arXiv:2601.15243v1 [math.AC] 21 Jan 2026

KOSZUL 二项式边理想

ADAM LACLAIR、MATTHEW MASTROENI、JASON MCCULLOUGH 和 IRENA PEEVA

Abstract. 由于图的二项式边理想总是由与图的边相对应的齐次二次多项式生成，因此自这类理想首次被定义以来，许多作者一直在研究二项式边理想何时定义 Koszul 代数。已有若干部分结果，包括对拥有二次 Gr¨obner 基的二项式边理想的刻画。然而，决定 Koszul 二项式边理想的图的完整刻画始终未能实现。受我们近期关于刻画图拟阵的分次 M¨obius 代数何时为 Koszul 的研究启发，我们一劳永逸地回答了这一问题：证明一个图定义 Koszul 二项式边理想，当且仅当它是强弦且无爪的。

1. Introduction

本文中，$\Bbbk$ 表示一个域。考虑多项式环 $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$，其标准分次满足：对每个 i，$\deg(x_i) = 1$；设 I 为一个分次理想。若分次 $\Bbbk$-代数$Q = S/I$ 在 Q上有线性自由分解，即其分解中微分矩阵的元素均为线性形式，则称其为 Koszul 代数；在这种情形下，也称理想 I 是 Koszul 的。Koszul 代数由 Priddy [37]正式定义（他考虑了更一般的情形，其中也包括非交换情形）。它们出现在代数、几何和拓扑学的许多领域。它们有两个格外优良的性质：$\Bbbk$的最小自由分解可以明确地描述为广义 Koszul 复形（见 [28, 8.12]）；此外，Q 的希尔伯特函数与 $\Bbbk$ 的 Poincar´e 级数之间存在一个优雅的公式（后者是 $\Bbbk$ 在 Q上的最小自由分解的生成函数），见 [28, 8.5]。交换 Koszul 代数的另一个重要性质是，每个有限生成模在其上都有有限正则性[1, 2]。论文 [14], [12], [23], 和 [36]对 Koszul 代数作了出色的综述。众所周知，若 I 是 Koszul 代数，则它由二次齐次多项式生成；在这种情形下，我们称Q和 I 是二次的。

图所产生的二次分次 $\Bbbk$-代数的 Koszul 性质已得到研究。设 G 是顶点集为 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$的图。本文中，所有图均假定为简单图，即没有环和重边。从 G出发，可以通过多种构造得到二次分次 $\Bbbk$-代数；我们将讨论其中一些：单项式边理想 $N_G = \big(x_i x_j \,|\, \{i, j\}$ 是 $G\big)$ 中的边，由二次单项式生成，并且总是具有 Koszul 性质。我们也可以考虑环面边环 $A_G = \Bbbk[x_i x_j \,|\, \{i, j\}$ 是 $G]$中的边，Hibi 和 Ohsugi 对 A_G 为二次时给出了刻画。此外，如果图 G 是二分图，他们在 [32] 中证明，A_G 具有 Koszul 性质，当且仅当它是二次的，也当且仅当存在一个二次 Gr¨obner 基。

日期：2026年1月22日。2020 数学学科分类。主要分类：16S37、05C75；次要分类：13P10、05E40、05C25。关键词和短语。Koszul 代数、强弦图、二项式边理想、Gr¨obner 基、自由分解。

我们关注与图 G相关联的二项式边理想这一概念，它推广了经典的行列式理想概念；后者由一个 $(2\times n)$-元不定矩阵的二阶子式生成。

定义 1.1。二项式边理想 J_G 是多项式环

$$J_G = \left(x_i y_j - y_i x_j \;\middle|\; \{i,j\} \text{ is an edge in } G \right)$$

中的理想

$$S_G = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] .$$

记 $R_G = S_G/J_G$。本文中将始终使用这一记号。

二项式边理想最初由 [25]和 [30]独立地引入，作为代数统计中出现的子式理想的一种推广；参见 [26, 第 4]节。二项式边理想还推广了 [13]中研究的梯形行列式理想和相邻子式理想。对此类理想的研究十分广泛，著作 [26] 概述了它们的性质。

事实证明， J_G 的 Koszul 性质与三个特殊图有关，它们定义于图 1.1 中：帐篷图、爪图和网。

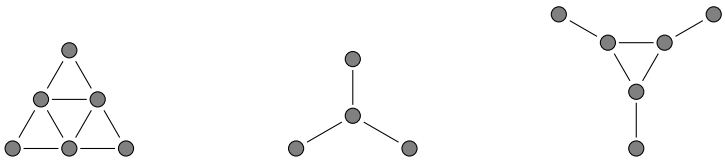


FIGURE 1.1. 帐篷图（左）、爪图（中）和网（右）

关于二项式边理想的 Koszul 性质的研究由 Ene、Herzog 和 Hibi 于 2014年在 [21]中开启。他们证明，若二项式边理想 J_G 是 Koszul 的，则图G 是弦图 [21, 26], ，也就是说， G 不包含长度大于三的诱导圈。此外，他们发现，爪图的二项式边理想和帐篷图的二项式边理想都不是 Koszul 的。理想 J_G 是多重分次的；由 [26, 7.46]可知，如果J_G 是 Koszul 的，那么 G的任意诱导子图 F 的二项式边理想 J_F 也是 Koszul 的。因此，若 J_G是 Koszul 的，则 G是弦图、无爪且无帐篷。关于二项式边理想的 Koszul 性质，目前已知的结果相当有限，本书 [26]对此作了综述。

本文的主要结果是：在第 2 节中，我们证明了以下关于 Koszul 性质的刻画：

定理 1.2。 二项式边理想 J_G 是 *Koszul*，当且仅当图 G 是弦图、无爪且无帐篷。

我们还在推论 2.4 中证明，上述条件等价于 G 是强弦且无爪。

证明一个理想具有 Koszul 性质的常用方法是证明它有一个二次 Gr¨obner 基。对于没有二次 Gr¨obner 基的情形，要证明其具有 Koszul 性质非常困难，目前已知的此类结果寥寥无几。例如，Caviglia 和 Conca 研究了 [11], 中 Veronese 三次曲面的投影的 Koszul 性质，而 Hibi 和 Ohsugi 在 [33]中给出了这类环面环。已知二项式边理想

J_G 具有二次 Gr¨obner 基，当且仅当图 G是闭的 [25, 1。1]和 [16,3。4]。在这种情形下， J_G 具有极为罕见的性质：其分次 Betti 数与其字典序初始理想的分次 Betti 数相同 [35]。根据 [26, 7。10]， G 是闭的，当且仅当它是弦图、无爪、无帐篷且无网。因此，任何 G包含网作为诱导子图的 Koszul 二项式边理想都没有二次 Gr¨obner 基。这样的例子有很多，网本身就是其中之一。这与一对图的二项式边理想形成鲜明对比；对于后者，这两个概念根据 [3]等价。

我们将在第 2 节证明定理 2 的“如果”部分。证明的关键思想是，这类图是强弦图且无爪图，从而可以分别对顶点和边进行具有特殊性质的排序。我们的证明基于这类图的性质，采用归纳论证。尽管“仅当”部分已由 Ene、Herzog 和 Hibi [21], [26, 第 7.4 节1], 证明，但我们将在第 4 节给出一个自包含且与特征无关的证明，不依赖计算机代数计算。在第 5 节，我们刻画具有较小团数的强弦无爪图，并说明这一刻画不能推广到具有更高团数的图。

