分布式代理约束的真实设施选址

Argyrios Deligkas[1], Panagiotis Kanellopoulos[2] and Alexandros A. Voudouris[2]

[1]伦敦大学皇家霍洛威学院，英国[2]埃塞克斯大学，英国

arXiv:2601.15258v1 [cs.GT] 21 Jan 2026

摘要

我们研究一种分布式设施选址问题：一组代理人各自在实数轴上有一个私有位置，并被划分为若干固定的不相交群组。目标是在代理人所报告的位置中选择位置开设k设施。这一决策由分两个阶段运行的机制作出。在第一阶段，每个组选择一名代理人的位置作为该组的代表位置。在第二阶段，k代表元被选作设施位置。确定设施位置后，每个代理人都会产生个体成本，该成本定义为其到所有设施的距离之和（求和变体），或其到最远设施的距离（最大值变体）。我们关注策略无关机制这一类机制，它们可防止代理人通过策略性虚报获益；并针对两种变体，给出社会成本（代理人个体成本总和）近似比的紧确界。

1 引言

想象一下，你是刚刚当选的 Streetville 市长。Streetville 是 Metric County 一座宁静的村庄，这里禁止汽车通行，所有人都住在同一条无限延伸的街道上，居民们还喜欢玩一种名为 Find the Liar 的游戏。在竞选期间，你满怀热情地承诺要新建几处公共设施——一座公园、一家医院和一所学校。你还承诺，市民可以参与决策，而且每处设施都将“步行一分钟即可到达”。如今，终于到了兑现承诺的时候。但你究竟该如何做出这些决策，才能尽可能满足居民的需求呢？一种办法是询问每个人理想中的位置，然后选择位置来建造每处设施，从而尽量减少所有市民的总步行距离——毕竟，他们似乎不太喜欢在户外待太久。但是，如果有人谎报自己理想的位置，以减少自己的步行距离呢？于是你向 Choice 教授请教。教授立刻意识到这是一个机制设计问题，并建议研究真实设施选址问题 [Chan 等人， 2021]。

根据所作假设的不同，例如设施的数量以及代理人对设施的偏好，学界研究了真实设施选址问题的许多不同变体。当需要开设单个设施时，假设每位代理人都希望尽可能靠近该设施是很自然的。然而，在多个设施的情形下，代理人的偏好可能取决于设施所提供的服务类型。大量文献研究了设施同质的情形，因此代理人希望靠近其中一个设施 [Procaccia and Tennenholtz, 2013年，Lu 等人，2010年，Fotakis and Tzamos， 2014]。然而，当设施具有异质性时，代理人可能希望靠近多个设施，并承担一个取决于其到所有设施的距离的函数所表示的成本。具体而言，已有两种主要的个体成本函数：一种考虑代理人到所有设施的距离（称为 求和变体），另一种考虑其到最远设施的距离（称为 最大值变体）。

问题的另一个关键方面涉及可以开设设施的可行位置。该领域最早的研究考察了连续情形，在这种情形下，设施可以开设于直线上的任意点。然而，在许多现实世界的应用中，情形是离散的，并且由于物理、法律或预算约束，甚至由于现有基础设施的限制，设施的布置仅限于现有代理人位置。此外，还存在若干社会选择情形，例如 同伴选择和 抽签选举，其目标是让代理人从自身中选出一个子集，组成决策委员会。受此类应用的启发，近年来人们提出并研究了许多不同的位置受限模型，在这些模型中，设施只能开设于预先确定的候选位置 [Feldman 等人，2016年，Tang 等人，2020年，Kanellopoulos 等人， 2025], 或代理人所报告的位置 [Deligkas 等人，2025b]。

此外，还有一些应用场景，例如联邦或区域规划，在这些场景中，同时收集所有代理人的信息在后勤上可能极其困难，甚至会被禁止；例如，代理人被划分到互不相交的行政区域，或属于不同的子网络。在这种情况下，通常以分布式方式计算决策。代理人被划分为若干组（例如焦点小组或小组委员会），每组在本地提出一个位置，以代表该组所有代理人的位置。随后根据各组提出的方案计算最终结果；例如，可以在这些代表位置中的一部分位置开设设施。这种设定称为分布式设施选址模型，最初由Filos-Ratsikas 等人 [2024], 研究，他们关注的是单个设施的情形。近期，Xu 等人[2025] 研究了一种略有不同的双设施分布式模型，其中每组提出两个位置。

1.1 我们的贡献

本文研究包含 n代理人的分布式设施选址问题，这些代理人被划分为m 互不相交的组，并且需要开设 $k \leq m$ 个设施。代理人在实数直线上拥有私人位置，并将这些位置报告给算法（或机制），由该算法通过以下两个阶段确定设施的位置。在第一阶段，对于每个组，机制根据该组内代理人的位置，从中选取一个位置作为整个组的代表位置。在第二阶段，机制从所有组的代表位置集合中选择设施的开设位置。确定设施位置后，每个代理人都会产生个体成本，该成本要么是其到各设施的总距离（求和变体），要么是其到最远设施的距离（最大值变体）。自然地，代理人会作为成本最小化者行事；如果虚报真实位置能够降低其个体成本，就可能会这样做。我们关注确定性策略无关机制的设计，这类机制能够作出决策以消除代理人的策略性行为，同时实现对可能达到的最小社会成本（定义为代理人的个体成本总和）的良好近似。

我们几乎完整地描绘了策略无关机制所能达到的最佳近似比。具体而言，对于 $k = 2$ 个设施，我们证明，求和变体中的紧确界为 $1 + \sqrt{2} \approx 2。414$ ，最大值变体中的紧确界为 $\underline{9}/2 = \overline{4.5}$ 。事实证明，求和变体中的 $1 + \sqrt{2}$ 界不仅是策略无关机制所能达到的最佳界，也是忽略代理人策略行为的不受限制的算法所能达到的最佳界。在最大值变体中，这类不受限制的算法可以达到稍好的4 界。对于 $k \geq 3$个设施，我们证明，策略无关机制的最佳近似比在求和变体中介于 $3 - 2/k$ 和$3 + 2/k$ 之间（随着 k 增大，这一小段差距会逐渐缩小），在最大值变体中则介于 $2k$ 和$2(k + 1)$ 之间。表1概述了这些结果。

我们的上界（正面结果）来自策略无关机制，这些机制根据顺序统计量作出选择。也就是说，这类机制按照以下方式选择群组代表位置

	$k=2$	$k \geq 3$
求和变体	$1+\sqrt{2}$	$[3-2/k, 3+2/k]$
最大值变体	$9/2$	$[2k, 2(k+1)]$

表1：不同变体（求和型和最大值型）以及可用设施数量为 k 时，确定性策略无关机制的近似比上界概览。$k=2$ 对应的单个数值表示紧确上界。

根据代理人报告的位置排序，然后根据代表位置的排序决定最终的设施位置。虽然这是一种广泛应用于各种真实设施选址问题的常见机制设计范式，但在我们的分布式设定中，尤其是对于 $k=2$ 设施的情形，结果表明，必须根据组的数量适当地组合多种此类机制，才能构造出达到最佳可能近似比界的机制。我们的下界（否定性结果）则通过构造得出；这些构造有时相当复杂，利用了分布式机制的局部性，即对于具有相同代理人数且位置相同的组，必须选择相同的代表位置；此外，当$k=m$时，所有代表位置都必须属于解。

1.2 相关工作

过去几十年来，真实设施选址问题一直是无金钱近似机制设计领域的广泛研究对象。早期研究奠定了基础模型并给出了近似结果，主要关注设施可在直线上任意位置开设的情形 [Procaccia 和 Tennenholtz，2013，Lu 等，2010，Fotakis and Tzamos， 2014]；另请参阅 Chan 等人的综述 [2021]。不断增长的研究成果探讨了不同的真实 k设施选址模型及额外的可行性约束，其中最受关注的是设施必须从有限的候选位置集合中选取的情形。研究者在各种目标和信息模型下考察了这一约束，包括我们在此也研究的求和变体和最大值变体 [Sui and Boutilier，2015，Feldman 等人，2016，Walsh，2021，Tang 等人，2020，Lotfi and Voudouris，2024，Zhao 等人，2023，Serafino and Ventre，2016，Kanellopoulos 等人，2023，2025，Gai 等人， 2024]。这些研究的一个关键特点是，候选位置集合是固定的且预先已知。相比之下，在我们的模型中，候选位置就是代理人的位置，因此会在代理人报告位置后动态确定，这与 Deligkas 等人的近期研究相同 [2025b]。除了设施具有吸引力的模型外，研究者也对具有候选位置的厌恶型设施选址进行了大量研究；在这类问题中，代理人希望设施尽可能远离自己 [Zhao 等人，2024，Gai 等人，2022，Kanellopoulos and Voudouris， 2025]。另一种相关约束与候选位置约束相互独立，即要求设施之间保持最小距离，以实现更好的分布和公平性 [Xu 等人，2021，Duan 等人， 2021]。

超越集中式决策，并受到投票领域类似研究的启发，Filos-Ratsikas 等人 [2024] 首次研究了分布式设施选址模型，专门关注仅有一个设施的情况。在他们的模型中，与我们的设定一样，代理人被划分为若干组，每个组独立提出一个代表位置（可以是直线上的任意点），然后从这些代表位置中选择一个来建设设施。最近，Xu 等人 [2025]考虑了包含两个设施的设定。在他们的模型中，设施只能在固定的候选位置上建设，并且每个组提出两个代表位置。这与我们的模型不同：在我们的模型中，设施可以建设在代理人位置上，并且每个组只提出一个这样的代理人位置。与这些

分布式模型之外，近期的另一条研究路线考察了群组设施选址模型。在这类模型中，代理人被划分为若干组，这些组可能会影响其个体成本，但决策是集中式的 [Zhou 等人，2022年，Li 等人， 2024, 2025]。

我们的设置也与功利主义投票 密切相关。在该模型中，代理人对一组候选人具有（度量）偏好，通常通过序数排名来表达；其目标是选择一个或多个候选人，以最小化社会成本或最大化社会福利。关于这一领域以及Anshelevich 等人 [2021]所述的失真概念的全面综述，请参阅相关调查。在这一框架下，与本文最相关的工作集中于分布式变体；与我们的设施选址模型以及上述模型类似，代理人被分组到互不相交的选区中，并且禁止不同选区中的代理人之间进行通信 [Filos-Ratsikas 等人，2020年，Anshelevich 等人，2022年，Voudouris，2023年，2025年，Abam 等人， 2025]。 Amanatidis 等人 [2025]最近研究了另一种相关的集中式投票模型，其中代理人的组别未知，用于评估结果在群体公平目标方面逼近最优解的程度。

另一条研究脉络与我们的工作类似，探讨代理人自身即为候选人的同伴选择设置，旨在对个体之间的代表选择和社会选择进行建模 [Cheng 等人，2017年、2018年，Cembrano 和 Shahkarami， 2025]。另一个相关概念是度量投票中的α-决定性，用于刻画结构化偏好，其中 $\alpha \in [0,1]$ 是一个因子，表示代理人与所有候选人的接近程度相较于她与排名最高的候选人的接近程度，而 $\alpha = 0$ 意味着代理人在度量空间中实际上与她排名最高的候选人重合 [Anshelevichet 等人，2018年，Anshelevich 和 Postl，2017年，Gkatzelis 等人，2020年，Kizilkaya 和 Kempe， 2022]。最后，一个关联较弱、代理人作为候选人的设置是公正选拔：必须从相互提名的代理人组中选出一位获胜者或一小组获胜者，同时确保任何代理人都无法影响自己当选的机会 [Alon 等人，2011年，Fischer 和 Klimm，2015年，Cembrano 等人， 2023]。

2 模型

我们考虑一个分布式设施选址模型，其中包含一组 N $n \geq 2$个代理人和 $k \geq 2$个设施。每个代理人 i在实数直线 $x_i \in \mathbb{R}$上都有一个位置。令$\mathbf{x} = (x_i)_{i \in N}$ 表示由所有代理人位置组成的位置配置。这些代理人被划分为 $m \geq k$ 个互不相交的固定群组，这些群组是预先已知的。令 G 表示所有组的集合，并用 $n_g = |g|$表示组 $g \in G$的大小。因此，我们的问题实例可以完全描述为一个元组 $I = (\mathbf{x}\ G, k)$，它定义了代理人的位置、代理人所属的组以及待开设的设施数量。

我们的目标是在代理人报告的位置集合中选择 k 个不同的位置来建设所有设施；注意，如果有两个代理人处于同一位置，则允许在该位置开设两个设施。具体而言，一个解是一个 k元组 $\mathbf{y} = (y_\ell)_{\ell \in [k]}$ ，表示设施 $\ell \in [k]$的位置 y_ℓ，满足$\mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}$。在我们的分布式设定中，算法 $\mathcal{A}$ 通过实施以下两个阶段来运行：

- 第一阶段：对于每个组 $g \in G$，算法将某个代理人 $r_g \in g$ 的位置确定为整个组的代表位置。
- 第二阶段：算法从 m个群组代表位置中 k 选择一些位置来开设 k 个设施。也就是说，它输出一个解 $\mathbf{y} \subseteq \bigcup_{g \in G} \{x_{r_g}\}$。

对于任意实例 I，令 $\mathcal{A}(I)$表示由 $\mathcal{A}$计算得到的解。在证明中，我们通常用$\mathbf{w}_I$（或者在I 可由上下文明确时，简称为$\mathbf{w}$ ）表示某个算法的解。

令 $d(i, y) = |x_i - y|$ 表示代理人 i 到直线$\mathbf{y} = (y_\ell)_{\ell \in [k]}$上任意点 y 的距离。给定一个解，代理人 i 在实例 I 中的个体成本 定义为

