arXiv:2601.15444v1 [math.PR] 21 Jan 2026

原子测度的离散对数凹性与阈值现象

Silouanos Brazitikos* Minas Pafis†

摘要

我们研究由原子分布 μ 的独立同分布样本生成的随机多胞体 $K_N = \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$ 的阈值现象。我们指出并补充了 Dyer–Füredi–McDiarmid 离散超立方体阈值论证中缺失的论证：其中支撑半空间估计是通过一个光滑性（梯度/唯一性）步骤推导出来的，但该步骤在边界接触点处可能失效。随后，我们比较连续对数凹情形中的阈值驱动机制（通过 Cramér 变换和 Tukey 半空间深度）及其离散类比。在此框架下，我们为格 p-球 $\mathbb{Z}^n \cap rB_p^n$ 建立了一个尖锐阈值。最后，我们给出结构性反例，表明在一般的离散对数凹情形中，尖锐阈值未必成立。

1 引言

设 μ 是实数集 $\mathbb{R}^n$ 上的一个博雷尔概率测度，且 X_1, X_2, ... 是实数集 $\mathbb{R}^n$ 中服从分布 μ 的独立同分布随机向量。对于 $N \geq n+1$，令

$$K_N := \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

该模型有两个自然的期望量。

对于一般的 μ，人们会考虑期望捕获质量

$$F_{n,N}(\mu) := \mathbb{E}_{\mu^N}\left[\mu(K_N)\right] = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}\left(x \in K_N\right) d\mu(x),$$

这是近年来备受关注的一个量；例如参见 [6, 7, 8, 17, 21]。当 μ 的支撑集位于凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 上，或位于其边界上时，还可以研究归一化期望体积

$$V_{n,N}(\mu, K) := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \mathbb{E}_{\mu^N}\left[\mathrm{vol}_n(K_N)\right],$$

这是随机凸几何中的经典问题；参见 [3, 4, 11, 13, 14, 16, 22]。当 $\mu = \mu_K$ 是 K 上的均匀概率测度时，这两个量相等，即$F_{n,N}(\mu_K) = V_{n,N}(\mu_K, K)$。本文主要关注函数 $F_{n,N}(\mu)$，它对原子测度仍有意义。

阈值与半空间机制。一个基本问题是，$F_{n,N}(\mu)$（或$V_{n,N}(\mu, K)$）是否会随着 N 增长而从接近 0 急剧转变为接近 1，通常发生在指数尺度 e^{cn} 上（例如参见 [6, 14, 16, 21]）；不过，已有研究表明，在某些情形下，这种转变会发生在 n 的超指数尺度上（例如参见 [3, 6]）。一种便于刻画几何性质的方法是使用半空间。定义（总体）半空间深度

$$q_\mu(x) := \inf_{\theta \in S^{n-1}} \mu\big(\{y : \langle y, \theta\rangle \geq \langle x, \theta\rangle\}\big).$$

*希腊克里特大学。电子邮箱：silouanb@uoc.gr

†希腊雅典国立卡波迪斯特特里亚大学。电子邮箱：mipafis@math.uoa.gr

之所以引入深度，是因为 $x \notin K_N$ 当且仅当存在一个包含 x且内部不含任何样本的闭半空间 H^+ ，因此，根据标准的并集界和分离论证（其各种形式已见于 [13] ，并在后续研究中得到进一步发展），对q_μ 的估计可转化为对 $\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\mu(K_N)\right]$ 的上界和下界。

速率函数视角。 大偏差启发式表明，可以选择凸速率函数的次水平集作为比较集。令

$$\Lambda_\mu(\xi) := \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, z\rangle}\, d\mu(z), \qquad \Lambda_\mu^*(x) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{\langle \xi, x\rangle - \Lambda_\mu(\xi)\},$$

定义

$$B_r(\mu) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \Lambda_\mu^*(x) \le r\}.$$

阈值方法的目标是证明如下形式的支撑半空间估计:

$$\inf_{x \in B_r(\mu)} q_\mu(x) \ \gtrsim \ e^{-r},$$

结合深度到凸包不等式后，这些估计便能给出关于 Λ_μ^* 典型尺度的阈值描述。在连续对数凹情形中，近期研究已将这一范式精确化，并建立了尖锐的深度–克рамér比较（例如参见 [6, 8]）。

DFM 的离散立方体证明中的问题。 对于原子测度，支撑半空间这一步存在一个实质性的微妙之处：要使平移论证成立，必须适当地定义 $B_r(\mu)$，使其成为紧集。然而在这种情况下，$B_r(\mu)$ 在边界点 x 处的支撑超平面未必由唯一的法向方向确定，而且 Λ_μ^* 在 x 处也未必可微。在此类情况下，常用的“光滑”表示

$$H^+(x) = \{y : \ \langle \nabla \Lambda_\mu^*(x), y - x\rangle \ge 0\}$$

不可用：正确的对象是 x 处的法锥（或次微分），其维数可能大于 1。

我们的观点是，这种现象并非只是奇特例子中的复杂情况：它也可能出现在超立方体情形中，因为支配该论证的自然凸集可能会接触到这样的边界面：在这些位置，勒让德变换不可微，且支撑超平面无法由梯度唯一确定。在 [13], 的离散超立方体阈值论证中，下阈值步骤隐含地依赖一项平滑性／唯一性原理，以选取并控制支撑半空间；然而，在真正的原子情形下，这项原理需要额外论证。就目前的表述而言，该论证没有处理这种边界接触情形，因此恰恰在必须将几何支撑信息转化为半空间质量的一致下界之处留下了缺口。

本文的两个方向（一正一负）。我们的贡献分为两部分，范围各不相同，结论也各异。

（I）独立性下经过修正的正向理论。 假设 $X = (X_1, \dots, X_n)$ 具有独立同分布的对称原子分布坐标。我们在这一框架下，借助最早见于 [13] 、随后由 [16, 21] 加以发展的方法，重新建立阈值图景。我们补足了 Dyer–Füredi–McDiarmid 方法缺失的论证。由此，我们为一类概率测度建立了阈值现象：其独立同分布的坐标对称、紧支撑，且端点处具有质量。我们还给出了一个概率质量函数相关条件，该条件保证无界离散对数凹边缘分布具有阈值现象。这样一来，大类离散对数凹乘积测度便重新纳入阈值理论的适用范围——要么是因为修复技术漏洞后，它们符合 Dyer–Füredi–McDiarmid 论证，

要么是因为其概率质量函数满足保证阈值机制成立的条件。

(II) 独立性之外的结构框架与反例。 我们还通过凸可延拓势函数以及到 $\mathbb{R}^n$ 的对数凹延拓，为一般离散对数凹分布建立了离散凸分析框架。这部分并非一个普遍的阈值定理。其目的在于阐明离散情形下可能出现的问题：我们给出概率质量函数延拓的可积性判据，并构造出明确的样例族，表明即使在自然的离散对数凹性假设下，尖锐阈值也可能失效。具体而言，我们构造了定义在 $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ 上、具有特定性质但满足 $\mathbb{E}_\mu[\Lambda_\mu^*] = +\infty$ 的概率测度。对于一维概率测度而言，同样的性质将蕴含 Λ_μ^* 的所有矩均有限。我们还给出一些例子，其中连续对数凹理论中支配尖锐阈值的方差型参数发散，从而无法得到 Brazitikos–Chasapis / Brazitikos–Giannopoulos–Pafis 型的阈值结论 [6, 8]。因此，最后一节的例子应理解为没有阈值的测度，并视作证据，说明在原子情形下，实质性的结构（例如独立性与定量正则性相结合）至关重要。

示例与校准。 为便于展开讨论，我们给出基准计算以及不同的情形。例如，对于 $\{0,1\}^n$, μ 上的均匀测度，K_N 等于不同的抽样顶点所占的比例，由此得到一个精确公式和优惠券收集者尺度。我们还分析 rB_p^n 格点上的均匀测度，其中 $F_{n,\ N}(\mu)$ 会在次指数尺度上发生转变，并说明这些模型如何符合（或不符合） [6, 8] 中的阈值理论。

下一节将介绍记号并陈述我们的主要结果。

2 记号与主要结论

首先，我们介绍一些基本记号和定义。我们在 $\mathbb{R}^n$ 中进行讨论，并赋予其标准内积 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$。相应的欧几里得范数记作 $\|\cdot\|_2$，欧几里得单位球记作 B_2^n，单位球面记作 S^{n-1}。$\mathbb{R}^n$ 中的体积记作 vol_n。对于集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$，我们用 $|A|$ 表示其基数，用 $\mathbb{1}_A$ 表示其示性函数。对于 $p \geq 1$，我们将 ℓ_p-范数记作 $\|\cdot\|_p$，相应的单位球记作 B_p^n。我们还定义$\|x\|_0 = |\{1 \leq i \leq n : x_i \neq 0\}|$，即某个 $x \in \mathbb{R}^n$ 的非零坐标数。

对于任意超平面

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u \rangle = \langle x, u \rangle\}$$

经过 $x \in \mathbb{R}^n$ 且垂直于某个 $u \in S^{n-1}$ 的超平面，我们用 H^+ 表示该半空间

$$H^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u \rangle \geq \langle x, u \rangle\}$$

对于一个 函数 $g:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，其值并非恒为无穷大，我们定义它的凸共轭

$$g^*(x) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, \xi \rangle - g(\xi)\},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

g 的双共轭满足

$$g^{**}(x) := (g^*)^*(x) = \sup\{c(x) |\ c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ is convex, lsc and } c \leq g\}.$$

关于凸分析的基本事实，请参阅 [23] 。

我们用 $f(x) \sim g(x)$（记作 $x \to A$）表示 $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$。若 $f, g \geq 0$, $f = O(g(n))$, 则表示对于某个绝对常数 $C > 0$，有 $f(n) \leq Cg(n)$。我们还用 $f(n) = o(g(n))$ 表示 $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$，并用 $f(n) = \omega(g(n))$ 表示 $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$。

我们称实数集 $\mathbb{R}^n$ 上的博雷尔概率测度 μ 为偶对称的，若对实数集 $\mathbb{R}^n$ 的每个博雷尔子集 B，都有 $\mu(-B)=\mu(B)$。若随机向量 Y 取值于实数集 $\mathbb{R}^n$，且其分布为偶对称的，则称其为对称的。