2. Koszul Binomial Edge Ideals

本节旨在证明我们的主要结果定理 1.2 中的充分条件：

定理 2.1。 如果一个简单图 G 是弦图、无爪图且无帐篷图，那么其二项式边理想 J_G 是 ***Koszul*** 的。

我们首先介绍所需的图论基础。关于图论的更多内容，请参阅 [39] 和 [9]。在全文中，我们假设 G 是一个有限简单图。设$G = (V(G)\ E(G))$的顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。为简便起见，我们可以写作 $\{i, j\} \in G$，表示 $\{i, j\} \in E(G)$；也可以写作 ij，表示边 $\{i, j\}$。顶点 i 在 G 中的邻点集，是由所有满足 $\{i, j\}$ 为 G的一条边的顶点 j 组成的集合 $N(i)$。集合 $N[i] = N(i) \cup \{i\}$ 称为 i的闭邻域。 G的子图 H称为诱导子图，如果对于任意 v_i、 $v_j \in V(H)$，当 $v_iv_j \in E(G)$时，有 $v_iv_j \in E(H)$。完全图包含不同顶点之间所有可能的边。长度为 n 的圈图 C_n 具有 n个顶点 v_1、……、 v_n，以及边 v_iv_{i+1}（其中 $1 \le i \le n$），并约定 v_{n+1}与 v_1相同。

如果一个**弦图**没有长度至少为四的诱导圈，则称其为**弦图**。关于弦图有若干种刻画；我们重点介绍涉及顶点排序和特殊类型顶点的两种刻画。

图 G的**完美消除序**是其顶点的一个排序 v_1，……， v_n，满足：只要 v_iv_j， $v_iv_k \in E(G)$ 且 $i < j$， k，就有 $v_jv_k \in E(G)$。如果 v是 G 的**单纯顶点**，则称 $N[v]$ 为一个团，即 G 在集合 $N[v]$ 上的诱导子图是完全图。在这种情形下， $N[v]$是 G的一个极大团。如果 G具有一个完美消除序 v_1，……， v_n，则容易看出，对于所有 i， v_i都是诱导子图 $G_i = G[v_i, \dots, v_n]$ 的单纯顶点。

定理 2.2([19])。对于图 G，以下命题等价：

(a) G 是弦图。(b) G 具有完美消除序。(c) G 的每个诱导子图都有一个单纯顶点。

我们将使用更强的强弦图概念。在 G 的顶点集上，一个**强消去序** v_1，……， v_n是一个完美消除序，满足：每当

v_iv_k，v_kv_j，$v_iv_\ell \in E(G)$ 满足 $i < k < \ell$ 和 $i < j$ 时，我们也有 $v_jv_\ell \in E(G)$。图 G 被称为**强弦图**，当且仅当它具有强消去序。

与弦图的情形类似，强弦图也可以用特殊类型的顶点来刻画。若顶点 v 属于 G，且 $\{N[w] \mid w \in N[v]\}$ 中不同集合的集族按包含关系全序，则称其为**简单的**。特别地，每个简单顶点也是单纯的。若 $v_1, \ldots, v_n$ 是 G 的强消去序，则容易看出，对于所有 i，顶点 v_i 都是诱导子图 $G_i := G[v_i, \ldots, v_n]$ 的简单顶点。

强弦图也可以用禁诱导子图来刻画。若图 T 对某个 n 具有如下性质，则称其为**-蹦床图**：它有顶点 $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n$，并且对于所有 $i \neq j$ 都有边 v_iv_j，对于所有 i 都有边 w_iv_i，对于所有 $i < n$ 都有边 w_iv_{i+1}，此外还有边 w_nv_1。值得注意的是，n-蹦床图有时也称为 n-太阳图；在二项式边理想的相关文献中，3-蹦床图也称为**帐篷图**。下方的图 2.1 展示了 4-蹦床图。令 $w_{i+n} = w_i$，注意到对于所有，$w_i \in N[v_{i+1}] \setminus N[v_{i+2}]$ 且 $w_{i+2} \in N[v_{i+2}] \setminus N[v_{i+1}]$

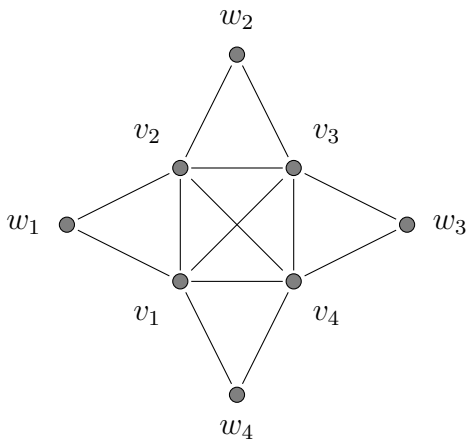


FIGURE 2.1. 4-蹦床图

i 因为 $n \geq 3$。因此，对于所有 i，集合 $N[v_{i+1}]$ 和 $N[v_{i+2}]$ 均不可比较。因此，n-蹦床图中没有顶点是简单顶点，所以没有蹦床图是强弦图。

定理 2.3 ([22, 3.3, 4.1])。对于图 G，以下各项等价 *t:*

(a) G 是强弦图。(b) G 的每个诱导子图都有一个简单顶点。

(c) G 是弦图，并且对于每个 $n \geq 3$，均为无 n-蹦床图。

将上述定理应用于我们在定理 2 中考虑的图，可得：

推论 2.4。图 G 是弦图、无爪图且无帐篷图，当且仅当它是强弦图且无爪图。

证明。注意，3-蹦床图就是帐篷图。因此，若 G是强弦且无爪的，则 G 显然是弦图、无爪且无帐篷。反过来，若 G 是弦图、无爪且无帐篷，则 G 不含 n-蹦床图，因为每个含有 $n > 3$ 的 n-蹦床图都包含一个诱导爪，因此 G 是强弦的。□

在本节余下部分中，我们假设 G 是一个顶点集为 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的简单图。

如果 i 是 G 的单纯顶点，那么 $N[i]$ 就是包含 i 的唯一极大团。这引出了下面的定义。

定义 2.5. 设 G 是一个弦图。

- 图 G 的一条**单纯边**是指一条边 e，它恰好包含在 G 的一个极大团中，且 $G \setminus e$ 是弦图。

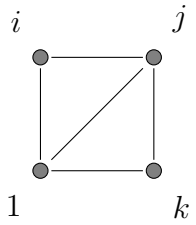
- 如果一条单纯边不属于 G的任何诱导爪，那么它就是**避爪的**。
- 图 G 的边的一个**避爪完美边消去序**是一个排列 $e_1, \ldots, e_m$，使得对每个 i，e_i 都是 $G \setminus \{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ 的一条避爪单纯边。

注 2.6. 提醒读者注意，文献中至少还有另一种单纯边的概念。Dragan [20] 将强可排序图定义为强弦图和弦二分图的共同推广，并用满足以下条件的边 $e = \{i, j\}$ 刻画它们：任意两个不同的顶点 $k \in N(i)$和 $l \in N(j)$均相邻；他将这样的边称为单纯边。对于弦图，Dragan 意义下的每条单纯边都是上述定义的单纯边。然而，我们的单纯边概念严格弱于 Dragan 的概念，因为长度为 3 的路径中间的边在我们的意义下是单纯边，但在 Dragan 的意义下不是。

