arXiv:2601.15410v1 [math.GR] 21 Jan 2026

什么是.....分层双曲性?

Alex Wright

历史。尽管曲率是在局部定义的，负曲率却会产生“大尺度”或“粗略”层面的影响，因为这些影响并不涉及局部结构。1987年，Gromov 著名地提炼出一种这样的影响，并由此推导出许多其他结论。他将（Gromov）双曲空间定义为一种测地度量空间，其中存在一个 $\delta \geqslant 0$，使得所有三角形都是 δ-薄的。根据定义，三角形由三条测地线组成；若每条边上的每个点到另外两条边之一上的某个点的距离都不超过 δ，则称该三角形为 δ-薄。平面 $\mathbb{R}^2$ 不是双曲的，而树上的三角形都是 0- 薄的，因此树是最基本的例子。见图 1。

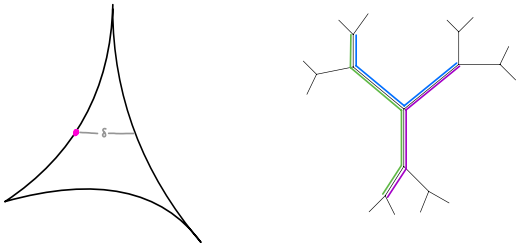


图 1：δ-薄的定义（左）以及树中的一个三角形（右）。

（Gromov）双曲群是指在双曲空间上具有适当作用的群。双曲群的强大理论统一了自由群、闭负曲率流形的基本群等对象的代数与几何。然而，双曲群不能有 $\mathbb{Z}^2$ 子群。

因此，映射类群并非双曲的。1998年，Masur 和 Minsky 引入了强大而全新的工具，揭示了支配其大部分结构的双曲性 [MM99,MM00]，这是一项突破。此后，许多人进一步发展了这些工具，由此形成的“Masur-Minsky机制”成为推动该领域进步的引擎。

Behrstock、Hagen 和 Sisto 后来提出了一组足以支撑某种广义 Masur-Minsky机制的公理，从而定义了层次双曲群（HHGs）和空间（HHSs）[BHS17, BHS19]。尽管层次双曲性具有较强的限制性，人们还是发现了许多新的例子，而合适框架的出现也带来了大量新成果。如今，这一理论正蓬勃发展。

例子。HHG 的典型例子包括映射类群和双曲群。如今，HHS 和 HHG 的例子已涵盖许多立方复形、许多三维流形的基本群、许多 Artin群、所有 Teichm¨uller 空间，以及光滑三次复曲面模空间的基本群。由已有 HHG 构造新 HHG 的方法有很多。相比之下，当 $n \geqslant 3$ 时，$SL_n(\mathbb{Z})$ 并不是 HHG。

我们希望人们能继续发现分层双曲性的应用，也许它与奇点理论、模空间、辛拓扑，或范畴和簇代数的对称群有关。

研究视角与成果。在转向“坐标系”这一视角之前，我们先简要介绍另外两种视角，以作背景。第一，分层双曲空间除了由更简单的分层双曲空间构成的乘积区域外，看起来都具有双曲性。第二，组合分层双曲性以单纯复形的语言，对这套理论进行了富有成效且简明的重新表述。

下面简要介绍一些关于层次双曲群的成果；这些成果很容易理解，也超出了下文所暗示的范围。

1. 每个元素都可以类比映射类的尼尔森-瑟斯顿分类进行分类。2. 每个子群要么含有一个有限指数阿贝尔子群，要么包含一个自由子群（强

Tits 替代定理）。

3. 每个子群都有一个有限指数子群，从某种意义上说，该子群可以被块对角化（综合子群定理）。

基本设置。 由于分层双曲群是通过其在某个分层双曲空间上的适当作用来定义的，我们主要关注空间。

设 (X, d_X) 是一个度量空间，并带有一族映射 $x \mapsto x_U$，由指标集 $\mathfrak{S}$ 索引，将 X 映射到一族双曲度量空间 $\mathcal{C}U$。我们希望将其视为一个坐标系，因此称 $x \mapsto x_U$ 为坐标映射，并称 $x_U \in \mathcal{C}U$ 为 $x \in X$ 的 U 坐标。指标集 $\mathfrak{S}$ 中的元素传统上称为“域”。

不同之处在于，每一对坐标映射之间都以三种方式之一相互关联，因此，相应地，一对域可以是“嵌套”“正交”或“横截”的。嵌套关系是 $\mathfrak{S}$ 上的一个偏序，而正交关系和横截关系都是对称关系。