- **（求和变体）**所有设施的总距离：$\text{costsum}_i(\mathbf{y}|I) = \sum_{\ell\in[k]} d(i, y_\ell)$;
- **（最大值变体）**距最远设施的距离：$\text{costmax}_i(\mathbf{y}|I) = \max_{\ell\in[k]} d(i, y_\ell)$。

当变体可从上下文中明确时，我们将简写为 $\text{cost}_i(\mathbf{w}|I)$，表示代理人 i 在$\mathbf{y}$处的个体成本。由于各组的规模通常可能不同，我们将实例 I 中解$\mathbf{y}$ 的社会成本定义为各组内代理人平均个体成本的组间平均值，即

$$\text{SC}(\mathbf{y}|I) = \frac{1}{m}\sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}\sum_{i\in g}\text{cost}_i(\mathbf{y}|I).$$

我们通常用$\mathbf{o}_I$（若 I 可从上下文中明确，则简写为$\mathbf{o}$）表示使社会成本最小化的解。请注意，如果允许我们在同一个位置开放所有设施，那么要使社会成本最小化，该位置应为代理人的加权中位数。具体而言，令 π 为按照位置对所有代理人排序后的序列（并列时任意打破平局）。组 g中的每个代理人 i 都有权重 $\mathbf{v}_i = 1/n_g$。加权中位数 i^* 是满足以下条件的代理人：$\sum_{i:\ \pi(i)<\pi(i^*)}\mathbf{v}_i < m/2$ 且 $\mathbf{v}_{i^*} + \sum_{i:\ \pi(i)<\pi(i^*)}\mathbf{v}_i \geq m/2$。当各组对称（即它们的规模均为 n/m）时，我们对社会成本的定义就简化为代理人平均个体成本，而加权中位代理人则简化为中位代理人。为简单起见，当各组对称时，我们将代理人个体成本总和作为社会成本计算。

算法的近似比 $\rho_k(\mathcal{A})$ $\mathcal{A}$ 是指，在所有设施数量为 k 的实例中，计算所得解的社会成本与任意可行解所能达到的最低社会成本之间的最坏情况比值，即

$$\rho_k(\mathcal{A}) = \sup_{I=(\mathbf{x},G,k)}\frac{\text{SC}(\mathcal{A}(I)|I)}{\min_{\mathbf{y}\subseteq\mathbf{x}:|\mathbf{y}|=k}\text{SC}(\mathbf{y}|I)}.$$

在许多情况下，避免那些旨在最小化个体成本（而非社会成本）的代理人进行策略操纵非常重要。具体而言，若算法 $\mathcal{A}$ （此处也称为机制）对于任意代理人 i 以及两个实例 $I = ((x_i, \mathbf{x}_{-i}), G, k)$和 $J = ((x'_i, \mathbf{x}_{-i}), G, k)$都满足以下条件，则称其为策略无关：这两个实例仅在代理人 i 的位置上不同，且有$\text{cost}_i(\mathcal{A}(I)|I) \leq \text{cost}_i(\mathcal{A}(J)|I)$。我们的目标是设计不受限制的算法和策略无关机制，使其近似比尽可能小。

3 一类用于两个设施的策略无关机制

我们首先介绍一类用于 $k = 2$ 个设施的机制。我们将论证，这类机制的所有成员都是策略无关机制，并给出它们在求和变体和最大值变体下所能达到的近似比的一般界。对于任意参数 $\theta, \ell, r \in (0, 1]$ 满足 $\lceil \ell m\rceil < \lceil rm\rceil$的条件下，机制 $\mathcal{M}_m(\theta, \ell, r)$ 的工作方式如下：第一阶段，对于每个组 $g \in G$，选取其中$\lceil \theta n_g\rceil$最靠左的代理人的位置，作为 g的代表r_g。第二阶段，机制在最靠左的第 $\lceil \ell m\rceil$个和最靠左的第 $\lceil rm\rceil$个代表位置处开放设施。伪代码描述见机制1 。请注意，我们对参数施加的约束 $\lceil \ell m\rceil < \lceil rm\rceil$ 可确保只有在至少有两个代理人位于同一位置时，两个设施才会设在同一位置。

我们首先证明，对于任意（有效）参数以及我们考虑的两种变体设置（求和和最大值），机制 $\mathcal{M}_m(\theta, \ell, r)$ 是策略无关的。

定理 3.1。 对于任意 $m \geq 2$、θ、ℓ 和 $r \in$，$(0, 1]$, 机制 $\mathcal{M}_m(\theta$、ℓ、$r)$ 是策略证明 *f.*

机制 1： $\mathcal{M}_m(\theta,\ \ell,\ r)$

输入： 实例 $I=(\mathbf{x}\ G,\ 2)$，参数 $\theta,\ \ell,\ r\in(0,1]$ 满足 $\lceil \ell m\rceil < \lceil rm\rceil$;

输出： 设施位置 $\mathbf{w}\ =(w_1,\ w_2)$;

代表位置集合 $\leftarrow \varnothing$;

对于 每个组 $g\in G$ **执行**

  $i_g \leftarrow \lceil \theta n_g\rceil$-位于 g中最左侧的代理人;

  $r_g \leftarrow x_{i_g}$;

  代表位置集合 $\leftarrow$ 代表位置集合 $\cup\{r_g\}$;

$w_1 \leftarrow \lceil \ell m\rceil$-代表位置集合中最左侧的位置;

$w_2 \leftarrow \lceil rm\rceil$-代表位置集合中最左侧的位置;

证明。 考虑一个组 g，其代表位置为 r_g，以及一个真实位置为 x_i 的代理人 $i\in g$。假设i 虚报了一个不同的位置 x_i'，并令 $\mathbf{w}'=(w_1',w_2')$ 为由此得到的解。如果g 的代表位置在 i 虚报后没有改变，那么整体解也不会改变，因此 i 承担的成本与之前相同。如果 g 的代表位置变为 r_g'，那么必然有$x_i \le r_g < r_g'$ 或 $r_g' < r_g \le x_i$。现在，我们根据 w_1, w_2, r_g, x_i 和 r_g' 的相对位置分情况讨论。

情况 1： $r_g > w_2$。显然，如果 $r_g' > r_g$，解不会改变。否则，如果 $r_g' < r_g \le x_i$，由于 $w_1 \le w_2 < r_g \le x_i$，解要么不变，要么变为$\mathbf{w}'$，其中 $w_1' \le w_1$ 且$w_2' \le w_2$。无论哪种情况，i 的成本都不会降低。

情况 2： $r_g < w_1$。这与情况 1 对称。

情形 3: $r_g \in (w_1, w_2)$。如果 $x_i \le r_g < r_g'$，那么新的解 $\mathbf{w}'$ 满足 $w_2' \ge w_2$ 和 $w_1' = w_1$。否则，如果 $r_g' < r_g \le x_i$，新的解 $\mathbf{w}'$ 满足 $w_1' \le w_1$ 和 $w_2' = w_2$。在这两种情况下，i的成本都可能只会增加。

情形4: $r_g \in \{w_1, w_2\}$。不失一般性，假设 $r_g = w_1$。如果 $r_g' < r_g$，则有 $w_1' \le w_1$和 $w_2' = w_2$。由于 $x_i \ge r_g$，这种变化只会增加代理人 i的成本。否则，如果 $r_g < r_g'$，则有 $w_1' \ge w_1$ 和 $w_2' \ge w_2$。由于 $x_i \le r_g$，这种变化同样只会增加代理人 i的成本。

□

接下来，我们将重点研究机制 $\mathcal{M}_m(\theta,\ \ell,\ r)$ 所能达到的近似比，该近似比取决于参数 θ、ℓ 和 r，以及代理人的数量 n 和组的数量 m。这将使我们能够在下一节中确定针对所考虑的不同设置，参数的最佳可能组合。在分析近似比之前，我们论证：任意实例都可以转换为另一个具有对称组的实例（其中每个组 g 的大小为 $n_g = n/m$），使得该机制输出相同的解，并且原实例中加权中位数的位置与新实例中中位代理人的位置相同。基于此，不失一般性地，我们可以专注于界定该机制在具有对称组的实例上的近似比。

引理 3.2。对于任意具有 m 个组的实例 I，都存在另一个具有 m 个对称组的实例 J，使得对于某个组，$\mathcal{M}_m$（θ、ℓ、r）所选择的代表位置在 I 和 J 中相同，并且 I 中加权中位代理人的位置与 J 中中位代理人的位置相同。

证明。设 G_I和 G_J分别是实例 I和实例 J中的组集合。对于实例 I中大小为 n_g 的每个组$g\in G_I$，我们按如下方式在实例 J中创建一个大小为 $\prod_{q\in G_I} n_q$ 的组 $g'\in G_J$：对于每个位置在 x_i的代理人 $i\in g$，g' 中有 $\prod_{q\in G_I\setminus\{g\}} n_q$ 个代理人位于 x_i。

现在不难看出， J 中组 g' 的代表与 I中组 g 的代表相同： g' 的代表是 g'中从左数第 $\lceil\theta\prod_{q\in G_I} n_q\rceil$ 个代理人的位置。由于每个代理人 $i\in g$ 的位置 x_i 在 g'中重复了 $\prod_{q\in G_I\setminus\{g\}} n_q$ 次， g' 的代表位置与 g中从左数第 $\left\lceil \frac{\theta\prod_{q\in G_I} n_q}{\prod_{q\in G_I\setminus\{g\}} n_q}\right\rceil = \lceil\theta n_g\rceil$ 个代理人的位置相同，而这恰好就是机制为 g 选定的代表位置。出于同样的原因， J 中中位代理人的位置与 I中加权中位代理人的位置相同。 □

现在我们可以给出该机制所达到的近似比上界。

定理 3.3。 令 Y为一个指示变量：若情形为求和变体，则其值为1；若情形为最大值变体，则其值为0 。对于任意 $m\geq 2$和 $\theta,\ell,r\in(0,1]$,机制 $\mathcal{M}_m(\theta,\ell,r)$ ， 其近似比至多为

$$\max\left\{\frac{n}{(m+1-\lceil\ell m\rceil)(\frac{n}{m}+1-\lceil\frac{\theta n}{m}\rceil)}-1,\frac{n}{(1+Y)(m+1-\lceil rm\rceil)(\frac{n}{m}+1-\lceil\frac{\theta n}{m}\rceil)},\right.$$
$$\left.\frac{n}{\lceil rm\rceil\lceil\frac{\theta n}{m}\rceil}-1,\frac{n}{(1+Y)\lceil\ell m\rceil\lceil\frac{\theta n}{m}\rceil}\right\}.$$

证明。 令$\mathbf{w}=(w_1,w_2)$为该机制计算出的解， $\mathbf{o}=(o_1,o_2)$为一个最优解，并令 med 为总体中位数代理人的位置。根据 w_1,w_2 与 med 的相对位置，我们分为以下三种情况： $\text{med}\leq w_1$、 $\text{med}\geq w_2$以及 $\text{med}\in(w_1,w_2)$。我们将代理人划分为以下三个集合： $L=\{i:\ x_i\leq w_1\}$、 $M=\{i:\ w_1<x_i<w_2\}$以及$R=\{i:\ x_i\geq w_2\}$。

情况 1: 中位数 $\leq w_1$. 我们首先根据代理人所属的集合，推导其个体成本的上界。

- 对于任意代理人 $i\in L$，利用三角不等式，

$$\begin{aligned}\text{cost}_i(\mathbf{w})&=Y\cdot d(i,w_1)+d(i,w_2)\\&\leq Y\cdot\Big(d(i,\texttt{med})+d(\texttt{med},w_1)\Big)+d(i,\texttt{med})+d(\texttt{med},w_1)+d(w_1,w_2)\\&=(1+Y)d(i,\texttt{med})+(1+Y)d(\texttt{med},w_1)+d(w_1,w_2).\end{aligned}$$

- 对于任意代理人 $i\in M$,

$$\text{cost}_i(\mathbf{w})=Y\cdot\min\{d(i,w_1),d(i,w_2)\}+\max\{d(i,w_1),d(i,w_2)\}\leq d(w_1,w_2).$$

- 对于任意代理人 $i\in R$,

$$\text{cost}_i(\mathbf{w})=d(i,w_1)+Y\cdot d(i,w_2)=(1+Y)d(i,w_2)+d(w_1,w_2).$$

因此，机制计算出的解 $\mathbf{w}$ 的社会成本为

$$\begin{aligned}\text{SC}(\mathbf{w})&=\sum_{i\in N}\text{cost}_i(\mathbf{w})\\&=\sum_{i\in L}\text{cost}_i(\mathbf{w})+\sum_{i\in M}\text{cost}_i(\mathbf{w})+\sum_{i\in R}\text{cost}_i(\mathbf{w})\\&\leq\sum_{i\in L}\Big((1+Y)d(i,\texttt{med})+(1+Y)d(\texttt{med},w_1)+d(w_1,w_2)\Big)+\sum_{i\in M}d(w_1,w_2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i\in R}\Big((1+Y)d(i,w_2)+d(w_1,w_2)\Big)\\
&=(1+Y)\sum_{i\in L}d(i,\texttt{med})+(1+Y)\sum_{i\in R}d(i,w_2)+(1+Y)|L|\cdot d(\texttt{med},w_1)+n\cdot d(w_1,w_2)\\
&=(1+Y)\sum_{i\in L}d(i,\texttt{med})+(1+Y)\sum_{i\in R}d(i,w_2)\\
&\quad+(1+Y)\Big(n-(|M|+|R|)\Big)\cdot d(\texttt{med},w_1)+n\cdot d(w_1,w_2). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

