然成立。若 $B_1'' \neq B_1'$，则我们证明 $B_1'' \prec_{un} B_1'$。显然，它们颜色相同，且 $B_1'' \prec B_1'$。此外，若 $B_1'' \prec C \prec B_1'$ 属于 π，那么 C 要么包含于 B_1 中，要么与 B_1 交叉，因此 $(c(B_1)$、$c(C)) \in \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。所以，如所声称的， $B_1'' \prec_{un} B_1'' \prec_{un} B_2'$。

由此便完成了对 $\sigma' \geqslant \sigma$ 的证明。要得出 $\sigma' = \sigma$，还需证明：若B_1 和 B_2 是 σ 中不同的块，则它们不可能包含在 σ' 的同一个块中。当然，若 B_1 和 B_2 的颜色不同，这一点显然成立。假设 B_1 和 B_2 颜色相同，因此彼此不交叉。

- 假设 $B_1 \prec B_2$。由于 $\sigma \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})^0$，因此不可能有 $B_1 \prec_{un} B_2$，所以存在 σ 的另一个块 B，满足 $B_1 \prec B \prec B_2$ 和 $(c(B_1),\ c(B)) \notin \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。如果 B_1 和B_2 位于 σ'的同一个块中，那么这个块就会与包含 B的块交叉，这与 $\sigma' \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$矛盾。• 当然，$B_2 \prec B_1$时也同样适用。• 假设 B_1 和 B_2 彼此分离，并且包含在 σ'的同一个块 A中。由于 σ 的嵌套块不能位于 σ'的同一个块中，块 A 必须

σ 中分离块 A_1、……、 A_m 的并集（按从左到右的顺序列出）。根据关于 σ'的假设，$\min A$ 和 $\max A$ 位于 π的同一个块中。但 $\min A \in A_1$和 $\max A \in A_m$ 位于 σ的不同块中，因此也位于 π的不同块中，这就产生了矛盾。

□

定义 2.21。给定 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$，前一个引理中的划分 π' 记作 $\mathrm{Env}^0(\pi)$，并称为 π 的 $\mathcal{P}(c, \mathcal{G})^0$-包络 。

我们还回顾以下更为标准的定义：

定义 2.22。划分 π 的区间包络 $\mathrm{Env}^I(\pi)$ 是所有区间划分 $\sigma \geqslant \pi$ 的交。

若 $\mathrm{Env}^I(\pi) = \{[k]\}$，则划分 $[k]$ 是不可约 的。

我们用 $\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(k)$ 表示不可约分拆，用 $\mathcal{NC}_{\mathrm{irr}}(k)$ 表示不可约非交叉划分。

引理 2.23. 固定 $\mathcal{G}$ 和 $c\colon [k] \to \mathcal{V}$。则存在一个双射

$$\Phi : \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G})^0} \prod_{B \in \sigma} \mathcal{NC}_{\mathrm{irr}}(B) \to \mathcal{P}(c, \mathcal{G}), \quad \Phi((\pi_B)_{B\in\sigma}) = \bigcup_{B\in\sigma} \pi_B.$$

逆映射 Φ^{-1} 的构造如下：给定 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$，令 $\sigma = \mathrm{Env}^0(\pi)$，对于 $B \in \sigma$，令π_B 为 σ 在 B上的限制，然后 $\Phi^{-1}(\pi) = (\pi_B)_{B\in\sigma}$。

证明。令 Ψ 为映射，它将 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$ 映射到 $(\pi|_B)_{B\in\sigma}$，其中 $\sigma = \mathrm{Env}^0(\pi)$。为证明该引理，我们将验证 Φ 和 Ψ 映射到所声称的陪域中，并且它们互为逆映射。

首先，我们证明 Φ 映射到 $\mathcal{P}(c, \mathcal{G})$。固定 $\sigma \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})^0$ 以及 $\pi_B \in \mathcal{NC}_{\mathrm{irr}}(B)$，使其满足 $B \in \sigma$。令$\pi = \Phi((\pi_B)_{B\in\sigma})$，我们将证明 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$。我们依次验证 π 满足定义 1.2 的条件：

(1) π 的各块都是单色的，因为 $\pi \leqslant \sigma$。(2) 假设 $i_1 < j < j_2$ 满足 $i_1 \sim_\pi i_2$。那么 $i_1 \sim_\sigma i_2$，因为 $\pi \leqslant \sigma$。因此，由于$\sigma \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})$，我们有 $(c(i_1), c(j)) \in \mathcal{E}_1$。(3) 假设 π 中的两个块 B_1' 和 B_2' 交叉。由于每个 π_B 都是非交叉的，B_1' 和 B_2'必须属于 σ 中不同的块。将这些块记为 B_1 和 B_2。于是 B_1 和 B_2 交叉。因此，$(c(B_1), c(B_2)) \in \mathcal{E}_2$，如所需。

接下来，我们证明 Ψ 映射到$\bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})^0} \prod_{B\in\sigma} \mathcal{NC}_{\mathrm{irr}}(B)$ 中。固定 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，并令 σ =Env $^0(\pi)$。令 $\pi_B = \pi|_B$，其中 $B \in \sigma$。根据构造及引理 2.20，$\sigma \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})^0$。由于 B 是单色的，且由于 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，每个 π_B 都是非交叉的。此外，根据构造或引理 2.20，对每个 $B \in \sigma$，都有 $\min B \sim_\pi \max B$，这意味着 π_B 的最小元和最大元位于 π_B 的同一块中，也就是说，π_B 是不可约的。

接下来，我们证明 $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$。固定 $\sigma \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})^0$ 以及 $\pi_B \in \mathcal{NC}_{\mathrm{irr}}(B)$。令 $\pi = \Phi((\pi_B)_{B\in\sigma})$，我们将证明 $\Psi(\pi) = (\pi_B)_{B\in\sigma}$。由于 π_B's 可由 σ 唯一确定，只需证明 Env $^0(\pi) = \sigma$。根据前一段，$\sigma \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})^0$，而根据构造，$\sigma \geqslant \pi$。此外，对于每个 $B \in \sigma$，由于 π_B 不可约且非交叉，$\min B$ 和 $\max B$ 位于 π 的同一个块中。因此，根据引理 2.20 中的唯一性结论，σ 必须等于 $\mathrm{Env}^0(\pi)$。

最后，我们证明 $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$。固定 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，并令 $(\pi_B)_{B\in\sigma} = \Psi(\pi)$。由于 π_B 是 π 的块的分组，因此有 $\pi = \bigcup_{B\in\sigma} \pi = \Phi((\pi_B)_{\sigma\in B})$。□

命题 *2.18* 的证明。假设 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 关于 $\mathcal{G}$ 二部图独立。考虑以下表达式

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})^0} K_\sigma^{\mathrm{Bool}}[a_1, \ldots, a_k]. \tag{2.5}$$

回想一下将布尔累积量表示为自由累积量的公式（参见 [Leh02]） :

$$K_k^{\mathrm{Bool}}[a_1,\dots,a_k]=\sum_{\pi\in\mathcal{NC}_{\mathrm{irr}}(k)}K_\pi^{\mathrm{free}}[a_1,\dots,a_k]. \tag{2.6}$$

对 (2.5) 中的每个块 B of σ ，代入 (2.6)，得到

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})^0}\prod_{B\in\sigma}\sum_{\pi_B\in\mathcal{NC}_{\mathrm{irr}}(B)}K_{\pi_B}^{\mathrm{free}}[a_j:j\in B].$$

根据引理 2.23，这可以等价地表示为

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})}K_\pi^{\mathrm{free}}[a_1,\dots,a_k],$$

根据 (1.1)，这就是 $\varphi(a_1\dots a_k)$。反过来，由 (2.4) 推出 (1.1) 的证明方法类似。□

接下来，我们给出一个公式，用经典累积量表示 $\mathcal{G}$-独立变量的联合矩。为此，除了 $\mathcal{P}(c,\mathcal{G})$ 和 $\mathcal{P}(c,\mathcal{G})$之外，我们还引入第三组分拆。集合$\tilde{\mathcal{P}}(c,\mathcal{G})$ 由 $\mathcal{P}(c,\mathcal{G})$ 放宽条件得到：不再要求同色块不能交叉；换言之，我们在定义 1.2 (3) 中将 $\mathcal{E}_2$ 替换为 $\mathcal{E}_2\cup\Delta$。

定义 2.24. 固定一个二部图 $\mathcal{G}$ 和 $k\in\mathbb{N}$ 和 $c\colon [k]\to\mathcal{V}$ 是颜色串 $(c_i\in\mathcal{I})$。子集$\tilde{\mathcal{P}}(c,\mathcal{G})$ 由满足以下条件的 $[k]$ 的所有分拆构成：

(1) 如果 i 和 j 属于同一个块 $B\in\pi$，那么 $c(i)=c(j)$。(2) 如果 $i_1<j<i_2$ 和 $i_1\sim_\pi i_2$，那么 $(c(i_1),\ c(j))\in\mathcal{E}_1$。(3) 如果 $i_1<j_1<i_2<j_2$ 和 $i_1\sim_\pi i_2$ 和 $j_1\sim_\pi j_2$，那么 $(c(i_2),\ c(j_1))\in\mathcal{E}_2\cup\Delta$。

于是我们得到联合矩的如下表达式。

命题 2.25. 固定一个二部图 $\mathcal{G}$、一个 C*-概率空间 (A,φ)以及 $*$-子代数 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$。那么，关于 $\mathcal{G}$，$(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 二部图独立，当且仅当满足以下条件：对于$k\in\mathbb{N}$ 和 $c\colon [k]\to\mathcal{V}$ 以及 $j\in[k]$ 的 $a_j\in A_{c(j)}$，有

$$\varphi(a_1\dots a_k)=\sum_{\pi\in\tilde{\mathcal{P}}(c,\mathcal{G})}K_\pi^{\mathrm{class}}[a_1,\dots,a_k]. \tag{2.7}$$

定义 2.26. 划分 π 的非交叉包络 $\mathrm{Env}^{\mathrm{nc}}(\pi)$ 是所有非交叉划分 $\sigma\geqslant\pi$ 的交。

如果 $\mathrm{Env}^{\mathrm{nc}}(\pi)=\{[k]\}$，则称 $[k]$ 的划分为连通的 。

我们用 $\mathcal{P}_{\mathrm{conn}}(k)$ 表示 $[k]$ 的连通分拆 集合。类似地，若 $B\subseteq[n]$，则用 $\mathcal{P}_{\mathrm{conn}}(B)$ 表示通过按顺序将 B 的元素重新标记为 $1,\dots,k$ 而得到的相应划分集合。

引理 2.27. 固定一个二部图 $\mathcal{G}$, $k\in\mathbb{N}$ 和 $c\colon [k]\to\mathcal{V}$。设 $\pi\in\mathcal{P}(k)$ 是一个划分，其中每个块相对于 c 都是单色的。令 σ 为如下得到的划分：对每个 $v\in\mathcal{V}$,$\tilde{}$，将 $\pi|_{c^{-1}(v)}$ 替换为其非交叉包络。则 $\pi\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})$ 当且仅当 $\sigma\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})$。

定义 2.28。 在前一个引理的情形下，我们称 σ 为 π的按颜色非交叉包络 。

关于 $\tilde{}$引理 *2.27*。 假设 $\pi\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})$。我们逐一检查必要的性质：

(1) σ 的每个块都是单色的，因为它是由 π 中同色的块连接而成的。(2) 假设 $i_1<j<i_2$ 和 $i_1\sim_\sigma i_2$。令 B 为 σ 中包含 i_1 和 i_2的块。我们断言， $\pi|_B$中至少有一个块同时与 $\{1,\ \dots\dots,\ j-1\}$和$\{j+1,\ \dots\dots,\ k\}$相交。若非如此，则可将 $\pi|_B$划分为两组：一组 π_1由包含在 $\{1,\ \dots\dots,\ j-1\}$中的块构成，另一组 π_2由包含在 $\{j+1,\ \dots\dots,\ k\}$中的块构成。于是，我们可以通过将块 B 细分为 π_1 中各块的并集 B_1 以及 π_2中各块的并集 B_2 来修改 σ 。这将与 σ 是最小的划分这一事实矛盾

$\geqslant \pi$ 在每种颜色下均为非交叉。因此，存在 π 的某个块 B 以及 i_1'、$i_2' \in B'$，使得 $i_1' < j < i_2'$。因此，$\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ 意味着 $(c(i_1),\ c(j)) = (c(i_1'),\ c(j)) \in \mathcal{E}_1$。

(3) 假设 B_1 中的两个块 B_2 和 σ 发生交叉。由于 σ 被定义为 π 的按颜色非交叉包络，因此当 $c(B_1) = c(B_2)$ 时，B_1 和 B_2 不可能发生交叉。所以 $c(B_1) \neq c(B_2)$。

我们断言，π 中存在某个块 B_1'，包含于 B_1，并且与 B_2 发生交叉。这里注意，$\pi|_{B_1}$ 的各个块均与 B_2 不相交，因此 $\pi|_{B_1} \cup \{B_2\}$ 是 $[k]$ 的某个子集的划分，我们可以对其应用引理 2.5。记 $B_2 = \{i_1 < \cdots < i_m\}$。如果 $\pi|_{B_1}$ 中没有块与 B_2 发生交叉，那么可以根据 $\pi|_{B_1}$ 中的块是否落入 $\{i_1+1、\ldots\ldots、i_2-1\}$、……、$\{i_{m-1}+1、\ldots\ldots、i_m-1\}$ 或 $[k]\backslash\{i_1,\ i_1+1、\ldots\ldots、i_m\}$，对这些块进行划分；将所得的子划分记为 τ_1、……、τ_m。由于 B_1 与 B_2 发生交叉，因此 τ_j 中至少有两个非空。由于各个 τ_j 彼此不能交叉，这将与 π 的按颜色非交叉包络是 σ 这一事实相矛盾。

因此，令 $B_1' \in \pi|_{B_1}$ 与 B_2交叉。重复这一论证可知，既然 B_2 与B_1'交叉，就必定存在某个 $B_2' \in \pi|_{B_2}$ 与 B_1'交叉；否则，我们就会与 σ 是 π 的按颜色非交叉包络这一点矛盾（和之前一样，通过细分块 B_1）。

因此，存在相互交叉的块 $B_1' \in \pi|_{B_1}$ 和 $B_2' \in \pi|_{B_2}$。于是，既然$\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，我们有 $(c(B_1),\ c(B_2)) = (c(B_1'),\ c(B_2')) \in \mathcal{E}_2$。

因此，$\sigma \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。

反过来，假设 $\sigma \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，我们将证明 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。

(1) 由于 $\pi \leqslant \sigma$，π 的每个块都是单色的。(2) 假设 $i_1 < j < i_2$ 和 $i_1 \sim_\pi i_2$。那么 $i_1 \sim_\sigma i_2$，因此 $(c(i_1),\ c(j)) \in \mathcal{E}_1$。(3) 假设 B_1' 和 B_2' 这两个 π 的块相互交叉。如果 B_1' 和 B_2' 同色，那么$(c(B_1'),\ c(B_2')) \in \Delta$。另一方面，如果 B_1' 和 B_2' 颜色不同，那么 σ 中分别包含 B_1' 和 B_2' 的块B_1 和 B_2 将相互交叉，因此 $(c(B_1'),\ c(B_2')) = (c(B_1),\ c(B_2)) \in \mathcal{E}_2$。无论哪种情况，$(c(B_1'),\ c(B_2')) \in \mathcal{E}_2 \cup \Delta$。

因此，$\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。 □

引理 2.29。存在一个双射

$$\Phi : \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G})} \prod_{B \in \sigma} \mathcal{P}_{\mathrm{conn}}(B) \to \tilde{\mathcal{P}}(c,\mathcal{G}), \quad (\pi_B)_{B\in\sigma} \mapsto \bigcup_{B\in\sigma} \pi_B.$$

对于 $\pi \in \tilde{\mathcal{P}}(c、\ \mathcal{G})$，逆映射 $\Phi^{-1}(\pi)$ 的定义是：对于 $B \in \sigma$，令 σ 为 π 和 $\pi_B = \pi|_B$ 的按颜色非交叉包络。

证明。令 Ψ 为如下映射：将 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ 映射到 $(\pi|_B)_{B\in\sigma}$，其中 σ 是 π 的按颜色非交叉包络。为证明该引理，我们将验证 Φ 和 Ψ 映射到我们所断言的陪域中，并且它们互为逆映射。

首先，假设 $\sigma \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ 和 $\pi_B \in \mathcal{P}_{\mathrm{conn}}(B)$ 对于 $B \in \sigma$ 成立。我们将证明 $\pi = \Phi((\pi_B)_{B\in\sigma}) = \bigcup_{B\in\sigma} \pi_B$ 属于 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。注意，$\pi$ 的按颜色非交叉包络为 σ。事实上，令 π' 表示按颜色非交叉包络。那么 σ 按颜色非交叉，且 $\sigma \geqslant \pi$，所以 $\sigma \geqslant \pi'$。此外，由于每个 π_B 都是连通的，π_B 的块在按颜色非交叉包络中必定构成一个块，因此 $\sigma \leqslant \pi'$。然后根据引理 2.27，我们有 $\pi = \Phi((\pi_B)_{B\in\sigma}) \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。

上述论证还表明，$\Psi(\pi) = \sigma$ 因为 σ 是 π的按颜色非交叉包络。因此，$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$。

接下来，假设 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，我们将证明 $\Psi(\pi) \in \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})} \prod_{B\in\sigma} \mathcal{P}_{\mathrm{conn}}(B) \to \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。令 σ 为按颜色非交叉包络。根据引理 2.27，我们有 $\sigma \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。对于 $B \in \sigma$，令 $\pi_B = \pi|_B$。由于 σ 是 π的按颜色非交叉包络，我们必有 π_B 的非交叉包络为 B，这意味着 π_B 是不可约的。因此，Ψ 映射到所断言的余域中。

我们还显然有 $\Phi((\pi_B)_{B\in\sigma}) = \bigcup_{B\in\sigma} \pi_B = \pi$，这意味着 $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$。 □

命题 *2.25* 的证明。假设 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 关于 $\mathcal{G}$ 二部图独立。令 $k\in\mathbb{N}$ 和 c：对于 $j=1,\ldots,k$，有 $[k]\to\mathcal{V}$ 和 $a_j\in A_{c(j)}$。根据 **(1.1)**，

$$\varphi(a_1\ldots a_k)=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})}\prod_{B\in\sigma}K^{\mathrm{free}}_{|B|}(a_j:j\in B).$$

回顾自由累积量用经典累积量表示的公式 [AHLV15]:

$$K^{\mathrm{free}}_k(a_1,\ldots,a_k)=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{\mathrm{conn}}(k)}K^{\mathrm{class}}_\pi[a_1,\ldots,a_k].$$

对每个块 B of σ 应用此公式，可得

$$\varphi(a_1\ldots a_k)=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})}\prod_{B\in\sigma}\sum_{\pi_B\in\mathcal{P}_{\mathrm{conn}}(B)}K^{\mathrm{class}}_{\pi_B}(a_j:j\in B).$$