分层双曲性的一个关键见解。人们通常试图使用尽可能少的坐标，而层次双曲空间往往使用数量多得多的坐标；这些坐标的高度结构化冗余揭示了空间的几何性质。

如果不仔细研究实例，很难猜到这种高度结构化冗余的形式。其后果之一如下。当 U 与 V 横截或嵌套时，存在一个点 $\rho_V^U \in \mathcal{C}V$；当 V 坐标接近 ρ_V^U 时，U 坐标最有用。当 V 坐标不接近 ρ_V^U 时，U 坐标在某种意义上是局部常数，因此局部冗余。

通过实例来学习。 现在我们暂停一下，考察两个简单的玩具实例。尽管这两个实例在许多方面都异常简单，但任何愿意花时间深入理解它们的人，都会发现自己在掌握分层双曲性的道路上已经走出了意想不到的一大步。

第一个玩具示例。 第一个玩具示例见图 2，展示了树状行为与乘积行为如何在分层双曲空间中共存。令 X 为将 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 与 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 在一点处粘合所得空间的万有覆盖。这 X 是一个“平坦片构成的树”，每个平坦片都是 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的一个副本。我们采用自然的

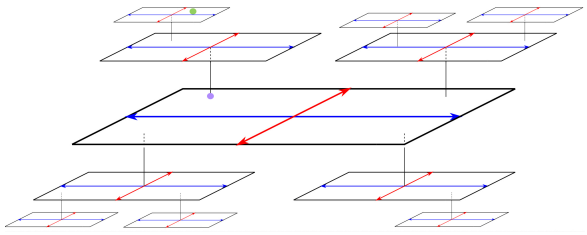


图 2：Jacob Russell 绘制的平坦片构成的树示意图，它以非等距方式嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中。绿色点到中央绘制的扁平子空间的最近点投影是紫色点。

度量，该度量在覆盖变换群作用下保持不变，并且限制在每个扁平子空间上时等于 ℓ^1 度量。

我们的第一个域记作 T，取自“树”（Tree）一词；我们将 $\mathcal{C}T$ 定义为把每个扁平子空间压缩成一个点后得到的无限价树。坐标映射 $X \to \mathcal{C}T$ 即为压缩映射。

对于 X 中的每个扁平子空间 F，我们还定义两个域 F_x，F_y。在 F 中选取一个原点后，定义 $\mathcal{C}F_x = \mathbb{R}$ 为 F 的 x 轴，定义 $\mathcal{C}F_y = \mathbb{R}$ 为 y 轴。（用无坐标术语来说，$\mathcal{C}F_x$ 是 F 中竖直线的空间，$\mathcal{C}F_y$. 也类似。）到 $\mathcal{C}F_x$ 的坐标映射是最近点投影到扁平子空间 F 后所得点的 x 坐标，$\mathcal{C}F_y$ 也类似。

F_x 和 F_y 坐标恢复了压缩扁平子空间 F 时丢失的信息。这些坐标在局部上是常数，因此在 F 之外是冗余的。记录 F 的像在 $\mathcal{C}T$ 中的位置非常重要。我们为这个点取两个名称：$\rho_T^{F_x}$ 和 $\rho_T^{F_y}$。

每一对 F_x，F_y 都是正交的，并且 F_x，F_y 都嵌套在 T 中。如果 E 是另一个扁平子空间，那么 F_x，F_y 都与 E_x，E_y 横截。

E_x 和 E_y 坐标可以轻松变化的区域，也就是扁平子空间 E，通过最近点投影映射到 F 上的一个点，再次揭示了冗余。我们将该点的 x 坐标同时记作 $\rho_{F_x}^{E_x}$ 和 $\rho_{F_x}^{E_y}$，将 y 坐标同时记作 $\rho_{F_y}^{E_x}$ 和 $\rho_{F_y}^{E_y}$。

与 T 及所有 F_x，F_y 相关联的坐标，在 X 上构成一个良好坐标系，其含义如下：

我们有如下距离公式

$$d_X(x,y) = \sum_{U\in\mathfrak{S}} d_{\mathcal{C}U}(x_U, y_U),$$

而且，尽管 $X \to \prod_{U\in\mathfrak{S}} \mathcal{C}U$ 不是满射，但其像有一个简单的描述。

第二个玩具例子。 第二个玩具例子 X见图3（上），它将展示分层双曲空间中非树状部分彼此之间不一定相互隔离。这个例子是一种立方复形，由若干区间的乘积粘合而成；它之所以重要，是因为任意分层双曲空间中的任意两点都可以通过一个自然的“凸包”连接，而这种凸包与此类例子粗略相似。