对于最优解，由于中位数使其到其他所有代理人的总距离最小，因此最优解的成本至少与在该处（虚拟地）开放两座设施的成本一样高。因此，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SC}(\mathbf{o})&\geq(1+Y)\sum_{i\in N}d(i,\texttt{med})\\
&=(1+Y)\sum_{i\in L}d(i,\texttt{med})+(1+Y)\sum_{i\in M}d(i,\texttt{med})+(1+Y)\sum_{i\in R}d(i,\texttt{med}).
\end{aligned}
$$

由于 $\texttt{med}\leq w_1$，对于任意代理人 $i\in M$，我们有 $d(i,\ \texttt{med})\geq d(\texttt{med}\ w_1)$，并且对于任意代理人 $i\in R$，$d(i,\ \texttt{med})=d(i,\ w_2)+d(\texttt{med}\ w_1)+d(w_1,\ w_2)$。因此，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SC}(\mathbf{o})&\geq(1+Y)\sum_{i\in L}d(i,\texttt{med})+(1+Y)|M|\cdot d(\texttt{med},w_1)\\
&\quad+(1+Y)\sum_{i\in R}d(i,w_2)+(1+Y)|R|\cdot\Big(d(\texttt{med},w_1)+d(w_1,w_2)\Big)\\
&=(1+Y)\sum_{i\in L}d(i,\texttt{med})+(1+Y)\sum_{i\in R}d(i,w_2)\\
&\quad+(1+Y)\Big(|M|+|R|\Big)d(\texttt{med},w_1)+(1+Y)|R|\cdot d(w_1,w_2). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

通过重新排列各项，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(1+Y)\sum_{i\in L}d(i,\texttt{med})+(1+Y)\sum_{i\in R}d(i,w_2)\\
&\leq\mathrm{SC}(\mathbf{o})-(1+Y)\Big(|M|+|R|\Big)d(\texttt{med},w_1)-(1+Y)|R|\cdot d(w_1,w_2).
\end{aligned}
$$

因此，根据（1），我们可以对社会成本 $\mathrm{SC}(\mathbf{w})$ 作如下上界估计：

$$
\mathrm{SC}(\mathbf{w})\leq\mathrm{SC}(\mathbf{o})+(1+Y)\Big(n-2(|M|+|R|)\Big)\cdot d(\texttt{med},w_1)+\Big(n-(1+Y)|R|\Big)\cdot d(w_1,w_2).
$$

根据（2），我们还可得

$$
\mathrm{SC}(\mathbf{o})\geq(1+Y)\Big(|M|+|R|\Big)\cdot d(\texttt{med},w_1)+(1+Y)|R|\cdot d(w_1,w_2).
$$

因此，近似比为

$$
\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})}\leq 1+\frac{(1+Y)\Big(n-2(|M|+|R|)\Big)\cdot d(\texttt{med},w_1)+\Big(n-(1+Y)|R|\Big)\cdot d(w_1,w_2)}{(1+Y)\Big(|M|+|R|\Big)\cdot d(\texttt{med},w_1)+(1+Y)|R|\cdot d(w_1,w_2)}
$$

$$\leq 1 + \max\left\{\frac{n-2(|M|+|R|)}{|M|+|R|}, \frac{n-(1+Y)|R|}{(1+Y)|R|}\right\}$$
$$= \max\left\{\frac{n}{|M|+|R|} - 1, \frac{n}{(1+Y)|R|}\right\}.$$

注意，最后一个表达式关于 $|M|$ 和 $|R|$ 均递减，因此其可能达到的最大值出现在 $|M|$ 和 $|R|$ 取可能的最小值时。根据 w_1 和 w_2 的定义，我们有

$$|R| \geq (m+1-\lceil rm \rceil)\left(\frac{n}{m}+1-\left\lceil\frac{\theta n}{m}\right\rceil\right)$$

and

$$|M|+|R| \geq (m+1-\lceil \ell m \rceil)\left(\frac{n}{m}+1-\left\lceil\frac{\theta n}{m}\right\rceil\right).$$

因此，近似比至多为

$$\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})} \leq \max\left\{\frac{n}{|M|+|R|} - 1, \frac{n}{(1+Y)|R|}\right\}$$
$$\leq \max\left\{\frac{n}{(m+1-\lceil \ell m \rceil)(\frac{n}{m}+1-\lceil\frac{\theta n}{m}\rceil)} - 1, \frac{n}{(1+Y)(m+1-\lceil rm \rceil)(\frac{n}{m}+1-\lceil\frac{\theta n}{m}\rceil)}\right\}.$$

情况 2: $w_2 \leq$ 中位数。 此情形与情况 1 对称，具体而言，集合 L 和 R 的角色互换。由此得到一个近似比

$$\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})} \leq \max\left\{\frac{n}{|M|+|L|} - 1, \frac{n}{(1+Y)|L|}\right\}.$$

根据 w_1 和 w_2 的定义，我们现在有

$$|L| \geq \lceil \ell m \rceil \left\lceil\frac{\theta n}{m}\right\rceil$$

and

$$|M|+|L| \geq \lceil rm \rceil \left\lceil\frac{\theta n}{m}\right\rceil.$$

因此，近似比为

$$\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})} \leq \max\left\{\frac{n}{\lceil rm \rceil \lceil\frac{\theta n}{m}\rceil} - 1, \frac{n}{(1+Y)\lceil \ell m \rceil \lceil\frac{\theta n}{m}\rceil}\right\}.$$

情形 3: $w_1 <$ 中位数 $< w_2$。我们有:

- 对于任意代理人 $i \in L$，利用三角不等式,

$$\mathrm{cost}_i(\mathbf{w}) = Y \cdot d(i, w_1) + d(i, w_2) = (1+Y)d(i, w_1) + d(w_1, w_2).$$

- 对于任意代理人 $i \in M$,

$$\mathrm{cost}_i(\mathbf{w}) = Y \cdot \min\{d(i, w_1), d(i, w_2)\} + \max\{d(i, w_1), d(i, w_2)\} \leq d(w_1, w_2).$$

- 对于任意代理人 $i \in R$,

$$\text{cost}_i(\mathbf{w}) = d(i, w_1) + Y \cdot d(i, w_2) = (1+Y)d(i, w_2) + d(w_1, w_2).$$

因此，我们得到关于$\mathbf{w}$的社会成本的以下上界：

$$\begin{aligned}\text{SC}(\mathbf{w}) &= \sum_{i \in N} \text{cost}_i(\mathbf{w}) \\ &\leq (1+Y)\sum_{i \in L} d(i, w_1) + (1+Y)\sum_{i \in R} d(i, w_2) + n \cdot d(w_1, w_2). \end{aligned} \tag{3}$$

对于最优解，我们有

$$\begin{aligned}\text{SC}(\mathbf{o}) &\geq (1+Y)\sum_{i \in N} d(i, \texttt{med}) \\ &\geq (1+Y)\sum_{i \in L} d(i, \texttt{med}) + (1+Y)\sum_{i \in R} d(i, \texttt{med}) \\ &= (1+Y)\sum_{i \in L} \Big(d(i, w_1) + d(w_1, \texttt{med}) \Big) + (1+Y)\sum_{i \in R} \Big(d(i, w_2) + d(\texttt{med}, w_2) \Big) \\ &\geq (1+Y)\sum_{i \in L} d(i, w_1) + (1+Y)\sum_{i \in R} d(i, w_2) + (1+Y)\min\{|L|, |R|\} \cdot d(w_1, w_2), \end{aligned} \tag{4}$$

其中，最后一个不等式由以下事实得出： $d(w_1, \texttt{med}) + d(\texttt{med}\ w_2) = d(w_1,\ w_2)$。通过重新排列各项，我们得到

$$(1+Y)\sum_{i \in L} d(i, w_1) + (1+Y)\sum_{i \in R} d(i, w_2) \leq \text{SC}(\mathbf{o}) - (1+Y)\min\{|L|, |R|\} \cdot d(w_1, w_2)$$

因此（3）意味着

$$\text{SC}(\mathbf{w}) \leq \text{SC}(\mathbf{o}) + \Big(n - (1+Y)\min\{|L|, |R|\} \Big) \cdot d(w_1, w_2).$$

根据（4），我们还可得到

$$\text{SC}(\mathbf{o}) \geq (1+Y)\min\{|L|, |R|\} \cdot d(w_1, w_2).$$

因此，近似比为

$$\begin{aligned}\frac{\text{SC}(\mathbf{w})}{\text{SC}(\mathbf{o})} &\leq \frac{\text{SC}(\mathbf{o}) + \Big(n - (1+Y)\min\{|L|, |R|\} \Big) \cdot d(w_1, w_2)}{\text{SC}(\mathbf{o})} \\ &\leq 1 + \frac{n - (1+Y)\min\{|L|, |R|\}}{(1+Y)\min\{|L|, |R|\}} \\ &= \frac{n}{(1+Y)\min\{|L|, |R|\}}. \end{aligned}$$

根据 w_1 和 w_2 的定义，与前两种情况类似，我们有

$$|L| \geq \lceil \ell m \rceil \left\lceil \frac{\theta n}{m} \right\rceil$$

and

$$|R| \geq (m+1-\lceil rm \rceil)\left(\frac{n}{m}+1-\left\lceil\frac{\theta n}{m}\right\rceil\right).$$

因此，近似比为

$$\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})} \leq \max\left\{\frac{n}{(1+Y)\lceil \ell m\rceil\lceil\frac{\theta n}{m}\rceil}, \frac{n}{(1+Y)(m+1-\lceil rm\rceil)\left(\frac{n}{m}+1-\lceil\frac{\theta n}{m}\rceil\right)}\right\}.$$

证明至此完成。 □

4 两个设施的紧致策略无关界

利用定理 3.3，我们现在可以通过根据组的数量 m 适当选择参数 θ、ℓ 和 r，设计出在求和变体和最大值变体情形下均能达到较低近似比的策略无关机制。由于对于任意 θ、ℓ、$r \in (0,1]$,），$\mathcal{M}_m$（θ、ℓ、r）都是策略无关的，且组的数量 m 是先验已知的，因此根据 m 的取值运行 $\mathcal{M}_m$（θ、ℓ、r）的不同版本，就能得到一个策略无关机制。借助这一点，我们将证明求和变体的上界为 $1+\sqrt{2} \approx 2.414$，最大值变体的上界为 $9/2 = 4.5$。我们还将证明，这些是在所有策略无关机制中可能达到的最佳界。

4.1 求和变体

我们先讨论求和变体。

定理 4.1。 在求和变体中，对于 $\underline{k} = 2$ 个设施，存在一个近似比至多为 $1+\sqrt{2}$ 的策略无关机制。

证明。 对于任意 $m \neq 3,\ 5$，我们运行 $\mathcal{M}_m(1/2, \sqrt{2}-1, 2-\sqrt{2})$。根据定理 3.3，取 $Y=1$（因为我们处于求和变体的情形），利用 $xm \leq \lceil xm \rceil \leq xm+1$ 对任意 $x \in \{\ell, r\}$成立这一事实，我们可以先简化上界，再将这些值代入参数 θ, ℓ 和 r，得到近似比至多为

$$\begin{aligned}&\max\left\{\frac{1}{(1-\ell)(1-\theta)}-1, \frac{1}{2(1-r)(1-\theta)}, \frac{1}{r\theta}-1, \frac{1}{2\ell\theta}\right\}\\ &=\left\{\frac{2}{2-\sqrt{2}}-1, \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \frac{2}{2-\sqrt{2}}-1, \frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\} = 1+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

注意，对于 $m \in \{3,5\}$, $\lceil(\sqrt{2}-1)m\rceil = \lceil(2-\sqrt{2})m\rceil$，这意味着这些参数值不能用于该机制。因此，我们必须分别处理这些情形，并采用不同的参数组合。

对于 $m=3$，我们运行 $M_3(1/3,\ 2/3,\ 1)$。首先，注意到对于这些参数，我们有 $\lceil 3\ell\rceil < \lceil 3r\rceil$。根据定理 3.3，代入 $\theta = 1/3,\ \ell = 2/3,\ r=1$，并利用 $n/9 \leq \lceil n/9\rceil \leq n/9+1$ 这一事实，近似比至多为

$$\begin{aligned}&\max\left\{\frac{n}{2(\frac{n}{3}+1-\lceil\frac{n}{9}\rceil)}-1, \frac{n}{2(\frac{n}{3}+1-\lceil\frac{n}{9}\rceil)}, \frac{n}{3\lceil\frac{n}{9}\rceil}-1, \frac{n}{4\lceil\frac{n}{9}\rceil}\right\}\\ &=\max\left\{\frac{9}{4}, \frac{9}{4}, 2, \frac{9}{4}\right\} = \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

最后，对于 $m=5$，我们运行 $M_5(2/5,\ 3/5,\ 4/5)$。再次注意，对于这些取值，我们有 $\lceil 5\ell\rceil \lhd \lceil 5r\rceil$。根据定理3.3，代入 $\theta=2/5,\ \ell=3/5,\ r=4/5$，并利用 $2n/25 \le \lceil 2n/25\rceil \le 2n/25+1$ 这一事实，近似比至多为

$$\begin{aligned}&\max\left\{\frac{n}{3(\frac{n}{5}+1-\lceil\frac{2n}{25}\rceil)}-1,\frac{n}{4(\frac{n}{5}+1-\lceil\frac{2n}{25}\rceil)},\frac{n}{4\lceil\frac{2n}{25}\rceil}-1,\frac{n}{6\lceil\frac{2n}{25}\rceil}\right\}\\&=\max\left\{\frac{16}{9},\frac{25}{12},\frac{17}{8},\frac{25}{12}\right\}=\frac{25}{12}.\end{aligned}$$