引理 2.7。设 G 是一个至少含有一条边的强弦图。那么 G 有一条单纯边 e，使得 $G \setminus e$ 是强弦图。此外，可以选择单纯边 e，使得若 G 是无爪图，则 $G \setminus e$ 也是无爪图。

证明。不妨假设 G 的顶点已标记，使得 1，2，.....，n 是一个强消去序。那么 1 是 G 的简单顶点，并且我们可以选取 j，使得 $N[j]$ 在全序集 $\{N[i] \mid i \in N[1]\}$ 中极大。我们还注意到 $N[1]$ 在 $\{N[i] \mid i \in N[1]\}$ 中极小。由于 1 尤其是 G 的一个单纯顶点，因此 $N[1]$ 是 G 中包含 1 的唯一极大团。

我们断言边 $e = \{1, j\}$ 是单纯边。我们已经证明 $N[1]$ 是 G 中包含 e 的唯一极大团，因此只需证明 $G \setminus e$ 是弦图。若 $G \setminus e$ 不是弦图，则它包含一个长度至少为 4 的诱导圈 C。由于 G 是弦图，e 必定是 C 的唯一一条弦，因此 C 的长度为 4。因此，G 含有一个形如以下的诱导子图



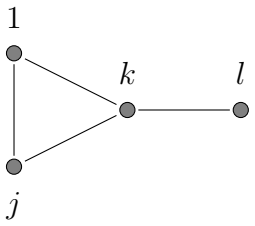
这是不可能的，因为 i，$k \in N[1]$ 而 1 是一个单纯顶点。因此，e 是 G 的单纯边，结论得证。

为证明 $G \setminus e$ 仍然是强弦图，我们注意到 $N_{G \setminus e}[1] = N_G[1] \setminus \{j\}$，并且对所有 $i \neq 1$，j，都有$N_{G \setminus e}[i] = N_G[i]$，因此集合

$$\{N_{G \setminus e}[i] \mid i \in N_{G \setminus e}[1]\} = \{N_G[1] \setminus \{j\}\} \cup \{N_G[i] \mid i \in N_G[1] \setminus \{j\}\}$$

仍然按包含关系全序。因此，1仍是 $G \setminus e$的简单顶点，图$(G \setminus e) \setminus \{1\} = G \setminus \{1\}$ 以2、……、 n 为单纯消去序。因此，1、2、……、 n 是 $G \setminus e$的单纯消去序，所以根据定理 2.3， $G \setminus e$ 是强弦图。

此外，假设我们知道 G 是无爪的。如果 $G \setminus e$ 有一个诱导爪，那么 G 有一个形如以下形式的诱导子图



但这是不可能的，因为 $k \in N[1]$ 意味着 $l \in N[k] \subseteq N[j]$。 □

以下是对 [29, 3 的改进。7]。

命题 2.8。设 G 是一个图，且 $e = \{i, j\} \in E(G)$。记 G_e 为定义在$[n] = \{1, \ldots, n\}$ 上、边集为以下集合的图

$$E(G_e) = E(G \setminus e) \cup \binom{N_{G \setminus e}(i)}{2} \cup \binom{N_{G \setminus e}(j)}{2}.$$

对于 G 中任意包含 e 和 $0 \le t \le s$ 的圈 C: $i = i_0, i_1, \ldots, i_s, i_{s+1} = j$，令

$$g_{C,t} = y_{i_1} \cdots y_{i_t} x_{i_{t+1}} \cdots x_{i_s}.$$

Then

$$J_{G \setminus e} : f_e = J_{G_e} + (g_{C,t} : e \subseteq C \text{ an induced cycle of } G, 0 \le t \le s).$$

我们注意到，定理中的图 G_e 是从 $G \setminus e$ 出发，通过添加边将 e 的端点变为 $G \setminus e$ 的单纯顶点而得到的图。

证明。该命题的陈述恰好是 [29, 3.7] ，只不过去掉了圈 C 为诱导圈这一条件。该定理的陈述中，单项式是按从 i 到 j 的路径在 $G \setminus e$中索引的，但这类路径与包含 e的G 的圈一一对应。我们将证明，只要 C 有一条弦，每个单项式 $g_{C,\ t}$ 都能被一个合适的单项式 $g_{C',\ t'}$ 整除。

设 C: $i = i_0$， i_1， …， i_s， $i_{s+1} = j$是 G中任意一个包含 e的圈。若 C有一条弦 $\{i_p, i_q\}$，其中 $p < q$，则存在一个圈 C': $i = i_0$， i_1， …， i_p， i_q， i_{q+1}， …， $i_{s+1} = j$，使得

$$g_{C',t} = y_{i_1} \cdots y_{i_t} x_{i_{t+1}} \cdots x_{i_p} x_{i_q} \cdots x_{i_s}$$

整除 $g_{C,\ t}$，对所有 $t < p$均成立，

$$g_{C',p} = y_{i_1} \cdots y_{i_p} x_{i_q} \cdots x_{i_s}$$

整除 $g_{C,\ t}$，对所有 $p \le t < q$均成立，并且

$$g_{C',p+t-q+1} = y_{i_1} \cdots y_{i_p} y_{i_q} \cdots y_{i_t} x_{i_{t+1}} \cdots x_{i_s}$$

对所有 $t \ge q$， $g_{C,t}$ 均整除。 □

推论 2.9. 设 G 为弦图，且 $e \in E(G)$ 为避爪单纯边。设 U 为包含 e的 G 的唯一极大团。那么

$$J_{G \setminus e} : f_e = J_{G \setminus e} + (x_k, y_k \mid k \in U \setminus e).$$

证明。 根据前面的命题，我们知道 $J_{G\setminus e}$： $f_e = J_{G_e} + L$，其中

$$L = (g_{C,t} : C \text{ is an induced cycle of } G, e \subseteq C, \text{ and } 0 \leq t \leq s).$$

如果 $e = \{i, j\}$，那么对于每个 $k \in U \setminus e$，都有一个诱导 3-圈 i， j， k 使得

$$(x_k, y_k \mid k \in U \setminus e) \subseteq L.$$

另一方面， G 的每个诱导圈长度都是 3，因为 G 是弦图，所以 L =(x_k， $y_k \mid k \in U \setminus e$)。

接下来，我们证明 $J_{G_e} + L = J_{G\setminus e} + L$。由于 $G \setminus e$ 是 G_e的子图，显然 $J_{G\setminus e} + L \subseteq J_{G_e} + L$。 J_{G_e} 中而不在 $J_{G\setminus e}$ 中的每个额外生成元都具有如下形式：f_k、$_l$，其中 k、$l \in N_{G\setminus e}(i)$，或 k、$l \in N_{G\setminus e}(j)$。如果 k、$l \in N_{G\setminus e}(i)$，则 $\{i, j, k, l\}$上的诱导子图以 $\{j, k\}$、 $\{j, l\}$或 $\{k, l\}$ 为一条边，因为 e 不属于 G的诱导爪。如果 $\{k, l\}$ 是一条边，则 f_k、$_l \in J_{G\setminus e}$。另一方面，如果 $\{j, l\}$ 或 $\{j, k\}$ 是 G的一条边，那么 $\{i, j, l\}$ 或 $\{i, j, k\}$ 是包含 e的团，因此 l 或 k 属于 U，因为 e 是单纯的；在这种情况下，显然 f_k、$_l \in L$。无论哪种情形，我们都得到 f_k、$_l \in J_{G\setminus e} + L$；如果 k、$l \in N_{G\setminus e}(j)$，论证完全类似。因此，我们得到了所声称的 $J_{G_e} + L = J_{G\setminus e} + L$。□

我们现　在准备证明主定理。回忆定义 1.1 中的记号　　.