接着应用引理 2.29，即可得到所需关系式 **(2.7)**。逆命题的证明类似。□

最后，我们给出一个公式，用来表示来自 $\mathcal{G}$-独立代数的元素的布尔累积量，而非矩。

命题 2.30。设 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 为 $\mathcal{G}$-独立。设 $k\in\mathbb{N}$, $c\colon[k]\to\mathcal{V}$，并设 $a_1\in A_{c(1)},\ldots,a_k\in A_{c(k)}$。则

$$K^{\mathrm{Bool}}(a_1,\ldots,a_k)=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(c,\mathcal{G})}K^{\mathrm{free}}_\pi(a_1,\ldots,a_k)\tag{2.8}$$

$$=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(c,\mathcal{G})^0}K^{\mathrm{Bool}}_\pi(a_1,\ldots,a_k)\tag{2.9}$$

$$=\sum_{\pi\in\tilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{irr}}(c,\mathcal{G})}K^{\mathrm{class}}_\pi(a_1,\ldots,a_k),\tag{2.10}$$

其中下标不可约表示每个划分类与 $[k]$ 的不可约分拆类的交集。反之，布尔累积量的这些公式中的每一个都蕴含 $\mathcal{G}$-独立性。

证明。令 $\mathcal{I}(k)$ 表示 $[k]$ 的区间划分集合。回顾一下，存在一个双射

$$\mathcal{P}(k)\to\bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{I}(k)}\prod_{B\in\sigma}\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(B)$$

定义如下：给定 $\pi\in\mathcal{P}(k)$，令 σ 为其区间包络，并令 $\pi_B=\pi|_B$ 对于 $B\in\sigma$。同样容易看出，$\pi\in\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ 当且仅当 $\pi_B\in\mathcal{P}(c|_B,\ \mathcal{G})$ 对每个 $B\in\sigma$ 均成立，因为 π 中的每个嵌套或交叉都必然发生在不可约分拆 π_B 之一的内部。对于 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})^0$ 和 $\tilde{\mathcal{P}}(c,\ \mathcal{G})$，类似的陈述同样成立。

假设 $(A_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 是 $\mathcal{G}$-独立的，我们将通过对 k 进行归纳法来证明第一个等式。基础情形 $k=1$ 显然成立，因为两边都等于 $\varphi(a_1)$。假设 $k>1$。从 **(1.1)** 出发，我们应用双射 $\mathcal{P}(k)\to\bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{I}(k)}\prod_{B\in\sigma}\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(B)$ 得到

$$\varphi(a_1\ldots a_k)=\sum_{\sigma\in\mathcal{I}(k)}\prod_{B\in\sigma}\sum_{\pi_B\in\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(B)}K^{\mathrm{free}}_\pi[a_j:j\in B].$$

令 $\mathbb{1}_k$ 表示划分 $\{[k]\}$。如果 $\sigma\neq\mathbb{1}_k$，那么每个块 B 的大小都严格小于 k，因此我们可以对 B应用归纳假设。于是，

$$\begin{aligned}\varphi(a_1\ldots a_k)&=\sum_{\pi_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(k)}K^{\mathrm{free}}_{\pi_0}[a_1,\ldots,a_k]+\sum_{\sigma\in\mathcal{I}(k)\setminus\{\mathbb{1}_k\}}\prod_{B\in\sigma}\sum_{\pi_B\in\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(B)}K^{\mathrm{free}}_\pi[a_j:j\in B]\\&=\sum_{\pi_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(k)}+\sum_{\sigma\in\mathcal{I}(k)\setminus\{\mathbb{1}_k\}}K^{\mathrm{Bool}}_{|B|}[a_j:j\in B].\end{aligned}$$

应用布尔累积量的定义，

$$\varphi(a_1\dots a_k)=\sum_{\pi_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(k)}K_{\pi_0}^{\mathrm{free}}[a_1,\dots,a_k]+(\varphi(a_1\dots a_k)-K_k^{\mathrm{Bool}}[a_1,\dots,a_k]).$$

重新整理后得到 $K_k^{\mathrm{Bool}}[a_1,\ \dots\dots,\ a_k]=\sum_{\pi_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(k)}K_{\pi_0}^{\mathrm{free}}[a_1,\ \dots\dots,\ a_k]$，这就是所需的公式。其他公式及其逆命题可用类似的推理得出。□

注记 2.31。计算 $\mathcal{G}$ 独立变量的自由累积量或经典累积量相当困难（更不用说单调累积量了）。例如，不能 用同样的论证来证明 $K_k^{\mathrm{free}}[a_1,\ \dots\dots,\ a_k]$ 是 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$中所有连通分拆的求和。事实上，在前面的证明中，我们用到了这样一个事实：一个分拆属于 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ ，当且仅当它的每个不可约分量都属于 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。同样的推理不能 用于 π的连通分量。这是因为 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ 对哪些块可以彼此嵌套有要求，而无法孤立地逐一检查各个连通分量是否满足这些要求。更确切地说，如果 $\pi\in\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ ，并且 $B_1\prec B_2$ 是其非交叉包络中的块，那么 B_1将包含 π 的某个块 B_1' ，且满足 $B_1'\prec B_2$；于是 B_2 中的 π 的所有块都嵌套在 B_1' 内，因此定义 1.2 (2) 适用于它们。所以， $\mathcal{P}(c|_{B_2},\ \mathcal{G})$ 中的并非所有分拆都符合要求。

2.4. 树框架中的自由–（反）单调–布尔混合。 如注 1.6 所述，目前有两种不同的布尔、单调和自由独立性的混合构造。第一种由 [JL20, JOW25], 的有向图独立性给出，而第二种就是本文中的构造，因为在具有 $\mathcal{E}_2=\varnothing$ 的图中不会有张量边。这两种构造之间的差异已在 [JOW25, 注 3.24] 中针对布尔–单调混合的情形被指出；该注记表明，对于给定的一组两两布尔和（反）单调关系，有向图框架中的混合一般不同于 [AMVB25]的 BMT 框架中的混合（尽管当边集为偏序时二者一致）；如上所示，我们的二部图框架扩展了 BMT 框架。

现在我们将一般地考察布尔–（反）单调–自由成对关系，并说明 [JOW25] 的有向图框架与我们的二部图框架之间的关系。考虑一个二部图 $\mathcal{G}$ ，其具有 $\mathcal{E}_2=\varnothing$。令 G 为有向图 $(\mathcal{V},\ \mathcal{E}_1\backslash\Delta)$。设非交换概率空间 $(A,\ \varphi)$中的代数 A_v 满足$v\in\mathcal{V}$。令 $c:\ [k]\to\mathcal{V}$ 以及 $a_i\in A_{c(i)}$。

- 如果这些代数 A_v 关于 G是有向图独立的，那么根据 [JOW25，定义 3.18],

$$\varphi(a_1\dots a_k)=\sum_{\pi\in\mathcal{NC}(c,G)}K_\pi^{\mathrm{Bool}}(a_1,\dots,a_k),$$

  其中 $\mathcal{NC}(c,\ G)$ 由 [JOW25，定义 3.12] 给出（下文将进一步说明）。
- 如果这些代数 A_v 关于 $\mathcal{G}$是二部图独立的，那么

$$\varphi(a_1\dots a_k)=\sum_{\pi\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})^0}K_\pi^{\mathrm{Bool}}(a_1,\dots,a_k).$$

这两个公式的区别完全在于这两类分拆。在这两种情形下，分拆都是非交叉的；事实上，在二部图情形中，当 $\mathcal{E}_2=\varnothing$时会排除交叉。在这两种情形下，分拆都要求由 c一致着色。不过，这两个框架对于一个块嵌套在另一个块内时的情形有不同要求：

- 对于 π属于 $\mathcal{NC}(c,\ G)$，意味着只要块 V_2 直接嵌套在块 V_1内，就有 $(c(V_1),\ c(V_2))\in\mathcal{E}_1\backslash\Delta$.• 对于 π 属于 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})^0$ ，意味着只要块 V_2 嵌套在块 V_1内，就有 $(c(V_1),\ c(V_2))\in\mathcal{E}_1$。此外，如果 V_2 直接嵌套在块 V_1内，那么 $c(V_1)\neq c(V_2)$。

因此显然有 $\mathcal{P}(c,\mathcal{G})^0\subseteq\mathcal{NC}(c,G)$，但一般而言该包含关系是严格的，因为 $\mathcal{NC}(c,G)$ 只考虑了 π 的嵌套森林中的直接子块，而 $\mathcal{P}(c,\mathcal{G})^0$ 则考虑所有后代。

有向图独立性和二部图独立性（当 $\mathcal{E}_2 = \varnothing$ 时）都属于 [JL20]的树独立性框架。令 $\mathcal{T}_{\mathcal{V},\mathrm{free}}$ 为一棵有根树，其顶点是字母表 $\mathcal{V}$ 上的交替词；当且仅当 jw 是一个交替词时， w 与 jw 相邻；根节点为空词。对于 $\mathcal{T}_{\mathcal{V},\mathrm{free}}$ 的每个有根子树 $\mathcal{T}$，都可以定义 $\mathcal{T}$- 独立性，它满足公式 [JL20，定理 4.21]

$$\varphi(a_1 \dots a_k) = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(c,\mathcal{T})} K_\pi^{\mathrm{Bool}}(a_1, \dots, a_k),$$

其中 $\mathcal{NC}(c,\ \mathcal{T})$ 是由 c 一致着色的非交叉分划集合，满足以下条件：给定一个链 V_1、 V_2、 . . .、 V_k，其中 V_1 是 π 的外部块，且 V_{j+1} 紧邻嵌套在 V_j 内部，则 $c(V_k) \dots c(V_1) \in \mathcal{T}$ [JL20，定义 4.18]。有向图独立性对应于这样的情形： $\mathcal{T}$ =Walk(G) 是有向图 G 中游走的集合，按从右到左的顺序书写；参见 [JL20，定义 3.18] 和 [JOW25]。与此同时，二部图独立性（当 $\mathcal{E}_2 = \varnothing$ 时）对应于树

$$\mathcal{T} = \{v_1 \dots v_k \in \mathcal{T}_{\mathcal{V},\mathrm{free}} : i < j \implies (v_j, v_i) \in \mathcal{E}_1\}. \tag{2.11}$$

虽然式 (2.11) 中的树 $\mathcal{T}$ 通常不同于 Walk(G)，但当 $\mathcal{E}_1$ 具有传递性时，二者相同。事实上，若 $v_k \dots v_1$ 属于 Walk(G)，则 $(v_1,\ v_2) \in \mathcal{E}_1$，.. .，$(v_{k-1},\ v_k) \in \mathcal{E}_1$，因此根据传递性，对于 $i < j$，有 $(v_i,\ v_j) \in \mathcal{E}_1$ 。因此，我们有以下观察。

命题 2.32. 设 $\mathcal{G}$ 是一个二部图，其中 $\mathcal{E}_2 = \varnothing$ 和 $\mathcal{E}_1$ 具有传递性。那么，关于 $\mathcal{G}$ 的二部图独立性等价于关于 $G = (\mathcal{V}、\ \mathcal{E}_1)$ 的有向图独立性。

注意，在 $\mathcal{E}_2 = \varnothing$ 和 $\mathcal{E}_1$ 具有传递性且对称这一特殊情形下，得到的是布尔独立性与自由独立性的混合；根据上述命题，它与 Kula 和 Wysoczanski 的 BF 独立性一致 [KW13]。然而，一般而言，二部图框架和有向图框架中的布尔独立性与自由独立性的混合并不相同。

对于一般的布尔、（反）单调和自由混合，还有其他几种构造混合的方式，可在二部图版本与有向图版本之间进行插值。例如，对于 $m \in \mathbb{N}$，令

$$\mathcal{T}^{(m)} = \{v_1 \dots v_k \in \mathcal{T}_{\mathcal{V},\mathrm{free}} : i \leqslant j \leqslant i + m \implies (v_j, v_i) \in \mathcal{E}_1\}.$$

那么 $\mathcal{T}^{(1)} =$ Walk(G) 和 $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{T}^{(m)} = \mathcal{T}$。另一种插值方式是令

$$\mathcal{S}^{(m)} = \{v_1 \dots v_k \in \mathcal{T}_{\mathcal{V},\mathrm{free}} : i < j \leqslant \max(i+1, k-m) \implies (v_j, v_i) \in \mathcal{E}_1\}.$$

因此，当 $j = i+1$ 或者当 $j \leqslant k-m$ 时， $\mathcal{S}^{(m)}$ 满足邻接条件 $(v_j,\ v_i) \in \mathcal{E}_1$。于是 $\mathcal{S}^{(0)} =$ Walk(G) 和 $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{S}^{(m)} = \mathcal{T}$。

2.5. **树 operad 结合性**。本节介绍一种自然的结合性性质，即相对于不同的二部图“复合”独立性。与 [JL20]，中研究的树独立性和有向图独立性的情形类似，我们构造一个二部图的对称幺半群。关于幺半群的一般背景知识，请参阅 [Lei04]；此处我们给出一个自足的定义。

定义 2.33。一个（普通）幺半群由一个序列 $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ （其元素为集合）、一个指定元素 id $\in P(1)$以及复合映射组成

$$\circ_{m,n_1,\dots,n_m} : P(m) \times P(n_1) \times \cdots \times P(n_m) \to P(n_1 + \cdots + n_m)$$

记作

$$(f, f_1, \dots, f_m) \mapsto f(f_1, \dots, f_m),$$

使得以下公理成立：

- 单位元：对于 $f \in P(m)$，我们有 f(id . . . ，id) $= f$以及 id$(f) = f$。- 结合律：给定 $f \in P(m)$ 和 $f_j \in P(n_j)$，对于 $j = 1$、...、 m和 $f_{j,\ i} \in P(m_{j,\ i})$，对于$i = 1$、...、 I_j和 $j = 1$、...、 n，我们有

$$f(f_1(f_{1,1}, \dots, f_{1,I_1}), \dots, f_m(f_{m,1}, \dots, f_{m,I_m})) \\ = [f(f_1, \dots, f_m)](f_{1,1}, \dots, f_{1,I_1}, \dots\dots, f_{1,m}, \dots, f_{m,I_m}).$$

$P(m)$ 的元素称为元数 m。

定义 2.34。一个对称幺半群由一个幺半群 $(P(n))$ 以及对称群 S_m 在 $P(m)$上的右作用组成，记作 $(f,\ \sigma)\mapsto f_\sigma$，并满足以下公理：

- 设 $f\in P(m)$ 和 $f_j\in P(n_j)$ 对 $j=1,\ \ldots\ldots,\ m$成立。设 $\sigma\in S_m$，并令 $\tilde{\sigma}\in S_{n_1+\cdots+n_m}$ 表示按照 σ 重新排列块 $\{1,\ \ldots\ldots,\ n_1\}$、$\{n_1+1,\ \ldots\ldots,\ n_1+n_2\}$、$\{n_1+n_2+1,\ \ldots\ldots,\ n_1+n_2+n_3\}$ 顺序的元素。那么

$$f_\sigma(f_{\sigma(1)},\ldots,f_{\sigma(m)})=[f(f_1,\ldots,f_m)]_{\tilde{\sigma}}.$$

- 设 f 和 f_j 如上。设 $\sigma_j\in S_{n_j}$，并令 $\sigma\in S_{n_1+\cdots+n_m}$ 表示按置换 s_j对每个块 $\{n_1+\cdots+n_{j-1}+1,\ \ldots\ldots,\ n_1+\cdots+n_j\}$ 内的元素进行置换、而不改变块顺序的元素。那么

$$f((f_1)_{\sigma_1},\ldots,(f_m)_{\sigma_m})=f(f_1,\ldots,f_m)_\sigma.$$

定义 2.35（二部图幺半群）。我们如下定义幺半群 BG。对于每个 $m\in\mathbb{N}$，令 $\mathrm{BG}(m)$ 为顶点集为 $[m]$ 的二部图集合。

令 $\tilde{\mathrm{id}}$ 为二部图 $(\{1\},\ \{(1,\ 1)\},\ \varnothing)$，如下定义复合运算。令 $\mathcal{G}=([m],\ \mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2)\in\mathrm{BG}(m)$，对于 $j=1,\ldots,\ m$，令 $\mathcal{G}^j=([n_j],\ \mathcal{E}_1^j,\ \mathcal{E}_2^j)\in\mathrm{BG}(n_j)$。令 $N_j=n_1+\cdots+n_j$ 和 $N=N_m$，并定义$\iota_j\colon[n_j]\to[N]$，使得 $\iota_j(i)=N_{j-1}+i$，从而 $[N]=\bigsqcup_{j=1}^m\iota_j([n_j])$。

Let $\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^1,\ \ldots,\ \mathcal{G}^m)$ 为二部图 $\mathcal{G}=([N],\ \mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2)$，其中 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$定义如下：

- 若 $v,w\in[n_j]$ 且 $i\in\{1,2\}$，则 $(\iota_j(v),\iota_j(w))\in\mathcal{E}_i$ 当且仅当 $(v,w)\in\mathcal{E}_i^j$。
- 若 $v\in[n_j]$ 且 $w\in[n_{j'}]$ 满足 $j\neq j'$，则 $(\iota_j(v),\iota_{j'}(w))\in\mathcal{E}_i$ 当且仅当 $(j,j')\in\mathcal{E}_i$。

置换作用定义如下：给定 $\mathcal{G}=([m],\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\in\mathrm{BG}(m)$，定义$\mathcal{G}_\sigma=([m],(\sigma^{-1}\times\sigma^{-1})(\mathcal{E}_1),(\sigma^{-1}\times\sigma^{-1})(\mathcal{E}_2))$。

观察 2.36。BG 配备上述复合与置换运算后是一个对称幺半群。

这一事实的常规验证留作练习。现在我们转而陈述并证明二部图独立性的结合律。

定理 2.37。设 $\tilde{\mathcal{G}}\in\mathrm{BG}(m)$，并设 $\mathcal{G}^j\in\mathrm{BG}(n_j)$，其中 $j=1,\ldots,\ m$。设 $\mathcal{G}$为定义 *2.35* 给出的复合 $\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^1,\ldots,\mathcal{G}^m)$。设 $N=n_1+\cdots+n_m$，并设$\iota_j\colon\ [n_j]\to[N]$ 为定义 *2.35* 中的第 j 个包含映射。

设 (A,φ) 为一个C*-概率空间，并设 $(A_i)_{i\in[N]}$ 为 $*$-子代数。对于 $j=1,\ldots,\ m$，令 B_j 为由 $A_{\iota_j(i)}$（$i=1,\ldots,n_j$）生成的 $*$-子代数。以下条件等价：

(1) $(A_i)_{i\in[N]}$ 是 $\mathcal{G}$-独立的。*(2)* $(B_j)_{j\in[m]}$ 是 $\mathcal{G}$-独立的，并且对于每个 $j\in[m]$，子代数 $(A_{\iota_j(i)})_{i\in[n_j]}$ 是$\mathcal{G}^j$-独立的。

为证明这一点，我们还需要一个与 §2.3 中那些引理类似的技术引理。

引理 2.38. 设 $\tilde{\mathcal{G}}\in\mathrm{BG}(m)$ 和 $\mathcal{G}^i\in\mathrm{BG}(n_i)$ 对于 $i=1,\ldots,\ m$ 成立。设 $\mathcal{G}=\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_m)$。设 $k\in\mathbb{N}$ 和 $c\colon\ [k]\to\mathcal{V}$。设 $\tilde{c}\colon\ [k]\to[m]$ 为映射，使得 $c(j)$ 属于 $\iota_{\tilde{c}(j)}$ 的像。对于 $\sigma\in\mathcal{P}(\tilde{c},\mathcal{G})$ 和 $B\in\sigma$，令 $\tilde{c}(B)\in[m]$ 为 B 中各元素的共同颜色，并令 $c_B\colon\ B\to[n_{\tilde{c}(B)}]$ 为相应的映射，使得 $c|_B=\iota_{\tilde{c}(B)}\circ c_B$。存在一个双射

$$\Phi\colon\ \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{P}(\tilde{c},\tilde{\mathcal{G}})^0}\prod_{B\in\sigma}\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(c_B,\mathcal{G}^{\tilde{c}(B)})\to\mathcal{P}(c,\mathcal{G})$$