我们得出结论：对于任意 m，近似比至多为 $1+\sqrt{2}$。 □

现在我们将证明，对于任何算法（即使是非策略无关的算法），$1+\sqrt{2}$ 也是我们所能期望达到的最佳近似比。

定理 4.2. 在求和变体中，对于任意 $\varepsilon>0$，当有 $k=2$ 个设施时，任何算法的近似比至少为 $1+\sqrt{2}-\varepsilon$。

证明。 我们考虑由大量代理人组成的对称组实例。为简单起见，我们假设每组的总体积为 1。我们也允许组的数量为无理数（这样便可以避免使用向上取整；这将得到 $1+\sqrt{2}$ 而非 $1+\sqrt{2}-\varepsilon$的下界）。对于任意 $\alpha\in[0,1]$，令 g_α 为一组，其中 α比例的代理人在 0 处，其余 $(1-\alpha)$比例的代理人在 1 处。不失一般性，假设第 $g_{1/2}$ 组的代表位置为 1。为了证明该结论，我们需要以下性质，稍后将对此进行证明。

性质 4.3。 考虑任意一个近似比严格小于 $1+\sqrt{2}$ 的算法，设 x和 y 是两个较大的数。当有 x 个组的代表为 0，且 y 个组的代表为 1，并且满足 $y/x=\sqrt{2}$时，该算法必须输出解 $(1,\ 1)$。

现在，假设存在一个近似比严格小于 $1+\sqrt{2}$ 的算法。考虑一个包含 x 个 g_1 副本（每个副本的代表为 0）以及 y 个$g_{1/2}$ 副本（每个副本的代表为 1）的实例，其中 x 和 y 是满足 $y/x=\sqrt{2}$ 的较大整数。根据性质 4.3，该算法必须输出解 $(1,\ 1)$。由于

$$\mathrm{SC}(1,1)=\left(x+\frac{y}{2}\right)\cdot 2=y+2x$$

and

$$\mathrm{SC}(0,0)=\frac{y}{2}\cdot 2=y,$$

近似比为 $1+2x/y=1+\sqrt{2}$，这就产生了矛盾。

证明的其余部分旨在证明性质4.3。我们首先说明，任何近似比严格小于 $1+\sqrt{2}$ 的算法都必须选择0 作为$g_{1/\sqrt{2}}$的代表。考虑一个由该组的两个副本构成的实例。显然，根据该组代表的不同，有两种可能的解：$(0,\ 0)$ 如果代表是0，或者$(1,\ 1)$ 如果代表是1。由于

$$\mathrm{SC}(1,1)=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

and

$$\mathrm{SC}(0,0)=2\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

如果 0 不是该组的代表，则近似比将为 $1+\sqrt{2}$，这与近似比严格小于该值相矛盾。

接下来，我们提出以下性质。

性质 4.4。 如果0 被选为 g_α 的代表，且 $\alpha > 1/2$满足某个条件，那么当有 x 个代表为0 的组和 y 个代表为1 的组，使得$\lambda = y/x = 2(1+\sqrt{2})\alpha - 1$时，算法必须输出解(1,1) 。

证明。 反设不然，并考虑一个由 x 个副本组成的实例，其中 g_α 的代表为 0，以及 y 个副本，其中 g_0 的代表为 1。那么，

$$\mathrm{SC}(0,0) = (x(1-\alpha)+y)\cdot 2,$$

$$\mathrm{SC}(0,1) = x+y$$

and

$$\mathrm{SC}(1,1) = x\alpha\cdot 2.$$

因此，近似比至少为

$$\min\left\{\frac{x(1-\alpha)+y}{x\alpha}, \frac{x+y}{2x\alpha}\right\} = \frac{x+y}{2x\alpha} = \frac{1+\lambda}{2\alpha} = 1+\sqrt{2},$$

如果(1,1)不是该解，就会与算法的近似比严格小于 $1+\sqrt{2}$相矛盾。

□

最后，我们提出以下性质。

性质 4.5. 如果在有 x 个代表位置为 0 的组，以及有 y 个代表位置为 1 的组时，算法输出解 (1,1)，那么它必须选择 0 作为组 g_α 的代表位置，对 $\alpha = \frac{(1+\sqrt{2})\lambda - 1}{(2+\sqrt{2})\lambda}$，其中 ~~$\lambda = y/x$。~~

证明。 反设 g_α 的代表位置为 1，并考虑一个实例，其中按假设有 x 个副本属于代表位置为 0 的 g_1，以及 y 个副本属于代表位置为 1 的 g_α。那么，解为 (1,1)。由于

$$\mathrm{SC}(1,1) = (x+\alpha y)\cdot 2$$

and

$$\mathrm{SC}(0,0) = (1-\alpha)y\cdot 2$$

近似比至少为

$$\frac{x+\alpha y}{(1-\alpha)y} = \frac{1+\alpha\lambda}{(1-\alpha)\lambda} = 1+\sqrt{2},$$

这 与该算法的近似比严格小于这一数值相矛盾。 □

利用性质 4.4和 4.5，我们可以讨论某些实例中的解以及特定组的代表。也就是说，由于存在一个初始 $\alpha_0 = 1/\sqrt{2}$ 使得 g_{α_0} 必须以 0 作为代表，才能使近似比至多为 $1+\sqrt{2}$，因此我们得到一组满足这些性质条件的 λ和 α 取值。具体而言，这些性质定义了如下递推关系：设 $t \geq 1$ 为一个时间步，则根据性质4.4，可得

$$\lambda_t = 2(1+\sqrt{2})\alpha_{t-1} - 1,$$

根据性质4.5，可得

$$\alpha_t = \frac{(1+\sqrt{2})\lambda_t - 1}{(2+\sqrt{2})\lambda_t}.$$

令 t 趋于无穷大时，该递推关系的稳定解 (λ^*, α^*) 为

$$\lambda^* = 2(1+\sqrt{2})\alpha^* - 1 \quad \text{and} \quad \alpha^* = \frac{(1+\sqrt{2})\lambda^* - 1}{(2+\sqrt{2})\lambda^*}.$$

将第二个等式代入第一个等式，可得关于 λ 的二次方程，其解为 $\lambda^* = \sqrt{2}$；将该值代入第二个等式，还可得 $\alpha^* = 1/2$。对于这些值，性质 4.4 推出性质 4.3，至此，下界的证明完成。 □

4.2 最大值变体

现在我们转而讨论最大值变体。再次利用定理3.3，我们设计出一种策略无关机制，其近似比至多为 $9/2 = 4.5$。

定理 4.6。在最大值变体中，对于 $k = 2$ 个设施，存在一种策略无关机制，其近似比至多为 $9/2$。

证明。首先，根据定理 3.3，取 $Y = 0$（因为我们处于最大值变体的情形），对于任意满足不等式 ℓ 和 r 的有效参数 $\lceil \ell m \rceil < \lceil rm \rceil$，机制 $\mathcal{M}_m(\theta, \ell, r)$ 所实现的近似比上界可简化为

$$\begin{aligned}
&\max\left\{ \frac{n}{(m+1-\lceil \ell m \rceil)(\frac{n}{m}+1-\lceil \frac{\theta n}{m} \rceil)} - 1, \frac{n}{(m+1-\lceil rm \rceil)(\frac{n}{m}+1-\lceil \frac{\theta n}{m} \rceil)}, \frac{n}{\lceil rm \rceil \lceil \frac{\theta n}{m} \rceil} - 1, \frac{n}{\lceil \ell m \rceil \lceil \frac{\theta n}{m} \rceil} \right\} \\
&= \max\left\{ \frac{n}{(m+1-\lceil rm \rceil)(\frac{n}{m}+1-\lceil \frac{\theta n}{m} \rceil)}, \frac{n}{\lceil \ell m \rceil \lceil \frac{\theta n}{m} \rceil} \right\}.
\end{aligned}$$

对于任意偶数个 $m \geq 2$ 组，我们运行机制 $\mathcal{M}_m(1/2,\ 1/2,\ 1/2+\varepsilon)$。该机制在第二阶段于两个中位代表位置开放设施。近似比至多为

$$\begin{aligned}
&\max\left\{ \frac{n}{(m+1-\lceil (\frac{1}{2}+\varepsilon)m \rceil)(\frac{n}{m}+1-\lceil \frac{n}{2m} \rceil)}, \frac{n}{\lceil \frac{m}{2} \rceil \lceil \frac{n}{2m} \rceil} \right\} \\
&\leq \max\left\{ \frac{2n}{m(\frac{n}{m}+1-\lceil \frac{n}{2m} \rceil)}, \frac{2n}{m\lceil \frac{n}{2m} \rceil} \right\} = 4.
\end{aligned}$$

对于任意奇数个 $m \geq 3$ 组，我们运行机制 $\mathcal{M}_m(\frac{m-1}{2m},\ \frac{m+1}{2m}, \frac{m+1}{2m}+\varepsilon)$。该机制在中位代表和紧邻其右侧的代表处开放设施。近似比现在至多为

$$\begin{aligned}
&\max\left\{ \frac{n}{(m+1-\lceil (\frac{m+1}{2m}+\varepsilon)m \rceil)(\frac{n}{m}+1-\lceil \frac{n(m-1)}{2m^2} \rceil)}, \frac{n}{\lceil \frac{m+1}{2m} m \rceil \lceil \frac{n(m-1)}{2m^2} \rceil} \right\} \\
&\leq \max\left\{ \frac{2n}{(m-1)(\frac{n}{m}+1-\lceil \frac{n(m-1)}{2m^2} \rceil)}, \frac{2n}{(m+1)\lceil \frac{n(m-1)}{2m^2} \rceil} \right\} \leq \frac{4m^2}{m^2-1} \leq \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

证明现已完成。 □

我们以一个紧确下界补充上述正面结果，该下界为 $9/2$，针对最大值变体中任意两个设施的策略无关机制的近似比。我们的构造采用了包含三个组代理人的实例。此处需要指出，根据定理4.6的证明，当组数为偶数时，我们可以得到更好的上界4（在下一节中，我们实际上将论证4 是最大值变体中所有不受限制的算法所能达到的最佳界），因此最坏情况必然出现在组数为奇数时。为了证明这个下界，我们需要用到策略无关机制的以下性质。

引理 4.7。对于满足 $a < b$ 的任意实数 a 和 b，以及任意正整数 x 和 y，令$g_{a,\ b}(x, y)$ 为一个组，其中 a 处有 x 个代理人，b 处有 y 个代理人。

- 如果某个策略无关机制选择 a 作为 $g_{a,\ b}(x, y)$ 的代表，那么对于任意 $a' \in [a, b)$，它必须选择 a' 作为 $g_{a',\ b}(x, y)$ 的代表，并选择 a 作为 $g_{a,\ b'}(x, y)$ 的代表，其中 $b' \in (a, b]$。

- 如果某个策略无关机制选择 b 作为 $g_{a,\ b}(x, y)$ 的代表，那么对于任意 $b' \in (a, b]$，它必须选择 b' 作为 $g_{a,\ b'}(x, y)$ 的代表，并选择 b 作为 $g_{a',\ b}(x, y)$ 的代表，其中任意$a' \in [a, b)$。

证明。由于两种情形是对称的，只需证明第一种情形。为简便起见，令 $a = 0$,$b = 1$，并在记号中省略 $(x,\ y)$。因此，我们有一个策略无关机制，它选择 0 作为组$g_{0,\ 1}$ 的代表。

第一部分。反设存在某个实数 $a_1 \in [0, 1/2)$，使得机制选择 1 作为组 $g_{a_1,1}$ 的代表。显然，对于仅由 $g_{0,1}$ 的副本构成的任何实例，解必须是 (0,0)；而对于仅由 $g_{a_1,1}$ 的副本构成的任何实例，解必须是 (1,1)。现在考虑一个由 $g_{a_1,1}$ 的两个副本构成的实例。$2x$ 代理人依次从 a_1 移至 0。每次这样的移动都会产生一个新的实例。由于机制是策略无关的，因此解必定包含 1；否则，偏离代理人的成本就会从 $1 - a_1 > 1/2$ 降至至多 $a_1 < 1/2$。最后，这些代理人都位于 0，于是我们得到一个由 $g_{0,1}$ 的两个副本构成的实例，但解要么是 (0,1)，要么是 (1,1)，这与解必须是 (0,0) 相矛盾。

对于任意整数 $j \geq 2$，我们都可以重复相同的论证，并通过矛盾证明，机制必须选择 a_j 作为组$g_{a_j,\ 1}$（其中 $a_j \in [a_{j-1}, \frac{1+a_{j-1}}{2}$）的代表。对每个可能的整数都这样做，即可证明该结论。

第二部分。考虑一个实例，它由一份 $g_{0,\ 1}$ 和一份组 $g_{b'}$ 组成，其中所有代理人都位于 b'。这两个组的代表分别为 0 和 b'，因此该实例的解为 $(0,\ b')$。$g_{0,\ 1}$ 中位于 1 的 y 个代理人依次移动到 b'。每次这样的移动都会产生一个新实例，而机制仍必须选择 0 作为该组的代表；否则，解就会变成 $(b',\ b')$，从而偏离代理人的成本会从 1 降至 $1 - b'$，这与机制具有策略无关性相矛盾。 □

现在我们可以证明下界了。

定理 4.8。在最大值变体中，对于 $k = 2$ 个设施，任何策略无关机制的近似比至少为 $9/2$。

证明。假设存在一个近似比严格小于 $9/2$ 的策略无关机制。我们将通过构造一个包含三个组的实例来证明这是不可能的，每组由三个代理人组成。对于任意实数 a，令 g_a 表示所有三个代理人都位于 a 的组。对于任意