定理 *2.1* 的证明。 我们对 G 的边数进行归纳。若 G 没有边，则 $J_G = 0$，结论显然成立。因此，我们可以假设 G 至少有一条边，并且该定理对所有边数更少的无爪强弦图都成立。在这种情形下，由于 G 是强弦且无爪的，根据引理 2.7，它有一条单纯边 e，使得 $G \setminus e$ 是强弦且无爪的。由于 $G \setminus e$ 是一个边数少于 G 的无爪强弦图，根据归纳法，我们知道 $R_{G\setminus e}$ 是 Koszul 的。我们将证明 R_G 也具有 Koszul 性。

令 K 为包含 e 的 G 的唯一极大团。推论 2.9 给出了 $R_{G\setminus e}$-模的正合列

$$0 \to R_H(-2) \xrightarrow{f_e} R_{G\setminus e} \to R_G \to 0,$$

其中 H 是通过删除 $K \setminus e$的顶点从 $G \setminus e$ 得到的诱导子图。由于H 是 $G \setminus e$的诱导子图，因此 R_H 是 $R_{G\setminus e}$的代数收缩；这意味着我们有齐次嵌入 i： $R_H \subset R_{G\setminus e}$ 和齐次满射φ： $R_{G\setminus e} \longrightarrow R_H$，使得 $\varphi i = id$ （关于代数图环境中代数收缩的其他应用，参见 [38] ）。结合 $R_{G\setminus e}$ 是 Koszul 这一假设，由 [31, 1.4]可知，R_H 作为 $R_{G\setminus e}$ 上的模具有线性自由分解。现在，将此结论与上述短正合列结合起来，可得 $\mathrm{reg}_{R_{G\setminus e}} R_G \leq 1$。由此，根据 [12, 定理 2]， R_G 是 Koszul。□

推论 2.10. 设 G 是弦图，且 $e \in E(G)$ 是 G的一条避爪单纯边。若 $G \setminus e$ 是强弦且无爪图，则 G 也是如此。

证明。 根据我们的主定理 1.2，环 $R_{G\setminus e}$ 是 Koszul。由上面的证明可知，R_G 也具有 Koszul 性。再次应用我们的主定理，可得 G是强弦且无爪的。□

推论 2.11. 一个弦图是强弦且无爪的，当且仅当它具有一个避爪的完美边消去序。

证明。(⇒): 我们对 G的边数进行归纳。若 G没有边，则结论显然成立，因此可以假设 G 至少有一条边，并且所有边数更少的无爪强弦图都具有一个避爪的完美边消去序。由引理 2.7，存在 G 的一条单纯边 e_1，使得 $G \setminus e_1$ 是强弦且无爪的。注意，由于 G 无爪，e_1 是避爪的。由归纳假设，$G \setminus e_1$ 具有一个避爪的完美边消去序 $e_2, \ldots, e_m$，因此 $e_1, e_2, \ldots, e_m$ 是 G的一个避爪完美边消去序。

(⇐): 设 e_1、……、e_m 是 G的避爪完美边消去序。我们再次对 m使用归纳法。显然 $m = 0$的情形平凡，因此可以假设 $m \geq 1$，并假设该推论对所有边数更少且具有避爪完美边消去序的弦图均成立。由于 e_1 是 G的一条避爪单纯边，我们特别知道 $G \setminus e_1$是弦图；又因为 $G \setminus e_1$具有避爪完美边消去序 e_2、……、e_m，由归纳假设可知 $G \setminus e_1$是强弦且无爪的。因此，推论 2.10 表明 G也强弦且无爪。□

3. Closed graphs and quadratic Gröbner bases

下一节将用到闭图的概念，这里先回顾其性质。

图 G 的**闭序** 是其顶点的一种排列 v_1、……、v_n，满足：只要v_iv_j，$v_iv_k \in E(G)$ 且 $i < j$，k或 $i > j$，k，就有 $v_jv_k \in E(G)$。如果图 G 具有闭序，则称其为**闭图** 。不难验证，每个闭序都是强消去序。（根据 $k < j$ 或$j < k$，需要考虑两种情形。）因此，每个闭图都是强弦图。

闭图的重要性在于，它们刻画了二项式边理想何时具有二次 Gr¨obner 基。因此，任何闭图的二项式边理想都是 Koszul 的。

定理 3.1 ([25, 1.1][16, 3.4])。 对于图 G，以下各项等价:

(a) J_G 关于某个单项式序具有二次 *Gr¨obner* 基。(b) J_G 关于某个字典序具有二次 *Gr¨obner* 基。(c) G 是闭图。

记

$$N^{\geq}[v_i] = \{v_j \in N[v_i] \mid j \geq i\} \qquad N^{\leq}[v_i] = \{v_j \in N[v_i] \mid j \leq i\}$$

为顶点 v_i 的邻居集合，它们分别是在给定顺序中位于 i 之后或之前的顶点，则我们可以如下刻画 G何时具有闭序。

命题 **命题 3.2** ([16, 4。 8][15, 2。 2])。 对于图 G，以下条件等价 :

(a) $v_1, \ldots, v_n$ 是 G的闭序。(b) 对于所有 i，集合 $N^{\leq}[v_i]$和 $N^{\geq}[v_i]$都是团。(c) 集合 $N^{\geq}[v_i]$是团，并且对于所有 i，$N^{\geq}[v_i] = [v_i, v_{i+r}]$，其中 $r = \left|N^{\geq}[v_i]\right|$。

图 G 是交图，当且仅当存在一个集合族 $\{F_i\}_{i \in V(G)}$ ，使得$ij \in E(G)$ 当且仅当 $F_i \cap F_j \neq \varnothing$。图 G 是区间图，当它是实数开区间集合族的交图时成立。如果可以选择这个区间族，使得没有任何区间真包含另一个区间，那么 G 就是一个**真区间图**。图 G 的**真区间序**是其顶点的一种排序 $v_1, \ldots, v_n$，满足：只要$v_iv_k \in E(G)$ 且 $i < j < k$，那么 $v_iv_j, v_jv_k \in E(G)$。由命题 3.2 可知，每个真区间序都是闭序，反之亦然。

The命题 3.3 ([17, 2。2][26, 7。10])。 对于图 G，以下各项等价 :

(a) G 是闭图。(b) G 具有真区间序。(c) G 是真区间图。(d) G 是弦图、无爪、无网且无帐篷。

网（见图 1.1）是二项式边理想为 Koszul 的非闭图中最小的例子； [26, 7.56] 中给出了 Koszul 过滤论证。主定理 1.2 表明，是否含有诱导网，恰好是那些为 Koszul 的二项式边理想与那些具有二次 Gr¨obner 基的二项式边理想之间的区别。

4. Obstructions to Koszulness

如引言中所述，定理 1.2 的“仅当”方向已由 Ene、Herzog 和 Hibi 证明，即:

定理 4.1 ([21], [26, 第 7.4 节。1])。 如果二项式边理想 J_G 是 *Koszul* 的，那么图 G 是弦图、无爪且无帐篷。

他们的论证很容易归结为验证：当 $n \geq 4$ 时， n-圈的二项式边理想、爪图和帐篷图都不是 Koszul；他们通过计算机完成了验证。为完整起见，在下面的三个引理中，我们直接证明：在任意特征下，当 $n \geq 4$ 时， n-圈、爪图和帐篷图的二项式边理想都不是 Koszul。关于 n-圈和爪图的论证相当简短，但帐篷图的推理则更长，也更为复杂。