我们定义一组坐标，其索引为 $\mathfrak{S} = \{R,\ G,\ B,\ O,\ P,\ Y,\ N\}$（分别是红色、绿色、蓝色、橙色、紫色、黄色和海军蓝的简称）。对于每个 $U \in \mathfrak{S}$，坐标 x_U 的取值范围是一个区间 $\mathcal{C}U$，如图所示。

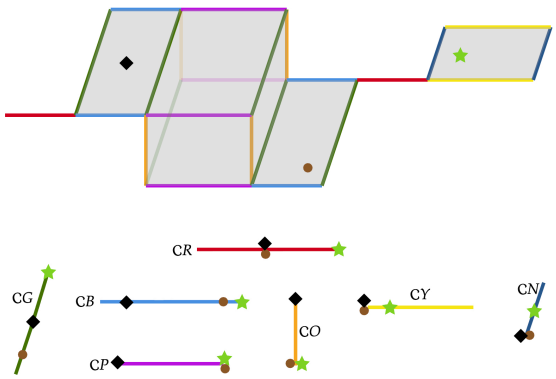


图3：第二个玩具例子（上）以及每个域对应的度量空间（下），其中标出了三个任意选取的点及其坐标。

域 R 是嵌套极大的，这反映出这样一个事实：其他坐标不再冗余的区域，都会被压缩为 $\mathcal{C}R$中的一个点。同样，O 和 P 嵌套在 B中。

有若干对，例如 $\{G,\ B\}$ 和$\{O,\ P\}$，对于这些配对，我们可以看到一个由相应颜色的边构成的矩形。这些配对是正交的。彼此既无嵌套关系也不正交的域对称为横截。当 V 与 U 横截或嵌套于 U 时，点 $\rho_U^V \in \mathcal{C}U$ 如图4所示。

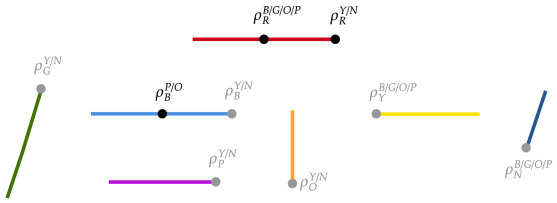


图4： ρ点。

超越玩具示例。 这些例子很好地展示了什么是分层双曲空间（HHS），不过实际定义会放大观察尺度，舍弃小尺度上的控制，专注于大尺度几何。例如，一般而言，标志性的距离公式 $d_X(x,\ y) = \sum_{U\in\mathfrak{S}} d_{\mathcal{C}U}(x_U,\ y_U)$只在粗略意义下成立。

开始定义。 现在我们转入分层双曲空间（HHS）的定义，遵循 [BHS19，第 1.3 节，注 1.5]。为便于阐述，我们做了几处简化，其中最重要的是省略常数，并省去较少使用的大链接公理。我们建议读者先把握定义的整体结构，再熟悉每个细节。

我们从一个测地度量空间 X 开始。我们为其添加一组域 $\mathfrak{S}$，并为每个 $U \in \mathfrak{S}$ 配备一个双曲空间 $\mathcal{C}U$。我们还有一族粗利普希茨映射 $\pi_U :\ X \to \mathcal{C}U$，由 $(\pi_U)_{U\in\mathfrak{S}}$ 索引，并将 $x_U = \pi_U(x)$ 视为一个坐标。

我们在 $\mathfrak{S}$ 上赋予一个有限高度且具有唯一极大元的嵌套偏序 $\sqsubset$，以及一个自反、对称性均不成立的正交关系 $\perp$。一对既不正交、又不 $\sqsubset$ 可比较的域称为横截的。我们要求，若 $V \sqsubseteq W$ 且 $U \perp W$，则 $U \perp V$。

我们还要求，若 $V \sqsubseteq W$，则与 V 正交且嵌套在 W 中的域的集合要么为空，要么存在一个域 $V^\perp \sqsubsetneq W$，它在 W 中对 V 起正交补的作用，即所有嵌套在 W 中且与 V 正交的域都嵌套在 $V^\perp$ 中。

