arXiv:2601.15405v1 [math.AC] 21 Jan 2026

乘法格中的消去元

TIBERIU DUMITRESCU

Abstract. 我们将 Anderson 和 Roitman 关于交换环消去理想刻画的一个定理推广到乘法格。

Anderson 和 Roitman [6, 定理] 指出，交换环 R 的理想 Q是消去理想（即 $QJ = QH$ 满足 J, H 理想蕴含 $J = H$），当且仅当 Q 在 R 的所有极大理想处的局部化都是主正则理想。随后，Chang [7, 定理 2.3] 在整环上的星运算背景下推广了这一结果。这篇短札旨在给出 Anderson-Roitman 定理的一个抽象理想理论版本，该版本也涵盖 Chang 的结果（见定理 2 和注记 11）。

我们回顾抽象理想理论的一些基本事实（详情见 [2], [4], [5], [8] 和 [10]）。*(*乘法*)*格是一个完备格（L, $\leq$）（具有底元 0 和顶元 1），同时也是一个以 1（顶元）为单位元的交换幺半群，并且满足

$$a(\bigvee_{\alpha} b_\alpha) = \bigvee_{\alpha} (ab_\alpha) \text{ for all } a, b_\alpha \in L.$$

格 L 是模的，当且仅当 $a, b, c \in L$ 且 $a \geq b$ 蕴含 $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$。元素 $c \in L$ 是紧的，当

$$c \leq \bigvee S \text{ with } S \subseteq L \text{ implies } c \leq \bigvee T \text{ for some finite subset } T \subseteq S.$$

假设 1 是紧的。那么每个元素 $a \neq 1$ 都小于某个极大元 m（即在 $L - \{1\}$ 中极大）。元素 $p \in L - \{1\}$ 是素元，当

$$ab \leq p \text{ with } a, b \in L \text{ implies } a \leq p \text{ or } b \leq p.$$

每个极大元都是素元。 L 的谱是 L 的所有素元组成的集合。对于 $a, b \in L$, $(a : b)$ 定义为 $\bigvee\{c \in L \mid bc \leq a\}$。元素 $x \in L$ 是主元，当它既是交主，即满足

$$a \wedge bx = ((a : x) \wedge b)x \quad \text{for all } a, b \in L$$

又是并主，即满足

$$a \vee (b : x) = ((ax \vee b) : x) \quad \text{for all } a, b \in L.$$

如果 x 和 y 是主元，那么 xy 也是主元。元素 $Q \in L$ 是消去元，当 $Qa = Qb$ 且 $a, b \in L$ 蕴含 $a = b$。在这种情况下， $Qc \leq Qd$ 且 $c, d \in L$ 蕴含 $c \leq d$。若主元 $c \in L$ 满足 $(0 : c) = 0$，则称其为正则的。显然，这样的元素是消去元。

L是一个 C-格，当且仅当 1 是紧元、紧元的集合在乘法下封闭，且每个元素都是紧元的上确界。在一个 C-格中，每个

2020年数学主题分类：主要分类 06B23，次要分类 13F05。关键词和短语：乘法格、消去元、消去理想、抽象理想理论。

主元都是紧元。 C-格具有类似于交换环的局部化理论。设 L 是一个 C-格，且 S 是L中由紧元组成的乘法封闭子集。 L在 S 处的局部化是

$$L_S = \{a_S \mid a \in L\} \text{ where } a_S = \bigvee\{(a : s) \mid s \in S\}.$$

那么， L_S 在以下运算下构成一个格

$$A \mapsto (\bigvee A)_S,\ A \mapsto \bigwedge A,\ (a, b) \mapsto (ab)_S \text{ for all } A \subseteq L_S,\ a, b \in L_S.$$

若 $a, b \in L$ 且 b 是紧的，则 $(a :\ b)_S = (a_S :\ b_S)$。 L 在素元 p 处的局部化 L_p 为 L_T，其中 $T = \{c$ 是紧的 $\mid c \not\leq p\}$。对于 $a, b \in L$，当且仅当对每个极大元 m，都有 $a = b$ $a_m = b_m$。紧元 $x \in L$ 是主元，当且仅当对每个极大元 $m \in L$，x_m 在 L_m 中是主元。

L 的子集 G 生成 L ，是指 L 中的每个元素都是 G中元素的上确界。由一组主元生成的模 C-格称为 *r*-格（参见 [2]）。这是本文采用的工作概念。r-格的一个典型例子是交换环的理想格。