由 $\Phi((\pi_B)_{B\in\sigma})=\bigcup_{B\in\sigma}\pi_B$ 给出。对于 $\pi\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})$，逆映射 $\Phi^{-1}(\pi)$ 的定义是：取 σ 为相对于 $\tilde{c}$ 的 π 的按颜色非交叉包络的 $\mathcal{P}(\tilde{c},\mathcal{G})^0$-包络，然后令 $\pi_B=\pi|_B$ 对于 $B\in\sigma$。

证明。令 Ψ 为如下映射：它将 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ 映射到 $(\pi|_B)_{B\in\sigma}$，其中 σ 是相对于 $\tilde{c}$ 的 π 的按颜色非交叉包络的 $\mathcal{P}(\tilde{c},\ \tilde{\mathcal{G}})^0$- 包络。为证明该引理，我们将验证 Φ 和 Ψ 映射到我们所断言的陪域中，并且它们互为逆映射。

首先，我们来证明 Φ 映射到 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。固定 $\sigma \in \mathcal{P}(\tilde{c},\ \tilde{\mathcal{G}})^0$，并对每个 $B \in \sigma$，令 $\pi_B \in \mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(c_B,\ \mathcal{G}^{\tilde{c}(B)})$。令 $\pi = \bigcup_{B\in\sigma} \pi_B$。我们首先验证 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。

(1) 显然，π 的块都是单色的，因为对每个 π_B，这一点都成立。(2) 假设 $i_1 < j < i_2$ 且 $i_1 \sim_\pi i_2$。首先考虑 $j \sim_\pi i_1$ 的情形，此时 j、i_1 和 i_2 都位于 σ 的同一个块 B 中。由于 $\pi_B \in \mathcal{P}(c_B,\ \mathcal{G}^{\tilde{c}(B)})$，因此有$(c_B(i_1),\ c_B(j)) \in \mathcal{E}_1^{\tilde{c}(B)}$，这意味着 $(c(i_1),\ c(j)) \in \mathcal{E}_1$。现在假设 $j \not\sim_\pi i_1$。由于 $\pi \in \mathcal{P}(\tilde{c},\ \mathcal{G})$，因此有 $(\tilde{c}(i_1),\ \tilde{c}(j)) \in \mathcal{E}_1$，进而得到 $(c(i_1),\ c(j)) \in \mathcal{E}_1$。(3) 假设 $i_1 < j_1 < i_2 < j_2$、$i_1 \sim_\sigma i_2$、$j_1 \sim_\sigma j_2$ 和 $i_1 \not\sim_\sigma i_2$。同样，我们根据 $i_1 \sim_\pi j_1$ 是否成立分成两种情形，论证方式与第 (2) 点类似。

接下来，我们证明 Ψ 映射到 $\bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})^0} \prod_{B\in\sigma} \mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(c_B,\ \mathcal{G}^{\tilde{c}(B)})$ 中。固定 $\pi \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，并令$\pi'$ 为相对于 $\tilde{c}$的 π 的按颜色非交叉包络。直接检查可知，$\pi' \in \mathcal{P}(\tilde{c},\ \mathcal{G})$。事实上，当我们将 c 替换为 $\tilde{c}$时，不同颜色的某些块可能变成同色，但在 $\mathcal{P}(\tilde{c},\ \mathcal{G})$中，同色的嵌套和交叉总是允许的。对于两个具有 $\tilde{c}(B_1) \neq \tilde{c}(B_2)$的块，当且仅当 $(c(B_1),\ c(B_2)) \in \mathcal{E}_i$时，我们有 $(\tilde{c}(B_1),\ \tilde{c}(B_2)) \in \mathcal{E}_i$，因此 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ 的条件很容易推出 $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{c},\ \mathcal{G})$的条件。令 σ 为由引理 2.20给出的 $\mathcal{P}(\tilde{c},\ \tilde{\mathcal{G}})^0$-包络 π'，因此根据构造，$\sigma \in \mathcal{P}(\tilde{c},\ \tilde{\mathcal{G}})^0$。令 $\pi_B = \pi|_B$ 对于 $B \in \sigma$。现在我们验证，对于每个 $B \in \sigma$，$\pi_B \in \mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(c_B,\ \mathcal{G}^{\tilde{c}(B)})$：

（1）π_B 的块相对于 c是单色的，因此相对于 c_B也是如此。（2）假设 $i_1 < j < i_2$ 和 $i_1 \sim_{\pi_B} i_2$。那么显然 $i_1 \sim_\pi i_2$，因此 $(c(i_1),\ c(j)) \in \mathcal{E}_1$。根据 $\mathcal{G}$的定义，我们有 $(c_B(i_1),\ c_B(j)) \in \mathcal{E}_1^{\tilde{c}(B)}$。（3）假设 $i_1 < j_1 < i_2 < j_2$ 和 $i_1 \sim_{\pi_B} i_2$ 和 $j_1 \sim_{\pi_B} j_2$ 和 $i_1 \not\sim_{\pi_B} j_1$。由于相对于 π也满足相同的关系，我们有 $(c(i_1),\ c(j_1)) \in \mathcal{E}_2$，因而$(c_B(i_1),\ c_B(j_1)) \in \mathcal{E}_2^{\tilde{c}(B)}$。

接下来，我们证明 $\Psi \circ \Phi =$ 恒等式。固定 $\sigma \in \mathcal{P}(\tilde{c},\ \tilde{\mathcal{G}})^0$，并对每个 $B \in \sigma$，令 $\pi_B \in \mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(c_B,\ \mathcal{G}^{\tilde{c}(B)})$。令 $\pi = \bigcup_{B\in\sigma} \pi_B$，我们将证明 $(\pi_B)_{B\in\sigma} = \Psi(\pi)$。由于 π_B 就是 $\pi|_B$，只需证明 σ 是 π的按颜色非交叉包络的 $\mathcal{P}(\tilde{c},\ \mathcal{G})^0$-包络。令 π' 表示 π的按颜色非交叉包络。由于 σ 是按颜色非交叉的，且 $\sigma \geqslant \pi$，我们有$\sigma \geqslant \pi'$。此外，对每个块 $B \in \sigma$，π_B 的不可约性意味着其非交叉包络 $\mathrm{Env}^{\mathrm{nc}}(\pi_B)$也不可约。因此，$\min B$和 $\max B$位于 $\mathrm{Env}^{\mathrm{nc}}(\pi_B)$的同一个块中。这意味着它们位于 π的按颜色非交叉包络的同一个块中，也就是π'。因此，根据引理 2.20的唯一性断言，σ 必定是 π'的 $\mathcal{P}(\tilde{c},\ \tilde{\mathcal{G}})^0$-包络，证毕。

最后，$\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ 可由与引理 2.23 相同的推理立即得出。 □

我们还需要的另一个要素，是由自由累积量的乘积公式推导出的一个乘积公式。

引理 2.39. 固定一个二部图 $\mathcal{G}$, $k \in \mathbb{N}$，以及 $c\colon [k] \to \mathcal{V}$。令 $m_1, \ldots,\ m_k \in \mathbb{N}$。设 (A, φ) 是一个 C*-概率空间。对于 $i = 1, \ldots,\ k$ 和 $j = 1, \ldots,\ m_i$，令 $a_{i,j} \in A$，并令 $b_i = a_{i,1} \ldots a_{i,m_i}$。令 $c\colon [m_1 + \ldots m_k] \to \mathcal{V}$ 为在 $\{m_{i-1} + 1, \ldots, m_i\}$ 上取值 $c(i)$ 的映射（按惯例 $m_0 = 0$）。那么

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(\tilde{c},\mathcal{G})} K_\pi^{\mathrm{free}}[a_{1,1}, \ldots, a_{1,m_1}, \ldots\ldots, a_{k,1}, \ldots, a_{k,m_k}] = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})} K_\sigma^{\mathrm{free}}[b_1, \ldots, b_k]. \tag{2.12}$$

证明。我们首先证明以下断言：令 ρ 为由块 $J_i = \{m_{i-1} + 1, \ldots, m_i\}$ 组成的划分，其中 $i = 1, \ldots,\ k$。令 π 为一个由 c 一致着色且在每种颜色上均为非交叉的划分。令 π' 为通过对 π 和 ρ 进行逐颜色非交叉并而得到的 $[m_1 + \cdots + m_k]$ 的划分。由于 $\pi' \geqslant \rho$，存在唯一的 $[k]$ 的划分 σ，使得 $i \sim_\sigma j$

当且仅当 J_i 和 J_j 属于 π' 的同一个块。我们断言， $\pi \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G})$ 当且仅当 $\sigma \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G})$。设 $\pi \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G})$。我们验证 σ 满足定义 1.2 的条件。

(1) 显然， σ 的块是单色的。(2) 假设 $i_1 < j < i_2$ 和 $i_1 \sim_\sigma i_2$。若 $c(j) = c(i_1)$，则无需证明，因此假设 $c(j) \neq c(i_1)$。令 B 为 σ 中包含 i_1 和 i_2的块，并令 B' 为 π'中相应的块。令 $j' \in J_j$。必定存在某些 i'_1 和 i'_2 属于 B'，且$i'_1 < j < i'_2$；否则， π 在 B' 中的块就可以划分为位于 j' 左侧的块和位于 j'右侧的块，这与它们在连接 π'中属于同一个块相矛盾。因此， $(c(i_1)、c(j)) = (c(i'_1)、c(j)) \in \mathcal{E}_1$，因为 $\mathcal{P}(c、\mathcal{G})$。(3) 假设 σ 的两个块 B_1 和 B_2 交叉。那么，π' 中相应的块 B'_1 和 B'_2 也交叉。由于 ρ 是一个区间划分，这种情况唯一可能的发生方式是， π中包含在 B'_1 和 B'_2 内的某些块彼此交叉。（这可由与引理 2.27 类似的推理得出。）由此我们得出， $(c(B_1)、c(B_2)) \in \mathcal{E}_2$。

反过来，假设 $\sigma \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G})$。

(1) 根据构造， π 的块是单色的。(2) 假设 $i'_1 < j' < i'_2$ 属于 π。如果 $c(i_1) = c(j)$，则无需证明。否则，假设$i'_1 \in J_{i_1}$ 且 $j' \in J_j$ 且 $i'_2 \in J_{i_2}$，因此 $i_1 < j < i_2$ 且 $i_1 \sim_\sigma i_2$。由此得到$(c(i'_1),c(j')) = (c(i_1),c(j)) \in \mathcal{E}_1$。(3) 假设 π 的两个块 B_1 和 B_2 相交。我们假定 π 在每种颜色上都是非交叉的，因此 $c(B_1) \neq c(B_2)$，所以 B_1 和 B_2 属于 π'的不同块。这两个块必定相交，因此 σ 中相应的块也相交，这意味着$(c(B_1),c(B_2)) \in \mathcal{E}_2$。

令 Φ^J 表示上述将 π 映射到 σ 的映射。

我们按照 $\Phi^J(\pi)$的值对 (2.12) 左侧的各项分组，得到 i n

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})} \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{P}(\bar{c},\mathcal{G})\\ \Phi^J(\pi)=\sigma}} K_\pi^{\mathrm{free}}[a_{1,1},\dots,a_{1,m_1},\dots\dots,a_{k,1},\dots,a_{k,m_k}]. \tag{2.13}$$

给定 $\sigma \in \mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，令 $\bar{\sigma}$ 表示将每个元素 j 替换为区间 J_j后得到的 $[m_1 + \cdots + m_k]$ 的划分。对于 $B \in \sigma$，令B 表示 σ中对应的块。注意，当且仅当将 σ 的每个块 B 替换为满足 $\pi_B \vee \rho|_B = \mathbb{1}_B$的划分$\pi_B \in \mathcal{NC}(B)$ 后得到 σ 时，$\sigma = \bar{\Phi}^J(\pi)$ 才成立。自由累积量的乘积公式表明

$$\sum_{\substack{\pi_B\in\mathcal{NC}(\bar{B})\\ \pi_B\vee\rho|_{\bar{B}}=\mathbb{1}_{\bar{B}}}} K_{\pi_B}^{\mathrm{free}}[a_{i,j} : i \in B, j \in [m_i]] = K_{|B|}^{\mathrm{free}}[b_i : i \in B], \tag{2.14}$$

其中，左侧的各项$a_{i,\ j}$ 按从左到右的字典序排列。因此，(2.13) 变为

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})} \prod_{B\in\sigma} \sum_{\substack{\pi_B\in\mathcal{NC}(\bar{B})\\ \pi_B\vee\rho|_{\bar{B}'}=\mathbb{1}_{\bar{B}}}} K_{\pi_B}^{\mathrm{free}}[a_{1,1},\dots,a_{1,m_1},\dots\dots,a_{k,1},\dots,a_{k,m_k}].$$

因此，由 (2.14) 可得

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})} \prod_{B\in\sigma} K_B^{\mathrm{free}}[b_i : i \in B],$$

这就是 (2.12) 的右侧。 □

定理 *2.37* 的证明。 我们先证明 (2) $\Longrightarrow$ (1)，因为论证更简单。假设 $(B_j)_{j\in[k]}$ 是 $\mathcal{G}$-独立的，并且对每个 $j \in [k]$，子代数 $(A_{\iota_j(i)})_{i\in[n_j]}$ 都是$\mathcal{G}^j$-独立的。

固定 $c\colon [k]\to[N]$，并令 $\tilde{c}$如引理 2.38 所述。令 $a_j\in A_{c(j)}$，其中 $j=1,\dots,k$。特别注意~ $a_j\in B_{\tilde{c}(j)}$。因此，利用 $(B_v)_{v\in[m]}$ 的 $\mathcal{G}$-独立性以及命题 2.18

$$\varphi(a_1\dots a_k)=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(\tilde{c},\mathcal{G})^0}K_\sigma^{\mathrm{Bool}}[a_1,\dots,a_k]=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(\tilde{c},\mathcal{G})^0}\prod_{B\in\sigma}K_{|B|}^{\mathrm{Bool}}[a_j:j\in B].$$

接下来，对于 σ 的每个块 B，我们应用 $(A_{\iota_{\tilde{c}(B)}(v)})_{v\in[n_{\tilde{c}(B)}]}$ 的 $\mathcal{G}^{\tilde{c}(B)}$-独立性，并利用它来表 (2.8) 示布尔累积量

$$\varphi(a_1\dots a_k)=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(\tilde{c},\tilde{\mathcal{G}})^0}\prod_{B\in\sigma}\sum_{\pi_B\in\mathcal{P}_{\mathrm{irr}}(c_B,\mathcal{G}^{\tilde{c}(B)})}K_{\pi_B}^{\mathrm{free}}[a_j:j\in B].$$

利用引理 2.38，得到

$$\varphi(a_1\dots a_k)=\sum_{\pi\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})}K_\pi^{\mathrm{free}}[a_1,\dots,a_k],$$

这表明 $(A_v)_{v\in[N]}$ 是 $\mathcal{G}$-独立的。

(1) $\Longrightarrow$ (2)。假设 (1) 成立。通过将 $\mathcal{G}$-独立性条件应用于乘积 $a_1\dots a_k$（其中，对于某个 c，$a_i\in A_{\iota_j(c(i))}$：$[k]\to[n_j]$），很容易验证 $(A_{\iota_j(v)})_{v\in[n_j]}$ 是 $\mathcal{G}^j$ 独立的。

~接下来，我们需要证明 B_1、.....、B_m 是 $\mathcal{G}$-独立的。我们先证明一个初步结论。设 $c\colon [k]\to[N]$，并令 $\tilde{c}$ 如引理 2.38 所示。对于 $j=1$、.....、k，令 $a_j\in A_{c(j)}$。通过反向执行前述论证中的推导，(1) 可推出

$$\varphi(a_1\dots a_k)=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(\tilde{c},\tilde{\mathcal{G}})^0}K_\sigma^{\mathrm{Bool}}[a_1,\dots,a_k].$$

命题 2.18 的证明意味着

$$\varphi(a_1\dots a_k)=\sum_{\pi\in\mathcal{P}(\tilde{c},\tilde{\mathcal{G}})}K_\pi^{\mathrm{free}}[a_1,\dots,a_k]. \tag{2.15}$$

~现在要证明 $B_1,\dots,B_m$的 $\mathcal{G}$-独立性，固定 $k\in\mathbb{N}$和 $c\colon[k]\to[m]$。令 $b_i\in B_{c(i)}$ for$i=1,\dots,k$，我们需要证明

$$\varphi(b_1\dots b_k)=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(c,\tilde{\mathcal{G}})}K_\sigma^{\mathrm{free}}[b_1,\dots,b_k]. \tag{2.16}$$

由于 B_j 由 $(A_{\iota_j(i)})_{i\in[n_j]}$生成，我们可以利用多重线性将问题归结为以下情形

$$b_i=a_{i,1}\dots a_{i,m_i}$$

对于某个 $m_j\in\mathbb{N}$和$a_{i,\ 1},\dots,a_{i,\ m_i}$，它们来自代数 $(A_{\iota_{c(i)}(v)})_{v\in[n_{c(i)}]}$之一。令$c\colon$ ~$[m_1+\cdots+m_k]\to[m]$如引理 2.39 中所述。由于$a_{1,\ 1}\dots a_{1,\ m_1}\dots\dots a_{k,\ 1}\dots a_{k,\ m_k}$是来自各个代数 $(A_i)_{i\in[N]}$的元素的乘积，我们可以应用初步断言 (2.15)；用当前的对象和记号来表述，即为:

$$\varphi(a_{1,1}\dots a_{1,m_1}\dots\dots a_{k,1}\dots a_{k,m_k})=\sum_{\pi\in\mathcal{P}(\bar{c},\mathcal{G})}K_\pi^{\mathrm{free}}[a_{1,1},\dots,a_{1,m_1},\dots\dots,a_{k,1},\dots,a_{k,m_k}].$$

然后利用引理 2.39，即可得到式（2.16）。 □

3. Hilbert space model

3.1. 乘积希尔伯特空间的构造。 所谓带标记希尔伯特空间，是指一对 $(H,\ \xi)$ 其中 H 是一个希尔伯特空间，ξ 是一个单位向量。我们的目标是描述一种乘积希尔伯特空间构造，使我们能够实现二部图独立性。与自由张量图独立性（ε-独立性）的情形一样，[M-lo04], 福克型自由乘积希尔伯特空间需要经过修改，以便使将要张量独立的元素满足交换性。因此，我们同样需要采用若干关于图的顶点集上的词的相同定义（例如相对于 $\mathcal{G}$的约化词和等价词），以及许可的词这一新定义。下面将汇总这些定义。

定义 3.1。设 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\ \mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2)$ 为一个二部图，且 $(H_v,\ \xi_v)$ 为带标记希尔伯特空间。令 $\mathcal{W}$为字母表 $\mathcal{V}$上的词 $v_1\dots v_k$所构成的集合。