需要谨慎考虑特征，因为 D'Alì 和 Venturello 已证明[18, 5.15] 对于任意有限素数列表 P，都可以构造具有整数系数的多项式理想，使其模 p 恰好在 $p \in P$ 时不具有 Koszul 性质。此外，还存在这样的图 G ：其在环境多项式环上关于 J_G 的有限分解可能取决于系数域的特征 [5, 7.6], [6, 5.9]。初看起来， R_G 的 Koszul 性质也可能取决于特征，尽管由定理 2.1 可知事实并非如此。

在本节中，对于任意 i 和 j（它们在 G 中不一定相邻），我们记 $f_{i,j} = x_i y_j - x_j y_i$ ；特别地，J_G 由对应于边的 $f_{i,j}$ 生成。

我们将频繁用到关于 Koszul 代数的分次 Betti 数的已知限制。关于自由分解和分次 Betti 数的背景知识，请读者参阅 [34]；这里仅回顾有限生成分次R-模 M 在分次 $\Bbbk$代数 R 上的分次 Betti 数 $\beta_{i,j}^R(M)$ 的定义：

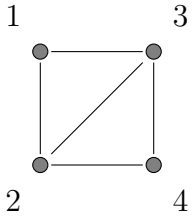
$$\beta_{i,j}^R(M) = \dim_{\Bbbk} \operatorname{Tor}_i^R(M, k))_j.$$

分次 Betti 数可以列入贝蒂表中，其中 $\beta_{i,j}^R(M)$ 位于$i, i+j$'个位置。我们还将使用 Blum 关于对称代数 $\mathrm{Sym}_R(M)$ 何时为 Koszul 的以下结果。

命题 4.2 ([4, 3.1]). 设 R 是标准分次 $\Bbbk$-代数， M 是有限生成分次 R-模，且 $\mathrm{Sym}_R(M)$ 是 *Koszul* 代数。那么 R 也是 *Koszul* 代数，并且对于所有 i，$\mathrm{Sym}_R^i(M)$在 R 上有线性自由分解。特别地， M 在 R 上有线性自由分解。

引理 4.3。 设 C_n 为 n-圈。则环 R_{C_n} 不是 *Koszul* 的。

证明。 对于 $n \geq 5$，参见 [26, 7 中的证明。47] 其中证明了 J_{C_n} 具有一个度为 n 的最小第一关系子；对于 $n \geq 5$，如果 J_{C_n} 是 Koszul 的，这将与 [27, 引理 4] 矛盾。对于 $n = 4$，考虑下方所示的图 G。



并令 $e = \{2, 3\}$。注意 $G \smallsetminus e = C_4$。我们将证明 $\beta_{2,4}^S(R_{C_4}) = 9 > \binom{4}{2}$，因此根据 [8, 3.4]， R_{C_4} 不是 Koszul。

注意 $S_G = \Bbbk[x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4]$. 首先，我们观察到 G 的标记是闭的，因此 R_G 关于字典序 $x_1 > \cdots > x_4 > y_1 > \cdots > y_4$ 有一个二次 Gr¨obner 基。特别地，初始理想为

$$\mathrm{in}_>(J_G) = (x_1y_2, x_1y_3, x_2y_3, x_2y_4, x_3y_4),$$

因此它是一个有 6 个顶点的路径的边理想。利用 [7, 3.4, 3.5], ， 可以验证 $S_G/$ 在 $>(J_G)$ 中的贝蒂表为:

	0	1	2	3	4
0	1	–	–	–	–
1	–	5	4	–	–
2	–	–	3	4	1

由于 G 是一个闭图，$\beta_{i,j}^R(R_G) = \beta_{i,j}^{S_G}(S_G/$ 在 $>(J_G)$ 中)，对所有 i， j 均成立（参见 [35, 1.3]）。

为说明 $\beta_{2,4}^S(R_{C_4}) = 9$，注意到定理 2.8 给出了正合列

$$0 \to S_G/(x_1, y_1, x_4, y_4)(-2) \xrightarrow{f_{2,3}} R_{C_4} \to R_G \to 0,$$

由此我们得到正合列

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Tor}_3^{S_G}(R_G, \Bbbk)_4 \to \mathrm{Tor}_2^{S_G}(S_G/(x_1, y_1, x_4, y_4), \Bbbk)_2 \to \mathrm{Tor}_2^{S_G}(R_{C_4}, \Bbbk)_4 \\ \to \mathrm{Tor}_2^{S_G}(R_G, \Bbbk)_4 \to \mathrm{Tor}_1^{S_G}(S_G/(x_1, y_1, x_4, y_4), \Bbbk)_2 = 0. \end{aligned}$$

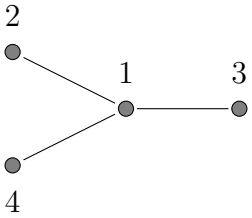
由于 x_1， y_1， x_4， y_4 是 S_G 上的正则序列，我们有

$$\beta_{2,4}^S(R_{C_4}) = \beta_{2,2}^{S_G}(S_G/(x_1, y_1, x_4, y_4)) + \beta_{2,4}^{S_G}(R_G) = 6 + 3 = 9$$

如所要求。 □

引理 4.4。 令 G 为爪图。则环 R_G 不是 *Koszul*。

证明。 考虑如下图所示标记的爪图 G



因此，二项式边理想为 $J_G = (f_{1,2}, f_{1,3}, f_{1,4}) \subseteq S_G = \Bbbk[x_1, y_1, \ldots, x_4, y_4]$。若 $e = \{1, 4\}$，则由定理 2.8 可知 $J_{G\smallsetminus e}$：$f_e = J_{G_e} = (f_{1,2}, f_{1,3}, f_{2,3})$，因为 $G \smallsetminus e$ 没有诱导圈。因此，$J_{G\smallsetminus e}$：$f_e = I_2(M)$，其中

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix},$$

它具有一个 Hilbert–Burch 分解。再次对 $G' = G \smallsetminus \{4\}$ 和边 $e' = \{1, 3\}$ 应用定理 2.8，可得 $(f_{1,2}) : f_{1,3} = J_{G'\smallsetminus e'}$：$f_{e'} = J_{G'_{e'}} = (f_{1,2})$，因此 $J_{G\smallsetminus e} = (f_{1,2}, f_{1,3})$ 是一个完全交。我们可以构造一个显式的链映射，将乘以 $f_{1,4}$ 的映射提升为 $S_G/I_2(M)(-2) \to R_{G\smallsetminus e}$，如下所示。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & S_G(-2) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} f_{2,3} & -f_{1,3} & f_{1,2} \end{pmatrix}} & S_G(-4)^3 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}} & S_G(-5)^2 & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{1,4}} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} f_{2,4} & -f_{1,4} & 0 \\ -f_{3,4} & 0 & f_{1,4} \end{pmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} -x_4 & -y_4 \end{pmatrix}} & & \\
0 & \longleftarrow & S_G & \xleftarrow[\begin{pmatrix} f_{1,3} & f_{1,2} \end{pmatrix}]{} & S_G(-2)^2 & \xleftarrow[\begin{pmatrix} f_{1,2} \\ -f_{1,3} \end{pmatrix}]{} & S_G(-4) & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