证明 [6, 定理] 的关键步骤 [6, 引理] 是对 Kaplansky 论证 [11,定理 287]的修改；该步骤使用理想等式

$$(x^2, y^2) = (x^2, x^2 + y^2) = (y^2, x^2 + y^2)$$

其中 x， y 是交换环的元素。这一事实促使我们在下文给出一个临时定义。

定义 1. 称 r-格 L 具有 δ 性质，若 L 由一组主元Δ 生成，且这些主元具有以下性质：

若 x， $y \in \Delta$，则存在某个 $\delta \in \Delta$（取决于 x， y），使得

$$x^2 \vee y^2 = x^2 \vee \delta = y^2 \vee \delta.$$

我们陈述主要结果，它将 [6, 定理] 推广到了乘法格。

定理 2. 设 L是具有 δ 性质的 *r*-格。 L 中的元素 Q是消去元，当且仅当对于每个极大元 m， Q_m 都是 L_m 的主正则元。

证明之前先给出五个引理。我们基本上将 [6]中的论证改写为适用于格的形式。

引理3. 设 L 是一个 *r*-格，且 a、 b、 $x \in L$ 满足 x 是主元且 $a \leq x \vee b$。那么，对于某个 $a' \in L$，有 $a \vee b = xa' \vee b$ 。

证明. 由于 L 是模的，且 x 是交主的，因此我们有

$$a \vee b = (a \vee b) \wedge (x \vee b) = ((a \vee b) \wedge x) \vee b = xa' \vee b \text{ for some } a' \in L.$$

□

引理4. 设 L 是一个 *r*-格，且 Q、 a、 $m \in L$ 满足 Q 是消去元， m 是极大元，且 $Q = a \vee mQ$。那么 $Q_m = a_m$。

证明. 设 $b \leq Q$ 是一个主元。由于 Q 是消去元且 b 是主元，我们依次得到

$Qb = ab \vee mQb \leq Q(a \vee mb)$ $b \leq a \vee mb$， $1 = (a :\ b) \vee m$，$(a :\ b)_m = 1$， $b_m \leq a_m$，因此 $Q_m = a_m$。 □

引理5。 设 L 是一个 r-格， $Q \in L$ 是一个消去元， $m \geq Q$ 是一个极大元。那么 Q_m 在 L_m中是正则的。

证明。 设 $c \in L$ 是一个主元，且 $cQ_m = 0$。我们可以在局部验证$cQ = mcQ$，因此 $c = mc$（通过消去 Q），于是 $1 = m \vee (0 : c)$，所以 $(0_m : c_m) = 1$，从而 $c_m = 0$。□

引理 6。 设 L 是一个 r-格， $Q \in L$ 是一个消去元，且 $m \geq Q$ 是一个极大元。若 G 是生成 L的主元集合，则存在 G 的一个子集 B，使得 $Q = \bigvee B \vee mQ$，且 B 在此性质下是极小的，即对每个 $b \in B$，都有$Q \neq \bigvee(B - \{b\}) \vee mQ$。

证明。 所有满足以下条件的 G 的子集 C 构成的集合 Γ

$$\bigvee C \leq Q \quad \text{and} \quad c \not\leq \bigvee(C - \{c\}) \vee mQ \text{ for each } \quad c \in C$$

非空，因为 $Q \neq mQ$。

我们断言， Γ 在包含关系下是归纳有序的。事实上，设 Λ 是 Γ 中的一个链，且 $C = \bigcup \Lambda$ 和 $y \in C$。假设 $y \leq \bigvee(C - \{y\}) \vee mQ$。由于 y 是紧的，而 Λ 是一条链，因此对于某个包含 y 的 $D \in \Lambda$，有 $y \leq \bigvee(D - \{y\}) \vee mQ$，这就产生了矛盾。因此， Γ 是归纳有序的。根据佐恩引理， Γ 有一个极大元 B。我们证明 $Q = \bigvee B \vee mQ$。反设不然。取一个主元 $c \in G$,$c \leq Q$，使得 $c \not\leq \bigvee B \vee mQ$。由于 B 是 Γ 中的极大元，我们得到

$$b_0 \leq \bigvee(B - \{b_0\}) \vee c \vee mQ \quad \text{for some} \quad b_0 \in B.$$

由于 b_0 是紧的，因此对于 $B - \{b_0\}$ 中的某些元素 d_1，.....， d_n，有 $b_0 \leq c \vee d_1 \vee \cdots \vee d_n \vee mQ$。令 $d = d_1 \vee \cdots \vee d_n \vee mQ$。根据引理3，对于某个 $x \in L$，有 $b_0 \vee d = xc \vee d$。由于 $b_0 \not\leq \bigvee(B - \{b_0\}) \vee mQ$，我们得到 $x \not\leq m$，所以 $x \vee m = 1$。于是 $c = xc \vee mc \leq b_0 \vee d \vee mQ \leq \bigvee B \vee mQ$，矛盾。□