若对每个超平面H 都满足 $\mu(H)<1$，则称 μ 上的博雷尔概率测度 $\mathbb{R}^n$ 为满维。我们还称 μ 为对数凹的，若它是满维的，且

$$\mu(\lambda A+(1-\lambda)B)\geq\mu(A)^{\lambda}\mu(B)^{1-\lambda}$$

对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意一对紧集 A，B，以及任意 $\lambda\in(0,1)$。Borell [5] 已证明，在这些假设下，μ 具有对数凹密度 f_μ。回忆一下，函数 $f:\ \mathbb{R}^n\to[0,\infty)$称为对数凹函数，若其支撑集 $\{f>0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集，且 $\log f$ 在其上的限制是凹的。若 f 是 $\mathbb{R}^n$上的可积对数凹函数，则存在常数 A，$B>0$，使得对所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 都有 $f(x)\leq Ae^{-B\|x\|_2}$（见 [9, 引理 2.2.1]）。

设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的博雷尔概率测度。总体半空间深度（即 Tukey 半空间深度）是函数

$$q_\mu(x):=\inf_{\theta\in S^{n-1}}\mu\big(\{y:\ \langle y,\theta\rangle\geq\langle x,\theta\rangle\}\big)$$

并由 Tukey 于 [24] 引入。μ 的矩母函数（m.g.f）定义为

$$\phi_\mu(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{\langle\xi,z\rangle}d\mu(z)$$

而对数矩母函数是函数

$$\Lambda_\mu(\xi):=\log\phi_\mu(\xi).$$

μ 的 Cramér 变换 Λ_μ^* 是 Λ_μ 的凸共轭，即

$$\Lambda_\mu^*(x):=\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\{\langle x,\xi\rangle-\Lambda_\mu(\xi)\}.$$

注意，Λ_μ^* 是一个非负凸函数。

对于任意 $r>0$，我们定义

$$B_r(\mu)=\{x\in\mathbb{R}^n:\Lambda_\mu^*(x)\leq r\}.$$

对于每个 $x\in\mathbb{R}^n$，我们有 $q_\mu(x)\leq\exp(-\Lambda_\mu^*(x))$，这是定义的直接推论（例如参见 [8, 引理 3.1]）。注意，若 X 是服从 μ 的随机向量，则我们也分别记作 ϕ_X，q_X，Λ_X，Λ_X^*。

若 X 的坐标是独立随机变量，则

$$\Lambda_X^*(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n\Lambda_{X_i}^*(x_i).$$

对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的概率测度 μ，我们还定义如下量

$$\beta(\mu):=\frac{\mathrm{Var}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{(\mathbb{E}_\mu[\Lambda_\mu^*])^2},$$

它在阈值现象中起着至关重要的作用。注意，若 $\mu=\nu\otimes\cdots\otimes\nu$（$k$ 次）是乘积测度，则

$$\beta(\mu)=\frac{\beta(\nu)}{k}.$$

我们还注意到，如果 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度，则不等式 $e^{\Lambda_\mu^*}\leq 1/q_\mu$ 和 [6, 命题 3.2 b)] 给出 $\beta(\mu)<+\infty$。然而，在 $\mathbb{R}^n$ 中，该量可能为无穷大。Giannopoulos 和 Tziotziou 在 [17] 中证明，如果 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度，那么 Λ_μ^* 的所有矩均为有限值。在我们的工作中，我们将离散对数凹概率质量函数的连续对数凹延拓的可积性（见定义 3.2 和 3.4）与 Λ_μ^*的矩的有限性联系起来。

定理 2.1。 设 X 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的离散对数凹随机向量，其概率质量函数为 $p:\ \mathbb{Z}^n \to [0,1)$，并设 f 为其对数凹延拓。如果 f 可积，则对任意 $q \geq 1$，我们有

$$\mathbb{E}_X[(\Lambda_X^*)^q] < +\infty.$$

在讨论阈值现象之前，我们需要将这一概念形式化。给定实数集 μ 上的一个博雷尔概率测度 $\mathbb{R}^n$，我们定义

$$\varrho_1(\mu,\delta) := \sup\{r>0 : \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] \leq \delta, \text{ for every } N \leq \exp(r)\},$$

and

$$\varrho_2(\mu,\delta) := \inf\{r>0 : \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] \geq 1-\delta, \text{ for every } N \geq \exp(r)\},$$

其中 $\mu^N = \mu \otimes \cdots \otimes \mu$（重复 N 次）。

采用这一记号，我们给出如下定义。

定义 2.2。 设 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是实数集 $\mathbb{R}^n$上的概率测度序列 μ_n，且 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是正数序列。

若对于每个 $\delta,\varepsilon \in (0,1)$，都存在 $n_0(\delta,\varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \geq n_0$，我们称 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 附近呈现弱阈值

$$\varrho_1(\mu_n,\delta) \geq (1-\varepsilon)T_n \qquad \text{and} \qquad \varrho_2(\mu_n,\delta) \leq (1+\varepsilon)T_n.$$

若对于每个 $\varepsilon \in (0,1)$，都存在$n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \geq n_0$，我们称 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 附近呈现尖锐阈值，

$$\varrho_1(\mu_n,\delta_n) \geq (1-\varepsilon)T_n \qquad \text{and} \qquad \varrho_2(\mu_n,\delta_n) \leq (1+\varepsilon)T_n,$$

对于某个序列（δ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$。

下面的定理建立在现有的阈值现象研究方法之上（例如 [13, 16, 21]），或修正原有论证中的问题，或说明其他类别的测度自然也属于现有理论的适用范围。

定理 2.3。 设 μ 是一个偶博雷尔概率测度，并令

$$x^* = x^*(\mu) = \sup\{x \in \mathbb{R} : \mu([x,+\infty)) > 0\} \in (0,+\infty]$$

为其右端点。对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $\mu_n := \mu \otimes \cdots \otimes \mu$（$n$次）。若

(i) μ 具有紧支撑，且 $\mu(\{x^*\}) > 0$，或

(ii) μ 是无界的离散对数凹测度，其概率质量函数为 $(p(k))_{k\in\mathbb{Z}} = (e^{-g(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$，且满足$g(k+1)/g(k) \to 1$，当 $k \to \infty$ 时，

那么$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 呈现出一个弱阈值，其位置约为$(\mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*))_{n\in\mathbb{N}}$。

我们还借鉴优惠券收集问题的论证，证明了一个尖锐阈值，并确定了转变发生的尺度严格小于（事实上是多项式级别）已知阈值结果中的尺度；后者至少是指数级别。

定理 2.4。 固定 $r,p \geq 1$，令 $\mu_{n,r,p}$ 为 $\mathbb{Z}^n \cap rB_p^n$ 上的均匀概率测度。那么$(\mu_{n,r,p})_{n\in\mathbb{N}}$ 在某个$(T_{n,r,p})_{n\in\mathbb{N}}$附近呈现尖锐阈值，其中 $T_{n,r,p} \sim \lfloor r^p \rfloor \log n$ 当 $n \to \infty$时。

最后，我们构造了一列不会呈现任何阈值的离散对数凹乘积测度，这与连续对数凹情形形成鲜明对比。

定理 2.5。 存在一列$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 上的离散对数凹概率测度，使得如果对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\mu_n = \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n$，那么$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不会呈现任何阈值现象。

3 离散对数凹随机向量

阈值方法中反复出现的一个量，是对数矩母函数 Λ_X 的凸共轭 Λ_X^* 的均值（以及更一般地说，矩）。尤其是，若干阈值结论对 $\mathbb{E}_X[\Lambda_X^*]$ 是否有限十分敏感。即使在连续情形下，它的有限性也并非自动成立；最初在 [8] 中针对凸体上的均匀测度验证了这一点，之后又在 [17] 中推广至所有具有连续密度的对数凹测度。对于离散模型，这个问题自然与能否将 $\mathbb{Z}^n$ 上的离散对数凹质量函数转化为 $\mathbb{R}^n$ 上真正可积的对数凹函数有关。

这引出了以下更为根本的问题：给定一个定义在 p上的 $\mathbb{Z}^n$ 离散对数凹概率质量函数（因此 $g = -\log p$ 按照 *Murota* 在 [20]中的定义是凸可延拓的），它的对数凹延拓 $f = e^{-\tilde{g}}$ 是否必然满足 $\int_{\mathbb{R}^n} f < \infty$? 如果答案是肯定的，那么可积对数凹函数的分析工具便可引入离散情形，尤其能够推出Λ_X^* 的所有矩均有限（见定理 2.1）。

因此，本节围绕两个相互关联的主题展开：离散对数凹性的结构性概念（通过凸可延拓性刻画），以及相应延拓的可积性判据。证明结合了凸分析工具（双共轭和衰退锥）、对数凹函数的初等比较，以及格论和丢番图方法，用以排除在 f 的大型超水平集中存在“过多”格点的情况。具体而言，我们将使用：(i) 乘积情形下凸延拓的可分性（引理 3.3）；(ii) 通过衰退锥论证，以及概率质量函数不可能在无限多个内部格点上赋予正质量这一事实，证明适当超水平集有界（引理 3.10、3.11）；(iii) 在二维情形下，运用克罗内克型稠密性论证（引理 3.14、3.15），在不对支撑集施加额外几何假设的情况下得到可积性。

我们先给出实数集上离散对数凹性的标准定义。

定义 3.1（实数集上的离散对数凹性）。 若非负数列$(p_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 的支撑集为离散区间，且对所有 k 均有

$$p_k^2 \geq p_{k-1}p_{k+1}.$$

等价地，比值序列 p_{k+1}/p_k 在支撑集上单调不增。

若整数值随机变量 Y 的概率质量函数（概率质量函数）是离散对数凹序列，则称该随机变量为离散对数凹的。

为了将离散对数凹性的概念推广到 $\mathbb{Z}^n$，我们需要以下定义：

定义 3.2（凸可延拓）。 对于某个 $g\colon\ \mathbb{Z}^n \to [0,+\infty]$，若其不恒等于$+\infty$，则定义 $\tilde{g}\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ 为

$\tilde{g}(x) =$ 上确界$\{a(x) |\ a\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是仿射的，并且对每个 $k \in \mathbb{Z}^n\} =$，$a(k) \leq g(k)$；上确界$\{c(x) |\ c\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是凸且下半连续的，并且对每个 $k \in \mathbb{Z}^n\}$，$x \in \mathbb{R}^n$.，$c(k) \leq g(k)$