实数 a，b，满足 $a < b$，以及整数 x，y，满足 $x > 0$、$y > 0$ 和 $x + y = 3$，令 $g_{a,\ b}$（x，y）表示一个组，其中有 x 个代理人位于 a，有 y 个代理人位于 b。显然，g_a 的代表位置是 a，而 $g_{a,\ b}$（x，y）的代表位置在 $\{a, b\}$ 中。我们考虑以下几种情况。

情况 1：组代表 $g_{0,\ 1}$(1，2) 是 0。 首先考虑三个组的代表元为 0、1 和 1 的情况。假设机制将 0 纳入解中。那么，该实例可能由 $g_{0,\ 1}$(1，2) 的一个副本和 g_1 的两个副本组成。由于 SC(0，1) $= 9$ 且 SC(1，1) $= 1$，在这种情况下，该机制的近似比至少为 9。因此，当组代表为 0、1 和 1 时，机制必须输出解 (1，1)。

现在考虑组代表为 0、$1/2+\varepsilon$ 和 1 的情况，其中 ε 为某个无穷小量。假设机制将 0 纳入解中。那么，该实例可能使得第二个组是 $g_{1/2+\varepsilon}$ 的一个副本。这些代理人逐个移动到 1，使该组变为 g_1 的一个副本，从而组代表变为 0、1 和 1。根据上文，机制随后输出解 (1，1)，这意味着最后一个移动的代理人将其成本从 $1/2 + \varepsilon$ 降低到 $1/2 - \varepsilon$，这与该机制是策略无关的相矛盾。因此，当组代表为 0、$1/2 + \varepsilon$ 和 1 时，机制必须输出解 $(1/2 + \varepsilon,\ 1)$。

接下来，考虑一个实例，其中组代表为 0、$1/2 + \varepsilon$ 和 1，且第一组是 g_0 的副本。如上所述，解为 $(1/2 + \varepsilon$,1)。第一组中位于 0 的代理人逐个移至 $1/2 + \varepsilon$，将其转变为 $g_{1/2+\varepsilon}$ 的副本，从而得到一个组代表为 $1/2 + \varepsilon$、$1/2 + \varepsilon$ 和 1 的实例。由于机制是策略无关的，在代理人如此偏离时，任何中间实例的解都必须仍包含 1；否则，该代理人的成本就会从 1 降至至多 $1/2 + \varepsilon$。因此，我们已经证明，当组代表为 $1/2 + \varepsilon$、$1/2 + \varepsilon$ 和 1 时，机制必须输出解 ($1/2 + \varepsilon$,1)。

最后，考虑一个由两个$g_{1/2+\varepsilon}$的副本、$_1$(1、2) 以及一个 g_1的副本组成的实例。根据引理4.7，由于该机制是策略无关的，且$g_{0,\ 1}$(1，2)的代表是 0，因此$g_{1/2+\varepsilon,\ 1}$(1，2)的代表是 $1/2 + \varepsilon$。因此，组代表为 $1/2 + \varepsilon$、$1/2 + \varepsilon$ 和 1，由上述结论可知，解必须为（$1/2 + \varepsilon$，1）。由于 SC($1/2 + \varepsilon$，1) $= 9(1/2 - \varepsilon)$，且 SC(1，1) =2$(1/2 - \varepsilon)$，近似比为 $9/2$。

情况 2：组$g_{0,\ 1}$(2，1) 的代表是 1。 此情况可通过对情况 1 做类似处理得到：将 $g_{0,\ 1}$(1，2) 替换为 $g_{0,\ 1}$(2，1)，交换对位置 0 和 1 的引用，并将 $1/2 + \varepsilon$ 改为 $1/2 - \varepsilon$。

情形 3：组 $g_{0,1}$(1,2) 的代表是 1，而组 $g_{0,1}$(2, 1) 的代表是0。 考虑组代表为 0、1 和 1 的情况。假设该机制将 0 纳入解中。那么，该实例可能由 $g_{0,1}$(2,1) 的一个副本和 g_1 的两个副本组成。由于 SC$(0, 1) = 9$ 且 SC(1,1) $= 2$，在这种情况下，该机制的近似比为 $9/2$。因此，当组代表为 0、1 和 1 时，该机制必须输出 (1,1)。

现在考虑组代表为 0、$1/2 + \varepsilon$ 和 1 的情况。假设该机制将 0 纳入解中。那么，该实例可能满足：第二组是 $g_{1/2+\varepsilon}$ 的一个副本。这些代理人逐个移动到 1，从而使该组变为 g_1 的一个副本，因此组代表变为 0、1 和 1。根据上述结论，该机制随后输出解 (1,1)，这意味着最后移动的代理人的成本从 $1/2 + \varepsilon$ 降至 $1/2 - \varepsilon$，与该机制是策略无关的这一点相矛盾。因此，当组代表为 0、$1/2 + \varepsilon$ 和 1 时，该机制输出解 $(1/2 + \varepsilon$,1)。

接下来，考虑一个实例，其中组代表为 0、$1/2 + \varepsilon$ 和 1，且第一个组是 g_0 的副本。如上所述，解为（$1/2 + \varepsilon$，1）。第一组中位于 0 的代理人逐个迁移到 $1/2 + \varepsilon$，使其变为 $g_{1/2+\varepsilon}$ 的副本，从而得到一个实例，其中

代表元为 $1/2+\varepsilon$、$1/2+\varepsilon$ 和 1。由于该机制是策略无关的，当代理人按此方式偏离时，它必须在任何中间实例的结果中纳入 1；否则，任何此类代理人的成本都会从 1 降至至多 $1/2+\varepsilon$。因此，当组代表为 $1/2+\varepsilon$、$1/2+\varepsilon$ 和 1 时，计算出的解为（$1/2+\varepsilon$，1）。

最后，考虑一个包含两个副本的实例$g_{1/2+\varepsilon}$和一个副本的$g_{1/2+\varepsilon,\ 1}(1,\ 2)$；根据引理4.7，代表元为$1/2+\varepsilon$、$1/2+\varepsilon$和1。由于 $\mathsf{SC}(1/2+\varepsilon,\ 1)\ =9(1/2-\varepsilon)$ 以及 $\mathsf{SC}(1/2+\varepsilon,\ 1/2+\varepsilon)\ =2(1/2-\varepsilon)$，近似比至少为 $9/2$。 □

5 不受限制的算法：两个设施

这里我们关注不受限制的算法。在求和变体中，如第4.1节所述，$1+\sqrt{2}$ 的下界即使对于非策略证明机制也成立，这意味着在此设定下，$1+\sqrt{2}$ 是任意算法所能达到的最佳近似比。在最大值变体中，我们将证明一个紧确界4。正如第4.2节中简要讨论的，定理4.6 的证明表明，当组数 m 为偶数时，我们的策略无关机制达到了这一上界。下界由定理6.4对 $k\ =\ 2$ 给出，该定理在第6节中介绍，并且对任何不受限制的算法都成立。因此，只需关注组数为奇数的情况 m，并证明上界为4；实际上，我们将证明一个更优的界 $7/2$。

我们考虑以下算法：$\mathcal{A}^{*}_{\max}$（使用伪代码的描述见算法 2）：第一阶段，对于每个组，算法选取最靠左的中位代理人作为该组的代表。第二阶段，在中位代表和距离它最近的代表所在位置开放设施。

算法 2： $\mathcal{A}^{*}_{\max}$

输入： 实例 $I=(\mathbf{x}\ G,\ 2)$;

输出： 设施位置 $\mathbf{w}\ =(w_1,\ \ w_2)$;

代表位置集合 $\leftarrow\varnothing$;

对于每个组 $g\in G$ **执行**

  $i_g\leftarrow\lceil n_g/2\rceil$-组中最靠左的代理人;

  $r_g\leftarrow x_{i_g}$;

  代表位置集合 $\leftarrow$ 代表位置集合 $\cup\{r_g\}$;

$w_1\leftarrow\lceil m/2\rceil$-代表位置集合中最靠左的位置;

$w_2\leftarrow$ 最小值对应项$_{r\in\mathsf{Rep}\setminus\{w_1\}}\ d(r,\ \ w_1)$;

在界定其近似比之前，我们给出一个包含三个组的简单实例，说明 $\mathcal{A}^{*}_{\max}$ 并非策略无关。第一组由位于 0 和 0.1 的两个代理人组成，第二组由位于 0.51 的两个代理人组成，第三组由位于 1 的两个代理人组成。由于每组的大小均为 2，其代表是该组中最靠左代理人的位置；因此，代表位置分别为 0、0.51 和 1。两个设施分别设在 0.51（中位代表）和 1（最接近中位代表的代表）处。注意，第一组中位于 0 的代理人（其位置被选为该组的代表）成本为 1。她将自己的位置虚报为 0.1 后，第一组的代表位置变为 0.1，它比 1 更接近 0.51，因此两个设施改设在 0.1 和 0.51 处。这使偏离代理人的成本从 1 降至 0.51，从而证明该算法并非策略无关。

现在，我们着重证明算法在奇数 $7/2$ 情形下的近似比上界为 m。我们的分析将沿用第 3 节的方法。注意，由于该机制根据各组中代理人的代理排序来选择代表，因此只需考虑各组均为对称组的实例（特别是，不难看出，相同的

pro性质也适用于引理 $\mathcal{M}_m(\theta,\ \ell,\ r)$中针对机制所述的性质 3.2 对 $\mathcal{A}^*_{\max}$同样成立）.

定理 5.1。 在最大值变体中，对于 $k=2$ 个设施和奇数个 m组，算法 $\mathcal{A}^*_{\max}$ 的近似比至多为 $7/2$。

证明。设 w_m 为中位代表，并分别用 w_ℓ 和 w_r 表示紧邻 w_m左侧和右侧的代表。显然， w_ℓ 和 w_r 中有一个是距离 w_m最近的代表；不失一般性，假设 $d(w_\ell, w_m) \le d(w_m, w_r)$，因此算法 $\mathcal{A}^*_{\max}$ 输出解 $\mathbf{w} = (w_\ell, w_m)$。设 med 为总体中位数代理人的位置。我们将代理人划分为以下四个集合： $S_\ell = \{i:\ x_i \le w_\ell\}$, $S_{\ell m} = \{i:\ x_i \in (w_\ell, w_m]\}$,$S_{mr} = \{i:\ x_i \in (w_m, w_r)\}$，以及 $S_r = \{i:\ x_i \ge w_r\}$。对于任意这样的集合 S_x，设 $n_x = |S_x|$ 为其大小。根据 w_ℓ、 w_m 和 w_r的定义，我们有

$$n_\ell, n_r \ge \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n}{2m} \ge \frac{(m-1)n}{4m},$$

$$n_\ell, n_r \le n - \frac{m+1}{2}\cdot\frac{n}{2m} \le \frac{(3m-1)n}{4m}$$

and

$$n_\ell + n_{\ell m}, n_{\ell m} + n_r \ge \frac{m+1}{2}\cdot\frac{n}{2m} \ge \frac{(m+1)n}{4m}.$$

现在我们根据 med 与 w_ℓ、 w_m 和 w_r 的相对位置来区分不同情况。

情况 1： $\mathtt{med} < w_\ell$。我们有

- 对于任意 $i \in S_\ell$， $\mathrm{cost}_i(\mathbf{w}) = d(i, w_m) \le d(i,\mathrm{med}) + d(\mathrm{med}\ w_\ell) + d(w_\ell, w_m)$。
- 对于任意 $i \in S_{\ell m}$， $\mathrm{cost}_i(\mathbf{w}) \le d(w_\ell, w_m)$， 并且 $d(i,\mathrm{med}) \ge d(\mathrm{med}\ w_\ell)$。
- 对于任意 $i \in S_{mr}$， $d(i,\mathrm{med}) = \mathrm{cost}_i(\mathbf{w}) + d(\mathrm{med}\ w_\ell) \ge d(w_\ell, w_m) + d(\mathrm{med}\ w_\ell)$。
- 对于任意 $i \in S_r$， $d(i,\mathrm{med}) = \mathrm{cost}_i(\mathbf{w}) + d(\mathrm{med}\ w_\ell) \ge d(w_m, w_r) + d(w_\ell, w_m) + d(\mathrm{med}\ w_\ell)$ $\ge 2d(w_\ell, w_m) + d(\mathrm{med}\ w_\ell)$。

因此， $\mathbf{w}$ 的社会成本为

$$\mathrm{SC}(\mathbf{w}) \le \sum_{i\in S_\ell} d(i,\mathtt{med}) + n_\ell d(\mathtt{med}, w_\ell) + (n_\ell + n_{\ell m})d(w_\ell, w_m) + \sum_{i\in S_{mr}\cup S_r} \mathrm{cost}_i(\mathbf{w}). \tag{5}$$

对于最优解$\mathbf{o}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{SC}(\mathbf{o}) &\ge \sum_{i\in S_\ell} d(i,\mathtt{med}) + \sum_{i\in S_{mr}\cup S_r} \mathrm{cost}_i(\mathbf{w}) + (n_{\ell m} + n_{mr} + n_r)d(\mathtt{med}, w_\ell) &(6)\\ &\ge (n_{\ell m} + n_{mr} + n_r)d(\mathtt{med}, w_\ell) + (n_{mr} + 2n_r)d(w_\ell, w_m). &(7)\end{aligned}$$

利用式（6）、式（5）可得

$$\begin{aligned}\mathrm{SC}(\mathbf{w}) &\le \mathrm{SC}(\mathbf{o}) + \big(n_\ell - (n_{\ell m} + n_{mr} + n_r)\big)d(\mathtt{med}, w_\ell) + (n_\ell + n_{\ell m})d(w_\ell, w_m)\\ &= \mathrm{SC}(\mathbf{o}) + \big(n - 2(n_{\ell m} + n_{mr} + n_r)\big)d(\mathtt{med}, w_\ell) + (n_\ell + n_{\ell m})d(w_\ell, w_m).\end{aligned}$$