中间垂直映射的第一列来自 Pl¨ucker 关系 $f_{1,2}f_{3,4} - f_{1,3}f_{2,4} + f_{2,3}f_{1,4} = 0$ (参见 [10, 7.2.3])。因此，上述链映射的映射锥给出了 R_G的最小自由分解，其贝蒂表如下：

	0	1	2	3
0	1	–	–	–
1	–	3	–	–
2	–	–	4	2

特别地，因为 $\beta_{2,\ 4}^S(R_G) = 4 > \binom{3}{2}$，我们由 [8, 3.4] 可知 R_G 不是 Koszul。 □

引理 4.5. 设 T 为帐篷图。那么环 R_T 不是 *Koszul*。

证明。 考虑标记如图 4.1 所示的帐篷图 T。令 $G = T \smallsetminus \{$

x

$6\}$，注意到 $R_T \cong \mathrm{Sym}_{R_G}(M)$，其中 M 是该矩阵的余核

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} -y_2 & -y_4 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}.$$

如果 R_T 是 Koszul，那么根据命题 4.2，M 在 R_G 上有线性自由分解。然而，我们将证明 M 有一个极小非线性四阶 syzygy，因此环 R_T 不是 Koszul。

为此，我们首先注意到 G 的标记是闭合的，因此 J_G 关于以 $x_1 > \cdots > x_5 > y_1 > \cdots > y_5$为序的字典序有一个二次 Gr¨obner 基。特别地，初始理想为

$$\mathrm{in}_>(J_G) = (x_1y_2,\ x_1y_3,\ x_2y_3,\ x_2y_4,\ x_3y_4,\ x_3y_5,\ x_4y_5).$$

因此，商 R_G 的单项式基由所有不属于上述单项式理想的单项式组成。我们还注意到，R_G 可通过 $\deg x_i = \deg y_i = \mathbf{e}_i$ 赋予一个 $\mathbb{Z}^5$-分次，其中 $\mathbf{e}_i$ 是 $\mathbb{Z}^5$ 的第 i 个标准基向量，而 $\mathrm{Ker}\,\partial_1$ 关于

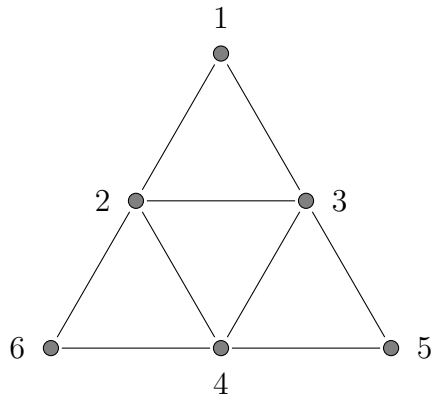


FIGURE 4.1.

此分次是齐次的。我们利用此分次来简化 M 的最小自由分解的线性条带前几项的计算。

设 $u = (u_1, u_2) \in \mathrm{Ker}\,\partial_1 \subseteq R_G(-\mathbf{e}_2) \oplus R_G(-\mathbf{e}_4)$ 是一个非零的、度为 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^5$ 的齐次元素。由于 $(R_G)_{\mathbf{b}} = 0$ 若 $\mathbf{b}$ 的任一分量为负数，我们必有 $\mathbf{e}_2 \leq \mathbf{a}$ 或 $\mathbf{e}_4 \leq \mathbf{a}$，其中 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_5) \leq (a_1, \ldots, a_5) = \mathbf{a}$ 表示 $b_i \leq a_i$ 对所有 i 均成立。若 u 是一个线性 Syzygy，则有 $|\mathbf{a}| = \sum_i a_i = 2$，因此 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_i$、$\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_j$、$\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$，其中 $i \neq 4$ 和 $j \neq 2$。在第一种情形下，对某些 $\alpha, \beta \in \Bbbk$，有 $u = (\alpha x_i + \beta y_i, 0)$，所以由 $\partial_1 u = 0$ 可得 $\alpha x_2 x_i + \beta x_2 y_i = 0$。由于 $x_2 x_i$ 是 R_G 的单项式基的一部分，因此 $\alpha = 0$，从而 $\beta x_2 y_i = 0$。若 $i \neq 5$，则 $0 = \beta x_2 y_i = \beta x_i y_2$。无论如何， $x_2 y_i$ 或 $x_i y_2$ 是 R_G 的单项式基的一部分，因此 $\beta = 0$，这与 u 非平凡矛盾。类似的论证表明，度为 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_j$ 时， $j \neq 2$ 的 Ker 中不存在非平凡元素。然而，当 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, 时，我们看到 $u = (\alpha_1 x_4 + \beta_1 y_4, \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2)$，因此 $\partial_1 u = 0$ 蕴含

$$0 = \alpha_1 x_2 x_4 + \beta_1 x_2 y_4 + \alpha_2 x_2 x_4 + \beta_2 x_4 y_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 x_4 + (\beta_2 + \beta_1) x_4 y_2.$$

由于 $x_2 x_4$ 和 $x_4 y_2$ 是 R_G的单项式基的一部分，因此可得 $\alpha_2 = -\alpha_1$ 和$\beta_2 = -\beta_1$，所以

$$u = \alpha_1 \begin{pmatrix} x_4 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} y_4 \\ -y_2 \end{pmatrix},$$

以及矩阵的各列

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} x_4 & y_4 \\ -x_2 & -y_2 \end{pmatrix}$$

很容易看出它们生成了 ∂_1的线性协同。

若 $u = (u_1, \ u_2) \in$核 $\partial_2 \subseteq R(-\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4)^2$ 是一个度为 $\mathbf{a}$的非零齐次元素，则 $\mathbf{a} \geq \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$。此外，若 u 是一个线性 Syzygy，则对于某个 i，有 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_i$，所以$u = (\alpha_1 x_i + \beta_1 y_i, \ \alpha_2 x_i + \beta_2 y_i)$。于是 $\partial_2 u = 0$ 推出:

$$0 = \alpha_1 x_i x_4 + \beta_1 x_4 y_i + \alpha_2 x_i y_4 + \beta_2 y_i y_4$$
$$0 = \alpha_1 x_i x_2 + \beta_1 x_2 y_i + \alpha_2 x_i y_2 + \beta_2 y_i y_2$$

由于 $x_i x_4$ 和 $y_i y_4$ 属于 R_G的单项式基，因此可得 $\alpha_1 = \beta_2 = 0$，所以$\beta_1 x_4 y_i + \alpha_2 x_i y_4 = 0$ 和 $\beta_1 x_2 y_i + \alpha_2 x_i y_2 = 0$。如果 $i = 1$,5，那么 $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ 也成立，因为$x_4 y_1, x_1 y_4, x_2 y_5$和 $x_5 y_2$ 也属于 R_G 的单项式基，这与

u 是非平凡的。因此，我们必须有 $i = 2, 3, 4$，在这种情况下，我们有 $0 = \beta_1 x_4 y_i + \alpha_2 x_i y_4 = (\beta_1 + \alpha_2) x_i y_4 = (\beta_1 + \alpha_2) x_4 y_i$，其中 $x_i y_4$ 或 $x_4 y_i$ 属于 R_G 的单项式基，因此 $\alpha_2 = -\beta_1$。由此很容易看出，矩阵的列

$$\partial_3 = \begin{pmatrix} y_2 & y_4 & y_3 \\ -x_2 & -x_4 & -x_3 \end{pmatrix}$$