若对每个 $k \in \mathbb{Z}^n$ 都有 $\tilde{g}(k) = g(k)$，则称 g 为凸可延拓 的。

注意，对每个这样的 $g\colon\ \mathbb{Z}^n \to [0,+\infty]$，$\tilde{g}$ 都是凸的、下半连续且非负的，因为 $a \equiv 0$ 是仿射的，并且对每个 $k \in \mathbb{Z}^n$ 满足 $a(k) \leq g(k)$。此外，若 $\mathrm{dom}(g) = \{k\colon\ g(k) < +\infty\}$，且 $\mathrm{dom}(\tilde{g}) = \{x\colon\ \tilde{g}(x) < +\infty\}$，则

$$\mathrm{conv}(\mathrm{dom}(g)) \subseteq \mathrm{dom}(\tilde{g}) \subseteq \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{dom}(g)).$$

我们还需要以下引理。

引理 3.3。设 $g_1, \ldots, g_n \colon \mathbb{Z} \to [0, +\infty]$ 不处处为无穷，并定义 $g \colon \mathbb{Z}^n \to [0, +\infty]$，使得对每个 $k \in \mathbb{Z}^n$，$g(k_1, \ldots, k_n) = \sum g_i(k_i)$。那么，对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，有 $\tilde{g}(x_1, \ldots, x_n) = \sum \tilde{g}_i(x_i)$。

证明。对于每个 $1 \le i \le n$，我们设 $\hat{g}_i \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$，其中

$$\hat{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & , x \in \mathbb{Z} \\ +\infty & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

我们还设 $\hat{g} \colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$，$\hat{g}(x_1, \ldots, x_n) = \sum \hat{g}_i(x_i)$，对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立。现在注意到

$$\tilde{g} = (\hat{g})^{**} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{g}_i)^{**} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}_i.$$

证明至此结束。 □

现在我们可以给出 $\mathbb{Z}^n$ 上离散对数凹性的定义。

定义 3.4（离散对数凹随机向量）。若整数值随机向量 X 的概率质量函数为 $p \colon \mathbb{Z}^n \to [0, 1)$，且 $\operatorname{supp}(p) = \{k \in \mathbb{Z}^n \colon p(k) > 0\}$ 满维，且 $g = -\log p$ 为凸可延拓的，则称其为离散对数凹。我们用 $f = e^{-g}$ 表示 p 在 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹延拓。

注意，f 是上半连续的；若 $A = \{f > 0\}$，则 f 在 $\operatorname{int}(A)$ 上连续，并且

$$\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(p)) \subseteq A \subseteq \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{supp}(p)).$$

命题 3.5。在 $n = 1$ 的情形下，也就是说，在 $\mathbb{Z}$ 上，这两个定义等价。

证明。设 X 是一个整数值随机变量，其概率质量函数为 $p \colon \mathbb{Z} \to [0, 1)$。

如果 p 在 $\mathbb{R}$ 上存在对数凹延拓 f，那么显然，其支撑集是一个离散区间，并且

$$p(k)^2 = f(k)^2 \ge f(k-1) f(k+1) = p(k-1) p(k+1)$$

对每个 $k \in \mathbb{Z}$，由于 f 的对数凹性，

现在假设 $p = e^{-g}$ 是符合定义 3.1 所述意义的对数凹序列。我们将证明 g 可凸延拓，并且

$$h : \mathbb{R} \to [0, +\infty], \quad h(x) := g(k) + (x - k)\left(g(k+1) - g(k)\right), \, x \in [k, k+1]$$

是 g 的凸延拓。事实上，对每个 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $h(k) = g(k)$；显然，h 下半连续且为凸函数，因为它是分段仿射的，并且其斜率 $m_k := h(k+1) - h(k) = g(k+1) - g(k)$ 单调不减，因为 $p = e^{-g}$ 是对数凹序列。因此，$h \le \tilde{g}$，这意味着对每个 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $\tilde{g}(k) = g(k)$。于是，g 可凸延拓。最后，设 $a(x) = bx + d$ 是一个仿射函数，且对每个 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $a(k) \le g(k)$。如果对某个 $k \in \mathbb{Z}$，$x \in [k, k+1]$，那么

$$\begin{aligned} a(x) &= a(\lambda k + (1-\lambda)(k+1)) = \lambda a(k) + (1-\lambda) a(k+1) \le \lambda g(k) + (1-\lambda) g(k+1) \\ &= \lambda h(k) + (1-\lambda) h(k+1) = h(\lambda k + (1-\lambda)(k+1)) = h(x), \end{aligned}$$

对于某个 $\lambda \in [0, 1]$，由于 h 在 $[k, k+1]$ 上是仿射的。对 a 取上确界即可得到结果。 □

接下来我们讨论对数凹延拓 f 的可积性。先来看一些几乎显而易见的情形。下一条命题的证明也可见 [2, 命题 5.1]。

命题 3.6. 设 X 是实数集 $\mathbb{Z}$ 上的离散对数凹随机变量，其概率质量函数为 $p\colon\ \mathbb{Z}\to[0,1)$，且 f 是它的对数凹延拓。那么 f 可积。

证明。我们知道，作为一个对数凹函数，f 是单峰的。由于 p 是一个概率质量函数，我们可以得出存在 $x_0\in\mathbb{R}$，使得 f 在（$-\infty$，x_0] 上非递减，并在[$x_0,+\infty$上非递增。根据命题 3.5 的证明中给出的 f 公式，我们可以假设存在 $k_0\in\mathbb{Z}$，使得 max $f=f(k_0)$。于是，

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{k}^{k+1} f(x)\,dx\le\sum_{k=-\infty}^{k_0-1}p(k+1)+\sum_{k=k_0}^{+\infty}p(k)\le 2<+\infty.$$

□

命题 3.7。设 X 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个随机向量，其坐标相互独立且为离散对数凹。则 X 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的离散对数凹随机向量，且其概率质量函数的对数凹延拓可积。

证明。设 $X=(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ 的概率质量函数为 $p\colon\ \mathbb{Z}^n\to[0,1)$。再设 $p_i\colon$ $\mathbb{Z}\to[0,1)$ 为第 i–个坐标的概率质量函数，并令 f_i 为其在 $\mathbb{R}$ 上的对数凹延拓，对每个 $1\le i\le n$均成立。命题 3.6 表明，对每个 $1\le i\le n$，f_i 均可积。由引理 3.3，我们很容易推出$_n$，即 –log $p=-\sum$log p_i是凸可延拓的；若 f是 p的对数凹延拓，则$_{i=1}$

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_i(x_i)$$

对每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 都成立。由此可知 f 可积。 □

命题 3.8。设 $F\colon\ \mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ 是对数凹、上半连续且可积的，并且其 $\operatorname{supp}(F)\cap\mathbb{Z}^n$ 是满维的。对每个 $k\in\mathbb{Z}^n$，定义 $p\colon\mathbb{Z}^n\to[0,1)$ $p(k)=$ $^{F}{}_{(k)\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}F(\ell)}$~~。那么，~~ p 是离散对数凹概率质量函数，其对数凹延拓 f 可积。

证明。由于 F 可积且对数凹，存在 $A,B>0$，使得 $F(x)\le Ae^{-B\|x\|_2}$。因此，$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}F(\ell)$ $<+\infty$，而且 p 确实是概率质量函数。

现在我们可以写出 $p=e^{-g}$ 和 $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}F(\ell)=e^{-G}$，其中 $G\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是一个凸且下半连续的函数。注意，对每个 $k\in\mathbb{Z}^n$，都有 $G(k)=g(k)$。这意味着 g 是凸可延拓的，且 $G\le\tilde{g}$。因此，

$$f=e^{-\tilde{g}}\le e^{-G}=\frac{F}{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}F(\ell)}$$

并且，f 的可积性由 F的可积性推出。 □

注 3.9。如果 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，且 $\mathbb{Z}^n\cap K$ 是满维的，那么根据命题 3.8，$\mathbb{Z}^n\cap K$ 上的均匀分布是离散对数凹分布，其含义见定义 3.4。

现在我们继续讨论更一般的情形。首先需要一些引理。下面的引理是 [10, 第七定理]的直接推论:

引理 3.10（无限逼近）。对于任意 d_1、…、$d_n\in\mathbb{R}$ 以及任意 $\varepsilon>0$，存在无穷多个 q、p_1、…、$p_n\in\mathbb{Z}$，使得对于每个 $i=1$、…、n都有 $|qd_i-p_i|<\varepsilon$。

引理 3.11. 设 $K\subseteq\mathbb{R}^n$ 为闭、凸且无界，并具有非空内点。若 $\operatorname{int}(K)\cap\mathbb{Z}^n\neq\emptyset$，则它是一个无限集合。

证明。由于不失一般性，假设 $0 \in \mathrm{int}(K)$。我们定义 K 的衰退锥：

$$\mathrm{rec}(K) = \{d \in \mathbb{R}^n : x + td \in K \ \text{ for every } x \in K \text{ and } t \geq 0\}.$$

由于 K 非空、凸且无界，根据 [23, 定理 8.4] ，存在某个 $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathrm{rec}(K) \setminus \{0\}$。因此，对每个 $t \geq 0$都有 $td \in K$。现在，由于 $0 \in \mathrm{int}(K)$，存在 $r \in (0, |d|/2)$ 使得 $2rB_2^n \subseteq K$。由 K 的凸性可知，对每个 $t \geq 0$都有 $B(td, r) \subseteq K$。因此，根据引理 3.10，存在无穷多个 $q, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$，使得

$$|qd_i - p_i| < \frac{r}{\sqrt{n}},$$

对每个 $i = 1, \ldots, n$都成立。这意味着存在无穷多个 $q \in \mathbb{N}$，使得 $B(qd, r) \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$。$r > 0$ 的选取使这些球两两不相交，从而完成引理的证明。 □

命题 3.12。设 X 是取值于 $\mathbb{Z}^n$ 中的离散对数凹随机向量，其概率质量函数为 p：$\mathbb{Z}^n \to [0, 1)$，并设 f 是其在 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹延拓。若$\mathrm{supp}(p)$有界，则 f 可积。

证明。由于 f 是对数凹的，存在 $c > 0$ 和 $v \in \mathbb{R}^n$，使得对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $f(x) \leq ce^{\langle x, v \rangle}$。此外，由于 $\mathrm{supp}(p)$ 有界，$\overline{\mathrm{supp}(f)} = \{f > 0\}$ 是紧集。因此，不难看出

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \leq c \int_{\mathrm{supp}(f)} e^{\langle v, x \rangle}\, dx < +\infty.$$