利用这一点和式（7），近似比为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})} &\le 1+\frac{\big(n-2(n_{\ell m}+n_{mr}+n_r)\big)d(\mathtt{med},w_\ell)+(n_\ell+n_{\ell m})d(w_\ell,w_m)}{(n_{\ell m}+n_{mr}+n_r)d(\mathtt{med},w_\ell)+(n_{mr}+2n_r)d(w_\ell,w_m)}\\ &\le 1+\max\left\{\frac{n-2(n_{\ell m}+n_{mr}+n_r)}{n_{\ell m}+n_{mr}+n_r},\frac{n_\ell+n_{\ell m}}{n_{mr}+2n_r}\right\}\\ &=\max\left\{\frac{n}{n_{\ell m}+n_{mr}+n_r}-1,\frac{n+n_r}{n_{mr}+2n_r}\right\}.\end{aligned}$$

由于 $n_{mr}\ge 0$, $n_{mr}+n_r\ge \frac{(m+1)n}{4m}$ 和 $n_r\ge \frac{(m-1)n}{4m}$，我们得到

$$\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})}\le\max\left\{\frac{3m}{m+1},\frac{5m-1}{2m-2}\right\}\le 7/2.$$

情况 2： 中位数 $\in[w_\ell,w_m)$。我们有

- 对于任意 $i\in S_\ell$，由于成本$_i$(**w**) $=d(i,w_m)$，$d(i,$中位数$)=$成本$_i$(**w**) $-d($中位数 $w_m)\ge d(w_\ell,$中位数$)$。
- 对于任意 $i\in S_{\ell m}$，成本$_i$(**w**) $\le d(w_\ell,w_m)=d(w_\ell,$中位数$)+d($中位数 $w_m)$。
- 对于任意 $i\in S_{mr}$，由于成本$_i$(**w**) $=d(i,w_\ell)$，$d(i,$中位数$)=$成本$_i$(**w**) $-d(w_\ell,$中位数$)\ge d($中位数 $w_m)$。
- 对于任意 $i\in S_r$，由于成本$_i$(**w**) $=d(i,w_\ell)$，$d(i,$中位数$)=$成本$_i$(**w**) $-d(w_\ell,$中位数$)\ge d(w_m,w_r)+d($中位数 $w_m)\ge(w_\ell,w_m)+d($中位数 $w_m)=d(w_\ell,$中位数$)+2d($中位数 $w_m)$。

对于最优成本，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{SC}(\mathbf{o})&\ge\sum_{i\in N}d(i,\mathtt{med})\\ &\ge\sum_{i\in S_\ell\cup S_{mr}\cup S_r}\mathrm{cost}_i(\mathbf{w})-n_\ell d(\mathtt{med},w_m)-(n_{mr}+n_r)d(w_\ell,\mathtt{med})\qquad(8)\\ &\ge(n_\ell+n_r)d(w_\ell,\mathtt{med})+(n_{mr}+2n_r)d(\mathtt{med},w_m).\qquad(9)\end{aligned}$$

利用（8），**w** 的社会成本为

$$\mathrm{SC}(\mathbf{w})\le\sum_{i\in N}\mathrm{cost}_i(\mathbf{w})\le\mathrm{SC}(\mathbf{o})+(n_{\ell m}+n_{mr}+n_r)d(w_\ell,\mathtt{med})+(n_\ell+n_{\ell m})d(\mathtt{med},w_m).$$

利用此结果和（9），近似比为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})}&\le 1+\frac{(n_{\ell m}+n_{mr}+n_r)d(w_\ell,\mathtt{med})+(n_\ell+n_{\ell m})d(\mathtt{med},w_m)}{(n_\ell+n_r)d(w_\ell,\mathtt{med})+(n_{mr}+2n_r)d(\mathtt{med},w_m)}\\ &\le 1+\max\left\{\frac{n_{\ell m}+n_{mr}+n_r}{n_\ell+n_r},\frac{n_\ell+n_{\ell m}}{n_{mr}+2n_r}\right\}\\ &=1+\max\left\{\frac{n-n_\ell}{n_\ell+n_r},\frac{n-n_{mr}-n_r}{n_{mr}+2n_r}\right\}\\ &=\max\left\{\frac{n+n_r}{n_\ell+n_r},\frac{n+n_r}{n_{mr}+2n_r}\right\}.\end{aligned}$$

由于 $n_{mr}\ge 0$，且 n_ℓ，$n_r\ge\frac{(m-1)n}{4m}$，我们得到

$$\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})}\le\frac{5m-1}{2m-2}\le 7/2.$$

情形 3： 中位数 $\in[w_m,w_r]$。我们有

- 对于任意 $i \in S_\ell$，成本$_i(\mathbf{w}) = d(i, w_m) = d(i, w_\ell) + d(w_\ell, w_m)$ 和 $d(i, \text{中位数}) = d(i, w_\ell) + d(w_\ell, w_m) + d(w_m, \text{中位数})$。
- 对于任意 $i \in S_{\ell m}$，成本 $\text{cost}_i(\mathbf{w}) \le d(w_\ell, w_m)$ 和 $d(i, \text{中位数}) \ge d(w_m, \text{中位数})$。
- 对于任意 $i \in S_{mr}$，成本 $\text{cost}_i(\mathbf{w}) = d(i, w_\ell) \le d(i, \text{中位数}) + d(w_m, \text{中位数}) + d(w_\ell, w_m)$。
- 对于任意 $i \in S_r$，成本 $\text{cost}_i(\mathbf{w}) = d(i, w_\ell) \le d(i, w_r) + d(w_r, \text{中位数}) + d(w_m, \text{中位数}) + d(w_\ell, w_m)$ 且 $d(i, \text{中位数}) = d(i, w_r) + d(\text{中位数}, w_r)$。

因此，$\mathbf{w}$ 的社会成本为

$$\begin{aligned}\text{SC}(\mathbf{w}) \le & \sum_{i \in S_\ell} d(i, w_\ell) + \sum_{i \in S_{mr}} d(i, \texttt{med}) + \sum_{i \in S_r} d(i, w_r) \\ & + n \cdot d(w_\ell, w_m) + (n_{mr} + n_r) d(w_m, \texttt{med}) + n_r d(\texttt{med}, w_r).\end{aligned}$$

由于 $n_{mr} + n_r = n - (n_\ell + n_{\ell m})$，我们进一步有

$$\begin{aligned}\text{SC}(\mathbf{w}) \le & \sum_{i \in S_\ell} d(i, w_\ell) + \sum_{i \in S_{mr}} d(i, \texttt{med}) + \sum_{i \in S_r} d(i, w_r) \\ & + n \cdot d(w_\ell, w_m) + \big(n - (n_\ell + n_{\ell m})\big) d(w_m, \texttt{med}) + n_r d(\texttt{med}, w_r). \qquad (10)\end{aligned}$$

对于最优解 $\mathbf{o}$，我们有

$$\begin{aligned}\text{SC}(\mathbf{o}) \ge & \sum_{i \in N} d(i, \texttt{med}) \\ \ge & \sum_{i \in S_\ell} d(i, w_\ell) + \sum_{i \in S_{mr}} d(i, \texttt{med}) + \sum_{i \in S_r} d(i, w_r) \\ & + n_\ell d(w_\ell, w_m) + (n_\ell + n_{\ell m}) d(w_m, \texttt{med}) + n_r d(\texttt{med}, w_r).\end{aligned}$$

重新排列各项后，我们得到

$$\begin{aligned}& \sum_{i \in S_\ell} d(i, w_\ell) + \sum_{i \in S_{mr}} d(i, \texttt{med}) + \sum_{i \in S_r} d(i, w_r) + n_r d(\texttt{med}, w_r) \\ & \le \text{SC}(\mathbf{o}) - n_\ell d(w_\ell, w_m) - (n_\ell + n_{\ell m}) d(w_m, \texttt{med}).\end{aligned}$$

将其代入（10）可得

$$\text{SC}(\mathbf{w}) \le \text{SC}(\mathbf{o}) + (n - n_\ell) d(w_\ell, w_m) + \big(n - 2(n_\ell + n_{\ell m})\big) d(w_m, \texttt{med}).$$

近似比为

$$\frac{\text{SC}(\mathbf{w})}{\text{SC}(\mathbf{o})} \le 1 + \frac{(n - n_\ell) \cdot d(w_\ell, w_m) + \big(n - 2(n_\ell + n_{\ell m})\big) d(w_m, \texttt{med})}{n_\ell d(w_\ell, w_m) + (n_\ell + n_{\ell m}) d(w_m, \texttt{med}) + n_r d(\texttt{med}, w_r)}.$$

现在注意到，最后一个表达式关于 $d(w_m, \text{中位数})$ 和关于$d(\text{中位数}, w_r)$是单调函数。因此，当 $\text{med} = w_m$ 或 $\text{med} = w_r$时，它取得最大值。由于 $d(w_\ell, w_m) \le d(w_m, w_r)$，我们有

$$\begin{aligned}& \frac{\text{SC}(\mathbf{w})}{\text{SC}(\mathbf{o})} \\ & \le 1 + \max\left\{ \frac{(n - n_\ell) \cdot d(w_\ell, w_m)}{n_\ell d(w_\ell, w_m) + n_r d(w_m, w_r)}, \frac{(n - n_\ell) \cdot d(w_\ell, w_m) + \big(n - 2(n_\ell + n_{\ell m})\big) d(w_m, w_r)}{n_\ell d(w_\ell, w_m) + (n_\ell + n_{\ell m}) d(w_m, w_r)} \right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 1+\max\left\{\frac{n-n_\ell}{n_\ell+n_r},\frac{n-n_\ell+n-2(n_\ell+n_{\ell m})}{n_\ell+n_\ell+n_{\ell m}}\right\}\\
&\leq \max\left\{\frac{n+n_r}{n_\ell+n_r},\frac{2n-n_\ell-n_{\ell m}}{2n_\ell+n_{\ell m}}\right\}\\
&\leq \max\left\{\frac{5m-1}{2m-2},\frac{7m-1}{2m}\right\}\\
&\leq 7/2,
\end{aligned}
$$

其中倒数第二个不等式由 n_ℓ、 $n_{\ell m}$ 和 n_r的界得出。

情形4： 中位数 $> w_r$。我们有

- 对于任意 $i \in S_\ell$，成本$_i(\mathbf{w}) = d(i,\ w_m) = d(i,\ w_\ell) + d(w_\ell,\ w_m)$，且 $d(i,$ 中位数$) = d(i,\ w_\ell) + d(w_\ell,\ w_m) + d(w_m,$ 中位数$)$。
- 对于任意 $i \in S_{\ell m}$，成本$_i(\mathbf{w}) \leq d(w_\ell,\ w_m)$，且 $d(i,$ 中位数$) \geq d(w_m,$ 中位数$)$。
- 对于任意 $i \in S_{mr} \cup S_r$，成本$_i(\mathbf{w}) = d(i,\ w_\ell) \leq d(i,$ 中位数$) + d(w_m,$ 中位数$) + d(w_\ell,\ w_m)$。

因此，$\mathbf{w}$ 的社会成本为

$$
\mathrm{SC}(\mathbf{w}) \leq \sum_{i\in S_\ell} d(i,w_\ell) + \sum_{i\in S_{mr}\cup S_r} d(i,\mathtt{med}) + n\cdot d(w_\ell,w_m) + (n_{mr}+n_r)d(w_m,\mathtt{med}).
$$

由于 $n_{mr}+n_r = n-(n_\ell+n_{\ell m})$，我们进一步有

$$
\mathrm{SC}(\mathbf{w}) \leq \sum_{i\in S_\ell} d(i,w_\ell) + \sum_{i\in S_{mr}\cup S_r} d(i,\mathtt{med}) + n\cdot d(w_\ell,w_m) + \Big(n-(n_\ell+n_{\ell m})\Big)d(w_m,\mathtt{med}). \quad (11)
$$

对于最优解 $\mathbf{o}$，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SC}(\mathbf{o}) &\geq \sum_{i\in N} d(i,\mathtt{med})\\
&\geq \sum_{i\in S_\ell} d(i,w_\ell) + \sum_{i\in S_{mr}\cup S_r} d(i,\mathtt{med}) + n_\ell d(w_\ell,w_m) + (n_\ell+n_{\ell m})d(w_m,\mathtt{med}).
\end{aligned}
$$

重新排列各项后，我们有

$$
\sum_{i\in S_\ell} d(i,w_\ell) + \sum_{i\in S_{mr}\cup S_r} d(i,\mathtt{med}) \leq \mathrm{SC}(\mathbf{o}) - n_\ell d(w_\ell,w_m) - (n_\ell+n_{\ell m})d(w_m,\mathtt{med}).
$$

将其代入（11），可得

$$
\mathrm{SC}(\mathbf{w}) \leq \mathrm{SC}(\mathbf{o}) + (n-n_\ell)d(w_\ell,w_m) + \Big(n-2(n_\ell+n_{\ell m})\Big)d(w_m,\mathtt{med}).
$$

近似比为

$$
\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})} \leq 1 + \frac{(n-n_\ell)\cdot d(w_\ell,w_m) + \Big(n-2(n_\ell+n_{\ell m})\Big)d(w_m,\mathtt{med})}{n_\ell d(w_\ell,w_m) + (n_\ell+n_{\ell m})d(w_m,\mathtt{med})}.
$$

与情形 3 一样，由于 $d(w_\ell,\ w_m) \le d(w_m,\ w_r) \le d(w_m,$ 中位数$)$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})} &\le \frac{2n - n_\ell - n_{\ell m}}{2n_\ell + n_{\ell m}} \\ &\le \frac{7m-1}{2m} \\ &\le 7/2,\end{aligned}$$