引理 7. 设 L 是一个具有 δ 性质的 r-格，且其中的 $\Delta \subseteq L$ 如定义 *1* 所述。设 $Q \in L$ 是一个消去元，使得 $Q = x \vee y \vee a$，其中 x、 $y \in \Delta$和 $a \in L$。假设对于某个极大元 $m \in L$，有 $m(x \vee y) \leq a$。那么，$Q = x \vee a$ 或 $Q = y \vee a$。

证明。 由 δ 性质，存在 $\delta \in \Delta$ 使得 $x^2 \vee \delta = y^2 \vee \delta = x^2 \vee y^2$。令 $b = xy \vee xa \vee ya \vee a^2$ 和 $j = \delta \vee b$。注意到 $j \leq Q^2$，因此 $jQ \leq Q^3$。我们有

$$Q^3 = \bigvee\{x^3, y^3, a^3, x^2y, xy^2, x^2a, xa^2, y^2a, ya^2, xya\}$$

因此 $Q^3 \leq jQ$，因为 $x^3 \leq (\delta \vee y^2)x = \delta x \vee xy^2 \leq jQ$，类似地 $y^3 \leq jQ$。于是$Q^3 = jQ$，故消去 Q，得到 $Q^2 = j$。由 $x^2 \leq \delta \vee b$可得，对于某个 $c \in L$，有 $x^2 \vee b = c\delta \vee b$（参见引理3）。注意到 $m\delta \leq mx^2 \vee my^2 \leq xa \vee ya \leq b$。

若 $c \leq m$，则有

$$x^2 \leq c\delta \vee b \leq m\delta \vee b = b \leq (y \vee a)Q$$

因此 $Q^2 = (y \vee a)Q$，于是约去 Q，得到 $Q = y \vee a$。

若 $c \not\leq m$，因此 $m \vee c = 1$，则有

$$y^2 \leq x^2 \vee \delta \leq x^2 \vee m\delta \vee c\delta \leq x^2 \vee b \leq (x \vee a)Q$$

因此 $Q^2 = (x \vee a)Q$，所以消去 Q 以得到 $Q = x \vee a$。 □

定理 *2* 的证明。($\Leftarrow$) 这个方向不需要 δ 性质。令$b, c \in L$，使得 $Qb = Qc$。由此可知 $b = c$ 在局部成立（因而在整体上也成立），因为任何主正则元都是消去元。

($\Rightarrow$) 令 $\Delta \subseteq L$ 如定义 1 中所述，且 m 为极大元。我们可以假设 $m \geq Q$。根据引理 6，存在一个极小集 $B \subseteq \Delta$，使得 $Q = \bigvee B \vee mQ$。若 B至少有两个元素 x，y，则对$a = \bigvee(B - \{x, y\}) \vee mQ$ 应用引理 7，得到矛盾。因此，B 只有一个元素。于是，引理 4 和引理 5 表明 Q_m 是主元且正则。□

我们给出定理 2 的一些推论。

推论 8。令 L 为具有 δ 性质的 r-格，且 $Q \in L$ 为消去元。

(i) 若 Q 是紧的，则 Q 是主正则元。(ii) 若 $a, b \in L$，则 $Q(a \wedge b) = Qa \wedge Qb$.

证明。(i) 根据定理 2，Q是局部主元，因此由于 Q 是紧元，它也是主元。(ii) 逐点检验可知，我们可以假设 Q 是一个主正则元。在这种情况下，该断言已知成立。□

注意，练习 10 第 456] 页中的理想 A 是一个由零因子构成的有限生成消去理想。下一个推论推广了 [6, 推论 1]。

推论 9。设 L 是一个具有 δ 性质的 r-格，且 S 是 L中的紧元乘法封闭集。那么，Q 是 L_S 的消去元，当且仅当对于集合中的每个极大元 p，Q_p都是 L_p 的主正则元

$$T = \{q \text{ prime element of } L \mid s \not\leq q \text{ for each } s \in S\}.$$

特别地，如果 Q 是 L的消去元，那么 Q_S 是 L_S的消去元

证明。容易验证，L_S 仍然是一个具有 δ 性质的 r-格。此外，众所周知，T 是 L_S 的谱，因此其极大元恰好是 L_S 的极大元（见 [2, 定理 22] 第 203]页）。若 $p \in T$ 且$m \geq p$ 是 L的极大元，则（L_S）$_p = L_p$，并且（Q_m）$_p = Q_p =$（Q_S）$_p$ 在 L_p 中是主正则元，当且仅当 Q_m 在 L_m中如此。应用定理 2 即可完成证明。□