□

命题 3.13。设 X 是取值于 $\mathbb{Z}^n$ 中的离散对数凹随机向量，其概率质量函数为 p：$\mathbb{Z}^n \to [0, 1)$，并设 f 是其对数凹延拓。若 $\mathrm{supp}(p)$ 无界，且 $\mathrm{int}(\mathrm{conv}(\mathrm{supp}(p))) \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$，则 f 可积。

证明。不妨设 $0 \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(\mathrm{supp}(p)))$，因此$0 \in \mathrm{int}(\{f > 0\})$。现在令 $t = f(0)/2 \in (0, 1)$，并令 $C = \{x : f(x) \geq t\}$。由 f在 0 处的连续性，存在某个 $r > 0$ 使得 $rB_2^n \subseteq C$。我们还令 $K = \{x : f(x) \geq t/e\}$，由于 f的上半连续性和对数凹性，它是闭且凸的。我们将证明 K 是有界的。˜反之，鉴于 $0 \in \mathrm{int}(K)$，由引理 3.11，$K = \mathrm{int}(K) \cap \mathbb{Z}^n$ 是无穷的。于是，对于˜每个 $m \in K$，都有 $p(m) = f(m) \geq t/e > 0$。因此

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} p(m) \ \geq \ \sum_{m \in \tilde{K}} \frac{t}{e} \ = \ +\infty,$$

这与 p 是概率质量函数相矛盾。因此，存在某个 $R \geqslant 2r > 0$使得$K \subseteq \frac{R}{2} B_2^n$。

因此，如果 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|x\|_2 > R$，我们可以将其写为

$$\frac{Rx}{\|x\|_2} = \frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r} \frac{rx}{\|x\|_2} + \frac{R - r}{\|x\|_2 - r} x,$$

凸组合，其中 $f(Rx/\|x\|_2) < t/e$且 $f(rx/\|x\|_2) \geq t$。根据 f的对数凹性，我们得到

$$f(x) \leq te^{-\frac{\|x\|_2 - R}{R - r}} \leq Ce^{-\|x\|_2/R},$$

对每个 $\|x\|_2 > R$均成立。

另一方面，如果 $\|x\|_2 \leq R$，那么对于每个 $y \in \frac{x}{2} + \frac{r}{2} B_2^n$，我们都有

$$f(y) \geq \sqrt{f(x) f(2y - x)} \geq \sqrt{t f(x)}.$$

现在对 y 积分，并考虑到 $\frac{x}{2}+\frac{r}{2}B_2^n \subseteq RB_2^n$，我们得到

$$\int_{RB_2^n} f(y)\,dy \geq \sqrt{tf(x)}\ \mathrm{vol}_n\left(\frac{r}{2}B_2^n\right),$$

由此可得，对于某个 $M>0$， $f(x)\leq M$，因为 f 是对数凹的，且 RB_2^n 是紧集。

综合以上结果可知，存在某些 A， $B>0$，使得对于每个 $x\in\mathbb{R}^n$，都有 $f(x)\leq Ae^{-B\|x\|_2}$，由此即可直接完成证明。 □

然而，在 $\mathbb{R}^2$ 中，我们可以确保离散对数凹随机向量的每个 p.m.f 的对数凹延拓都是可积的。为此，我们需要以下引理:

引理 3.14 (克罗内克定理)。 如果 $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，那么 $(na-[na])_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,1)$ 中稠密。

引理 3.15。 设 $K\subseteq\mathbb{R}^2$ 是凸、闭、无界且具有非空内点的集合。如果 $K\cap\mathbb{Z}^2\neq\emptyset$，那么 $K\cap\mathbb{Z}^2$ 是无限的。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $0\in K$。若 $0\in\mathrm{int}(K)$，则由引理 3.11 可得结论。因此，我们可以假设 $0\in\mathrm{bd}(K)$。由于 K 无界，我们可以找到某个$d\in\mathrm{rec}(K)\setminus\{0\}$。因此，我们有

$$B=\{td:t\geq 0\}\subseteq K.$$

若 $\mathrm{span}\{d\}\cap\mathbb{Q}^2\neq\{0\}$，则显然 $B\cap\mathbb{Z}^2$ 是无限的。现在反过来假设此情况不成立，并令$v\in\mathrm{int}(K)\setminus\mathrm{span}\{d\}$。因此，我们还有

$$C=\{v+td:t\geq 0\}\subseteq K.$$

由 K 的凸性，只需证明 $\mathrm{conv}\{B,C\}\cap\mathbb{Z}^2$ 是无限的。现在可以看出，只需证明对于每个 $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 和 $0<b<1$，方程有无穷多个解 $(x,\ y)\in\mathbb{N}^2$

$$0\leq y-ax<b.$$

事实上，由引理 3.14 可知，我们可以找到自然数的严格递增序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $k\in\mathbb{N}$，都有 $n_ka-[n_ka]\in(1-b,\ 1)$。因此，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，$(n_k,\ [n_ka]+1)\in\mathbb{N}^2$ 都满足上述不等式。

□

命题 3.16. 设 X 是 $\mathbb{Z}^2$ 中的离散对数凹随机向量，其概率质量函数为 $p:\ \mathbb{Z}^2\to[0,1)$，其对数凹延拓为 f。则 f 可积。

证明。 根据命题 3.12，不妨设 $\mathrm{supp}(p)$ 无界。此外，不失一般性，可设 $f(0)>0$。由于 $\mathrm{supp}(p)$ 也是满维的，存在某个 $x_0\in\mathrm{int}(\{f>0\})$。取 $m>0$使得 $f(x_0)>f(0)/m$，并设 $t=f(0)/m$，$C=\{x:\ f(x)\geq t\}$和 $K=\{x:\ f(x)\geq t/e\}$。由 f在 x_0处的连续性，存在 $r>0$使得 $x_0+rB_2^n\subseteq C$。此外， K 是凸的、闭的且具有非空内点，并且 $0\in K$。因此，根据引理 3.15， K 不可能无界，因为 p 是一个概率质量函数。由此可知，存在某个$R>2r>0$使得 $K\subseteq x_0+\frac{R}{2}B_2^n$。然后，平移 $-x_0$，并像命题 3.13 的证明中那样处理 $f_1(\cdot)=f(\cdot+x_0)$，即可得到结论。

□

注记 3.17. 如果引理 3.15 对所有 $n\geq 2$ 都成立，那么同理，我们便可以证明对数凹延拓在一般情形下的可积性。然而，对于 $n\geq 3$，该引理不成立。事实上，如果我们考虑

$$K=\left\{(x,y,z):\left(x-\sqrt{2}z\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leq\frac{1}{9}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3,$$

则 K 是凸的、闭的、无界的，具有非空内点，且有 $K\cap\mathbb{Z}^3=\{0\}$。此外，在 $\mathbb{R}^4$中，集合 $K_m=K\times[1,m],m\in\mathbb{N}$具有相同的性质，并且只能包含有限个整点，这使得命题 3.16 的证明无法成立。

现在我们证明，对数凹延拓的可积性意味着 Λ_X^*矩的有限性。

定理 2.1 的证明。 令 $f = e^{-\tilde{g}}$，其中 $\tilde{g}: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ 是一个凸函数。由于 f 的可积性，存在 $A,\ B > 0$，使得对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(x) \le Ae^{-B\|x\|_2}$。

现在，如果 $k \in \mathbb{Z}^n$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^n$，则有

$$e^{\Lambda_X(\xi)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} p(m) e^{\langle m, \xi \rangle} \ge p(k) e^{\langle k, \xi \rangle}.$$

因此，

$$\Lambda_X^*(k) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{\langle k, \xi \rangle - \Lambda_X(\xi)\} \le \log\left(\frac{1}{p(k)}\right).$$

所以，如果 $q \ge 1$

$$\mathbb{E}[(\Lambda_X^*)^q] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\Lambda_X^*(k))^q p(k) \le \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} p(k) \log^q\left(\frac{1}{p(k)}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{g}^q(k) e^{-\tilde{g}(k)}$$

由于 $\lim_{x \to +\infty} x^q e^{-x/2} = 0$ 且 $\lim_{\|x\|_2 \to +\infty} \tilde{g}(x) = +\infty$，存在 $R > 0$，使得对于每个 $\|x\|_2 > R$，都有 $\tilde{g}^q(x) \le e^{\tilde{g}(x)/2}$。于是，

$$\mathbb{E}[(\Lambda_X^*)^q] \le N + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ \|k\|_2 > R}} e^{-\tilde{g}(k)/2} = N + \sqrt{A} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ \|k\|_2 > R}} e^{-B\|k\|_2/2} < +\infty.$$

□

4 乘积测度的弱阈值

设 μ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶博雷尔概率测度，并令

$$x^* = x^*(\mu) = \sup\{x \in \mathbb{R} : \mu([x, +\infty)) > 0\} \in (0, +\infty]$$

其右端点为 $n \in \mathbb{N}$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $\mu_n := \mu \otimes \cdots \otimes \mu$（$n$ 次）。我们将证明，对于某些类别的测度 μ，序列 $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 呈现弱阈值现象。我们所采用的方法已在 [16] 和 [21] 中得到广泛研究。因此，我们仅对论证作概述，着重强调主要思想以及与所考虑情形相关的具体方面。以下引理是其中的关键要素。

引理 4.1。 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的博雷尔概率测度，K_N 是由根据 μ_n 独立选取的 N 个随机向量生成的凸包。

（a）对于 $\mathbb{R}^n$ 的每个博雷尔子集 A,

$$\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)] \le \mu_n(A) + N \cdot \sup_{x \in A^c} q_{\mu_n}(x). \tag{1}$$

(b) 此外，如果 $p_\mu =$ 最大值$\{\mu(\{x\}) : x \in \mathbb{R}\} < 1$，那么

$$\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)] \ge \mu_n(A)\left(1 - \binom{N}{n} p_\mu^{N-n} - 2\binom{N}{n}\left(1 - \inf_{x \in A} q_{\mu_n}(x)\right)^{N-n}\right). \tag{2}$$

4.1 端点处有质量的乘积测度的阈值

在本小节中，我们确定并补充一项缺失的论证，这是得到 [13] 和 [16] 中阈值所必需的。作为应用，我们证明了对于端点处有质量的偶对称紧支撑乘积测度，存在一个弱阈值；这一情形未在 [21] 中涵盖。