- 一个词 $w=v_1\dots v_k$是约化的，如果每当 $i_1<i_2$和 $v_{i_1}=v_{i_2}$时，都存在 j位于i_1 和 i_2 之间，使得 $v_j\neq v_{i_1}$ 和 $(v_{i_1},\ v_j)\notin\mathcal{E}_2\cap\mathcal{E}_1\cap\mathcal{E}_1$ （v_{i_1} 和v_j 不处于张量关系中）。
- 对于 $w=v_1\dots v_k$和 $w'=v_1'\dots v_k'$，如果 w'是通过交换两个连续的字母 v_i 和 v_{i+1} 得到的，且满足 $(v_i,\ v_{i+1})\in\mathcal{E}_2\cap\mathcal{E}_1\cap\mathcal{E}_1$，我们称 $w\sim_0 w'$。 w 和 w' 称为等价，或称为 $w\sim w'$ ，如果存在一个词序列 $w\sim_0 w_1\sim_0\cdots\sim_0 w_{k-1}\sim w'$。换言之， $\sim$是 $\sim_0$的传递闭包。 $v_1\dots v_k$是许可的，如果每当 $i_1<i_2$时，我们都有 $(v_{i_2},\ v_{i_1})\in\mathcal{E}_1$。

注意，约化词和等价的概念与 [M-lo04, CF17] 中关于图 $(\mathcal{V},\mathcal{E}_2\cap\mathcal{E}_1\cap\mathcal{E}_1)$的定义完全相同。

引理 3.2. 固定一个二部图 $\mathcal{G}$，并设 w 和 w' 是词。

(1) 若 $w\sim w'$，则 w 是约化的，当且仅当 w' 是约化的。*(2)* 若 $w\sim w'$，则 w 是许可的，当且仅当 w' 是许可的。*(3)* 设 $v\in\mathcal{G}$。则 $vw\sim vw'$，当且仅当 $w\sim w'$。

证明。 (1) 已由 [M-lo04, CF17] 得知。

(2) 假设 w' 是通过交换 v_j 和 v_{j+1}从 w 得到的，其中 $(v_j,v_{j+1})\in\mathcal{E}_2\cap\mathcal{E}_1\cap\mathcal{E}_1$。设 w 是许可的，因此对每个 $i_1<i_2$，都有$(v_{i_2},v_{i_1})\in\mathcal{E}_1$。在 w'中，除了 j 和 $j+1$以外，所有指标对的顺序都与之前相同，因此许可条件对所有其他指标对均得以保留。但该条件对指标对 $j<j+1$ 也得以保留，因为(v_j,v_{j+1}) 和 (v_{j+1},v_j) 都在 $\mathcal{E}_1$中。

(3) 显然，若 $w\sim w'$，则 $vw\sim vw'$。反过来，若 $vw\sim vw'$，则考虑从 vw 到 vw'的变换序列 $\tilde{w}_1$、...、$\tilde{w}_k$。令w_j 为从 $\tilde{w}_j$中删去 v 第一次出现后得到的词。则 w_1、.....、w_k 证明了 w 与 w'等价。□

固定$\mathcal{G}$，并令 $W_{\mathcal{G}}$ 为许可的约化词（包括空词）的集合。我们还固定一个集合 W_0，其中包含许可词各等价类的代表元。（例如，我们可以从每个等价类中选取字典序最小的元素。）令 $r:W_{\mathcal{G}}\to W_0$ 为将每个词映射到其等价代表元的函数。固定带标记希尔伯特空间 $(H_v,\ \xi_v)$，对应于 $v\in\mathcal{V}$，并令 $H_v^\circ=\{h\in H_v:\langle h,\ \xi_v\rangle=0\}$。对于满足 $k\geqslant 1$的 $w=v_1\dots v_k\in W_{\mathcal{G}}$，令

$$H_w^\circ:=H_{v_1}^\circ\otimes\cdots\otimes H_{v_k}^\circ,$$

对于空词 $\varnothing$，令

$$H_\varnothing^\circ:=\mathbb{C}.$$

对于 $w\in W_{\mathcal{G}}$，令

$$U_w:H_w^\circ\to H_{r(w)}^\circ$$

为通过按照将 w 重排为 $r(w)$的方式置换张量因子而得到的典范同构。（注意， U_w 与交换序列无关，因为它由以下映射唯一确定：将每个字母 v 在 w 中的第 k次出现映射到 v 在$r(w)$中的第 k次出现。）

定义 3.3 （二部图乘积希尔伯特空间）。

$$H:=\bigoplus_{w\in W_0}H_w^\circ,\qquad \xi:=1\in\mathbb{C}=H_\varnothing^\circ\subset H.$$

我们将 $(H,\ \xi)$ 称为带基空间 $(H_v,\ \xi_v)_{v\in\mathcal{V}}$的 $\mathcal{G}$-独立乘积。注意，它取决于代表元 W_0的选择 (H,ξ)。

对每个 $v\in\mathcal{V}$，定义一个（不一定保单位元的） $*$-同态 $\lambda_v:\ B(H_v)\to B(H)$。给定 $w\in W_{\mathcal{G}}$，记 vw 为在左侧添加 v后得到的词。令

$$W_v^{(1)}:=\{w\in W_0:vw\in W_{\mathcal{G}}\},\quad W_v^{(2)}:=\{r(vw):w\in W_v^{(1)}\},$$

and

$$W_v^{(3)} := W_0 \backslash \big(W_v^{(1)} \cup W_v^{(2)} \big).$$

由引理 3.2 (3)，映射 $w \mapsto r(vw)$ 是一个双射 $W_v^{(1)} \to W_v^{(2)}$。

对于 $w \in W_v^{(1)}$，使用 $H_v = \mathbb{C}\xi_v \oplus H_v^\circ$，定义

$$T_{v,w} : H_w^\circ \oplus H_{r(vw)}^\circ \xrightarrow{\mathrm{id} \oplus U_{vw}} H_w^\circ \oplus H_{vw}^\circ \cong (\mathbb{C} \otimes H_w^\circ) \oplus (H_v^\circ \otimes H_w^\circ) \cong H_v \otimes H_w^\circ,$$

其中中间的识别是规范的，且 $1 \in \mathbb{C}$ 映射到 ξ_v。令

$$\mathcal{H}_-^{(v)} := \bigoplus_{w \in W_v^{(1)}} H_w^\circ, \qquad \mathcal{H}_+^{(v)} := \bigoplus_{w \in W_v^{(2)}} H_w^\circ, \qquad \mathcal{H}_0^{(v)} := \bigoplus_{w \in W_v^{(3)}} H_w^\circ.$$

定义等距嵌入

$$S_v := \bigoplus_{w \in W_v^{(1)}} T_{v,w}^* : H_v \otimes \mathcal{H}_-^{(v)} \longrightarrow \mathcal{H}_-^{(v)} \oplus \mathcal{H}_+^{(v)} \subseteq H.$$

定义 3.4（双图乘积嵌入）。对于 $A \in B(H_v)$，定义

$$\lambda_v(A) := S_v \big(A \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}_-^{(v)}} \big) S_v^* \in B(H).$$

等价地，对于每个 $w \in W_v^{(1)}$，$\lambda_v(A)$ 通过以下方式作用于 $H_w^\circ \oplus H_{r(vw)}^\circ$

$$\lambda_v(A) \restriction_{H_w^\circ \oplus H_{r(vw)}^\circ} = T_{v,w}^* \big(A \otimes I_{H_w^\circ} \big) T_{v,w},$$

并且 $\lambda_v(A)$ 在 $\mathcal{H}_0^{(v)}$ 上为零。

本节的主要结果是，该构造实现了 $\mathcal{G}$-独立性；证明将推迟到 §3.2。

定理 3.5. 设二部图为 $\mathcal{G}$，并设 $v \in \mathcal{V}$对应的带标记希尔伯特空间为 (H_v, ξ_v)。令 W_0 如定义 *3.3* 所述，并令 (H, ξ) 为相应的 $\mathcal{G}$乘积空间。那么，子代数$\lambda_v(B(H_v)) \subset B(H)$ 关于向量态 $\langle \xi \,|\, \cdot\, \xi \rangle$是 $\mathcal{G}$-独立的。

我们首先指出，定理 3.5 蕴含命题 1.9。事实上，设给定二部图 $\mathcal{G}$ 以及 $v \in \mathcal{V}$对应的 C*-概率空间 (A_v, φ_v)。GNS 构造得到一个希尔伯特空间 H_v、一个单位向量 ξ_v 以及一个 $*$-同态 $\pi_v : A_v \to B(H_v)$，使得$\varphi_v(x) = \langle \xi_v, \pi_v(x)\xi_v \rangle$。令 (H, ξ) 为定理 3.5 中的乘积希尔伯特空间。于是我们~得到 $\lambda_v = \lambda_v \circ \pi_v : A_v \to B(H)$ 的 $*$-同态，使得其像 $\lambda_v(A_v)$ 在 $B(H)$ 中关于态 ξ是二部图独立的，其中该态由 ξ给出。

注记 3.6。定理 3.5 中的构造自然涵盖了此前用于独立性的希尔伯特空间模型。

- 当 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1$、$\mathcal{E}_1 = \varnothing$ 时，我们的 $\mathcal{G}$-独立乘积化为 Λ M-lo04],section 3.- 的自由积。$\mathcal{E}_2 = \varnothing$ 与 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 时，我们的 $\mathcal{G}$-独立乘积化为带标记希尔伯特空间的自由积 [Voi07].- 当 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 时，我们的 $\mathcal{G}$-独立乘积化为带标记希尔伯特空间的张量积。- 当 $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1 = \varnothing$ 与 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{V}$ 时，我们的 $\mathcal{G}$-独立乘积化为带标记希尔伯特空间的单调积 [Mur00].- 当 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 = \varnothing$ 时，我们的 $\mathcal{G}$-独立乘积化为带标记希尔伯特空间的布尔积 [SW97]。

~注记 3.7。现在，我们将 $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1 \backslash \Delta = \mathcal{E}_2$ 的情形下所作的构造与 [AMVB25] 中针对 BMT 独立性的构造联系起来。我们将看到，尽管希尔伯特空间一般不必相同，但由我们的构造得到的希尔伯特空间可以等距嵌入 [AMVB25] 中的希尔伯特空间。

为了描述这一构造，我们需要对 $\mathcal{G}$ 的顶点作一个固定排序。事实上，不失一般性，我们假设 $\mathcal{V} = \{1, \ldots, p\}$。考虑张量积希尔伯特空间

$$\tilde{H} = H_1 \otimes \cdots \otimes H_p,$$

˜以及由下式给出的单射 $\pi_i : B(H_v) \to B(H)$

$$\pi_i(A) = P_{i,1} \otimes \cdots \otimes P_{i,i-1} \otimes A \otimes P_{i,i+1} \otimes \cdots \otimes P_{i,p}$$

其中 $P_{i,\ j} = I_{H_j}$ 当 $(i,\ \ j) \in \mathcal{E}_1$ 且 $P_{i,\ j} = P_{\xi_j}$ 否则。注意，通过表示 $H_v \cong \mathbb{C} \oplus H_v^\circ$，我们可以写成

$$\tilde{H} \cong \bigoplus_{k \in \{0,\ldots,p\}} \ \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_k} H_{i_1}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{i_k}^\circ. \tag{3.1}$$

求和中的各项可以视为由幂集 $\mathcal{P}([p])$索引。接着，我们可以将这个直和中出现的各项与定理 3.5 中大图乘积希尔伯特空间H 里出现的各项进行比较。

为此，我们注意到，在 $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1 \backslash \Delta$ 的情况下，关于与 $\mathcal{G}$ 相关联的许可的约化词，有以下几个事实。

- 在许可的约化词 $w = v_1 \ldots v_m$ 中，每个字母至多出现一次。事实上，假设同一个字母出现了两次，比如 $v_i = v_j$，其中 $i < j$。不失一般性，设对于 $k \in \{i+1$，有 $v_k \neq v_i$，... ...，$j-1\}$。令 $k \in \{i+1$，.....，$j-1\}$。由于该词是许可的，我们有 $(v_k$、$v_i) \in \mathcal{E}_1$，以及 $(v_i$、$v_k) = (\overline{v_j}$、$v_k) \in \mathcal{E}_1$。因此，$(v_i$、$v_k) \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1$，于是 $(v_i$、$v_k) \in \mathcal{E}_2$。所以，v_i 与v_j之间的所有字母都通过 $\mathcal{E}_2$中的一条边相邻，这与 w 是约化词相矛盾。$w = v_1 \ldots v_m$ 和 $w' = v'_1 \ldots v'_m$ 这两个许可的约化词等价，当且仅当 $\{v_1$，.....，$v_m\} = \{v'_1$，.....，$v'_m\}$。“只有当”这一蕴含显然成立。反过来，我们对 m 使用归纳法。假设 $\{v_1$，.....，$v_m\} = \{v'_1$，.....，$v'_m\}$。那么存在一个置换 σ，使得对所有 j，都有 $v'_{\sigma(j)} = v_j$。如果 $\sigma(j) < \sigma(1)$，那么由 w 的许可性可得 $(v_j$、$v_1) \in \mathcal{E}_1$；同时，由 w'的许可性可得 $(v_1$、$v_j) = (v'_{\sigma(1)}$、$v'_{\sigma(j)}) \in \mathcal{E}_1$；因此，$(v_1$、$v_j) \in \mathcal{E}_2$。于是，$v'_1 \ldots v'_{\sigma(1)-1}$与$v'_{\sigma(1)} = v_1$是 $\mathcal{E}_2$-相邻的，因此可以将其与之交换，从而得到一个等价词。因此，

$$w'' := v'_{\sigma(1)} v'_1 \ldots v'_{\sigma(1)-1} v'_{\sigma(1)+1} \ldots v'_m \sim w'.$$

根据归纳假设，词 $v'_1 \ldots v'_{\sigma(1)-1} v'_{\sigma(1)+1} \ldots v'_m$和 $v_2 \ldots v_m$等价，因为它们具有相同的字母集合。因此，w'' 等价于 w，进而w' 等价于 w。

鉴于这两个观察，我们可以通过将 $v_1 \ldots v_m$映射到 $\{v_1, \ldots, v_m\}$，构造一个从允许的约化词集合到 $\mathcal{V}$的幂集的单射。乘积˜希尔伯特空间 H 中的项因此与 H的展开式 (3.1) 中的部分项一一对应。由此，我们˜自然得到一个等距映射 $U : H \to H$：将直和中相应的项匹配起来，并对每一项中的张量因子 $H_{v_1}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{v_m}^\circ$进行置换，使其顺序与˜在 H中出现的顺序一致。

我们声称，对于 $A \in B(H_v)$,

$$U\lambda_i(A) = \pi_i(A)U.$$

只需验证该等式在张成希尔伯特空间的向量上成立。为此，考虑一个单词 $w = v_1 \ldots v_m \in \mathcal{W}$，其中 iw 是许可的；我们将证明该等式对 $H_w^\circ \oplus H_{r(iw)}^\circ$ 中的向量成立。令 $j_1 \ldots j_\ell i j_{\ell+1} \ldots j_m$ 为 $v_1 \ldots v_m$ 的递增重排。考虑

交换图

$$\begin{array}{ccc} H_i \otimes H_w^\circ & \xrightarrow{\quad T_{i,w} \quad} & H_w^\circ \oplus H_{r(iw)}^\circ \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes U} & & \downarrow{\scriptstyle U} \\ H_i \otimes H_{j_1}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{j_m}^\circ & \xrightarrow{\ \cong\ } & H_{j_1}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{j_\ell}^\circ \otimes H_i \otimes H_{j_{\ell+1}}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{j_m}^\circ \\ & & \downarrow{\scriptstyle \subseteq} \\ & & H_1 \otimes \cdots \otimes H_p, \end{array}$$

其中，底部的水平映射是张量因子的置换，底部的垂直映射是包含映射。交换图中的映射是同构，它们由将张量积分配到直和并以自然方式置换张量因子得到，因此交换性显而易见。根据定义 3.4，$\lambda_i(A)$ 在右上方空间 $H_w^\circ \oplus H_{r(iw)}^\circ$ 上的作用对应于 $A\otimes$id在左上方空间上的作用。$\pi_i(A)$ 在 $H_1 \otimes \cdots \otimes H_p$ 上的作用由$P_{i,\ 1} \otimes \cdots \otimes P_{i,\ i-1} \otimes A \otimes P_{i,\ i+1} \otimes P_{i,\ p}$给出。注意，由于 iw 是许可的，所有字母v_j都满足 $(v_j,\ i) \in \mathcal{E}_1$，因此$P_{i,\ v_j} = 1$。由此可见，交换图右下部分中，$\pi_i(A)$ 在子空间$H_{j_1}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{j_\ell}^\circ \otimes H_i \otimes H_{j_{\ell+1}}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{j_m}^\circ$ 上的限制就是 id $\otimes\cdots\otimes$id $\otimes A\otimes$id $\otimes\cdots\otimes$id。因此，$\pi_i(A)$ 的作用转化为交换图左下方空间上的 $A\otimes$id。将其与交换图左上部分的 $A\otimes$id相比较，可知 $\lambda_i(A)$ 在右上方的作用对应于 $\pi_i(A)$ 在右下方的作用，正如所需。

既然已经证明了在 $H_w^\circ \oplus H_{r(iw)}^\circ$ 的张成空间上等式成立（其中 iw 是许可的），现在我们考虑希尔伯特空间的正交补，它是 H_w° 的张成空间，其中 $w \in \mathcal{W}$ 满足 w 不等于 $r(iw')$，且 iw 不许可。在这种情况下，$\lambda_i(A)$ 对 H_w° 的作用为零。另一方面，令 $j_1 \dots j_m$ 为 w 的递增重排，则 U 将 H_w° 映射到 $H_{j_1}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{j_m}^\circ$。由于 iw 不许可，存在某个 s，使得 $(j_s,\ i) \notin \mathcal{E}_1$，因此 $P_{i,\ j_s} = P_{\xi_{j_s}}$ 在 $H_{j_s}^\circ$ 上为零。这意味着 $\pi_i(A)$ 在 $H_{j_1}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{j_m}^\circ$ 上的作用为零。因此，$\pi_i(A)U$ 和 $U\lambda_i(A)$ 在这个子空间上都为零。

因此，尽管这里构造的希尔伯特空间比 $H_1 \otimes \cdots \otimes H_p$ 小，我们仍有一个等距嵌入 U，使得 $U\lambda_i(A) = \pi_i(A)U$，并且 U 将态向量映射到态向量。特别地，在某族作用于 $B(H_j)$ 上的算子的作用下，这两种构造中由态向量生成的循环子空间将同构，而且这些算子的联合矩也相同。

3.2. 向量的归纳计算。为了证明定理 3.5，我们要证明

$$\left\langle \xi, \lambda_{c(k)}(a_k) \dots \lambda_{c(1)}(a_1)\xi \right\rangle = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_k(c,\mathcal{G})^0} \prod_{B\in\pi} K_{|B|}^{\mathrm{Bool}}[a_j : j \in B]. \tag{3.2}$$

为了便于归纳论证中的记号书写，我们在这里将指标按相反顺序排列。因此，在布尔累积量中，每个块内的指标 $a_j : j \in B$ 也应按递减顺序排列。事实上，我们将给出一般情况下元素的组合公式

$$\lambda_{c(k)}(a_k) \dots \lambda_{c(1)}(a_1)\xi,$$

因为这种形式更适合用归纳法计算。

我们先引入一些预备记号。令 $P_v \in B(\mathcal{H}_v)$ 为投影到 $\mathbb{C}\xi_v$上的秩一投影，并令 $Q_v = 1 - P_v$。令

$$\begin{aligned} a_j^{(0,0)} &= P_{c(j)} a_j P_{c(j)}, \quad a_j^{(0,1)} = P_{c(j)} a_j Q_{c(j)} \\ a_j^{(1,1)} &= Q_{c(j)} a_j Q_{c(j)}, \quad a_j^{(1,0)} = Q_{c(j)} a_j P_{c(j)}. \end{aligned}$$