生成 ∂_2 的线性协同。

设 $u = (u_1, u_2, u_3) \in \text{核}\,\partial_3 \subseteq R(-2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4) \oplus R(-\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_4) \oplus R(-\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)$ 是一个度为 $\mathbf{a}$ 的非零线性协同。若 $\mathbf{a} \ngeq \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$，，则 $u_3 = 0$，所以 $(u_2, u_1) \in \text{核}\,\partial_1$ 并且

$$u = \alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对某个 $\alpha, \beta \in \Bbbk$。因此，我们可以假设 $\mathbf{a} \geq \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$，，在这种情况下，我们有以下情形之一：

(1) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_i$，其中某个 $i \neq 2, 4$；
(2) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4$，；或者 (3) $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$。

在情形 (1) 中，对于某些 α、$\beta \in \Bbbk$，有 $u = (0, 0, \alpha x_i + \beta y_i)$，因此 $\partial_3 u = 0$ 蕴含 $0 = \alpha x_i y_3 + \beta y_i y_3$ 且 $0 = \alpha x_i x_3 + \beta y_i x_3$。由于 $x_i x_3$ 和 $y_i y_3$ 是 R_G 的单项式基的一部分，可知 $\alpha = \beta = 0$，这与 u 非平凡矛盾。在情形 (2) 中，对于某些 α_i、$\beta_i \in \Bbbk$，有 $u = (0, \alpha_2 x_3 + \beta_2 x_3, \alpha_3 x_4 + \beta_3 x_4)$。于是 $\partial_3 u = 0$ 蕴含

$$0 = \alpha_2 x_3 y_4 + \beta_2 y_3 y_4 + \alpha_3 x_4 y_3 + \beta_3 y_3 y_4 = (\alpha_2 + \alpha_3) x_4 y_3 + (\beta_2 + \beta_3) y_3 y_4.$$

由于 $x_4 y_3$ 和 $y_3 y_4$ 是 R_G 的单项式基的一部分，可知 $\alpha_3 = -\alpha_2$ 和 $\beta_3 = -\beta_2$，因此

$$u = \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ y_3 \\ -y_4 \end{pmatrix}.$$

对情形 (3) 应用类似的论证，可知矩阵的各列

$$\partial_4 = \begin{pmatrix} -x_2 & -y_2 & x_3 & y_3 & 0 & 0 \\ x_4 & y_4 & 0 & 0 & x_3 & y_3 \\ 0 & 0 & -x_2 & -y_2 & -x_4 & -y_4 \end{pmatrix}$$

生成 ∂_3 的线性协同。

最后，我们注意到 $x_3 f_{1,5} = x_1 f_{3,5} + x_5 f_{1,3} \in J_G$，同样也有 $y_3 f_{1,5} \in J_G$，因此 $q = (0, 0, f_{1,5})$ 是 ∂_3 的一个二次协同。若 q 是一个非极小协同，则根据上面对 ∂_3 的线性协同的描述可知 $f_{1,5} \in J_G + (x_2, y_2, x_4, y_4)$，这很容易推出 $f_{1,5} \in J_P$，其中 P 是 G 在顶点 $\{1, 3, 5\}$ 上的诱导路径。由于 P 的顶点标记是闭的，我们可知在 $>(J_P)$ 中 $= (x_1 y_3, x_3 y_5)$，但此时在 $>(f_{1,5})$ 中，$= x_1 y_5 \notin$ 属于 $>(J_P)$，这就产生了矛盾。因此，q 是 ∂_3 的一个极小二次协同，因而也是 M 的极小二次协同。因此，M 在 R_G 上没有线性分解，且 R_T 不是 Koszul。□

5. Strongly Chordal Claw-Free Graphs with Small Clique Number

本节中，我们刻画团数较小的强弦无爪图。图 G 的**团数** $\omega(G)$ 是 G 中团的最大规模。为了陈述我们的刻画结果，我们还需要介绍一些术语。连通图 G 的**割点**是满足 $G \setminus v$ 不连通的顶点 v。若图 G 没有割点，则称其为**2-连通**图。图 G 的一个**块**是其极大的 2-连通子图。

作为主定理 1.2 和 [21, 2.6], 的直接组合推论，我们有如下结论。

推论 5.1。设 G 是一个连通图，满足 $\omega(G) \leq 3$。以下条件等价：

(a) G 是强弦且无爪的。*(b)* 存在一棵树 T，其中每个顶点的度至多为 *3*，并且有一族 G 的诱导闭子图 $\{G_v\}_{v \in T}$，使得：*(i)* 每当 T 中有一条边 $\{v, w\}$ 时，$V(G_v) \cap V(G_w) = \{i\}$ 是 G 的割集。*(ii)* 若 T 中的顶点 v 有两个不同的邻点 u 和 w，则 $V(G_u) \cap V(G_v) \cap V(G_w) = \varnothing$。*(iii)* 若 v 是一个度为 *3* 的顶点，则 G_v 是一个大小为 *3* 的团。*(c)* G 是无爪图，且 G 的每个块都是闭图。

证明。(a) $\Leftrightarrow$ (b)：这直接由主定理 1.2 和 [21, 2.6]. 得出。

(b) $\Rightarrow$(c)：如果 G 可以按 (b) 中所述分解，那么根据 (b) 与 (a) 的等价性，G 是无爪的，并且对于所有 v，G 的各个块恰好就是 G_v 的各个块。根据 [17, 2.2], ，闭图的诱导子图仍是闭图，因此 G的每个块都是闭图。

(c) $\Rightarrow$ (a)：要证明当 G 是无爪的且其所有块都是闭图时，G 是强弦图，根据主定理 1.2，只需注意到 G 是弦图且无帐篷。由于圈和帐篷图都是 2-连通的，G 中的任何诱导圈或帐篷图都包含在它的某个块中。因此，由于 G 的各个块都是闭图，G 是弦图且无帐篷。□

我们注意到，无论对 $\omega(G)$ 作何假设，前述推论中的蕴含 (c) $\Rightarrow$(a) 始终成立。遗憾的是，下面的例子表明，上述推论的分解以及蕴含 (a) $\Rightarrow$(c) 不能按原样推广到更高的团数。

例 5.2。考虑图 5.1 中所示的 **厚网** 图 TN。不难验证，TN 是 2-连通的，但 TN 不是闭图，因为由顶点 $\{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$ 诱导的子图是一个网。我们将证明，尽管如此，TN 仍然是强弦且无爪的。若令 $e_1 = \{5, 9\}$ 和 $e_2 = \{4, 9\}$，则很容易看出，e_1 是 TN 的一条避爪单纯边，而 e_2 是 $TN \setminus e_1$ 的一条避爪单纯边。由于对于给定的标记，$TN \setminus \{e_1, e_2\}$ 是一个闭图，根据推论 2.10 可知，TN 是强弦且无爪的。

描述带有$\omega(G) \geq 4$的无爪强弦图的结构仍是一个开放问题。特别是，如果对于某个 $k \geq 2$，$\omega(G) \leq k$，我们尚不清楚强弦且无爪是否等价于弦图且 G 的每个极大 $(k-1)$ 连通子图都是闭的；请注意，厚网并不能排除这种情况，因为它的极大 3-连通子图就是它的极大团。