因此我们假设 $x^* < +\infty$，并设 $p^* = \mu(\{x^*\})$。首先注意到，μ 的矩母函数$\phi_\mu(\xi)$ 对每个 $\xi \in \mathbb{R}$ 都收敛，因为 μ 是紧支撑的。此外，如果 $\Lambda_\mu = \log \phi_\mu$，我们有以下引理（证明见 [16, 引理 2.3]）。

引理 4.2。 $\Lambda'_\mu : \mathbb{R} \to (-x^*, x^*)$ 严格递增且满射。特别地，

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \Lambda'_\mu(\xi) = \pm x^*.$$

现在我们可以定义 $h : (-x^*, x^*) \to \mathbb{R}$，其定义为 $h = (\Lambda'_\mu)^{-1}$，这是一个严格递增的C^∞函数。再考虑 Cramér变换 Λ^*_μ。在下一个引理中，我们汇总 Λ^*_μ 的基本性质（证明见 [15, 命题 2.12] 和 [16, 引理 2.8]）。

引理 4.3。 以下结论成立：

(i) $\Lambda^*_\mu \geq 0$, $\Lambda^*_\mu(0) = 0$ 和 $\Lambda^*_\mu(x) = +\infty$ 对于 $x \in \mathbb{R} \setminus [-x^*, x^*]$。

(ii) 对于每个 $x \in (-x^*, x^*)$，我们有 $\Lambda^*_\mu(x) = \xi x - \Lambda_\mu(\xi)$ 当且仅当 $\Lambda'_\mu(\xi) = x$；则 ce

$$\Lambda^*_\mu(x) = xh(x) - \Lambda_\mu(h(x)) \qquad for\ x \in (-x^*, x^*).$$

(iii) Λ^*_μ 是定义在 $(-x^*, x^*)$ 上的严格凸 C^∞ 函数，并且

$$(\Lambda^*_\mu)'(x) = h(x).$$

(iv) Λ^*_μ 在 $x = 0$ 处取得其在 $(-x^*, x^*)$ 上的唯一最小值。

(v) Λ^*_μ 可通过令 $\Lambda^*_\mu(\pm x^*) = -\log p^*$ 连续延拓到 $\pm x^*$。

备注 4.4。 注意，每个这样的测度 μ 都满足 Λ^*-条件。换言之，我们有

$$\lim_{x \uparrow x^*} \frac{-\log \mu([x, +\infty))}{\Lambda^*_\mu(x)} = 1.$$

现在我们将估计 $\varrho_i(\mu_n, \delta)$ $i = 1, 2$。注意，我们对 $\varrho_i(\mu_n, \delta)$ 的定义与 [21] 中的定义相同，只是乘以了 n。我们先讨论上阈值。下一个定理的证明基于引理 4.1 (a)。该证明与 [21, 定理 3.1] 中的证明相同，并且对 $\mathbb{R}$ 上的每个偶博雷尔概率测度都成立。

定理 4.5。 对于每个 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，都存在 $c(\mu, \delta) > 0$ 和 $n_0(\mu, \delta) \in \mathbb{N}$，使得 t

$$\varrho_1(\mu_n, \delta) \geq \left(1 - \frac{c(\mu, \delta)}{\sqrt{n}}\right) \mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}].$$

在讨论下阈值之前，我们需要一些定义和引理。

定义 4.6 （法锥与切锥）。 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为凸闭集。对于每个$x_0 \in \mathrm{bd}(K)$，我们将 K 在 x_0 处的法锥定义为

$$N_K(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, x - x_0 \rangle \leq 0 \text{ for every } x \in K\}$$

以及 K 在 x_0 处的切锥

$$T_K(x_0) = \overline{\{y \in \mathbb{R}^n : \exists t > 0 \text{ such that } x_0 + ty \in K\}}.$$

这两个锥之间存在如下联系:

引理 4.7. 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸且闭的。对于每个 $x_0 \in \mathrm{bd}(K)$，我们有 $N_K(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, z\rangle \leq 0$ 对于每个 $z \in T_K(x_0)\}$.

证明。设 $v \in N_K(x_0)$ 且 $z \in T_K(x_0)$。我们可以找到一个正实数列 $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$和一个实数集 $\mathbb{R}^n$ 中的序列 $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $y_k \to z$，当 $k \to \infty$ 时，并且对于每个 $k \in \mathbb{N}$， $x_0 + t_k y_k \in K$。由于 $v \in N_K(x_0)$，我们得到 $\langle v, x_0 + t_k y_k - x_0\rangle \leq 0$ 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，由此可得 $\langle v, y_k\rangle \leq 0$ 对于每个 $k \in \mathbb{N}$。取 $k \to \infty$，我们推出 $\langle v, z\rangle \leq 0$。

对于另一个包含关系，取 $v \in \mathbb{R}^n$，使得对于每个 $z \in T_K(x_0)$，都有 $\langle v, z\rangle \leq 0$。设 $x \in K$，且$t \in$ 属于$(0, 1)$。我们可以写成

$$x_0 + t(x - x_0) = tx + (1 - t)x_0 \in K,$$

这意味着 $x - x_0 \in T_K(x_0)$。由此可得 $\langle v, x - x_0\rangle \leq 0$，进而$v \in N_K(x_0)$。

□

下文中，对于任意 $r > 0$，我们定义

$$B_r(\mu_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda^*_{\mu_n}(x) \leq r\} \subseteq [-x^*, x^*]^n,$$

由于 $\Lambda^*_{\mu_n}$ 在 $[-x^*, x^*]^n$上的连续性，这是一个紧集。我们将使用引理 4.7，推导出 $B_r(\mu_n)$在立方体 $[-x^*, x^*]^n$各个面上的点处的所有支撑超平面的公式。

引理 4.8。 设 $x = (x_1、\ldots\ldots、 x_n) \in [0, x^*]^n$，其中某个 $1 \leq k \leq n$满足 $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{k-1} < x_k = \cdots = x_n = x^*$。若 $\Lambda^*_{\mu_n}(x) = r$，则

$$N_{B_r(\mu_n)}(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : v_1 = \cdots = v_{k-1} = 0, v_k, \cdots, v_n \geq 0\}.$$

证明。 我们将证明

$$T_{B_r(\mu_n)}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_k, \ldots, y_n \leq 0\}$$

因此，由引理 4.7 和一个简单的计算可知，证明完成。

首先，令 $y \in \mathbb{R}^n$ 满足 $y_i > 0$，其中某个 $k \leq i \leq n$。那么，对于每个 $t > 0$，我们都有 $(x + ty)_i > x^*$，这意味着 $\Lambda^*_\mu((x + ty)_i) = +\infty$，因此 $y \notin \{y \in \mathbb{R}^n :$ 存在 $\exists t >$0，使得 $x + ty \in B_r(\mu_n)\}$。所以，我们有

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \exists t > 0 \text{ such that } x + ty \in B_r(\mu_n)\} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n : y_k, \ldots, y_n \leq 0\}$$

并且由于右侧集合是闭集，我们得到

$$T_{B_r(\mu_n)}(x) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n : y_k, \ldots, y_n \leq 0\}.$$

现在令 $y \in \mathbb{R}^n$ 满足 $y_k, \ldots, y_n < 0$。我们要找到 $t > 0$，使得

$$\Lambda^*_{\mu_n}(x + ty) \leq \Lambda^*_{\mu_n}(x).$$

等价地，我们需要找到某个 $t > 0$，使得:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Lambda^*_\mu(x_i + ty_i) - \Lambda^*_\mu(x_i)}{t} \leq \sum_{i=k}^{n} \frac{\Lambda^*_\mu(x^*) - \Lambda^*_\mu(x^* + ty_i)}{t}.$$

但取极限 $t \to 0^+$ 后，左边仍然有限，而根据引理 4.2、 h 的定义以及引理 4.3 (iii)，右边变为 $+\infty$。因此，我们可以找到所需的 $t > 0$。由此，我们证明了

$$\{y \in \mathbb{R}^n : y_k, \ldots, y_n < 0\} \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n : \exists t > 0 \text{ such that } x + ty \in B_r(\mu_n)\}.$$

取闭包后，我们得到

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \ y_k, \ldots, y_n \leq 0\} \subseteq T_{B_r(\mu_n)}(x),$$

至此，证明结束。 □

现在，对于下阈值，主要的技术工具是下面的定理，其证明比原始论证多包含一个细节。

定理 4.9。对于每个 $\zeta > 0$，存在 $n_0(\mu, \zeta) \in \mathbb{N}$，它仅依赖于 ζ 和 μ，使得对于所有 $r > 0$ 以及所有 $n \geq n_0(\mu, \zeta)$，均有

$$\inf_{x \in B_r(\mu_n)} q_{\mu_n}(x) \geq \exp(-(1+\zeta)r - 2\zeta n).$$

证明。设 $x \in B_r(\mu_n)$，且 H_1^+为一个满足 $x \in H_1$的闭半空间。存在 $u \in S^{n-1}$ 使得 $H_1^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y - x, u\rangle \geq 0\}$。考虑函数 $s : B_r(\mu_n) \to \mathbb{R}, s(w) = \langle w, u\rangle$。由于$s$ 连续且 $B_r(\mu_n)$紧， s 在某点 $z \in B_r(\mu_n)$处取得最大值。定义$H^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y - z, u\rangle \geq 0\}$。于是，$z \in H$，并且对每个 $w \in B_r(\mu_n)$，都有 $\langle w, u\rangle \leq \langle z, u\rangle$，这表明 H 在 z处支撑 $B_r(\mu_n)$。此外，$H^+ \subseteq H_1^+$，因此 $\mu_n(H^+) \leq \mu_n(H_1^+)$。这表明 $\inf\{q_{\mu_n}(x) : x \in B_r(\mu_n)\}$ 可由某个闭半空间 H^+ 取得，其边界超平面支撑 $B_r(\mu_n)$。因此，为证明该定理，只需说明给定 $\zeta > 0$，我们可以找到 $n_0(\mu, \zeta)$，使得若 $n \geq n_0(\mu, \zeta)$，则

$$\mu_n(H^+) \geq \exp(-(1+\zeta)r - 2\zeta n) \tag{3}$$

对于任意支撑 $B_r(\mu_n)$ 的闭半空间 H^+，其边界超平面为.....