则 $a_j = a^{(0,\ 0)} + a^{(0,\ 1)} + a^{(1,\ 0)} + a^{(1,\ 1)}$。因此我们可以写成

$$\left\langle \xi, \lambda_{c(k)}(a_k)\dots\lambda_{c(1)}(a_1)\xi \right\rangle = \sum_{\delta_1,\epsilon_1,\dots,\delta_k,\epsilon_k\in\{0,1\}} \left\langle \xi, \lambda_{c(k)}(a_k^{(\delta_k,\epsilon_k)})\dots\lambda_{c(1)}(a_1^{(\delta_1,\epsilon_1)})\xi \right\rangle. \tag{3.3}$$

我们的目标是证明，求和中的某些项为零，而其余项对应于 $\mathcal{P}(c,\mathcal{G})$ 中的划分，并且其值等于所述公式中的布尔累积量乘积。注意，当 $\epsilon = 0$ 时，$a^{(\delta,\ \epsilon)}$ 会消去 $\mathcal{H}^{\circ}_{c(j)}$；当 $\epsilon = 1$ 时，会消去 $\mathbb{C}\xi_{c(j)}$；并且当 $\delta = 0$ 时，其像包含于 $\mathbb{C}\xi_{c(j)}$；当 $\delta = 1$ 时，其像包含于 $\mathcal{H}^{\circ}_{c(j)}$。

考察定义 3.4 中映射 λ_v 的定义，我们得出以下结论。令$w = v_1\dots v_k$。

事实 3.8。

- $\lambda_{c(j)}(a^{(0,0)})$ 在 $w \in W^{(1)}_{c(j)}$ 时将 H°_w 映射到其自身，否则在 H°_w 上为零。
- $\lambda_{c(j)}(a^{(1,0)})$ 在 $w \in W^{(1)}_{c(j)}$ 时将 H°_w 映射到 $H^{\circ}_{r(c(j)w)}$，否则在 H°_w 上为零。
- $\lambda_{c(j)}(a^{(0,1)})$ 在 $w = r(c(j)w') \in W^{(2)}_{c(j)}$ 时将 H°_w 映射到 $H^{\circ}_{w'}$（其中 $w' \in W^{(1)}_{c(j)}$），否则在 H°_w 上为零。
- $\lambda_{c(j)}(a^{(1,1)})$ 在 $w \in W^{(2)}_{c(j)}$ 时将 H°_w 映射到其自身，否则在 H°_w 上为零。

有鉴于此，我们可以进一步考察将若干算子$\lambda_{c(j)}(a^{(\delta_j,\ \epsilon_j)})$依次作用于态向量 ξ的效果，从而确定希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的哪个直和求和项包含该向量

$$\lambda_{c(j)}(a_j^{(\delta_1,\epsilon_1)})\dots\lambda_{c(1)}(a_1^{(\delta_1,\epsilon_1)})\xi$$

对每个 $j \leqslant k$。首先，为了跟踪张量因子的数量，我们为每个顶点$v \in \mathcal{G}$ 引入一个与指标序列 $(\delta_j,\ \epsilon_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$ 及一个着色$c = c_1\cdots c_k$相关联的高度函数 h_v。对任意 $m \in [\![0,\ k]\!]$，令：

$$h_v(m) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{c(j)=v}(\delta_i - \epsilon_i).$$

注意，$h_v(0) = 0$，且 $h_v(j+1) - h_v(j) \in \{-1,\ 0,\ 1\}$；如果 $|h_v(j+1) - h_v(j)| = 1$，则 $c(j) = v$。通过归纳应用上述观察，可以证明

$$\lambda_{c(j)}(a_j)\dots\lambda_{c(1)}(a_1)\xi \in H^{\circ}_{w(j)}$$

对于某个词 $w(j) \in W_0$，其中含有 $h_v(j)$ 个字母 v（允许向量为零）：

$$h_v(j) = \{i \in [\![1, |w(j)|]\!] \colon w_i(j) = v\}.$$

如果 $h_v(j)$ 曾经是 -1，那么第一次出现 $h_v(j) = -1$ 时，我们会对一个不含来自 H°_v 的任何张量因子的向量应用湮灭算子 $\lambda_{c(j)}(a^{(0,\ 1)}_{\ j})$（其中 $c(j) = v$），结果为：

$$\lambda_{c(j)}(a_j^{(\delta_j,\epsilon_j)})\dots\lambda_{c(1)}(a_1^{(\delta_1,\epsilon_1)})\xi = 0,\ \text{if } h_v(j) = -1.$$

因此，如果对于任意 $i \leqslant j$ 都有 $h(i) < 0$，那么 $\lambda_{c(j)}(a^{(\delta_j,\ \epsilon_j)}_{\ j})\dots\lambda_{c(1)}(a^{(\delta_1,\ 1}_{\ 1}{}^{\epsilon_1)})\xi = 0$。此外，在最后一步，要使内积非零，$\lambda_{c(k)}(a^{(\delta_k,\ \epsilon_k)}_{\ k})\dots\lambda_{c(1)}(a^{(\delta_1,\ 1}_{\ 1}{}^{\epsilon_1)})\xi$ 必须属于 $\mathbb{C}\xi$，因此

$$h_v(k) = 0.$$

因此，在展开式 3.3 中，只有对每个 $v \in \mathcal{G}$ 都具有非负高度函数h_v且满足 $h_v(k) = 0$ 的求和项会保留下来。此外，只要 h_v 和 $h(j+1) = 0$ 在某个点 j 都取值为 0，就必须有 $\delta_{j+1} = \varepsilon_{j+1} = 0$，该向量才不会为 0。

我们希望将这些内容表示为集合 $\{c_i = v\}$ 对每个 $v \in \mathcal{G}$ 的非交叉分拆，并证明这些分拆彼此兼容，即它们在 $\mathcal{P}(c,\mathcal{G})^0$ 中共同构成 $[k]$ 的一个划分。

因此，我们回顾以下事实，它是著名的非交叉对 分拆与戴克路径之间双射的推广。 [JL20 的引理 4.24] 中给出了类似的结论。在我们的设定中，我们将指标 $1, \dots, k$ 视为从右 向左排列。其思路是，$(0,0)$ 指标对应单元素块，$(1,0)$ 指标对应块的右端点，$(0,1)$ 指标对应左端点，而 $(1,1)$ 指标对应块的中间元素。不过，由于在更大的论证中，我们通过向左侧添加新指标来归纳构造划分，因此在中间阶段必须允许某些块尚未完成，或缺少其左端点。

定义 3.9。 未完成划分 π 是 $[k]$ 的一个划分 π，并且其中每个块都被标记为“已完成”或“未完成”。类似地，未完成非交叉划分 是满足 π 为非交叉的未完成划分。

未完成划分 $\pi \in [k]$ 在 $[k-1]$上有一个限制，该限制也是一个未完成划分。设 π 是 $[k]$ 的一个未完成划分，设 B 是包含 k的块。我们定义 π 在 $[k-1]$上的限制 $\tilde{\pi}$：将 π 中除 B 之外的所有块都定义为 $\tilde{\pi}$ 的块；如果 $B \neq \{k\}$，则 $\tilde{\pi}$是一个未完成块，$B \backslash \{k\}$。这一构造将在关键结果——引理 3.14——的证明中使用。

引理 3.10。 以下集合之间存在一个双射：

(1) $[k]$的未完成非交叉划分集合。*(2)* 满足高度函数条件的序列 $(\delta_1, \varepsilon_1), \dots$ $\dots, (\delta_k, \varepsilon_k)$

$$h(j) = \sum_{i=1}^{j} (\delta_i - \epsilon_i), \ j \in [\![0, k]\!],$$

始终非负，且 $h(j) = h(j+1) = 0$ 蕴含 $\varepsilon_{j+1} = \delta_{j+1} = 0$。双射定义如下：

(1) j 是 π 的一个已完成单元素块，当且仅当 $(\delta_j, \varepsilon_j) = (0, 0)$。*(2)* j 是一个非已完成单元素块的块的右端点，当且仅当$(\delta_j, \varepsilon_j) = (1, 0)$。*(3)* j 是一个已完成非单例块的左端点，当且仅当 $(\delta_j, \varepsilon_j) = (0, 1)$。*(4)* j 既不是单例块的右端点，也不是已完成块的左端点，当且仅当 $(\delta_j, \varepsilon_j) = (1, 1)$。

证明。我们对 k进行归纳。$k = 1$ 的情形显然。若 $h(1) = 0$，则 $(\delta_1, \varepsilon_1) = (0, 0)$，而 $[1]$ 唯一的未完成非交叉划分是 $\{\{1\}\}$，它是一个已完成单元素块。若 $h(1) = 1$，则 $(\delta_1, \varepsilon_1) = (1, 0)$，而 $[1]$ 唯一的未完成非交叉划分是$\{\{1\}\}$，它是一个未完成块。假设结论对 $k-1$ 成立，现证明它对k也成立。设 $(\delta_1, \varepsilon_1), \dots\dots, (\delta_k, \varepsilon_k)$ 是一个序列，使得高度函数 h 非负，且$h(j) = h(j+1) = 0$ 蕴含 $\varepsilon_{j+1} = \delta_{j+1} = 0$。令 h 为 h 在 $[\![0, k-1]\!]$ 上的限制，并令$\tilde{\pi}$为根据归纳假设，由 $(\delta_1, \varepsilon_1), \dots\dots, (\delta_{k-1}, \varepsilon_{k-1})$ 所关联的 $[k-1]$ 的未完成非交叉划分。我们按如下方式定义与$(\delta_1, \varepsilon_1), \dots\dots, (\delta_k, \varepsilon_k)$ 相关联的 $[k]$的未完成非交叉划分 π：

- 如果 $(\delta_k, \varepsilon_k) = (0, 0)$，那么 π可由 $\tilde{\pi}$添加已完成单元素块 $\{k\}$得到。
- 如果 $(\delta_k, \varepsilon_k) = (1, 0)$，那么 π可由 $\tilde{\pi}$添加未完成块 $\{k\}$得到。
- 如果 $(\delta_k, \varepsilon_k) = (1, 1)$，那么 $h(k-1) > 0$ 和 π 可由 $\tilde{\pi}$ 向包含最大元素的 $\tilde{\pi}$ 未完成块中添加 k 得到。
- 如果 $(\delta_k, \varepsilon_k) = (0, 1)$，那么 $h(k-1) > 0$ 和 π 可由 $\tilde{\pi}$ 向包含最大整数的 $\tilde{\pi}$ 未完成块中添加 k 得到，并使该块完成。

逆映射通过反向执行上述构造得到。证明至此结束。□

例 3.11。 考虑 $[6]$ 的未完成非交叉划分 $\pi = \{\{6, 5, 4\}, \{3\}, \{2\}, \{1\}\}$，其中块 $\{6, 5, 4\}$ 尚未完成。其关联序列 $(\delta_1, \varepsilon_1), \dots, (\delta_6, \varepsilon_6)$ 为

$$(0,0), (0,0), (0,1), (1,1), (1,1), (1,0),$$

因为 $h(0) = 0$、$h(1) = 0$、$h(2) = 0$、$h(3) = 1$、$h(4) = 2$、$h(5) = 1$ 和 $h(6) = 0$。

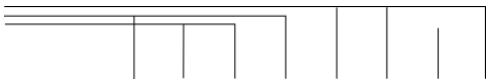

FIGURE 3. 一个未完成划分。未完成块以向左延伸的线段表示。

观察 3.12. 考虑一个序列 $(\delta_1, \varepsilon_1), \ldots, (\delta_k, \varepsilon_k) \in \{0,1\}^2$，以及一个着色$c\colon [k] \to \mathcal{V}$。令 $J_v = c^{-1}(v) = \{j : c(j) = v\}$。假设 $h_v \geqslant 0$。将引理 3.10 应用于 π 在 J_v上的限制，我们得到指标集 J_v的一个未完成非交叉划分 π_v。因此，我们得到一个未完成划分 $\pi = \bigcup_{v\in\mathcal{V}} \pi_v$，其在每个 J_v 上的限制都是非交叉的。

现在我们描述未完成划分的 $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})^0$ 对应形式。这个定义的动机是将划分视为更大且完整的划分的一部分；未完成块的左侧还会添加更多元素，而在定义 1.2 的条件中必须考虑这些未来的元素。

如果 V 是一个未完成块，我们应稍微修改其凸包 $\mathsf{Conv}(V)$的定义，并将其设为 $\mathsf{Conv}(\{k\} \cup V)$。这样做会把块 V 左侧的所有点都加入 V中所有点的凸包。

¯定义 $\mathcal{E}_1^{\pi_u} = \{(U,\ V)\colon V \cap \mathsf{Conv}(U) \neq \varnothing\}$ 和 $\mathcal{E}_2^{\pi_u} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_1$。如果 $(U,\ V) \in \mathcal{E}_1^{\pi_u} \backslash \mathcal{E}_2^{\pi_u}$，则 U中的一个块嵌套在 π_u 中的另一个块 V内。例如，若 U 是未完成的，且V的最小值大于 U 的最大值（同样，按照 $k > \cdots > 1$的次序），则 V嵌套在 U内。未完成块及其凸包以一条向左延伸的线段表示，见图3。

定义 3.13。设 π 是 $[k]$的一个未完成划分。

- 如果着色 c 定义了从二部图 $(\pi, \mathcal{E}_1^{\pi_u}, \mathcal{E}_2^{\pi_u})$ 到 $(\mathcal{G}, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ 的一个态射，我们称 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})_u$：（2’）如果 $j > i$ 且 i 位于一个未完成块中，则 $(c(i), c(j)) \in \mathcal{E}_1$。（3’）如果 $j_1 > i > j_2$ 且 $j_1 \sim_\pi j_2$ 且 i 位于一个未完成块中，则 $(c(j_1), c(i)) \in \mathcal{E}_2$。
- 未完成划分 $\pi_u \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})_u$ 的两个块 U 和 V 称为相邻的，如果U 嵌套于 V, $c(U) = c(V)$ 中，并且对于任意其他块 W，若 U 嵌套于 W 中且 V 嵌套于 U 中，则 $(c(U), c(W)) \in \mathcal{E}_2$。
- 如果 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})_u$ 且 π 没有相邻块，我们称 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})_u^0$。

现在我们可以证明引理了：计算算子 $\lambda_c,\ c \in \mathcal{G}$ 对真空向量 ξ的作用。此计算与 [JOW25 中针对有向图独立性的情形所给出的引理 3.17]中的计算类似。

引理 3.14. 设二部图 $\mathcal{G}$、序列 $(\delta_1, \varepsilon_1), \ldots, (\delta_k, \varepsilon_k) \in \{0,1\}^2$ 和着色 $c\colon [k] \to \mathcal{V}$ 已给定，并假设对于所有 $v \in \mathcal{V}$ 和 $m \in \{0, \ldots, k\}$，都有 $h_v(m) \geqslant 0$。

令 π 为与 (δ, ε, c) 相关联的未完成划分（观察 *3.12*）。将未完成块 $B_1, \ldots, B_m$ 排列，使得 $\min B_1 < \cdots < \min B_m$（从右向左），设 $v_j = c(B_j)$，并定义$w = v_m \cdots v_1$。

若 $\pi \in \mathcal{P}(c、\ \mathcal{G})_u^0$，则 $w \in W_{\mathcal{G}}$ 且

$$\lambda_{c(k)}\big(a_k^{(\delta_k,\epsilon_k)}\big) \cdots \lambda_{c(1)}\big(a_1^{(\delta_1,\epsilon_1)}\big)\,\xi = U_w \left[\left(\prod_{j\in B_m} Q_{v_m} a_j \right) \xi_{v_m} \otimes \cdots \otimes \left(\prod_{j\in B_1} Q_{v_1} a_j \right) \xi_{v_1} \right] \times \prod_{\substack{B\in\pi \\ B\ finished}} K_{|B|}^{\mathrm{Bool}}(a_j : j \in B).$$

若 $\pi \notin \mathcal{P}(c、\ \mathcal{G})_u^0$，则

$$\lambda_{c(k)}\big(a_k^{(\delta_k,\epsilon_k)}\big) \cdots \lambda_{c(1)}\big(a_1^{(\delta_1,\epsilon_1)}\big)\,\xi = 0.$$

证明。对 k 进行归纳证明。假设该结果对 $k-1$ 成立，并证明它对 k成立。假设$\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})_u^0$其中 $c = c(k)\tilde{c}$。由于将 π 限制 $\tilde{\pi}$到集合 $\{k-1,\ \ldots\ldots,\ 1\}$所得的结果属于 $\mathcal{P}(\tilde{c},\ \mathcal{G})_u^0$，

$\tilde{c} \in W_{\mathcal{G}}$ 并根据归纳假设:

$$\lambda_{c(k)}(a_k^{(\delta_k,\epsilon_k)}) \dots \lambda_{c(1)}(a_1^{(\delta_1,\epsilon_1)})\xi$$
$$= \lambda_{c(k)}(a_k^{(\delta_k,\epsilon_k)})\Big\{U_{\tilde{w}}\Big[\Big(\prod_{j\in\tilde{B}_m} Q_{\tilde{v}_m}a_j\Big)\xi_{\tilde{v}_m} \otimes \cdots \otimes \Big(\prod_{j\in\tilde{B}_1} Q_{\tilde{v}_1}a_j\Big)\xi_{\tilde{v}_1}\Big]$$
$$\prod_{B\in\tilde{\pi}\text{ finished}} K_{\mathrm{Bool},|B|}(a_j : j\in B)\Big\},$$

其中， $B_1, \dots, B_m$ 是限制 $\tilde{\pi}$的未完成块。

有四种情况。令 $v = c(k)$。

•$(\delta_k, \varepsilon_k) = (1,1)$。高度函数 h_v在 k、 $h_v(k) > 0$处为正，这表明 v出现在 $\tilde{w}$中。令 B 为 π 中包含 k 的未完成块（它必然是未完成的，因为$(\delta_k, \varepsilon_k) = (1,1)$)。由于 π按颜色非交叉， B 包含 v在$\tilde{c}$中的最左出现位置。 $B\backslash\{k\}$ 也是 $\tilde{\pi}$的一个未完成块。设 $B_j = B\backslash\{k\}$.