设 D 是一个商域为 K 的整环。我们简要回顾所谓的 w-运算 在 D 上的定义（详情参见 [3], [9, 第 32 节和 34]以及[12]）。令 W 为 D 的所有非零有限生成理想 H 的集合，使得 $H^{-1} = D$，其中 $H^{-1} := \{x \in K \mid xH \subseteq D\}$。对于 D 的一个理想 Q，定义其 w-闭包为

$$Q_w = \cup\{(Q : H) \mid H \in W\}$$

并称 Q 为一个 w-理想，如果 $Q = Q_w$。若一个 w-理想 Q 是 w-消去理想，则称之为

$$(QJ)_w = (QN)_w \text{ with } J, N \text{ ideals implies } J_w = N_w.$$

D 的所有 w-理想构成的集合 $\mathcal{L}_w(D)$ 在以下运算下是一个 r-格：

$$\bigvee A_\alpha = (\sum A_\alpha)_w,\ \bigwedge A_\alpha = \cap A_\alpha,\ A \cdot B = (AB)_w$$

参见 [3, 定理 3.1 和定理 3.5]。$\mathcal{L}_w(D)$ 的极大元称为极大w-理想。此外，$\mathcal{L}_w(D)$ 具有 δ 性质，因为对所有 $x, y \in D$，都有 $(x^2, y^2)_w = (x^2, x^2 + y^2)_w = (y^2, x^2 + y^2)_w$。由定理 2 可得：

推论 10。设 D 是一个整环。 D 的非零 w-理想 Q 是 w-消去理想，当且仅当对 D 的每个极大 w- 理想 M， QD_M 都是主元。

一个捷径是注意到 W 是理想格$\mathcal{L}(D)$中的紧元乘法集，而 D 的 $\mathcal{L}_w(D)$正是 $\mathcal{L}(D)$在 W处的局部化。因此，推论 10 可直接由推论 9 得出。

注记 11. 上述讨论可以直接从 w 推广到星运算 $*_w$，其中 $*$ 是 D 上的星运算（例如参见 [7]）。如此便可得到[7,定理 2.3]。

我们以以下例子结束本文。半环$\mathbb{N}$的理想格 L 既不是模的（参见 [1, 第 582]页），也不具有 δ 性质（因为 L 的主元是 $\mathbb{N}$ 的主理想，而且不存在 $c \in \mathbb{N}$ 使得$(4, 9) = (4, c) = (c, 9)$）。尽管如此， $\mathbb{N}$的任意消去理想都是主元。事实上，非主理想 Q 可写成(a, b, H)，其中 $a < b$是正整数，b 不是 a 的倍数，而 H 是由大于 b的数生成的理想。因此，$Q^3 = Q(a^2, b^2, aH, bH, H^2)$， $ab \in Q^2$ 且 $ab \notin (a^2, b^2, aH, bH, H^2)$。

References

[1] F. Alarcon 和 D.D. Anderson，《交换半环及其理想格》，Hous- ton J. Math. 20 (1994), 571-590。[2] D.D. Anderson，《无链条件的抽象交换理想理论》，Algebra Univ. 6 (1976), 131-145。[3] D.D. Anderson 和 S.J. Cook，《两个星运算及其诱导的格》，Comm. Algebra 28 (2000), 2461-2475。[4] D.D. Anderson 和 C. Jayaram，《主元格》，Czech. Math. J. 46 (1996), 99-109。[5] D.D. Anderson 和 E.G. Johnson，《Dilworth 主元》，Algebra Univ. 36 (1996), 392-404。[6] D.D. Anderson 和 M. Roitman，《消去理想的刻画》，Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 2853-2854。[7] G.W. Chang，《整环的 *-消去理想的刻画》，Comm. Algebra 37 (2009), 3309-3320。[8] R. Dilworth，《抽象交换理想理论》，Pac. J. Math. 12 (1962), 481-498。[9] R. Gilmer， *Multiplicative Ideal Theory*，Marcel Dekker，纽约，1972。[10] C. Jayaram 和 E.G. Johnson，《乘法格中的 S- 素元》，Period. Math. Hung. 31 (1995), 201–208。[11] I. Kaplansky，《交换环论专题》，未发表的笔记，1971。[12] F. Wang 和 R. McCasland，《强 Mori 整环上的 w-模》，Comm. Algebra 25 (1997), 1285-1306。

Facultatea de Matematica si Informatica,University of Bucharest,14 Academiei Str., Bucharest, RO 010014,Romania*Email address*: tiberiu dumitrescu2003@yahoo.com