设 H^+ 为这样的半空间，它在某个 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [-x^*, x^*]^n$ 处支撑 $B_r(\mu_n)$。由对称性和独立性，不妨设 $x \in [0, x^*]^n$。我们区分两种情形：情形 *1*：若 $x \in [0, x^*)^n$，则 $\Lambda_{\mu_n}^*(x) = r$，且

$$H^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla \Lambda_{\mu_n}^*(x), y - x\rangle \geq 0\},$$

因为 $\Lambda_{\mu_n}^*$ 在 x 处为 C^∞，因此我们有 $N_{B_r(\mu_n)}(x) = \{\lambda \nabla \Lambda_{\mu_n}^*(x) : \lambda \geq 0\}$。此情形的证明与 [21, 定理 3.3] 中的证明完全相同。

情形 *2*：现在不失一般性地假设，存在 $1 \leq k \leq n$ 使得 $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{k-1} < x_k = \cdots = x_n = x^*$。令 $\Lambda_{\mu_n}^*(x) = r' \leq r$。那么，由于 $B_{r'}(\mu_n) \subseteq B_r(\mu_n)$，$H$ 也在 x 处支持 $B_{r'}(\mu_n)$。因此，根据引理 4.8，存在 v_k，.....，$v_n \geq 0$ 使得

$$H^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=k}^n v_i(y_i - x^*) \geq 0\}.$$

回顾 $p^* = \mu(\{x^*\})$。记

$$\begin{aligned}
\mu_n(H^+) &= \mu_n(\{y \in [-x^*, x^*]^n : \sum_{i=k}^n v_i(y_i - x^*) \geq 0\}) \\
&\geq \mu_n(\{y \in [-x^*, x^*]^n : y_k = \cdots = y_n = x^*\}) = (p^*)^{n-k+1} \\
&= e^{-(n-k+1)\Lambda_\mu^*(x^*)} = \exp\left(-\sum_{i=k}^n \Lambda_\mu^*(x_i)\right) \geq \exp\left(-(1+\zeta)\sum_{i=1}^n \Lambda_\mu^*(x_i) - 2\zeta n\right) \\
&\geq \exp(-(1+\zeta)r - 2\zeta n),
\end{aligned}$$

因为 μ_n 是乘积测度且 $\Lambda_\mu^* \geq 0$。 □

现在我们可以利用引理 4.1 (b)（另见 [21,定理 3.9]）给出 $\varrho_2(\mu_n, \delta)$ 的上界。

定理 4.10。对于任意 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 和 $\varepsilon \in (0, 1)$，我们可以找到 $n_0(\mu, \delta, \epsilon)$ 使得

$$\varrho_2(\mu_n, \delta) \leq (1+\varepsilon)\,\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda_{\mu_n}^*]$$

对于所有 $n \geq n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$。

结合定理 4.5 和定理 4.10，我们得到最终结果：

定理 4.11。对于任意的 $\delta \in \left(0、\ \frac{1}{2}\right)$ 以及任意的 $\varepsilon \in (0、1)$，存在 $n_0(\mu、\ \delta、\ \varepsilon)$，使得

$$\varrho_1(\mu_n, \delta) \geq (1-\varepsilon)\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}] \quad and \quad \varrho_2(\mu_n, \delta) \leq (1+\varepsilon)\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}]$$

对于每个 $n \geq n_0(\mu、\ \delta、\ \varepsilon)$ 都成立。特别地，$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在约 $(\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}])_{n\in\mathbb{N}}$ 处呈现弱阈值。

4.2 离散对数凹性与阈值

现在令 μ 为对称离散对数凹随机变量 Y 的分布，其概率质量函数为 $(p(k))_{k\in\mathbb{Z}}$。若 Y 有界，则定理 4.11 表明 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 呈现弱阈值。因此，我们假设 Y 无界，即 $x^* = +\infty$。本小节将通过概率质量函数刻画 Λ^*-条件，并基于这一刻画，推导相应离散对数凹测度的阈值。

我们设

$$S(k) = \mu\left([k, +\infty)\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

and

$$m(x) = -\log \mu\left([x, +\infty)\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

注意　对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $m(k) = -\log S(k)$。此外，利用马尔可夫不等式，我们得到　t

$$\Lambda_\mu(\xi) \geq \xi x - m(x), \tag{4}$$

对于每个 $x > 0$ 和每个 $\xi \geq 0$。我们还设

$$r_k = \frac{p(k+1)}{p(k)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

由对数凹性可知，$(r_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是一个非递增数列。我们定义

$$r^* := \lim_{k\to\infty} r_k = \lim_{k\to\infty} \frac{p(k+1)}{p(k)} \in [0, 1).$$

在下一个引理中，我们将 r^* 与矩母函数的收敛区间联系起来

$$J_\mu = \{\xi \in \mathbb{R} : \phi_\mu(\xi) < +\infty\}.$$

引理 4.12. 令 $\xi^* = -\log r^*$，并约定 $\log 0 = -\infty$，则有 $J_\mu = (-\xi^*, \xi^*)$，且 $\lim_{\xi\to\xi^*} \Lambda_\mu(\xi) = +\infty$。

证明. 由于 μ 是偶对称的，我们只需处理右端点。令 $q > r^*$。那么，存在$C > 0$ 使得 $p(k) \leq Cq^k$对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。容易看出，对每个 $0 \leq \xi < -\log q$，都有 $\phi_\mu(\xi) < \infty$。因此可以推出，对每个 $0 \leq \xi < -\log r^*$，都有 $\phi_\mu(\xi) < \infty$。

若 $r^* = 0$，则证明的第一部分已完成。因此，假设 $0 < r^* < 1$。那么，对每个 $k = 0, 1, 2, \ldots$ ...，都有$p(k) \geq p(0)(r^*)^k$

因此，我们有

$$\phi_\mu(-\log r^*) \geq \sum_{k=0}^{\infty} p(k)\frac{1}{(r^*)^k} = +\infty.$$

现在，如果 $0 \leq \xi_n \uparrow -\log r^*$，那么根据单调收敛定理，我们有

$$\phi_\mu(\xi_n) \geq \sum_{k=0}^{\infty} p(k)e^{k\xi_n} \uparrow \sum_{k=0}^{\infty} p(k)\frac{1}{(r^*)^k} = +\infty,$$

当 $n \to \infty$ 时。

因此，接下来只需证明引理的第二部分，即 $r^* = 0$ 时的情形。回顾不等式

$$\Lambda_\mu(\xi) \geq \xi x - m(x),$$

对每个 $x > 0$ 和 $\xi \geq 0$都成立。令 $\xi \to +\infty$ 即可完成证明。 □

前一个引理表明，引理 4.2 对本小节的离散对数凹测度μ 成立（证明见 [21, 引理 2.3 (ii) 和 (iii)]）。因此，现在可以定义h：$(-x^*,\ x^*) \to \mathbb{R}$，使得 $h = (\Lambda'_\mu)^{-1}$；这是一个严格递增且 C^∞ 的函数。因此，引理 4.3 (i)-(iv) 对 μ均成立。

要使这种方法得到一个阈值，Λ^*-条件是必要的，即

$$\lim_{x\to x^*} \frac{-\log \mu([x,+\infty))}{\Lambda^*_\mu(x)} = 1.$$

现在我们将用 $(p(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ 来刻画 Λ^*-条件。令 $p(k) = e^{-g(k)}$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 都成立。

定理 4.13. μ 满足 Λ^*-条件，当且仅当 $m(k+1)/m(k) \to 1$，当 $k \to \infty$ 时成立，因此当且仅当

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(k+1)}{g(k)} = 1.$$

我们首先需要一个引理，用来比较 $g(k)$ 和 $m(k)$ 的渐近行为 .

Lemma 4.14. 我们有 $S(k) \sim p(k)/(1-r^*)$，因此 $m(k) \sim g(k)$，当 $k \to \infty$ 时 .

证明。若 $k \in \mathbb{N}$，我们写作

$$S(k) = \mathbb{P}(Y \geq k) = \sum_{m=k}^{+\infty} p(m) = p(k) \sum_{m=k}^{+\infty} \prod_{\ell=k}^{m-1} r_\ell.$$

由于 $r_k \downarrow r^*$，又因为 $k \to \infty$，我们有

$$(r^*)^{m-k} \leq \prod_{\ell=k}^{m-1} r_\ell \leq r_k^{m-k},$$

由此得到

$$\frac{p(k)}{1-r^*} \leq S(k) \leq \frac{p(k)}{1-r_k}$$

因此

$$1 - \frac{1}{g(k)} \log\left(\frac{1}{1-r_k}\right) \leq \frac{m(k)}{g(k)} \leq 1 - \frac{1}{g(k)} \log\left(\frac{1}{1-r^*}\right).$$

令 $k \to \infty$，证明即告完成，因为 $g(k) \to +\infty$，又因为 $k \to \infty$。 □

我们还需要引用 [6]中的一个结果：

定理 4.15。设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个概率测度，并设 $x^* \in (-\infty, +\infty]$ 表示$\mathrm{supp}(\mu)$的右端点。那么，

$$\lim_{x\to x^*} \frac{-\log \mu([x,\infty))}{\Lambda^*_\mu(x)} = 1$$

当且仅当存在一个凸函数 V（x），使得 极限$_{x\to x^*}$ $^{-}$对数 μ（$[x,\infty)$）V（x）$= 1$。

定理 *4.13* 的证明。我们首先假设 $g(k+1)/g(k) \to 1$，如 $k \to \infty$ 所示。根据命题 3.5 的证明，我们可以将 g 延拓到某个 $\tilde{g}: \mathbb{R} \to [0,+\infty)$，它是分段仿射且凸的。注意，由于 p 在 $\mathbb{N}$ 上非递增，因此根据其构造，$\tilde{g}$ 在 $[1,+\infty)$ 上非递减。现在设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $x \in (k,\ k+1]$。注意到

$$\frac{m(x)}{\tilde{g}(x)} = \frac{m(k+1)}{\tilde{g}(x)} = \frac{m(k+1)}{g(k+1)} \frac{g(k+1)}{\tilde{g}(x)}.$$

由于 $\tilde{g}$ 非递减，我们得到

$$\frac{m(k+1)}{g(k+1)} \leq \frac{m(x)}{\tilde{g}(x)} \leq \frac{m(k+1)}{g(k+1)} \frac{g(k+1)}{g(k)}.$$

The 假设、引理 4.14 和定理 4.15 给出了 Λ^*-性质，因为 $\tilde{g}$ 是凸的 .