致谢。作者感谢 Arvind Kumar 与他们进行了一些与本研究相关的有益交流。使用 Macaulay 2 [24] 进行的计算对开展这项

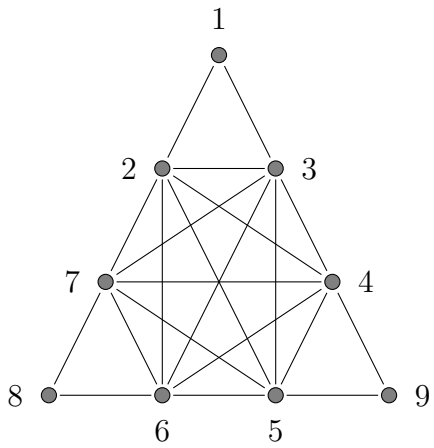


FIGURE 5.1. 厚网

工作非常有帮助。LaClair 得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS– 2100288 和西蒙斯基金会数学家合作资助 #580839 的部分支持。Mastroeni 得到了 AMS-Simons 旅行资助的部分支持。McCullough 得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS–1900792 和 DMS–2401256 的部分支持。Peeva 得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS-2401238 的部分支持。

REFERENCES

[1] Luchezar L. Avramov 和 David Eisenbud。Koszul 代数上模的正则性。《代数杂志》，153(1)：85–90，1992年。[2]Luchezar L. Avramov 和 Irena Peeva。有限正则性与 Koszul 代数。《美国数学杂志》，123(2)：275–281，2001年。[3] Herolistra Baskoroputro、Viviana Ene 和 Cristian Ion。图对的 Koszul 二项式边理想。《代数杂志》，515：344–359，2018 年。[4] Stefan Blum。双分次 Koszul 代数的子代数。《代数杂志》，242(2)：795–809，2001年。[5] Davide Bolognini、Antonio Macchia 和 Francesco Strazzanti。Cohen-Macaulay 二项式边理想与可达图。《代数组合杂志》，55(4)：1139–1170，2022年。[6] Davide Bolognini、Antonio Macchia、Francesco Strazzanti 和 Volkmar Welker。具有依赖于特征的 Betti 数的单项式理想的幂。《数学科学研究》，9(2)：第26号论文，17页，2022年。[7] Adam Boocher、Alessio D'Alı̀、Elo´ısa Grifo、Jonathan Monta˜no 和 Alessio Sammartano。边理想与 DG 代数分解。《数学》（卡塔尼亚），70(1)：215–238，2015年。[8] Adam Boocher、S. Hamid Hassanzadeh 和 Srikanth B. Iyengar。由三个关系定义的 Koszul 代数。载于交换代数中的同调与计算方法，剑桥大学出版社，2017年，第20卷《Springer INdAM 丛书》，第53–68页。Springer，Cham。[9] Andreas Brandst¨adt、Van Bang Le 和 Jeremy P. Spinrad。图类：综述。SIAM 离散数学与应用专著丛书。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，1999年。[10] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog。*Cohen-Macaulay* 环，《剑桥高等数学研究丛书》第39卷。剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[11] Giulio Caviglia 和 Aldo Conca。Veronese 三次曲面投影的 Koszul 性质。《数学进展》，234：404–413，2013年。[12] Aldo Conca、Emanuela De Negri 和 Maria Evelina Rossi。Koszul 代数与正则性。载于交换代数，第285–315页。Springer，纽约，2013年。[13] Aldo Conca。梯形行列式环。《纯粹与应用代数杂志》，98(2)：119–134，1995年。[14] Aldo Conca。Koszul 代数及其上同调关系。载于组合代数几何，《数学讲义》第2108卷，第1–31页。Springer，Cham，2014年。

[15] David A. Cox 和 Andrew Erskine。关于闭图 I。Ars Combin.，120：259–274，2015年。[16] Marilena Crupi 和 Giancarlo Rinaldo。具有二次 Gröbner 基的二项式边理想。Electron. J. Combin.，18(1)：第211号论文，13页，2011年。[17] Marilena Crupi 和 Giancarlo Rinaldo。闭图是真区间图。An. S¸tiint¸. Univ. “Ovidius” Constant¸a Ser. Mat.，22(3)：37–44，2014年。[18] Alessio D’Alì 和 Lorenzo Venturello。由 Cohen-Macaulay 单纯复形得到的 Koszul-戈伦斯坦代数。Int. Math. Res. Not. IMRN，2023(6)：4998–5045。[19] G. A. Dirac。关于刚性回路图。Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg，25：71–76，1961年。[20] Feodor F. Dragan。强可排序图：强弦图与弦二分图的共同推广。Discrete Appl. Math.，99(1-3)：427–442，2000年。[21] Viviana Ene、J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。Koszul 二项式边理想。载于《连接代数、几何与拓扑》，《Springer 数学统计学论文集》第96卷，第125–136页。Springer，Cham，2014年。[22] Martin Farber。强弦图的刻画。Discrete Math.，43(2-3)：173–189，1983年。[23] Ralph Fr¨oberg。Koszul 代数。载于《交换环理论进展》（非斯，1997），《纯粹与应用数学讲义》第205卷，第337–350页。Dekker，纽约，1999年。[24] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。可访问 http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。[25] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi、Freyja Hreinsd´ottir、Thomas Kahle 和 Johannes Rauh。二项式边理想与条件独立陈述。Adv. in Appl. Math.，45(3)：317–333，2010年。[26] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi 和 Hidefumi Ohsugi。二项式理想，《数学研究生教材》第279卷。Springer，Cham，2018年。[27] George R. Kempf。代数几何中的一些奇妙环。《代数杂志》，134(1)：222–224，1990年。[28] Jason McCullough 和 Irena Peeva。无限分次自由分解。载于《交换代数与非交换代数几何》第I卷，《数学科学研究所出版物》第67卷，第215–257页。剑桥大学出版社，纽约，2015年。[29] Fatemeh Mohammadi 和 Leila Sharifan。二项式边理想的希尔伯特函数。Comm. Algebra，42(2)：688–703，2014年。[30] Masahiro Ohtani。由某些二阶子式生成的图与理想。Comm. Algebra，39(3)：905–917，2011年。[31] Hidefumi Ohsugi、J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。组合纯子环。Osaka J. Math.，37(3)：745–757，2000年。[32] Hidefumi Ohsugi 和 Takayuki Hibi。Koszul 二分图。Adv. in Appl. Math.，22(1)：25–28，1999年。[33]Hidefumi Ohsugi 和 Takayuki Hibi。由二次二项式生成的环面理想。《代数杂志》，218(2)：509–527，1999年。[34] Irena Peeva。分次合冲，《代数与应用》第14卷。Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2011年。[35] Irena Peeva。闭二项式边理想。J. Reine Angew. Math.，803：1–33，2023年。[36] Alexander Polishchuk 和 Leonid Positselski。二次代数，《大学讲义丛书》第37卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年。[37] Stewart B. Priddy。Koszul 分解。Trans. Amer. Math. Soc.，152：39–60，1970年。[38] Tim R¨omer 和 Sara Saeedi Madani。割代数的缩回与代数性质，European J. Combin. 69，214–236，2018年。[39] Douglas B. West。图论导论。Prentice Hall, Inc.，Upper Saddle River，新泽西州，1996年。

University of Nebraska-Lincoln, Department of Mathematics, Lincoln, NE, USA
电子邮箱地址: alaclair2@unl.edu

SUNY Polytechnic Institute, Department of Applied Mathematics, Utica, NY, USA电子邮箱地址: mastromn@sunypoly.edu

Iowa State University, Department of Mathematics, Ames, IA, USA
电子邮箱地址: jmccullo@iastate.edu

Cornell University, Department of Mathematics, Ithaca, NY, USA
电子邮箱地址: ivp1@cornell.edu