现在我们要证明的是 $r(\tilde{w}) = r(v\bar{w})$，这等价于说，在 $\tilde{w}$中， v 的最左出现位置与其左侧 $\tilde{w}$ 中的每一种颜色都满足张量关系：这些颜色属于 $\tilde{v}$，即 $\tilde{\pi}$的未完成块的颜色。更准确地说，这些颜色是 $\tilde{v}_{j+1}, \dots, \tilde{v}_m$。根据定义， $(B_j, B) \in \mathcal{E}_u^{\pi}$，并且由于 $\pi \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G})_u$，我们得到 $(\tilde{v_j}, v) \in \mathcal{E}_2$。

•$(\delta_k, \ \varepsilon_k) = (1, \ 0)$, k是一个未完成块的右端点。根据定义，未完成块的颜色字符串为 $v\tilde{v}_1 \cdots \tilde{v}_m$。我们必须证明 $w \in W_{\mathcal{G}}$。根据归纳假设， $\tilde{w} \in W_{\mathcal{G}}$，因此只需证明:

- 如果 $v = w_j \in \tilde{w}$，则存在 i： $k < i < j$ 且 $(v_i, \ v) \notin \mathcal{E}_2$。
- $(v, \ w_\ell) \in \mathcal{E}_1$

第二项由以下事实得出： $\pi \in \mathcal{P}(c, \ \mathcal{G})_u$，更准确地说，是定义 3.13 的 $(1')$。设 $v = w_j \in \tilde{w}$，由于 k 是 π中一个块的右端点，因此存在另一个未完成块$\tilde{B}_\ell$，它属于颜色为 v的那些 $\tilde{B}$。根据 $\mathcal{P}(c, \ \mathcal{G})_u^0$的定义，存在第三个块 $\tilde{B}_\ell$，嵌套在 B 和 B_ℓ 之间，其颜色不属于 $\mathcal{E}_2$。由于这个最后的块的颜色介于v 和 $\tilde{v}_\ell$之间， w 是关于 $w = v\tilde{w}$约化的。根据定义，

$$\lambda_{c(k)}(a_k^{(\delta_k,\epsilon_k)})\Big\{U_{\tilde{w}}\Big[\bigotimes_{1\leqslant\ell\leqslant m}\Big(\prod_{j\in\tilde{B}_m} Q_{\tilde{v}_m}a_j\Big)\xi_{\tilde{v}_m}\Big]\prod_{B\in\pi\ \text{finished}} K_{\mathrm{Bool},|B|}(a_j : j\in B).\Big\}$$
$$= U_w\Big[Q_v a_k\xi_v \bigotimes_{1\leqslant\ell\leqslant m}\Big(\prod_{j\in\tilde{B}_m} Q_{\tilde{v}_m}a_j\Big)\xi_{\tilde{v}_m}\Big]\prod_{B\in\pi\ \text{finished}} K_{\mathrm{Bool},|B|}(a_j : j\in B).$$

•$(\delta_k, \ \varepsilon_k) = (1, \ 0)$，在这种情况下， k是一个 π块的左端点。因此， π 的未完成块属于 B，即限制 $\tilde{\pi}$的未完成块。根据归纳假设， $\tilde{w} \in \mathcal{W}$。通过删除一个颜色 $\tilde{v}_j = v$，即在 k处完成的块的颜色（我们假设该颜色为B_j），可以从单词 $\tilde{w}$ 得到单词 w。块 B_m、.....、B_{j+1}中的每一个都与 B发生交叉，因为 $\pi \in \mathcal{P}(c, \ \mathcal{G})_u$、 $(v, \ \tilde{v}_m)$、.....、 $(v, \ \tilde{v}_{j+1}) \in \mathcal{E}_2$。因此， w仍然是约化的。删除容许词中的字母后，容许性仍然成立，因此w是容许的。我们已经看到，颜色 $\tilde{v}_{j+1}$、.....、 $\tilde{v}_m$都与 v满足张量关系，因此$\tilde{w} = r(vw)$。根据 $\lambda_{c(k)}(a^{(\delta_k}$的作用定义，$_k \ ^{\varepsilon_k)}$)：

$$\lambda_{c(k)}(a_k^{(\delta_k,\epsilon_k)})\Big\{U_{\tilde{w}}\Big[\bigotimes_{1\leqslant\ell\leqslant m}\Big(\prod_{j\in\tilde{B}_m} Q_{\tilde{v}_m}a_j\Big)\xi_{\tilde{v}_m}\Big]\prod_{B\in\pi\ \text{finished}} K_{\mathrm{Bool},|B|}(a_j : j\in B).\Big\}$$
$$= U_{\tilde{w}\backslash v_j}\Big[\bigotimes_{\ell\neq j}\Big(\prod_{j\in\tilde{B}_m} Q_{\tilde{v}_m}a_j\Big)\xi_{\tilde{v}_m}\Big]\langle\xi_v\,,\, a_k\prod_{\ell\in\tilde{B}_j} Q_v a_\ell\xi_v\rangle\prod_{B\in\pi\ \text{finished}} K_{\mathrm{Bool},|B|}(a_j : j\in B)$$

由于 [JL20]

$$\langle\xi_v\,,\, a_k\prod_{\ell\in\tilde{B}_j} Q_v a_\ell\xi_v\rangle = K^{\mathrm{Bool}}(a_k, a_\ell : \ell\in B_j))$$

该公式成立。

•$(\delta_k,\ \varepsilon_k)=(0,\ 0)$。在这种情况下，$\{k\}$是一个已完成单例。在这种情况下，$\tilde{w}=\tilde{w}_\circ$因此，根据归纳假设，我们有$w\in W_{\mathcal{G}}$。现在让我们检查$v\tilde{w}\in W_{\mathcal{G}}$。由于$\pi\in\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，根据定义 3.13 中的第$(2')$点，$(\tilde{v}_1,\ v)$、.....、$(\tilde{v}_m,\ v)\in\mathcal{E}_1$。此外，对于某个$j$，由集合$\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})_u^0$的定义可知，我们有第三个块$B_\ell$嵌套在$\{k\}$和$B_j$之间，$\ell<j$，其颜色$\tilde{v}_\ell$与$v$不满足张量关系。由于$\tilde{v}_\ell$在$v\tilde{w}$中位于$v$和$\tilde{v}_j$之间，我们得到$v\tilde{w}$是约化的。根据$\lambda_{c(k)}(a^{\delta_k,\ \varepsilon_k}_{\ k})$的作用定义，我们得到

$$\lambda_{c(k)}(a_k^{(\delta_k,\epsilon_k)})\Bigg\{U_{\tilde{w}}\Bigg[\bigotimes_{1\leqslant\ell\leqslant m}\Bigg(\prod_{j\in\tilde{B}_m}Q_{\tilde{v}_m}a_j\Bigg)\xi_{\tilde{v}_m}\Bigg]\prod_{B\in\pi\ \text{finished}}K_{\mathrm{Bool},|B|}(a_j:j\in B).\Bigg\}$$
$$=\langle\xi_v\,,\,a_k\xi_v\rangle\Bigg\{U_{\tilde{w}}\Bigg[\bigotimes_{1\leqslant\ell\leqslant m}\Bigg(\prod_{j\in\tilde{B}_m}Q_{\tilde{v}_m}a_j\Bigg)\xi_{\tilde{v}_m}\Bigg]\prod_{B\in\pi\ \text{finished}}K_{\mathrm{Bool},|B|}(a_j:j\in B).\Bigg\}$$

该公式由等式$\langle\xi_v,\ \ a_k\xi_v\rangle=K_1^{\mathrm{Bool}}(a_k)$得出。

定理第一个断言的证明已经完成，现在证明第二个断言。若$\pi\notin\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，则存在一个整数$\ell\leqslant k$，使得$\pi$在$\{1,\ \ldots,\ \ell\}$上的限制属于$\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，但在$\{1,\ \ldots,\ \ell+1\}$上的限制不属于。因此，不失一般性，假设$\pi$在$\{1,\ \ldots,\ k-1\}$上的限制属于$\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$。我们将定理的第一个断言应用于限制$\tilde{\pi}$，接下来只需证明$\lambda_{c(k)}(a_k)^{(\delta_k,\ \varepsilon_k)}$的作用等于零。同样，有四种情况。

•$(\delta_k,\ \varepsilon_k)=(1,\ 0),\ (0,\ 0)$。在这些情况下，$k$是某个单例块的右端点，该块可能未完成，也可能已完成。若$\pi\in\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$，这意味着以下两种情况之一：对于某个$j\leqslant m$（具体来说，令$j=1$），有$(\tilde{v}_j,\ v)\notin\mathcal{E}_1$；或者$\{k\}$与$\tilde{\pi}$的一个未完成块相邻，且颜色相同$v_\circ$在前一种情况下，词$v\tilde{w}$不属于$W_{\mathcal{G}}^{(1)}$，因此根据定义，$\lambda_v(a^{(\delta_k,\ \varepsilon_k)}_{\ \ k})$将$H_{r(\tilde{w})}$中的每个向量都映为零。在后一种情况下，词$v\tilde{w}$不是约化的，因此不属于$\mathcal{W}_{\mathcal{G}}^{(1)}$。

•$(\delta_k,\ \varepsilon_k)=(0,\ 1),\ (1,\ 1)$在这些情况下，$k$是一个块的左端点，该块由$\pi$组成，而这些$\pi$原本是$\pi$的未完成块；或者$k$被添加到一个未完成块$\tilde{\pi}$中。在这种情况下，$\tilde{\pi}\in\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$意味着原本不应出现的块之间发生了交叉，$(v,\ \tilde{v}_\ell)\notin\mathcal{E}_2$而$\tilde{v}_j=v$对于某个$\ell\leqslant j\leqslant m$，为明确起见，设$\ell=1$且$j=2_\circ$在这种情况下，$\tilde{w}$的等价类不包含以$v$开头的词：$v$不能与$\tilde{v}_1$交换。因此，$\lambda^{(\delta_k,\ \varepsilon_k)}(a^{(\delta_k,\ \varepsilon_k)}_{\ \ \ k})$在$H_{r(\tilde{w})}$上作用为零。□

将上述命题应用于对所有$v\in\mathcal{G}$均有$h_v(k)=0$的情形，我们得到定理 3.5 是引理 3.14 的一个推论。

4. Random matrix model

本节旨在证明定理 1.10。我们先将定理 1.10 化归为下文的定理 4.1，然后证明定理 4.1。

4.1. 一个简要的化归。 按照定理 1.10 中的记号，令$\mathrm{tr}_N^c=\mathrm{tr}_N^{\otimes S_c^{(1)}}$。**定理 4.1。**

• 考虑两个集合$\mathcal{S}$和$\mathcal{V}$。• 对于每个$v\in\mathcal{V}$，令$S_v^{(1)}$, $S_v^{(2)}$, $S_v^{(3)}$为$\mathcal{S}$的一个划分，使得$S_v^{(1)}$非空。• 令$\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$，其中

$$\mathcal{E}_1=\{(v,w):S_v^{(1)}\cap S_w^{(2)}=\varnothing\},\qquad\mathcal{E}_2=\{(v,w):S_v^{(1)}\cap S_w^{(1)}=\varnothing\}.$$

• 令$\mathbb{M}_N$表示复矩阵的集合；固定一个单位向量$\xi\in\mathbb{C}^N$；并将$\mathbb{M}_N{}^{\otimes\mathcal{S}}$视为一个非交换概率空间，其态由向量$\xi^{\otimes\mathcal{S}}$给出。• 定义（不一定保幺的）$*$-同态

$$\lambda_v^{(N)}:\mathbb{M}_N{}^{\otimes S_v^{(1)}}\to\mathbb{M}_N{}^{\otimes\mathcal{S}},\qquad\lambda_v^{(N)}(A)=A\otimes(\xi\xi^*)^{\otimes S_v^{(2)}}\otimes I_N^{\otimes S_v^{(3)}},$$

其中，$\xi\xi^*$表示投影到ξ张成空间上的秩一投影。

• 对于每个 $v \in \mathcal{V}$，令 $U_v^{(N)}$ 为 $\mathbb{M}_N{}^{\otimes S_v^{(1)}}$ 中的 *Haar* 随机酉矩阵，并令这些$U_v^{(N)}$彼此独立。

令 $k \in \mathbb{N}$和 $c\colon\ [k] \to \mathcal{V}$。对于 $j = 1$、.....、 k，令 $A_j^{(N)} \in \mathbb{M}_N{}^{\otimes S_{c(j)}^{(1)}}$ 使得

$$\sup_N \|A_j^{(N)}\| < \infty.$$

那么几乎必然有

$$\lim_{N\to\infty} \Big| \Big\langle \xi^{\otimes \mathcal{S}}, \lambda_{c(1)}^{(N)}(U_{c(1)}^{(N)} A_1^{(N)} (U_{c(1)}^{(N)})^*) \dots \lambda_{c(k)}^{(N)}(U_{c(k)}^{(N)} A_k^{(N)} (U_{c(k)}^{(N)})^*) \xi^{\otimes \mathcal{S}} \Big\rangle - \sum_{\pi \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G})} \prod_{B\in\pi} K_{|B|}^{\mathrm{free},\,\mathrm{tr}_N^{c(B)}}(A_j^{(N)} : j \in B) \Big| = 0; \quad (4.1)$$

这里， $c(B)$ 表示对于 $j \in B$， $c(j)$ 的共同取值；自由累积量是在($\mathbb{M}_N{}^{\otimes S_{c(B)}^{(1)}}$、迹$_N^{c(B)}$)中计算的。

由定理 *4.1* 证明定理 *1.10*。定理 4.1 的设定有三处不同：

(1) 我们将元素 $p(\mathbf{B}_{c(j)}^{(N)}) = \lambda_{c(j)}^{(N)}(p(\mathbf{A}_{c(j)}^{(N)}))$ 直接替换为 $\lambda_{c(j)}^{(N)}(A_j^{(N)})$。(2) 我们假设输入矩阵 $A_j^{(N)}$ 是确定性的。(3) 我们相对于迹而非 (1.2) 中的向量 $\xi^{\otimes \mathcal{S}}$ 计算累积量，并删去 (1.3)

让我们先假设定理 4.1成立，并依次进行每项修改。对于第 (3) 项，请注意，我们可以将 (4.1) 应用于所有 c 均为常数的情形，设对所有 j， $c = c(j) = v$。由此可得

$$\lim_{N\to\infty} \left| \left\langle \xi^{\otimes \mathcal{S}}, \lambda_v^{(N)}(U_v^{(N)} A_1^{(N)} (U_v^{(N)})^* \dots U_v^{(N)} A_k^{(N)} (U_v^{(N)})^*) \xi^{\otimes \mathcal{S}} \right\rangle - \sum_{\pi \in \mathcal{NC}_k} K_\pi^{\mathrm{free},\mathrm{tr}_N^v}(A_1^{(N)}, \dots, A_k^{(N)}) \right| = 0.$$

事实上，由于颜色是常数， $\mathcal{P}(c,\ \mathcal{G})$ 可化简为 $\mathcal{NC}_k$。因此，由自由矩-累积量公式，

$$\lim_N \left| \left\langle \xi^{\otimes \mathcal{S}}, \lambda_v^{(N)}(U_v^{(N)} A_1^{(N)} (U_v^{(N)})^* \dots U_v^{(N)} A_k^{(N)} (U_v^{(N)})^*) \xi^{\otimes \mathcal{S}} \right\rangle - \mathbf{tr}_N^v(A_1^{(N)} \dots A_k^{(N)}) \right|. \quad (4.2)$$

因此，关于 ξ的 $U_v^{(N)} A_j^{(N)} (U_v^{(N)})^*$的矩，与给定颜色$v$对应矩阵上关于迹的 $A_j^{(N)}$ 的矩几乎必然渐近相同。注意，由于 $\sup_N \|A_j^{(N)}\| < \infty$，每个矩和每个累积量几乎必然有界，其中 $N \to \infty$。根据莫比乌斯反演，向量态和迹下矩的一致性意味着向量态和迹下自由累积量的一致性，因此几乎必然

$$\lim_{N\to\infty} \Big| \sum_{\pi \in \mathcal{NC}_k} K_{\mathrm{free},\pi}^{\xi^{\otimes \mathcal{S}}}(\lambda_{c(1)}^{(N)}(U_{c(1)}^{(N)} A_1^{(N)} (U_{c(1)}^{(N)})^*), \dots, \lambda_{c(k)}^{(N)}(U_{c(k)}^{(N)} A_k^{(N)} (U_{c(k)}^{(N)})^*)) - \sum_{\pi \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G})} \prod_{B\in\pi} K_{|B|}^{\mathrm{free},\mathrm{tr}_N^{c(B)}}(A_{c(j)}^{(N)} : j \in B) \Big| = 0.$$

因此，(4.1) 也几乎必然成立

$$\lim_{N\to\infty} \Big| \Big\langle \xi^{\otimes \mathcal{S}}, \lambda_{c(1)}^{(N)}(U_{c(1)}^{(N)} A_1^{(N)} (U_{c(1)}^{(N)})^*) \dots \lambda_{c(k)}^{(N)}(U_{c(k)}^{(N)} A_k^{(N)} (U_{c(k)}^{(N)})^*) \xi^{\otimes \mathcal{S}} \Big\rangle - \sum_{\pi \in \mathcal{NC}_k} K_\pi^{\mathrm{free},\xi^{\otimes \mathcal{S}}}(\lambda_{c(1)}^{(N)}(U_{c(1)}^{(N)} A_1^{(N)} (U_{c(1)}^{(N)})^*, \dots, \lambda_{c(k)}^{(N)}(U_{c(k)}^{(N)} A_k^{(N)} (U_{c(k)}^{(N)})^*)) \Big|. \quad (4.3)$$

与此同时，方程 4.2 最终将变为 1.3。

对于第 (2) 项，现在我们来证明：当矩阵 $A_j^{(N)}$ 是随机的、它们与 Haar酉矩阵联合独立（对所有 j 和 N 均成立），且假设 $\sup_N \|A_j^{(N)}\| < 8$ 几乎必然成立时，(4.3) 成立。独立性假设意味着我们不失一般性地可以假设，随机变量定义在乘积概率空间 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上，其中 $\omega_1 \in \Omega_1$ 控制 $A_j^{(N)}$，而 $\omega_2 \in \Omega_2$ 控制 Haar酉矩阵。对于每个满足 $\sup_N \|A_v^{(N)}\| < \infty$ 的 $\omega_1 \in \Omega_1$，我们可以应用第一步的结论，证明 (4.3) 对几乎所有 $\omega_2 \in \Omega$ 都成立。然后，根据 Fubini–Tonelli定理，(4.3) 对几乎所有 $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ 都成立。

对于第 (1) 项，现在令 $\mathbf{A}_i^{(N)} = (A_v^{(N)}{}_{,i})_{i \in I_v}$ 如定理 1.10 中所述，并令

$$\mathbf{B}_v^{(N)} = (\lambda_v^{(N)} (U_v^{(N)} A_{v,i}^{(N)} (U_v^{(N)})^*))_{i \in I_v}.$$

给定不含常数项的多项式 p_1、…、p_k，考虑矩阵 $\widehat{A}_j^{(N)} = p_j(A_{c(j)}^{(N)}{}_{,i} : i \in I_{c(j)})$。注意

$$p_j(\mathbf{B}_{c(j)}^{(N)}) = \lambda_{c(j)}^{(N)} (U_{c(j)}^{(N)} \widehat{A}_j^{(N)} (U_{c(j)}^{(N)})^*).$$

此外，$\sup_N \|\widehat{A}_j^{(N)}\| < \infty$ 几乎必然成立。因此，将 (4.3) 应用于 $\widehat{A}_j^{(N)}$，即可由定理 1.10 得到 (1.2)。类似地，应用 (4.2) 可得 (1.3)。□

接下来的三个小节将用于证明定理 4.1，本节其余部分的安排如下：

- 在 §4.2 中，我们介绍组合框架，并提供 Haar 随机酉矩阵的 Weingarten 演算背景。
- 在 §4.3 中，我们给出主要的组合论证，以证明 (4.1) 的期望收敛。- 在 §4.4 中，我们运用标准的集中测度技巧，将期望收敛提升为几乎必然收敛，从而完成定理 4.1 的证明，进而完成定理 1.10 的证明。

4.2. **Weingarten 演算**。 我们先回顾酉群上的积分公式，并固定相关记号。

- 对于 $k \geqslant 1$，令 $\gamma = (1\,2\,\ldots\,k)$ 为 S_k中的全循环。- 对于颜色字 $v_1 \cdots v_k$，令 Stab $(v_1 \cdots v_k) \subseteq S_k$ 为稳定该颜色字的子群（相对于左作用）。- 对于每个位置 $s \in \mathcal{S}$，定义指标集

$$J_s^{(1)}(v_1 \cdots v_k) = \{j \in [k] : s \in S_{v_j}^{(1)}\}, \qquad J_s^{(2)}(v_1 \cdots v_k) = \{j \in [k] : s \in S_{v_j}^{(2)}\}.$$