现在假设存在一个凸函数 V： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，使得 $m(x) \sim V(x)$，其中 $x \to \infty$。由于 $m(k+1) > m(k)$，如果 $m(k+1)/m(k) \nrightarrow 1$，通过取子序列，我们可以假设存在 $L > 1$ ，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$都有 $m(k+1)/m(k) \geq L$ 。令

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{L}\right) > 0.$$

于是我们可以找到 $x_0 > 0$ ，使得

$$V(x) \leq \frac{m(x)}{1-\varepsilon},$$

对每个 $x \geq x_0$成立。现在令 $k \in \mathbb{N}$ ，且 $k \geq x_0$。由 V的凸性，我们有

$$\frac{m\left(k+\frac{1}{2}\right)}{V\left(k+\frac{1}{2}\right)} \geq \frac{2m(k+1)}{V(k)+V(k+1)} \geq \frac{2(1-\varepsilon)}{1+\frac{m(k)}{m(k+1)}} \geq \frac{2(1-\varepsilon)}{1+\frac{1}{L}} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2L}}{1+\frac{1}{L}} > 1,$$

这就产生了矛盾，因为当 $x \to \infty$时， $m(x) \sim V(x)$。 □

注记 4.16。 定理 4.13 与连续情形形成对比，在连续情形中，对于 $\mathbb{R}$上的每个对数凹概率测度，Λ^*-条件都成立。后一个事实是定理 4.15 的直接推论。我们还提到，尽管形如

$$\Lambda_\mu^*(x) \geq (1-\varepsilon)\log\frac{1}{q_\mu(x)} + C(\varepsilon)$$

对每个 $\varepsilon \in (0,1)$、每个定义在 $\mathbb{R}$ 上的离散对数凹概率测度 μ ，以及每个 $x \in \text{supp}(\mu)$ 都成立（这是 [6, 定理 3.4] 的正确表述），但它不能推广到每个 $x \in \text{conv}(\text{supp}(\mu))$，因为这将意味着每个定义在 $\mathbb{R}$上的离散对数凹概率测度都满足 Λ^*-条件。

注 4.17。 我们注意到，引理 4.12、引理 4.14 和定理 4.13 的证明实质上并未用到 Y 的对称性。相应的结果也适用于任何非上有界或非下有界的离散对数凹随机变量。

因此，我们现在可以陈述关于阈值的定理。

定理 4.18. 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的偶对称、无界、离散对数凹概率测度，其概率质量函数为 $p(k) = e^{-g(k)}$ ，对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 都成立。若 $g(k+1)/g(k) \to 1$ 当 $k \to \infty$ 时成立，则 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}])_{n\in\mathbb{N}}$ 附近呈现弱阈值。

证明。 这是定理 4.5 的直接推论；该定理对实数集上的任意偶博雷尔概率测度 μ 均成立。定理 4.10 则在满足 Λ^*-条件时对 μ 成立（完整证明见 [21,定理 3.9]）。

□

5 格点情形下的尖锐阈值

我们从典型的离散立方体模型入手，其中 μ_n 是定义在 $\mathcal{V}_n = \{0,1\}^n$ 上的均匀概率测度，且对于独立同分布样本 $X_i \sim \mu_n$， $K_N = \text{conv}\{X_1, \ldots, X_N\}$。与只关注确定 N的相变尺度的方法不同，我们在这里计算完整的期望曲线

$$F_{n,N}(\mu_n) = \mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)]$$

精确地，对每个 N 和 n均如此。关键的几何观察是， K_N 不会产生新的立方体顶点：一个顶点属于随机凸包，当且仅当它被抽样到，因此$F_{n,\ N}(\mu_n)$可归结为优惠券收集问题的期望，即观测到的不同顶点数量的期望。由此得到一个闭式公式，并可立即统一推出所有渐近区域（次临界、临界、超临界）的结果。

接下来我们转向配备均匀概率测度 $\mu_{n,r,p}$ 的格 p球 $L_{n,r,p} = \mathbb{Z}^n \cap rB_p^n$。与乘积型／离散立方体情形相比，这个例子在性质上有所不同：尽管样本 $X_1, \dots, X_N$ 在 $\mu_{n,r,p}$下独立同分布，但分布 $\mu_{n,r,p}$ 本身并不具备坐标独立性（约束 $\|X\|_p \le r$ 将各坐标耦合起来），因此无法采用适用于乘积测度的、基于独立性的论证。相反，我们分析归一化格点泛函

$$F_{n,N}(\mu_{n,r,p}) = \mathbb{E}_{\mu_{n,r,p}^N}\Big[\frac{|K_N \cap \mathbb{Z}^n|}{|L_{n,r,p}|}\Big]$$

运用几何—组合的优惠券收集者夹逼。我们在 $L_{n,r,p}$ 内嵌入一个大型结构化层 $A_{n,r,p}$，其基数渐近地占据 $L_{n,r,p}$ 的全部比例。随机多胞体捕获的格点数，因而被夹在采样点的不同取值数与该数量加上 $A_{n,r,p}$ 内漏掉的（少量）格点以及可忽略的补集 $L_n \setminus A_n$ 之间。因此，$F_{n,N}(\mu_{n,r,p})$ 在 n 上呈现多项式尺度的锐阈值行为。

这两种情形都需要用到下面这个引理，它与优惠券收集问题密切相关。

引理 5.1。令 $X_1, \dots, X_N$ 为取值于 $\{v_1, \dots, v_M\}$且服从均匀分布的独立同分布随机变量。若 $D_N = |\{X_1, \dots, X_N\}|$，则

$$\mathbb{E}[D_N] = M(1 - (1 - 1/M)^N).$$

证明。对于每个 $1 \le i \le M$，令 $Y_i = \mathbb{1}_{\{v_i \in \{X_1, \dots, X_N\}\}}$。注意， $Y_i \sim$ 服从伯努利(p)分布，其中$p = 1 - (1 - 1/M)^N$。还需注意， $D_N = \sum_{i=1}^M Y_i$，证毕。 □

5.1 离散超立方体 $\{0,1\}^n$：完整分析

现在令 μ_n 为顶点集 $\mathcal{V}_n$ 上的均匀概率分布：$= \{0,1\}^n$；也就是说，对于所有 $v \in \mathcal{V}_n$， $\mu_n(\{v\}) = 2^{-n}$。从 μ_n 中独立同分布地抽取 $X_1, \dots, X_N$，并令 $K_N = \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$。首先我们将证明，凸包不可能包含任何未被抽取的顶点。

引理 5.2. 设 $S \subseteq \mathcal{V}_n$。则

$$\mathrm{conv}(S) \cap \mathcal{V}_n \;=\; S.$$

等价地，超立方体顶点 $v \in \mathcal{V}_n$ 属于 $\mathrm{conv}(S)$ 当且仅当 $v \in S$。

证明。若 $v \in \mathrm{conv}(S) \cap \mathcal{V}_n$，则 $v = \sum_{x \in S} \lambda_x x$，其中 $\lambda_x \ge 0, \sum_{x \in S} \lambda_x = 1$。对于任意满足 $v_i = 1$ 的坐标 i，我们有 $1 = v_i = \sum_{x \in S} \lambda_x x_i$，这迫使所有满足 $\lambda_x > 0$ 的 x 都有 $x_i = 1$。同理，对于所有这样的 x，$v_i = 0$ 都满足 $x_i = 0$。因此，每个满足 $\lambda_x > 0$ 的 x 都必须逐坐标等于 v，即 $x = v$。因此 $v \in S$。反向结论显然成立。 □

令 $D_N := |\{X_1, \dots, X_N\}|$ 表示在 N 次抽样中观测到的不同 顶点数。根据引理 5.2,

$$\mu_n(K_N) \;=\; \frac{D_N}{2^n}. \tag{5}$$

由于在大小为 M 的有限集合 $= 2^n$ 上进行独立同分布抽样，根据引理 5.1，我们有

$$\mathbb{E}_{\mu_n^N}[D_N] \;=\; 2^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^N\right). \tag{6}$$

结合 (5) 和 (6)，我们得到：

定理 5.3. 对于每个 $N, n \in \mathbb{N}$，我们有

$$F_{n,N}(\mu_n) \;=\; \mathbb{E}_{\mu_n^N}\left[\mu_n(K_N)\right] \;=\; 1-\left(1-2^{-n}\right)^N. \tag{7}$$

推论 5.4。

(i) 若 $N = o(2^n)$，则 $F_{n,\,N}(\mu_n) \to 0$，当 $n \to \infty$ 时。

(ii) 若对某个固定的 $\alpha > 0$，当 $n \to \infty$ 时 $N \sim \alpha 2^n$，则 $F_{n,\,N}(\mu_n) \to 1 - e^{-\alpha} \in (0,1)$，当$n \to \infty$ 时。

(iii) 若 $N = \omega(2^n)$，则 $F_{n,\,N}(\mu_n) \to 1$，当 $n \to \infty$ 时。

特别地，$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在$(T_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n\log 2)_{n\in\mathbb{N}}$附近呈现尖锐阈值。

证明。 断言 (i)-(iii) 可由 (7) 和不等式推出

$$\exp\left(-\frac{Nx}{1-x}\right) \le (1-x)^N \le \exp(-Nx)$$

对于每个 $N \in \mathbb{N}$ 以及每个 $x \in$ （0，1），可得

$$1-\exp\left(-\frac{N}{2^n}\right) \le F_{n,N}(\mu_n) \le 1-\exp\left(-\frac{N}{2^n-1}\right). \tag{8}$$

现在考虑阈值。令 $\varepsilon > 0$，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 取 $\delta_n = 1/n^b$，其中 $b > 0$ 是某个固定的（但任意大的）量。若 $N \le e^{(1-\varepsilon)n\log 2} = 2^{(1-\varepsilon)n}$，则（8）的右端给出

$$F_{n,N}(\mu_n) \le 1-\exp\left(-2^{-n\varepsilon/2}\right) \le 2^{-n\varepsilon/2} < \delta_n,$$

对于每个 $n \ge n_1(\varepsilon)$，这意味着

$$\varrho_1(\mu_n, \delta_n) \ge (1-\varepsilon)n\log 2. \tag{9}$$

另一方面，若 $N \ge e^{(1+\varepsilon)n\log 2} = 2^{(1+\varepsilon)n}$，（8）的左端给出

$$F_{n,N}(\mu_n) \ge 1-\exp\left(-2^{n\varepsilon}\right) > 1-\delta_n$$

对于 $n \ge n_2(\varepsilon)$，这意味着

$$\varrho_2(\mu_n, \delta_n) \le (1+\varepsilon)n\log 2. \tag{10}$$

因此，（9）和（10）完成了证明。 □

备注 5.5。 如果 μ 是 $\{0,1\}$上的均匀概率测度，直接计算（见下文 (19)）可得 $\mathbb{E}_\mu[\Lambda_\mu^*] =$ 以2为底的对数。因此，推论 5.4 中的尖锐阈值再次约为 $(\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda_{\mu_n}^*])_{n\in\mathbb{N}}$。