到目前为止，我们已经得到了一组潜在的坐标，以及其指标集上的组合结构。现在，我们要为这些坐标施加结构，确保我们拥有

足够的坐标，并防止出现超出预期的冗余。

高度结构化冗余。 我们此前指出，对于许多对 x_U，x_V坐标而言，除非 x_V 接近某个特定值 ρ_V^U，否则很难改变x_U ，这表明在许多区域中，x_U 可能被视为冗余。现在，我们根据 U与 V之间的关系，施加这一条件，并提出非常强的结构性要求。

如果 U 和 V 是横截的，那么存在指定点 $\rho_U^V \in \mathcal{C}U$ 和 $\rho_V^U \in \mathcal{C}V$，使得对于所有$x \in X$， $d_{\mathcal{C}U}(x_U, \rho_U^V)$或 $d_{\mathcal{C}V}(x_V, \rho_V^U)$中至少有一个是一致地很小的。参见图 5。

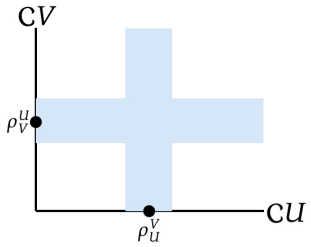


图 5：如果 U和 V是横截的，那么 (x_U, x_V)必须位于 $\mathcal{C}U \times \mathcal{C}V$的阴影区域内。

如果 $U \subsetneq V$，则存在一个指定点 $\rho_V^U \in \mathcal{C}V$。可以设想，$\mathcal{C}U$ 重新获得了当 X 的一个子集被压缩为点 $\rho_V^U \in \mathcal{C}V$时丢失的信息。对于所有$x$， $y \in X$和 $U \subsetneq V$，如果在 $\mathcal{C}V$中存在一条从 x_V 到 y_V 的测地线，并且该测地线始终与ρ_V^U保持足够远的距离，那么 x_U 和 y_U 必定一致地接近。

足够多的点与足够多的坐标。 对于任意两两正交集 $\{V_j\}$ 及点 $p_j \in \mathcal{C}V_j$，都存在一点 $x \in X$，使得 $d_{\mathcal{C}V_j}(x_{V_j}, p_j)$ 对所有 j都一致地很小。这表明 V_j坐标确实互不约束，这称为部分实现公理。

如果 $d_X(x, y)$很大，我们要求存在某个U，使得 $d_{\mathcal{C}U}(x_U, y_U)$ 很大。

最后的细节。 我们最后提出另外两项一致性要求。首先，如果 $U \subsetneq V$ 且 ρ_W^U和 ρ_W^V都已定义，那么我们要求 $d_{\mathcal{C}W}(\rho_W^U, \rho_W^V)$一致地足够小。例如，如果 $U \subsetneq V \subsetneq W$，那么$\rho_W^U$ 和 ρ_W^V 应当彼此接近。

其次，在部分实现公理中，应当能够选择点 x，使其位于所有 V_j 坐标都易于改变的区域。

接下来读什么。 如需更深入的介绍，请参见 [Sis19]；了解最新进展，请参见 [Sis25]；学习资源请参见 [Beh]。

致谢。 作者衷心感谢众多人士，他们对早期稿件的评论大幅改进了本文。

参考文献

[Beh] Jason Behrstock, *Hierarchically hyperbolicity*。 `http://comet.lehman.cuny.edu/behrstock/HHS.html`。[BHS17]Jason Behrstock、Mark F. Hagen 和 Alessandro Sisto, *Hierarchically hyperbolic spaces, I: Curve complexes for cubical groups*, 《Geom. Topol.》**21** （2017），第 3 期，1731–1804。[BHS19] Jason Behrstock、Mark Hagen 和 Alessandro Sisto, *Hierarchically hyperbolic spaces II: Combination theorems and the distance formula*, 《Pacific J. Math.》**299**（2019），第 2 期，257–338。[MM00]H. A. Masur 和 Y. N. Minsky, *Geometry of thecomplex of curves. II. Hierarchical structure*, 《Geom. Funct. Anal.》**10**（2000），第 4 期，902–974。[MM99] Howard A. Masur 和 Yair N. Minsky, *Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity*, 《Invent. Math.》**138**（1999），第 1 期，103–149。[Sis19] Alessandro Sisto, *What is a hierarchically hyperbolicspace?*, 《超越双曲性》，2019 年，第 117–148 页。[Sis25] , *New tools in hierarchical hyperbolicity: Asurvey*, 2025 年。arXiv:2507.17546。