倒数第二个不等式由 n_ℓ 和 $n_{\ell m}$ 的界推出。 □

6 当 $k \ge 3$ 个设施时的机制

现在，我们将注意力转向设施数量多于两个的情形。我们证明，在求和变体中，策略无关机制的近似比介于 $3-2/k$与 $3+2/k$之间；在最大值变体中，则介于 $2k$与 $2(k+1)$ 之间。我们的上界由一些机制给出，这些机制是对前文讨论 $k=2$ 个设施时所用机制 $\mathcal{M}_m(\theta,\ell,r)$ 的推广：它们首先根据各组内代理人的排序选出群组代表位置，然后根据代表的排序选出最终设施位置。由于这一结构，定理3.1 的证明可以推广，从而证明这些机制同样具有策略无关性；引理 3.2 的证明也可以推广，从而证明只需考虑对称组的实例即可界定其近似比。

6.1 求和变体

我们从求和变体开始，首先给出 $3+2/k$ 的上界。我们的机制 $\mathcal{M}_k^{\mathrm{sum}}$如下所示：在第一阶段，对于每个组 g，选取其中（最靠左的）中位代理人的位置作为g 的代表。在第二阶段，该机制在$\lceil \frac{\ell m}{k+1} \rceil$个最靠左的代表位置处开放设施，其中任意 $\ell \in [k]$；注意到$\lceil \frac{\ell m}{k+1} \rceil < \lceil \frac{(\ell+1)m}{k+1} \rceil$，因此计算所得的解是可行的。机制 3 的伪代码描述见下文。

机制 3： $\mathcal{M}^{\mathrm{sum}}_{\ k}$

输入： 实例 $I = (\mathbf{x},\ G,\ k)$；
输出： 设施位置$\mathbf{w} = (w_\ell)_{\ell \in [k]}$；
代表位置集合 $\leftarrow \varnothing$；
对每个组 $g \in G$**执行**
  $i_g \leftarrow \lceil n_g/2 \rceil$-$g$中最左侧的代理人；
  $r_g \leftarrow x_{i_g}$；
  代表位置集合 $\leftarrow$ 代表位置集合 $\cup \{r_g\}$；
对 每个 $\ell \in [k]$ **执行**
  $w_\ell \leftarrow \lceil \frac{\ell m}{k+1} \rceil$-代表位置集合中最左侧的位置；

现在给出该机制的近似比上界。

定理 6.1。 在求和变体中，对于 $k \ge 3$ 个设施，机制 $\mathcal{M}_k^{sum}$的近似比至多为 $3+2/k$。

证明。首先t，请注意，只需考虑具有 m 对称组的实例，即n_g =

n/m 对于任意组 g。不失一般性地，我们还假设 m 是 $k+1$的倍数。[1]设 $\mathbf{w}=(w_1,\ldots,w_k)$ 为机制计算出的解，并用 $\mathtt{med}$ 表示总体中位数代理人的位置。为简便起见，另设 $w_0=-\infty$和 $w_{k+1}=+\infty$。定义集合$L=\{\ell\in[k]:\ w_\ell\le \mathtt{med}\}$ 和 $R=\{\ell\in[k]:\ w_\ell>\mathtt{med}\}$。显然，$L$ 和 R 构成了 $[k]$的一个划分。此外，对于任意 $\ell\in\{2,\ldots,k\}$，如果 $\ell\in L$，则 $\ell-1\in L$；同样，对于任意 $\ell\in\{1,\ldots,k-1\}$，如果 $\ell\in R$，则 $\ell+1\in R$。请注意，当 $\mathtt{med}$ 位于解 $\mathbf{w}$ 中所包含的所有代表位置的左侧或右侧时，L 或 R 可能为空。

对于任意 $\ell\in L$，令 $S_\ell=\{i\in g:\ r_g\in(w_{\ell-1},w_\ell]\wedge x_i\le r_g\}$ 为组 g中代表位置为 $r_g\in(w_{\ell-1},w_\ell]$ 且位置不在 r_g右侧的代理人集合。类似地，对于任意 $\ell\in R$，令 $S_\ell=\{i\in g:\ r_g\in[w_\ell,w_{\ell+1})\wedge x_i\ge r_g\}$ 为组 g 中代表位置为 $r_g\in[w_\ell,w_{\ell+1})$ 且位置不在 r_g 左侧的代理人集合。根据定义，这些集合互不相交。由于对于任意组 g，r_g 是 g中位代理人的位置，并且在$\mathbf{w}$ 中任意两个代表位置之间（以及在 w_1左侧，即 w_0 和w_1之间，以及在 w_k右侧，即 w_k 和 w_{k+1}之间）至少有 $\frac{m}{k+1}$ 个组代表，因此对于任意 $\ell\in[k]$，都有 $n_\ell:=|S_\ell|\ge \frac{m}{k+1}\cdot\frac{n}{2m}=\frac{n}{2(k+1)}$。

现在，利用三角不等式，$\mathbf{w}$ 的社会成本为

$$\begin{aligned}\mathrm{SC}(\mathbf{w})&=\sum_{i\in N}\sum_{\ell=1}^{k}d(i,w_\ell)\\&\le\sum_{i\in N}\sum_{\ell=1}^{k}\Big(d(i,\mathtt{med})+d(\mathtt{med},w_\ell)\Big)\\&=k\cdot\sum_{i\in N}d(i,\mathtt{med})+n\cdot\sum_{\ell=1}^{k}d(\mathtt{med},w_\ell).\end{aligned}\tag{12}$$

对于最优社会成本，由于 S_ℓ 中的代理人需要行进距离 $d(\mathtt{med}\ w_\ell)$，才能从自己的位置到达中位数（注意，$x_i\le r_g\le w_\ell\le$ 的中位数对应 $\ell\in L$，而 $x_i\ge r_g\ge w_\ell\ge$ 的中位数对应 $\ell\in R$），因此我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{SC}(\mathbf{o})&\ge k\cdot\sum_{i\in N}d(i,\mathtt{med})\qquad(13)\\&\ge k\cdot\sum_{\ell=1}^{k}\sum_{i\in S_\ell}d(\mathtt{med},w_\ell)\\&=k\cdot\sum_{\ell=1}^{k}n_\ell\cdot d(\mathtt{med},w_\ell)\\&\ge\frac{kn}{2(k+1)}\cdot\sum_{\ell=1}^{k}d(\mathtt{med},w_\ell).\qquad(14)\end{aligned}$$

利用式（13）和（14），式（12）可得

$$\mathrm{SC}(\mathbf{w})\le\mathrm{SC}(\mathbf{o})+\frac{2(k+1)}{k}\cdot\mathrm{SC}(\mathbf{o})=\left(3+\frac{2}{k}\right)\cdot\mathrm{SC}(\mathbf{o}),$$

证明完成。□

[1]注意，对于任意实例 I，若 m 不是 $k+1$的倍数，则存在另一个实例 J，其中 I的每个组都由 $k+1$个副本组成；机制计算出的解显然相同（因为代表元是根据等距分位数选取的）。此外，两个实例中中位代理人的位置也相同，因为每个代理人都被复制了相同的次数。

接下来，我们证明任何算法的近似比都存在一个为 $3-2/k$ 的下界。结合上述上界，这两个结果为任何 $k \geq 3$ 留下了一个很小的差距；然而，当设施数量 k 相当大时，该差距会趋近于 0。

定理 6.2. 在求和变体中，对于 $k \geq 3$ 个设施，任何算法的近似比至少为 $3-2/k$。

证明。 不失一般性，假设对于一个代理人位于 0、另一个代理人位于 1 的组，算法选择 0 作为该组的代表。接着，考虑一个包含 k 个组的实例，其中第一个组有一个代理人位于 0，另一个代理人位于 1，而其余 $k-1$ 个组的两个代理人都位于 1。算法别无选择，只能在 0 处开放一个设施，并在 1 处开放 $k-1$ 个设施，社会成本为 $\mathsf{SC}(\mathbf{w}) = 3k-2$。然而，最优解是在 1 处开放全部 k 个设施，社会成本为 $\mathsf{SC}(\mathbf{o}) = k$，由此即得结论。 □

6.2 最大值变体

现在我们考虑最大值变体，并同样先给出上界。我们的机制 $\mathcal{M}_k^{\max}$如下运行：在第一阶段，对于每个组 g，它选择其中（最靠左的）中位代理人的位置作为 g的代表。在第二阶段，机制在 k最居中的代表位置处开放设施，即在 $(\lceil \frac{m}{2} \rceil + \ell)$个代表中的最左侧位置处（当 $\ell \in \{-(\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1)$ 时），……，0，……，$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$。关于使用伪代码描述的内容，请参见机制 4 。

机制 4： $\mathcal{M}^{\max}_k$

输入： 实例 $I = (\mathbf{x}, G, k)$;
输出： 设施位置$\mathbf{w} = (w_\ell)_{\ell \in [k]}$;
代表位置集合 $\leftarrow \varnothing$;
对于 每个组 $g \in G$**执行**
  $i_g \leftarrow \lceil n_g/2 \rceil$中最靠左的代理人;
  $r_g \leftarrow x_{i_g}$;
  代表位置集合 $\leftarrow$ 代表位置集合 $\cup \{r_g\}$;
对于每个 $\ell \in [k]$，**执行**
  代表位置集合中最左侧的 $w_\ell \leftarrow (\lceil \frac{m}{2} \rceil + \ell - \lceil \frac{k}{2} \rceil)$ 个位置;

定理 6.3。 在最大值变体中，对于 $k \geq 3$ 个设施，机制 $\mathcal{M}_k^{max}$的近似比至多为$2(k+1)$。

证明。 令$\mathbf{w} = (w_1, \ldots\ldots, w_k)$为机制计算出的解，并用 med 表示总体中位数代理人的位置。令 $L = \{i : x_i \leq w_1\}$，且 $R = \{i : x_i \geq w_k\}$。根据定义，我们有 $|L|$, $|R| \geq \left(\lfloor \frac{m-k}{2} \rfloor + 1\right) \frac{n}{2m}$，因为每个组的代表元都是该组中位代理人的位置，并且至少有 $\lfloor \frac{m-k}{2} \rfloor$ 个组的代表元未参与该解，且（弱）位于 $\overline{w_1}$ 左侧和（弱）位于 w_k 右侧。代理人 i 的个体成本为

$$\mathrm{cost}_i(\mathbf{w}) = \begin{cases} d(i, w_k) & \text{if } i \in L \\ \max\{d(i, w_1), d(i, w_k)\} & \text{if } i \notin L \cup R \\ d(i, w_1) & \text{if } i \in R \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} d(i,w_1)+d(w_1,w_k) & \text{if } i \in L \\ d(w_1,w_k) & \text{if } i \notin L \cup R \\ d(i,w_k)+d(w_1,w_k) & \text{if } i \in R \end{cases}$$

因此，$\mathbf{w}$ 的社会成本为

$$\mathrm{SC}(\mathbf{w}) \leq \sum_{i \in L} d(i,w_1) + \sum_{i \in R} d(i,w_k) + n \cdot d(w_1,w_k). \tag{15}$$

对于最优成本，我们有

$$\mathrm{SC}(\mathbf{o}) \geq \sum_{i \in N} d(i,\mathtt{med}).$$

现在我们根据 med 相对于 w_1 和 w的位置来区分情况 k.

情况 1： med $< w_1$。（med $> w_k$的情况也可用类似方法处理。）我们有，对于每个代理人 $i \in R$，$d(i,$ med$) = d(i, w_k)+d($med $w_k)$。因此，最优社会成本的下界为

$$\mathrm{SC}(\mathbf{o}) \geq \sum_{i \in L} d(i,\mathtt{med}) + \sum_{i \in R} d(i,w_k) + |R| \cdot d(\mathtt{med},w_k).$$

对于 $\mathbf{w}$ 的社会成本，利用三角不等式，并且由于 $|L| \leq n$和 $d($med $w_1)+d(w_1, w_k) = d($med $w_k)$，式（15）可得

$$\begin{aligned} \mathrm{SC}(\mathbf{w}) &\leq \sum_{i \in L} d(i,w_1) + \sum_{i \in R} d(i,w_k) + n \cdot d(w_1,w_k) \\ &\leq \sum_{i \in L} d(i,\mathtt{med}) + |L| d(\mathtt{med},w_1) + \sum_{i \in R} d(i,w_k) + n \cdot d(w_1,w_k) \\ &\leq \sum_{i \in L} d(i,\mathtt{med}) + \sum_{i \in R} d(i,w_k) + n \cdot d(\mathtt{med},w_k) \\ &\leq \mathrm{SC}(\mathbf{o}) + (n - |R|) \cdot d(\mathtt{med},w_k). \end{aligned}$$

因此，近似比为

$$\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})} \leq 1 + \frac{n-|R|}{|R|} = \frac{n}{|R|} \leq \frac{2m}{\lfloor \frac{m-k}{2} \rfloor + 1}.$$

对于 m的任意取值，最后一个表达式均为非递增函数。因此，根据 m 和 k的奇偶性，其最大值在 $m = k$处取得，对应的上界为 $2k$；或者在 $m = k+1$处取得，对应的上界为 $2(k+1)$。

情况 2： 中位数 $\in [w_1, w_k]$。对于最优成本，由于 $d(w_1,$ 中位数$) + d($中位数 $w_k) = d(w_1, w_k)$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{SC}(\mathbf{o}) &\geq \sum_{i \in L} d(i,\mathtt{med}) + \sum_{i \in R} d(i,\mathtt{med}) \\ &= \sum_{i \in L} d(i,w_1) + |L| d(w_1,\mathtt{med}) + \sum_{i \in R} d(i,w_k) + |R| \cdot d(\mathtt{med},w_k) \\ &\geq \sum_{i \in L} d(i,w_1) + \sum_{i \in R} d(i,w_k) + \min\{|L|,|R|\} \cdot d(w_1,w_k). \end{aligned}$$