- 任意 $\sigma \in$ Stab$(v_1 \cdots v_k)$ 都保持 $J_s^{(1)}$不变，因此我们将其在 $S_{J_s^{(1)}}$上的限制记作 σ_s。令 γ_s为 $J_s^{(1)}$上的全循环：它将 $J_s^{(1)}$中的一个元素映射到其典范循环次序中的下一个元素。我们将 $J_s^{(1)}$上的置换扩展到 $[k]$，方法是固定$J_s^{(1)}$之外的指标，并将此扩展记为 σ_s。

—

- 对于每种颜色 $v \in \mathcal{V}$，令

$$B_v = \{j \in [k] : v_j = v\}, \qquad \pi_{v_1 \cdots v_k} = \{B_v : v \in \mathcal{V},\, B_v \neq \varnothing\}.$$

- 对于 $\sigma \in S_k$，令 Cyc(σ) 为 σ 的循环集合。

为简化记号，我们通常会省略对 $v_1 \ldots v_k$ 一词的提及。现在我们来回顾以下重要公式，该公式用于计算在 $\mathbb{C}^N$, $N \geqslant 1$ 的酉群上的 Haar 测度下多项式的积分：

$$\int_{\mathbb{U}(N)} u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_k j_k} \bar{u}_{i'_1 j'_1} \cdots \bar{u}_{i'_k j'_k} \mathrm{d}u = \sum_{\sigma, \tau \in S_k} \delta_{j, \sigma \cdot j'} \delta_{i, \tau \cdot j'} \mathrm{Wg}(\sigma \tau^{-1}, N) \tag{4.4}$$

感兴趣的读者可参阅 [C´S06]，其中详细介绍了上述公式与酉群和对称群表示论之间的关系。这里我们仅回顾公式中出现的函数 Wg 的渐近性质。函数 $\mathrm{Wg}(\cdot,\ N)$ 即 Weingarten 函数。对于每个 $(\sigma,\ \tau)$，$\mathrm{Wg}(\sigma\tau^{-1})$ 是 $(\sigma,\ \tau)$ 的系数；它是 $\{\sigma,\ \sigma\in S_k\}$ 的格拉姆矩阵在典范表示下的逆矩阵中的系数，该格拉姆矩阵采用归一化希尔伯特–施密特乘积，定义在 S_k 作用于$\mathbb{C}^N$的 k–重张量积上的情形。详情可参见例如 [C´S06]。我们来回顾以下关于 Weingarten 函数的著名渐近性质：

$$\mathrm{Wg}(\sigma,N)=\mu(\sigma)N^{-k-|\mathrm{Cy}(\sigma)|}+O(N^{-2-k-|\mathrm{Cy}(\sigma)|}) \tag{4.5}$$

其中 $\mu\colon S_k\to\mathbb{R}$ 在 σ 是非交叉划分时，与非交叉划分偏序集 $\mathrm{NC}([k])$ 的 Möbius 函数重合（每个轨道都具有 $[k]$ 的循环次序，且 $\mathrm{Cy}(s)$是 $[k]$的非交叉划分）。为便于后续使用，我们根据颜色词 $c_1\cdots c_k$ 的选择，定义 Weingarten 函数的以下变体：

$$\tilde{\mathrm{Wg}}(\alpha)=\prod_{c\in\mathcal{V}}\mathrm{Wg}(\alpha|_{B_c},N^{|S_c^{(1)}|}) \tag{4.6}$$

˜由 [CC21], 可得 $\mathrm{Wg}(\alpha)$ 满足以下渐近关系：

$$\tilde{\mathrm{Wg}}(\alpha)=\mu(\alpha)\prod_{s\in S}N^{-|J_s^{(1)}|-|\mathrm{Cyc}(\sigma_s)|}+O(\frac{1}{N^2}) \tag{4.7}$$

4.3. 期望收敛。 我们现在可以证明定理 1.10，它将由以下命题推得。

命题 4.2。 *考虑与定理 4.1 相同的设定和假设。当 N 趋于无穷大时，以下期望收敛成立：*

$$\mathbb{E}\left[\langle\xi^{\otimes\mathcal{S}},\lambda_{c(1)}^{(N)}(U_{c(1)}^{(N)}A_1^{(N)}(U_{c(1)}^{(N)})^\star)\cdots\lambda_{c(k)}^{(N)}(U_{c(k)}^{(N)}A_k^{(N)}(U_{c(k)}^{(N)})^\star)\rangle\right] =\sum_{\pi\in\mathcal{P}(c,\mathcal{G})}K_\pi^{\mathrm{free},\mathrm{tr}_N}(A_1^{(N)},\dots,A_k^{(N)})+O(\frac{1}{N^2}) \tag{4.8}$$

其中 $K^{\mathrm{free}}{}_{,\ \pi}{}^{\mathrm{tr}}(A_1^{(N)},\ \ldots,\ A_k^{(N)})$ 是 $A_1,\ \ldots,\ A_k$ 关于在 $\mathbb{M}_N{}^{\otimes S_c^{(1)}}$上的归一化迹的分块自由累积量（归一化因子为 $N^{-|S_c^{(1)}|}$），$c\in\mathcal{V}$，且

证明。 为简化记号，我们省略上标 (N)。我们选取 $\mathbb{C}^N$ 的一组正交归一基，使 ξ 为该基的第一个向量。为使表达更明确，我们将重写 (4.8) 左侧的乘积，使投影 $\xi\xi^*$ 显现出来。我们将每个 A_j 和每个酉元 U_{c_j} 都视为 $\mathbb{M}_N{}^{\otimes\mathcal{S}}$ 中的一个元素，这里利用了含幺嵌入

$$\widehat{\lambda}_c:\mathbb{M}_N{}^{\otimes S_c^{(1)}}\to\mathbb{M}_N{}^{\otimes\mathcal{S}},\quad A\mapsto A\otimes I_N^{\otimes S_c^{(2)}\cup S_c^{(3)}}.$$

我们先用选定基表示 $A_\ell^{(N)}=(a^{(\ell)}_{j_\ell j'_\ell})_{j_\ell,\ j'_\ell\in[N]^{|S|}}$，$U_{c_\ell}=(u^{(c_\ell)}_{i_\ell i'_\ell})_{i_\ell,\ i'_\ell\in[N]^{|S|}}$, $\ell\in[k]$。现在，我们在两个序列 $(U_{c(1)},\ \ldots\ldots,\ U_{c(k)})$ 和 $(A_1,\ \ldots\ldots,\ A_k)$ 中分别加入一个酉矩阵 U_0 和 A_0：

$$A_0=(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes|S|}=\big(\prod_{s\in S}\delta_{j_0[s],j'_0[s]=1,1}\big)_{j_0,j'_0\in[N]^{|S|}},\quad U_0=e^{i\theta}I_N^{\otimes S},\quad \theta\sim\mathrm{Unif}([0,2\pi))$$

我们还设定 $v_0=0$ 并假设 $0\notin\mathcal{V}$。我们定义与 0 a 相关联的 $\mathcal{S}$ 子集 s

$$S_0^{(1)}=\varnothing,\quad S_0^{(2)}=S.$$

根据此定义，0 是唯一具有 $S_0^{(1)} = \varnothing$ 的颜色。正如下面所述，(4.8) 的左侧可按 ker $c_0 \cdots c_k = (B_c)_{c\in\mathcal{V}\cup\{0\}}$ 的块进行因式分解。首先

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\mathrm{Tr}\big((\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S}(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_1}^{(2)}}U_1A_1U_1^\star(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_1}^{(2)}}(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_2}^{(2)}}\cdots(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_k}^{(2)}}U_kA_jU_k^\star(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_k}^{(2)}}\big)\Big]\\ = \mathbb{E}\big[\mathrm{Tr}\big((\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S}U_0(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S}A_0(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S}U_0^\star(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S}\\ (\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_1}^{(2)}}U_{c_1}A_1U_{c_1}^\star(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_1}^{(2)}}(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_2}^{(2)}}\cdots(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_k}^{(2)}}U_{c_k}A_kU_{c_k}^\star(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_k}^{(2)}}\big)\big] \quad (4.9)\end{aligned}$$

这样一来，乘积中的所有项现在看起来都相同了，这将使分析更加简洁。现在，我们用 $A's$在选定基下的系数写出该乘积:

$$(4.9) = \sum_{\substack{i_\ell,i'_\ell,j_\ell,j'_\ell\\ \in[N]^{|S|}}} \mathbb{E}\Big[u^{(c_\ell)}_{i_\ell j_\ell}a_{j_\ell j'_\ell}\bar{u}^{(c_\ell)}_{i'_\ell j'_\ell}\prod_{\ell=0}^{k}\delta_{i'_\ell=i_{\ell+1}}\prod_{s\in S_{c_\ell}^{(2)}}\delta_{j_\ell[s]=i_\ell[s]=1}\delta_{j'_\ell[s]=i'_\ell[s]=1}\prod_{s\in S_{c_\ell}^{(3)}}\delta_{j_\ell[s]=i_\ell[s]}\delta_{j'_\ell[s]=i'_\ell[s]}\Big] \quad (4.10)$$

第二个和第三个乘积分别对应于投影 $\xi\xi^\star$所导致的压缩，以及 $A's$中对应于 $S^{(3)}$ 内指标的因子等于单位元I_N这一事实。最后一个期望可按划分 π的各个块进行因式分解，我们利用积分公式（4.4）进一步推得:

$$\begin{aligned}&= \sum_{\substack{\ell=0\ldots k\\ i_\ell,i'_\ell,j_\ell,j'_\ell\\ \in[N]^{|S|}}} a^{(0)}_{j_0j'_0}\cdots a^{(k)}_{j_kj'_k}\sum_{\sigma,\tau\in\mathrm{Stab}(0c_1\cdots c_k)}\tilde{\mathrm{Wg}}(\sigma\tau^{-1},N) \quad (4.11)\\ &\times\prod_{c\in\mathcal{V}\cup\{0\}}\prod_{\ell\in B_c}\prod_{s\in S_c^{(1)}}\delta_{j_\ell[s],\sigma\cdot j_{\ell'}[s]}\delta_{i_\ell[s],\tau\cdot i_{\ell'}[s]}\prod_{s\in S_c^{(2)}}\delta_{j_\ell[s]=i_\ell[s]=1}\delta_{j'_\ell[s]=i'_\ell[s]=1}\prod_{s\in S_c^{(3)}}\delta_{j_\ell[s]=i_\ell[s]}\delta_{j'_\ell[s]=i'_\ell[s]}\\ &\times\prod_{\ell=0}^{k}\delta_{i'_\ell=i_{\ell+1}},\end{aligned}$$

最后一行采用通常的约定 $k+1=0$。

现在来分析哪些元组 i，i'，j，j' 对（4.11）中的第一个求和有贡献。（4.11）第三行的狄拉克函数乘积意味着，对求和有贡献的元组 i 和i' 应满足

$$i' = Z^{-1}\cdot i$$

在方程（4.11）中，我们先对元组 i 求和，最后对元组 j，j'求和。因此，给定一个元组 i，定义元组 j的如下取值范围:

$$V_i = \{j\colon \forall\ell,\forall s\in S_{c_\ell}^{(3)},\ j_\ell[s]=i_\ell[s],\quad \forall s\in S_{c_\ell}^{(2)},\quad j_\ell[s]=1\} \quad (4.12)$$

在 V_i 的定义中，我们已纳入（4.11）第二行中狄拉克函数的乘积对贡献元组 j的影响。（4.11）中的乘积连同以下事实：若 $j_\ell[s]\neq j'_\ell[s]$，$s\in S_c^{(3)}$，$c\in\mathcal{V}$，则 $i_\ell[s]=i'_\ell[s]$。由此可推得:

$$\begin{aligned}(4.11) = \sum_{\sigma,\tau\in\mathrm{Stab}(0c_1\cdots c_k)}\tilde{\mathrm{Wg}}(\sigma\tau^{-1},N)\sum_{i\in[N]^{k+1}}\Delta_{i,(Z^{-1})\tau\cdot i}\prod_{c\in\mathcal{V}}\prod_{\ell\in B_c}\prod_{s\in S_c^{(3)}}\delta_{i_\ell[s]=i'_\ell[s]}\prod_{s\in S_c^{(2)}}\delta_{i_\ell[s]=i'_\ell[s]=1}\\ \times\sum_{j,j'\in V_i}a^{(0)}_{j_0j'_0}\cdots a^{(k)}_{j_kj'_k}\Delta_{j,\sigma\cdot j'} \quad (4.13)\end{aligned}$$

其中，对于任意 x，$y\in[N]^k$:

$$\Delta_{x,y} = \prod_{c\in\mathcal{V}}\prod_{\ell\in B_c}\prod_{s\in S_c^{(1)}}\delta_{x_\ell[s]=y_\ell[s]}. \quad (4.14)$$

我们继续计算 (4.13) 中对 $j,\ j'$ 的求和。首先，它与 i 无关（因为对于 $s \in S_c^{(3)}$，$a_{j_\ell[s]j_\ell[s]} = 1$）。现在，求和 (4.13) 按 σ 的轨道分解，每个轨道都对应于相应 $A's$ 的乘积的一个（未归一化）迹:

$$\begin{aligned}\sum_{j,j'\in V_i} a^{(0)}_{j_0 j'_0}\cdots a^{(k)}_{j_k j'_k}\Delta_{j,\sigma\cdot j'} &= \mathrm{tr}_{\sigma|_{B_c}}(A_1^{(N)},\dots,A_k^{(N)})\prod_{c\in\mathcal{V}} N^{|S_c^{(1)}||\mathrm{Cyc}(\sigma^{-1}_{|B_c})|}\\ &= \mathrm{tr}_\sigma(A_1^{(N)},\dots,A_k^{(N)})\prod_{s\in S} N^{|\mathrm{Cyc}(\sigma_s)|}\end{aligned}$$

我们转而考察这个求和（在这一步，我们对式 (4.11) 中各贡献项的分析与文献 [CC21]中的工作截然不同）:

$$\sum_i \Delta_{i,(\tau Z^{-1})\cdot i}\prod_{c\in\mathcal{V}}\prod_{\ell\in B_c}\prod_{s\in S_c^{(3)}}\delta_{i_\ell[s]=i'_\ell[s]}\prod_{s\in S_c^{(2)}}\delta_{i_\ell[s]=i'_\ell[s]=1}. \tag{4.15}$$

上述求和中的贡献项是满足以下条件的元组 i : 对每个颜色 c，任意$\ell \in B_c$:

$$i_\ell[s] = i_{\tau^{-1}(\ell)+1}[s], \qquad s\in S_c^{(1)}, \tag{4.16}$$

$$i_\ell[s] = i_{\ell+1}[s], \qquad s\in S_c^{(3)}, \tag{4.17}$$

$$i_\ell[s] = i_{\ell+1}[s] = 1, \qquad s\in S_c^{(2)},. \tag{4.18}$$

满足条件 (4.16)–(4.18) 的元组 i 在集合 $\{0,\dots,k\}$上的置换$Z^{-1}\bar{\tau}_s$ 的各个循环上取常值。此外，在包含某个整数 $j\in\{0,\dots,k\}$ 且满足$s\in S_{c_j}^{(2)}$的 $Z^{-1}\bar{\tau}_s$ 的循环上，元组 i 取常值 1。因此，我们得到求和 (4.15) 的以下公式:

$$(4.15) = \prod_{s\in S} N^{|\mathrm{Cyc}((Z^{-1}\bar{\tau}_s))|-|\{\,x\in\mathrm{Cyc}(Z^{-1}\tau_s):J_s^{(2)}\cap x\neq\varnothing\}|}.$$

最后得到:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\mathrm{Tr}\big((\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S}(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_1}^{(2)}}U_1A_1U_1^\star(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_1}^{(2)}}(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_2}^{(2)}}\cdots(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_k}^{(2)}}U_kA_jU_k^\star(\xi^\star\xi^\star)^{\otimes S_{c_k}^{(2)}}\big)\\ &= \sum_{\sigma,\tau\in\mathrm{Stab}(0c_1\cdots c_k)}\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{g}(\sigma\tau^{-1},N)\,\mathrm{tr}_\sigma(A_1,\dots,A_k) &(4.19)\\ &\qquad\times\prod_{s\in S}N^{|\mathrm{Cyc}((Z^{-1}\bar{\tau}_s))|-|\{\,x\in\mathrm{Cyc}(Z^{-1}\bar{\tau}_s):J_s^{(2)}\cap x\neq\varnothing\}|+|\mathrm{Cyc}(\sigma_s)|} &(4.20)\end{aligned}$$

回忆一下 $\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{g}(\sigma\tau^{-1})$ 的定义 (4.6)。如文献 [CC21]，中所做的那样，我们改写最后一个公式中 N 的指数。由于 $\bar{\tau}(J_s^{(1)})\subset J_s^{(1)}$，$Z^{-1}\bar{\tau}_s$ 的循环数与 $Z_s^{-1}\bar{\tau}_s$ 相同；令 $i\in J_s^{(1)}$，再取满足 $Z^{-q}\bar{\tau}_s(i)\in J_s^{(1)}$ 的最小整数 $q\geqslant 1$，根据定义$(Z^{-1}\bar{\tau}_s)^q(i) = Z_s^{-1}\bar{\tau}_s(i)$。因此，$i$ 在 $Z_s^{-1}\tau_s$ 作用下的轨道是$Z^{-1}\bar{\tau}_s$的轨道与 $J_s^{(1)}$的交集。若 $j\notin J_s^{(1)}$，则取满足 $Z^{-q}(i)\in J_s^{(1)}$的最小整数 $q\geqslant 1$；由于$Z^{-q}(i) = (Z\bar{\tau}_s)^{-q}(i)$，我们可以对这个新元素应用前面的推理。因此，$Z^{-1}\bar{\tau}_s$ 与 $Z_s^{-1}\tau_s$ 的循环数相同。由此可得

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Cyc}((Z^{-1}\bar{\tau}_s))| + |\mathrm{Cyc}(\sigma_s)| - 1 - |J_s^{(1)}| - |\sigma_s\tau_s^{-1}|\\ &= |\mathrm{Cyc}((Z^{-1}\bar{\tau}_s))| - |\sigma_s| - 1 - |\sigma_s\tau_s^{-1}|\\ &= -(|\sigma_s| + |\sigma_s^{-1}\tau_s| + |\tau_s^{-1}Z_s| - |Z_s|).\end{aligned} \tag{4.21}$$

最后，代入估计式 (4.7) 并利用 (4.21)，我们得到，除去关于 $O(\frac{1}{N^2})$ 的余项，(4.21) 等于:

—

$$\sum_{\substack{\sigma,\tau\in\\ \mathrm{Stab}(0c_1\cdots c_k)}}\mu(\sigma\tau^{-1})\mathrm{tr}_\sigma(A_1,\dots,A_k)\times\prod_{s\in S}N^{-(|\sigma_s|+|\sigma_s^{-1}\tau_s|+|\tau_s^{-1}Z_s|-|Z_s|+|\{x\in\mathrm{Cyc}(Z^{-1}\bar{\tau}_s):\exists j\in J_s^{(2)}\cap x\}|-1)}.$$

为完成 4.2 的证明，我们需要使指数最小化：

$$(|\sigma_s| + |\sigma_s^{-1}\tau_s| + |\tau_s^{-1}Z_s| - |Z_s| + |\{x \in Z^{-1}\tau_s : \exists j \in J_s^2 \cap x\}| - 1)$$

对于任意 $s \in S$：

$$\begin{aligned} |\sigma_s| + |\sigma_s^{-1}\tau_s| + |\tau_s^{-1}c_s| - |c_s| + |\{x \in Z^{-1}\tau_s : \exists j \in J_s^2 \cap x\}| - 1 & \\ = \big(|\sigma_s| + \underset{\geqslant 0}{|\sigma_s^{-1}\tau_s|} - |\tau_s|\big) & \quad (4.22) \\ + \big(|\tau_s| + \underset{\geqslant 0}{|\tau_s^{-1}Z_s|} - |Z_s|\big) & \quad (4.23) \\ + \big(|\{x \in \mathrm{Cyc}(Z^{-1}\bar{\tau}_s) : \underset{\geqslant 0}{J_s^{(2)}} \cap x \neq \varnothing\}| - 1\big) & \quad (4.24) \end{aligned}$$

回顾一下，当 σ 是一个非交叉划分（视为 S_k 中的置换）时，$Z^{-1}\tau$ 被称为 τ [Kre72] 的 Kreweras 补，记作 Kr(σ)。Kreweras 补本身也是一个非交叉划分，并且是满足以下条件的最大划分：$\sigma \sqcup \mathrm{Kr}(\sigma)$ 是集合 $\{0, 0\prime, 1, 1\prime, \ldots, k, k'\}$ 的一个非交叉划分。

(4.24) 中的第三项非负，因为 $0 \in J_s^{(2)}$。(4.23) 中的第二项在 τ_s 是 $S_{J_s^{(1)}}$ 中的非交叉划分时取最小值；或者等价地，在 $\bar{\tau}_s$ 是 S_k 中的非交叉划分时取最小值。这意味着 τ_s 的所有循环都具有由 $\{0, \ldots, k\}$ 的循环顺序所诱导的循环顺序，并且以这些循环为块的划分是非交叉的。这是一个众所周知的结果，其源头可追溯至 Biane 的工作 [Bia98]，另见 [Gab15]。

第一项 (4.22) 在 σ_s 是一个非交叉划分时取最小值；而当（按包含关系）小于非交叉划分 σ_s 时，包含关系）下小于非交叉划分 τ_s。

在这种情况下，项 (4.22) 和 4.23 都为零。设 σ 和 τ 是 $\mathrm{Stab}(0c_1 \cdots c_k)$ 中的两个置换，使得对于任意 $s \in S$，σ_s 和 τ_s 都是满足 $\sigma_s \leqslant \tau_s$ 的非交叉划分，并且第三项 (4.24) 取最小值。这意味着集合 $J_s^{(2)}$ 只包含在 Kreweras 补 of τ_s 的一个循环的支集中。在这种情况下，这第三项为零。

由于对每个 $s \in S$，τ_s 都是非交叉的，这意味着要使 τ 中颜色为 c 和 c' 的两个块发生交叉，必须有 $S_c^{(1)} \cap S_{c'}^{(1)} = \varnothing$，即 $(c,\ c') \in \mathcal{E}_2$。因此，$\tau$ 满足定义 (1.2) 中的性质 (3)。

由于 $0'$ 必须位于包含 ℓ'、$\ell \in J_s^{(2)}$ 的 $\mathrm{Kr}(\tau_s)$ 同一块中，为使第三项达到最小，不存在颜色为 c、$s \in S_c^{(1)}$ 的 τ 块包含满足 $0 < v \leqslant \ell < w\mathrm{f}\ s \in S_{c_\ell}^{(2)}$ 的元素 $v \neq w$。因此，性质 2 得到满足。

根据上述讨论以及 σ 还必须满足性质 (2) 和 (3)（对于任意 $s \in S$，σ_s 比 τ_s 更细）这一事实，我们得到以下公式：

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\mathrm{Tr}\big((\xi^\star\xi)^{\otimes S}(\xi^\star\xi)^{\otimes S_{c_1}^{(2)}} U_1 A_1 U_1^\star (\xi^\star\xi)^{\otimes S_{c_1}^{(2)}} \cdots (\xi^\star\xi)^{\otimes S_{c_k}^{(2)}} U_k A_k U_k^\star (\xi^\star\xi)^{\otimes S_{c_k}^{(2)}}\big) \\ &\quad = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G}) \\ \sigma_s \leqslant \tau_s,\, \forall s \in S}} \mu(\sigma^{-1}\tau)\mathrm{tr}_\sigma(A_1, \ldots, A_k) + O(N^{-2}) \end{aligned}$$

由于对于所有 $s \in S$，$\sigma_s \leqslant \tau_s$ 当且仅当对于所有 $c \in \mathcal{V}$，$\sigma_{|B_c} \leqslant \tau_{|B_c}$，我们得到：

$$= \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathcal{P}(c,\mathcal{G}), \\ \sigma_{|B_c} \in \leqslant \tau_{|B_c}}} \mu(\sigma^{-1}\tau)\mathrm{tr}_\sigma(A_1^{(N)}, \ldots, A_k^{(N)}) + O(N^{-2}).$$

现在，由于以下等价关系成立：

$$\sigma, \tau \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G}),\, \sigma_{|B_c} \leqslant \tau_{|B_c} \Leftrightarrow \sigma \in \mathcal{P}([k]),\, \tau \in \mathcal{P}(c, \mathcal{G}),\, \sigma_{|B_c} \in \mathrm{NC}(B_c),\, \sigma_{|B_c} \leqslant \tau_{|B_c}, c \in \mathcal{V},$$

我们推得:

$$= \sum_{\substack{\tau\in \mathrm{NC}(c,K),\\ \sigma\in\mathcal{P}([k]),\\ \sigma_{|B_c}\in \mathrm{NC}(B_c)\\ \sigma_{|B_c}\leqslant \tau_{|B_c}}} \mu(\sigma^{-1}\tau)\mathrm{tr}_\sigma(A_1,\dots,A_k)+O(N^{-2})$$

$$= \sum_{\tau\in \mathrm{NC}(c,K)} K_\tau^{\mathrm{free},\,\mathrm{tr_N}}(A_1,\dots,A_k)+O(N^{-2})$$

最后一个等式由自由矩-累积量公式得到。 □

4.4. 几乎必然收敛。 为了完成定理 4.1（从而也是定理 1.10）的证明，我们只需将命题 4.2 中的期望收敛提升为几乎必然收敛。这可由测度集中的标准技术得到；自 [BG97, GZ00] 以来，测度集中已成为随机矩阵理论中的标准工具。

我们回顾一下，赋予 Haar 测度以及与内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{Tr}_N}$ 相应的黎曼度量的酉群 $\mathbb{U}_N$ 满足常数为 $6/N$ [Mec19, 定理 5.16] 的对数索博列夫不等式。利用例如 [Led01, 推论 5.7], [Mec19, 定理 5.9], ，可以很容易地推出乘积空间 $\prod_{v\in\mathcal{V}}\mathbb{U}_{N^{\#S_v^{(1)}}}$（其中黎曼度量是各个分量上原黎曼度量的求和）在乘积测度下满足常数为 $\max_{v\in\mathcal{V}} 6/N^{\#S_v^{(1)}} \leqslant 6/N$ 的对数索博列夫不等式。进而，这意味着它满足常数为 $6/N$ 的赫布斯特集中估计；参见例如 [AGZ09, 引理 2.3.3], [Mec19, 定理 5.5]。（关于这些结果的类似应用及更详细的解释，参见 [HJNS21, §5.3] 。）

引理 4.3 (赫布斯特集中)。 设 $\mathcal{G}$ 为二部图，且 $(U_v^{(N)})_{v\in\mathcal{V}}$ 为定理 *4.1* 中的 *Haar*酉矩阵。设 $f:\prod_{v\in\mathcal{V}}\mathbb{U}_{N^{\#S_v^{(1)}}}\to\mathbb{C}$ 关于与黎曼度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{Tr}_{N^{\#S_v^{(1)}}}}$, $v\in\mathcal{V}$ 的直和相对应的测地距离是 L- 利普希茨的。那么

$$\mathbb{P}(|f(U_v^{(N)}:v\in\mathcal{V})-\mathbb{E}[f(U_v^{(N)}:v\in\mathcal{V})]|\geqslant\delta)\leqslant 4e^{-N\delta^2/12L^2}$$

定理 *4.1* 的证明。 我们首先将引理 4.3 中的测地距离与其他更适用于随机矩阵理论的距离联系起来。由于 $\prod_{v\in\mathcal{V}}\mathbb{U}_{N^{\#S_v^{(1)}}}$上的内积是 $\mathbb{M}_{N^{\#S_v^{(1)}}}$上希尔伯特–施密特内积之和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{Tr}_{N^{\#S_v^{(1)}}}}$的限制，因此测地距离（记作 d_{geo}）有上界希尔伯特–施密特距离d_{HS} ，其定义为

$$d_{HS}((U_v)_{v\in\mathcal{V}},(U'_v)_{v\in\mathcal{V}})^2=\sum_{v\in\mathcal{V}}\mathrm{Tr}_{N^{\#S_v^{(N)}}}((U_v-U'_v)^*(U_v-U_v)).$$

接下来，令 d_∞ 为如下定义的算子范数距离:

$$d_\infty((U_v)_{v\in\mathcal{V}},(U'_v)_{v\in\mathcal{V}})=\max_{v\in\mathcal{V}}\|U_v-U'_v\|.$$

由于希尔伯特–施密特范数不小于算子范数，因此我们有 $d_\infty\leqslant d_{HS}$。这一讨论的结论是 $d_\infty\leqslant d_{\mathrm{geo}}$，因此，关于算子范数为 L-利普希茨的任何函数，关于 d_{geo}都必须是 L-利普希茨的。

现在考虑函数 $f:\prod_{v\in\mathcal{V}}\mathbb{U}_{N^{\#S_v^{(1)}}}\to\mathbb{C}$，其定义如下:

$$f^{(N)}(U_v:v\in\mathcal{V})=\left\langle\xi^{\otimes\mathcal{S}},\lambda_{c(1)}^{(N)}(U_{c(1)}A_1^{(N)}U_{c(1)}^*)\dots\lambda_{c(k)}^{(N)}(U_{c(k)}A_k^{(N)}U_{c(k)}^*)\xi^{\otimes\mathcal{S}}\right\rangle.$$

由于我们假设 $\|A_j^{(N)}\|$ 有一个上界（与 N 无关），而酉矩阵在算子范数下的范数当然不超过 1，因此不难验证

$$\lambda_{c(1)}^{(N)}(U_{c(1)}A_1^{(N)}U_{c(1)}^*)\dots\lambda_{c(k)}^{(N)}(U_{c(k)}A_k^{(N)}U_{c(k)}^*)$$

是关于定义域中的 $(U_v)_{v\in\mathcal{V}}$ 和目标空间中的算子范数的利普希茨函数。由于 $\xi^{\otimes\mathcal{S}}$ 是单位向量，因此我们可以看出， $f^{(N)}$ 关于

d_∞ 是利普希茨的，因此关于 d_{geo} 也是利普希茨的，其利普希茨常数为 L，且与 N 无关。因此，根据引理 4.3,

$$\mathbb{P}(|f^{(N)}(U_v^{(N)} : v \in \mathcal{V}) - \mathbb{E}[f^{(N)}(U_1^{(n)}, \dots, U_m^{(n)})]| \geqslant N^{-1/3}) \leqslant 4e^{-N \cdot N^{-2/3}/12L^2}.$$

由于 $\sum_{N=1}^{\infty} e^{-N^{1/3}/12L^2} < \infty$, 博雷尔–坎特利引理表明，几乎必然地，当 N充分大时，有

$$|f^{(N)}(U_v^{(N)} : v \in \mathcal{V}) - \mathbb{E}[f^{(N)}(U_v^{(N)} : v \in \mathcal{V})]| < N^{-1/3},$$

因此，几乎必然地,

$$\lim_{N\to\infty} \Big| \Big\langle \xi^{\otimes \mathcal{S}}, \lambda_{c(1)}^{(N)}(U_{c(1)}^{(N)} A_1^{(N)} (U_{c(1)}^{(N)})^*) \dots \lambda_{c(k)}^{(N)}(U_{c(k)}^{(N)} A_k^{(N)} (U_{c(k)}^{(N)})^*) \xi^{\otimes \mathcal{S}} \Big\rangle$$
$$- \mathbb{E} \Big\langle \xi^{\otimes \mathcal{S}}, \lambda_{c(1)}^{(N)}(U_{c(1)}^{(N)} A_1^{(N)} (U_{c(1)}^{(N)})^*) \dots \lambda_{c(k)}^{(N)}(U_{c(k)}^{(N)} A_k^{(N)} (U_{c(k)}^{(N)})^*) \xi^{\otimes \mathcal{S}} \Big\rangle \Big| = 0. \quad (4.25)$$

现在结合命题 4.2 中的 (4.25) 与 (4.8)，并应用三角不等式，我们得到定理 4.1 中所断言的结论 (4.1)。□

References

[ACD+21] Benson Au、Guillaume C´ebron、Antoine Dahlqvist、Franck Gabriel 和 Camille Male。《大型随机矩阵的对角线上的自由性》。 *The Annals of Probability*，49(1):157 – 179，2021。[AGZ09] Greg W. Anderson、Alice Guionnet 和 Ofer Zeitouni。 *An Introduction to Random Matrices*。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2009。[AHLV15] Octavio Arizmendi、Takahiro Hasebe、Franz Lehner 和 Carlos Vargas。非交换概率中累积量之间的关系。 *Advances in Mathematics*，282:56–92，2015。[AMVB25] Octavio Arizmendi、Saul Rogelio Mendoza 和 Josue Vazquez-Becerra。BMT 独立性。 *Journal of Functional Analysis* 288 2 110712, 2025 ，( ): 。[

BB24] Remi Bonnin 和 Charles Bordenave。张量自由性。 *arXiv preprint arXiv:2407.18881*，2024。[BG97] Gerard Ben Arous 和 Alice Guionnet。维格纳定律的大偏差与 Voiculescu 的非交换熵。 *Probab Theory Relat Fields*，108:517–542，1997。[Bia98] Philippe Biane。对称群的表示与自由概率。 *Advances in Mathematics*，138 1 126 181，1998 ( ): – 。[BLS96] Marek Bo˙zejko、Michael Leinert 和 Roland Speicher。条件自由随机变量的卷积与极限定理。 *Pacific Journal of Mathematics*，175(2):357–388，1996。[CC21] Ian Charlesworth 和 Benoˆıt Collins。 ε-自由独立性的矩阵模型。 *Archiv der Mathematik*，116 5 585 600，2021 ( ): – 。[CdSH+25] Ian Charlesworth、Rolando de Santiago、Ben Hayes、David Jekel、Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli 和 Brent Nelson。图乘积的随机置换矩阵模型。 *Doc. Math.*，30(5):1231–1269，2025。[CF17] Martijn Caspers 和 Pierre Fima。算子代数的图乘积。 *J. Noncommut. Geom*，11 1 367 411，2017 ( ): – 。[C´S06] Benoˆıt Collins 和 Piotr ´Sniady。关于酉群、正交群和辛群上的 Haar 测度的积分。 *Communications in Mathematical Physics*，264(3):773–795，2006。[CSY] Guillaume C´ebron、Patrick Oliveira Santos 和 Pierre Youssef。 ε-独立性中心极限定理的图子理论方法。预印本，arXiv:2411.13062。[

Gab15] Franck Gabriel。置换不变随机矩阵的组合理论 I：分拆、几何与重整化。 *arXiv preprint arXiv:1503.02792*，2015。[GS02] Anis Ben Ghorbal 和 Michael Sch¨urmann。随机独立性的非交换概念。载于 *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*，第133卷，第531–561页。剑桥大学出版社，2002。[GZ00] Alice Guionnet 和 Ofer Zeitouni。《大型矩阵谱测度的集中性》 *Electronic Communications in Probability* 5 119 136, 2000 ，(none): – 。

[HJNS21] Ben Hayes、David Jekel、Brent Nelson 和 Thomas Sinclair。自由积中吸收的随机矩阵方法。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，2021(3):1919–1979，2021。[JL20] David Jekel 和 Weihua Liu。由树定义的非交换独立性幺半群。 *Dissertationes Mathematicae* 553 1 100, 2020 ，: – 。[

JOW25] David Jekel、Lahcen Oussi 和 Janusz Wysocza´nski。自由、单调和布尔独立性混合的一般极限定理。 *Electron. J. Prob.*，30:145:1–50，2025。[Kre72] Germain Kreweras。关于循环的非交叉分拆。 ，( ): – 。

[KW13] Anna Kula 和 Janusz Wysocza
ńska。布尔无关型中心极限定理的一个例子。*Probab. Math. Statist* 33 2 341 352, 2013。[Led01] Michel Ledoux。*The concentration of measure phenomenon* 89 *Mathematical Surveys and Monographs*，第卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。[Leh02] Franz Lehner。自由累积量与连通分拆的枚举。*European J. Combin.*，23 8 1025 1031, 2002 ( ): – 。[Leh04] Franz Lehner。非交换概率论中的累积量 I：非交换可交换系统。*Mathematische Zeitschrift*, 248(1):67–100，2004。[Lei04] Tom Leinster。*Higher Operads Higher Categories* 298 *London Mathemical Society Lecture Notes Series*，，第卷。剑桥大学出版社，。2004。[Mec19] Elizabeth S. Meckes。*The Random Matrix Theory of the Classical Compact Groups*。剑桥数学论著。剑桥大学出版社，2019。[ML19] Siddhardh C. Morampudi 和 Chris R. Laumann。具有随机空间局域相互作用的多体系统。*Phys. Rev. B*，100:245152，2019年12月。[M-lo04] Wojciech M
λ
lotkowski。-自由概率。*Infinite-dimensional Analysis Quantum Probability and Related Topics* 7 27 41, 2004
，，,: – 。[Mur00] Naofumi Muraki。单调卷积与单调 Lévy–Khintchine 公式。*preprint*，2000。[Mur03] Naofumi Muraki。五种独立性作为自然积。*Infinite Dimensional Analysis Quantum Probability and Related Topics* 6 03 337 371, 2003
，，( ): – 。[NS06] Alexandru Nica 和 Roland Speicher。*Lectures on the combinatorics of free probability*，第13卷。剑桥大学出版社，2006。[Spe97] Roland Speicher。自由概率论与非交叉分拆。*Séminaire Lotharingien de Combinatoire [electronic only]* 39 39 38, 1997
，:B c– 。[SW97] R. Speicher 和 R. Woroudi。布尔卷积。载于 *Free Probability Theory (Waterloo, ON, 1995)*，*Fields Institute Communications* 第12卷，第267–279页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。[SW16] Roland Speicher 和 Janusz Wysocza
ńska。经典独立性与自由独立性的混合。*Archiv der Mathematik* 107 445 453, 2016
，: – 。[Tuc10] Gabriel H Tucci。自由随机变量几何平均的极限定律。*Indiana University mathematics journal* 1 13, 2010
，第 – 页。[Voi07] Dan Voiculescu。自由独立非交换随机变量的乘法。载于 *Lectures on Probability Theory and Statistics: Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXVIII-1998*，第308–313页。Springer，2007。[Wys10] Janusz Wysocza
ńska。与对称锥相关的 bm-独立性和 bm中心极限定理。*Infinite Dimensional Analysis Quantum Probability and Related Topics*，13(03):461–488，2010。

CNRS, MAP5
Université Paris Cité
45 rue des Saints-Pères, F-75006, Paris, France
Email address: nicolas.gilliers@u-paris.fr
Department of Mathematical Sciences
University of CopenhagenUniversitetsparken 5,
2100 København Ø, Denmark*Email address*: daj@math.ku.dk