利用这一点，(15) 得出

$$\mathrm{SC}(\mathbf{w}) \le \mathrm{SC}(\mathbf{o}) + (n - \min\{|L|, |R|\}) \cdot d(w_1, w_k).$$

因此，近似比至多为

$$\frac{\mathrm{SC}(\mathbf{w})}{\mathrm{SC}(\mathbf{o})} \le 1 + \frac{n - \min\{|L|, |R|\}}{\min\{|L|, |R|\}} = \frac{n}{\min\{|L|, |R|\}} \le \frac{2m}{\lfloor \frac{m-k}{2} \rfloor + 1}.$$

与情况 1 一样，最后一个表达式在 $m = k + 1$ 时取得最大值 $2(k + 1)$. □

最后，我们证明，对于任意不受限制的算法，下界为 $2k$，即使对于 $k = 2$ 也成立。总的来说，这意味着对于 $k = 2$，在不受限制的算法中，4 是可能达到的最佳近似比（但对于策略无关机制而言并非如此，其下界为 $9/2 = 4.5$），而机制 $\mathcal{M}_k^{\max}$ 对于较大的 k 是渐近意义下的最佳可能机制。

定理 6.4。 在最大值变体中，对于 $k \ge 2$ 个设施，任意算法的近似比至少为 $2k$。

证明。 设 g 是一个组，其中一个代理人在 0，另一个代理人在 1。由于对称性，不失一般性地设算法选择 0 作为 g 的代表。考虑一个包含 g 个组以及另外 $k - 1$ 个组的实例，后者均由位于 1 的两个代理人组成。显然，最后 $k - 1$ 个组的代表均为 1，因此设施分别开设在 0 和 1。于是，$\mathrm{SC}(\mathbf{w}) = 2k$。然而，最优解是在 1 开设全部 k 个设施，此时社会成本为 1，从而近似比为 $2k$。 □

7 结论与开放问题

在本文中，我们研究了一种真实的分布式设施选址模型，目标是从代理人位置集合中选择位置来开设$k \ge 2$个设施；这些位置由各组内部的代理人分别报告。我们给出了求和变体（其中代理人的个体成本为其到所有设施的距离之和）和最大值变体（其中代理人的个体成本为其到最远设施的距离）中，策略无关机制的最优近似比界。对于这两种变体，$k = 2$ 个设施时的界都是紧的；但对于 $k \ge 3$ 个设施，仍存在一些小的差距，而要弥合这些差距似乎颇具挑战。

还有若干其他未来方向，可以用来拓展我们的结果和模型。我们对确定性策略无关机制的研究相当丰富，并得到了较小且大多紧的界，但研究随机化机制是否能够带来显著更好的近似界也同样有意义。此外，还可以考虑其他建模假设，例如改变社会目标或个体成本的定义。比如，可以研究求和的最大值或最大值之和等其他目标；这些目标已在其他若干分布式社会选择模型中得到研究 [Anshelevich 等人，2022年，Voudouris，2023年，Filos-Ratsikas 等人，2024年，Xu 等人，2025年，Amanatidis 等人， 2025]。个体成本也可以定义为其距离第 q近设施的距离，其中 $q \in [k]$ （注意，最大值变体对应于 $q = k$的情形）；类似的定义曾用于研究度量多赢家投票的失真 [Caragiannis 等人， 2022], 同伴选择 [Cembrano 和 Shahkarami， 2025], 以及抽签选举 [Ebadian 等人， 2022]。最后，另一个方向是考虑包含（可能不准确的）预测的模型，例如关于最优设施位置或代理人位置的预测，并遵循学习增强框架 [Agrawal 等人，2024年，Balkanski 等人，2024年，Christodoulou 等人，2024年，Fang 等人，2025年，Deligkas 等人，2025a]。

参考文献

Mohammad Ali Abam、Davoud Kareshki、Marzie Nilipour、Mohammad Hossein Paydar 和 Masoud Seddighin。随机化与确定性分布式投票的紧界。在神经信息处理系统第*39*届年度会议论文集（*NeurIPS*），2025年。Priyank Agrawal、Eric Balkanski、Vasilis Gkatzelis、Tingting Ou 和 Xizhi Tan。学习增强机制设计：利用预测进行设施选址。运筹学数学，49(4):2626–2651，2024年。Noga Alon、Felix A. Fischer、Ariel D. Procaccia 和 Moshe Tennenholtz。我们之和：从选择者中进行策略无关选择。在理性与知识的理论方面第*13*届会议论文集（*TARK*），第101–110页，2011年。Georgios Amanatidis、Elliot Anshelevich、Christopher Jerrett 和 Alexandros A. Voudouris。群体公平目标下的度量失真。在第*18*届算法博弈论国际研讨会论文集（*SAGT*），第465–482页，2025年。Elliot Anshelevich 和 John Postl。度量偏好下的随机化社会选择函数。人工智能研究杂志，58:797–827，2017年。Elliot Anshelevich、Onkar Bhardwaj、Edith Elkind、John Postl 和 Piotr Skowron。度量偏好下最优社会选择的近似。人工智能，264:27–51，2018年。Elliot Anshelevich、Aris Filos-Ratsikas、Nisarg Shah 和 Alexandros A. Voudouris。社会选择问题中的失真：前15年及以后。在第*30*届国际人工智能联合会议论文集（*IJCAI*），第4294–4301页，2021年。Elliot Anshelevich、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。分布式度量社会选择中的失真。人工智能，308:103713，2022年。Eric Balkanski、Vasilis Gkatzelis 和 Golnoosh Shahkarami。带预测的随机化策略性设施选址。在神经信息处理系统第*38*届年度会议论文集（*NeurIPS*），2024年。Ioannis Caragiannis、Nisarg Shah 和 Alexandros A. Voudouris。多赢家投票的度量失真。人工智能，313:103802，2022年。Javier Cembrano 和 Golnoosh Shahkarami。同伴选择中的度量失真。*CoRR*，abs/2502.21084，2025年。Javier Cembrano、Felix A. Fischer 和 Max Klimm。单提名公正选择的改进界。在第*24*届*ACM*经济学与计算会议论文集（*EC*），第449页，2023年。Hau Chan、Aris Filos-Ratsikas、Bo Li、Minming Li 和 Chenhao Wang。设施选址问题的机制设计：综述。在第三十届国际人工智能联合会议论文集（*IJCAI*），第4356–4365页，2021年。Yu Cheng、Shaddin Dughmi 和 David Kempe。人民的选择：有代表性的候选人让投票更有效。在*2017*年*ACM*经济学与计算会议论文集（*EC*），第305–322页，2017年。

Yu Cheng、Shaddin Dughmi 和 David Kempe。关于多代表性候选人的投票失真。载于 第*32*届 *AAAI* 人工智能大会论文集（*AAAI*），第973–980页，2018年。George Christodoulou、Alkmini Sgouritsa 和 Ioannis Vlachos。融入输出建议的机制设计。载于第*38*届神经信息处理系统年度大会论文集（*NeurIPS*），2024年。Argyrios Deligkas、Eduard Eiben、Sophie Klumper、Guido Sch¨afer 和 Artem Tsikiridis。带有离群者和预测的机制设计。*CoRR*，abs/2509.09561，2025a。Argyrios Deligkas、Mohammad Lotfi 和 Alexandros A. Voudouris。受代理人约束的真实设施选址博弈。组合优化杂志，49(2):24，2025b。Longteng Duan、Zifan Gong、Minming Li、Chenhao Wang 和 Xiaoying Wu。带有分数偏好和最小距离的设施选址。载于 第*27*届国际计算与组合学会议论文集（*COCOON*），第499–511页，2021年。Soroush Ebadian、Gregory Kehne、Evi Micha、Ariel D. Procaccia 和 Nisarg Shah。抽签选举是否既具代表性又公平？载于 第*36*届神经信息处理系统年度大会论文集（*NeurIPS*），2022年。Jiazhu Fang、Qizhi Fang、Wenjing Liu、Qingqin Nong 和 Alexandros A. Voudouris。针对具有候选位置的设施选址博弈的预测机制设计。组合优化杂志，49(5):74，2025年。Michal Feldman、Amos Fiat 和 Iddan Golomb。关于投票与设施选址。载于 *2016*年 *ACM* 经济学与计算大会论文集（*EC*），第269–286页，2016年。Aris Filos-Ratsikas、Evi Micha 和 Alexandros A. Voudouris。分布式投票的失真。人工智能，286:103343，2020年。Aris Filos-Ratsikas、Panagiotis Kanellopoulos、Alexandros A. Voudouris 和 Rongsen Zhang。分布式设施选址的失真。人工智能，328:104066，2024年。Felix A. Fischer 和 Max Klimm。最优公正选拔。*SIAM*计算杂志，44(5):1263–1285，2015年。Dimitris Fotakis 和 Christos Tzamos。设施选址博弈中确定性机制的能力。*ACM* 经济学与计算汇刊，2(4):15:1–15:37，2014年。Ling Gai、Mengpei Liang 和 Chenhao Wang。带有候选位置的厌恶型设施选址博弈。载于 第*16*届国际信息与管理中的算法方面会议论文集（*AAIM*），第13513卷，第96–105页，2022年。Ling Gai、Mengpei Liang 和 Chenhao Wang。具有混合类型代理人的双设施选址博弈。应用数学与计算，466:128479，2024年。Vasilis Gkatzelis、Daniel Halpern 和 Nisarg Shah。解决最优度量失真猜想。载于 第*61*届 *IEEE* 计算机科学基础年度研讨会论文集（*FOCS*），第1427–1438页，2020年。Panagiotis Kanellopoulos 和 Alexandros A. Voudouris。带有可选偏好的受约束真实厌恶型双设施选址。载于第*18*届算法博弈论国际研讨会论文集（*SAGT*），第137–155页，2025年。

Panagiotis Kanellopoulos、Alexandros A. Voudouris 和 Rongsen Zhang。关于离散真实异质双设施选址。*SIAM* 离散数学杂志，37:779–799，2023年。Panagiotis Kanellopoulos、Alexandros A. Voudouris 和 Rongsen Zhang。带有候选位置的真实双设施选址。理论计算机科学，1024:114913，2025年。Fatih Erdem Kizilkaya 和 David Kempe。多数否决：实现最优度量失真的简单投票规则。载于 第*31*届国际人工智能联合会议论文集（*IJCAI*），第349–355页，2022年。Jiaqian Li、Minming Li 和 Hau Chan。群体公平厌恶型设施选址问题的策略无关机制。载于 第*38*届 *AAAI* 人工智能大会论文集（*AAAI*），第9832–9839页，2024年。Minming Li、Cheng Peng、Ying Wang 和 Houyu Zhou。带有外部性的群体公平设施选址博弈。载于第*24*届国际自主智能体与多智能体系统会议论文集（*AAMAS*），第2615–2617页，2025年。Mohammad Lotfi 和 Alexandros A. Voudouris。关于具有最大变体成本的真实受约束异质设施选址。运筹学快报，52:107060，2024年。Pinyan Lu、Xiaorui Sun、Yajun Wang 和 Zeyuan Allen Zhu。双设施博弈的渐近最优策略防护机制。载于 第*11*届 *ACM* 电子商务会议论文集（*EC*），第315–324页，2010年。Ariel D. Procaccia 和 Moshe Tennenholtz。无金钱近似机制设计。*ACM* 经济学与计算汇刊，1(4):18:1–18:26，2013年。Paolo Serafino 和 Carmine Ventre。无金钱异质设施选址。理论计算机科学，636:27–46，2016年。Xin Sui 和 Craig Boutilier。设施选址的近似策略防护机制（受约束情形）。载于 *2015*年国际自主智能体与多智能体系统会议论文集（*AAMAS*），第605–613页，2015年。Zhongzheng Tang、Chenhao Wang、Mengqi Zhang 和 Yingchao Zhao。针对具有候选位置的设施选址博弈的机制设计。载于 第*14*届国际组合优化与应用会议论文集（*COCOA*），第440–452页，2020年。Alexandros A. Voudouris。直线上的分布式度量投票的紧致失真界。运筹学快报，51(3):266–269，2023年。Alexandros A. Voudouris。厌恶型分布式投票的度量扭曲。信息处理快报，189:106559，2025年。Toby Walsh。有限位置设施选址的策略防护机制。载于 第*8*届太平洋地区人工智能国际会议论文集（*PRICAI*），第113–124页，2021年。Xinping Xu、Bo Li、Minming Li 和 Lingjie Duan。具有最小距离要求的双设施选址博弈。人工智能研究期刊，70:719–756，2021年。Xinru Xu、Wenjing Liu 和 Qizhi Fang。具有最大变体成本的受约束分布式异质双设施选址问题。载于 第*19*届计算模型理论与应用年度会议论文集（*TAMC*），第121–134页，2025年。

Qi Zhao、Wenjing Liu、Qingqin Nong 和 Qizhi Fang。受约束异质设施选址博弈中的最大变体成本。组合优化期刊，45(3):90，2023年。Qi Zhao、Wenjing Liu、Qingqin Nong 和 QizhiFang。带求和变体的受约束异质双设施选址博弈。组合优化杂志，47(4):65，2024年。Houyu Zhou、Minming Li 和 Hau Chan。群体公平设施选址问题的策略无关机制。载于 第*31*届国际人工智能联合会议（*IJCAI*）论文集，第613–619页，2022年。