5.2 ℓ_p球中的格点

本小节旨在证明定理 2.4。固定 r，$p \ge 1$ 并设 $k = \lfloor r^p \rfloor$。为简便起见，我们在记号中省略参数 r，p。现在设

$$L_n := \mathbb{Z}^n \cap rB_p^n, \qquad M_n := |L_n|.$$

令 μ_n 为 L_n 上的均匀概率测度，并令 $X_1, \dots, X_N$ 为服从分布 μ_n 的独立同分布变量。设 K_N:= conv$\{X_1, \dots, X_N\}$。我们考虑归一化格点泛函

$$F_{n,N}(\mu_n) := \mathbb{E}_{\mu_n^N}\left[\frac{|K_N \cap \mathbb{Z}^n|}{|L_n|}\right] = \mathbb{E}_{\mu_n^N}\left[\frac{|K_N \cap L_n|}{M_n}\right].$$

设 $D_N := |\{X_1, \dots, X_N\}|$ 为不同采样点的数量。则我们总有 e

$$D_N \le |K_N \cap L_n|. \tag{11}$$

现在令 $A_n := \{x \in \{-1, 0, 1\}^n : \ \|x\|_0 = k\}$。该集合的基数为

$$|A_n| = 2^k \binom{n}{k}. \tag{12}$$

注意到 $A_n \subseteq L_n$，因为对每个 $x \in A_n$，我们都有 $\|x\|_p^p = k \le r^p$。

我们还考虑事件

$$G_N = (A_n \cap K_N) \setminus \{X_1, \dots, X_N\}.$$

用这个记号，我们有

$$|K_N \cap L_n| \le D_N + |G_N| + |L_n \setminus A_n|. \tag{13}$$

Comb将 (11) 和 (13) 相加，除以 M_n，取期望并使用引理 5.1，我们得到 et

$$1 - \Big(1 - \frac{1}{M_n}\Big)^N \ \le \ F_{n,N}(\mu_n) \ \le \ 1 - \Big(1 - \frac{1}{M_n}\Big)^N + C_n + P_{n,N}, \tag{14}$$

其中

$$C_n = \frac{|L_n \setminus A_n|}{M_n}, \qquad P_{n,N} = \frac{\mathbb{E}_{\mu_n^N}[|G_N|]}{M_n}.$$

为了使不等式 (14) 有望导出一个阈值，我们必须确保 C_n，$P_{n,\ N} \to 0$，因为$n \to \infty$，并且对 N 进行适当选择。为此，我们需要估计其中涉及的量。我们从 $M_n = |L_n| = |\mathbb{Z}^n \cap rB_p^n|$ 和 C_n 开始。

引理 5.6. 我们有

$$|L_n \setminus A_n| = O(n^{k-1})$$

and

$$M_n = 2^k \binom{n}{k} + O(n^{k-1}).$$

因此，

$$M_n \sim \frac{2^k}{k!} n^k, \qquad \log M_n \sim k \log n,$$

当 $n \to \infty$ 时，且 $C_n = O(1/n)$。

证明. 记

$$L_n = A_n \sqcup (L_n \setminus A_n).$$

我们声称， $L_n \setminus A_n$ 仅包含至多有 $k-1$ 个非零坐标的向量。事实上，若$\|x\|_0 \ge k$ 且某个坐标满足 $|x_i| \ge 2$，那么

$$\|x\|_p^p \ge 2^p + (k-1) \cdot 1 \ge k + 1 > r^p,$$

这意味着 $x \notin L_n$。因此，任意 $x \in L_n \setminus A_n$ 都有 $\|x\|_0 \le k-1$。

对于每个 $1 \le j \le k-1$，满足 $\|x\|_0 = j$ 且 $\|x\|_p \le r$ 的整数向量数量至多为$\binom{n}{j}$（$2\lfloor r \rfloor$）^{j}。对 $1 \le j \le k-1$ 求和可得 $|L_n \setminus A_n| = O$（n^{k-1}）。事实上，对于每个固定的 j，我们有 $\binom{n}{j} \le n^j/j!$，因此

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (2\lfloor r \rfloor)^j \le \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2\lfloor r \rfloor)^j}{j!} n^j \le \Big(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2\lfloor r \rfloor)^j}{j!}\Big) n^{k-1} \le e^{2\lfloor r \rfloor} n^{k-1}.$$

由于 $r \ge 1$ 固定， $|L_n \setminus A_n| = O(n^{k-1})$。结合（12）即得证 f. □

现在我们必须估计 $P_{n,\ N}$。我们需要以下引理。

引理 5.7。设 $x \in A_n$。

(i) 对于每个 $y \in L_n$，都有 $\langle x, y\rangle \le k$。

(ii) 存在一个集合 $F_x \subseteq L_n$，使得

$$|F_x| = \binom{2k-1}{k} \coloneqq R_k$$

并且，对于某个 $y \in L_n$，$\langle x, y\rangle = k$ 当且仅当 $y \in F_x$。因此，若对于某个 $B \subseteq L_n$，$x \in \operatorname{conv}(B)$，则 $B \cap F_x \neq \emptyset$；此外，若 $x \notin B$，则 $|B \cap F_x| \ge 2$。

证明。设 $x \in A_n$。由于 A_n 和 L_n 在符号翻转和坐标置换下保持不变，我们不妨设 $x = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$。令

$$F_x = \{y \in L_n : y_1, \ldots, y_k \ge 0,\ y_{k+1} = \cdots = y_n = 0,\ \|y\|_1 = k\}.$$

现在我们计算 $|F_x|$。由于每个 $y \in F_x$ 都满足 $y_{k+1} = \cdots = y_n = 0$, $y_1, \ldots, y_k \ge 0$ 和 $\|y\|_1 = k$，映射

$$y \longmapsto (y_1, \ldots, y_k)$$

是 F_x 与该集合之间的双射

$$\left\{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k_{\ge 0} :\ a_1 + \cdots + a_k = k\right\}.$$

因此 $|F_x|$ 等于总和为 k 的 k 元非负整数元组（a_1，……，a_k）的数量。

为了计算这些 k 元组的数量，我们使用标准的“插板法”。将 k 个相同物体（星星）分配到 k 个箱子中，其中 a_i 表示放入箱子 i 的星星数。这样的分配可以用一个长度为 $2k-1$ 的序列表示，其中包含 k 颗星星和 $k-1$ 根隔板：从左向右读取，a_1 表示第一根隔板之前的星星数，a_2 表示第一根与第二根隔板之间的星星数，以此类推，而 a_k 表示最后一根隔板之后的星星数。这种对应关系是双射，因此这类 k 元组的数量等于从 $2k-1$ 个位置中选出 k 颗星星（或等价地，选出 $k-1$ 根隔板）的位置的方式数：

$$|F_x| = \binom{2k-1}{k} = \binom{2k-1}{k-1}.$$

现在令 $y \in L_n$。我们有

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} y_i \le \sum_{i=1}^{k} |y_i| \le \|y\|_1 \le k, \tag{15}$$

因为 $\|y\|_1$ 是整数，并且

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p = \|y\|_p^p \le r^p < k+1,$$

因为 y_i 是整数且 $p \ge 1$。因此，若 $\langle x,\ y\rangle = k$，则 (15) 中的所有不等式都必须取等号。因此，

$$y_1, \ldots, y_k \ge 0, \qquad y_{k+1} = \cdots = y_n = 0, \qquad \|y\|_1 = k,$$

这意味着 $y \in F_x$。反之显然成立。

现在设 $B \subseteq L_n$，且 $x \in$ 属于 $\operatorname{conv}(B)$。那么 $x = \sum_{y \in B} \lambda_y y$，其中 $\lambda_y \ge 0$，$\sum_{y \in B} \lambda_y = 1$。与 x 取内积可得

$$k = \langle x, x\rangle = \sum_{y \in B} \lambda_y \langle x, y\rangle,$$

并且由于每个 $\langle x, y\rangle \le k$，我们必须有 $\langle x, y\rangle = k$ 对每个满足 $\lambda_y > 0$ 的 y 都成立。因此，至少有一个这样的 y 位于 F_x 中。若 $x \notin B$，则表示 x 的凸组合至少使用了两个不同点，因此 $|B \cap F_x| \ge 2$。

□

现在我们可以估计 $P_{n,N}$:

引理 5.8. 对于每个 $x \in A_n$，我们有

$$\mu_n^N(x \in K_N \setminus \{X_1, \ldots, X_N\}) \leq \binom{N}{2} \left(\frac{R_k}{M_n}\right)^2,$$

因此

$$P_{n,N} = O\left(\frac{N^2}{M_n^2}\right).$$

证明. 若 $x \in K_N \setminus \{X_1, \ldots, X_N\}$，则由引理 5.7 可知，必有 $|\{X_1, \ldots, X_N\} \cap F_x| \geq 2$。由于 X_i 是独立随机向量，且在 L_n上均匀分布，若令 Y ∼服从二项分布$(N, |F_x|/M_n)$，则有

$$\mu_n^N(|\{X_1, \ldots, X_N\} \cap F_x| \geq 2) \leq \mathbb{P}(Y \geq 2),$$

由此可得

$$\mu_n^N(x \in K_N \setminus \{X_1, \ldots, X_N\}) \leq \binom{N}{2} \left(\frac{R_k}{M_n}\right)^2. \tag{16}$$

最后，注意到

$$|G_N| = \sum_{x \in A_n} \mathbb{1}_{\{x \in K_N \setminus \{X_1, \ldots, X_N\}\}}.$$

取期望，两边除以 M_n，并利用 (16) 和 $|A_n| \leq M_n$，即可完成证明，因为R_k 仅取决于 r, p。 □

现在我们可以证明定理 2.4。

定理 *2.4* 的证明。我们令 $T_n = \log M_n$，并回忆由引理 5.6 可得 $T_n \sim k \log n$，当$n \to \infty$时，其中 $k = \lfloor r^p \rfloor$。令 $\varepsilon \in (0,1)$，并令 $\delta_n = 1/T_n$。

如果 $N \leq e^{(1-\varepsilon)T_n} = M_n^{1-\varepsilon}$，则将（14）中的右侧不等式与引理 5.6 和引理 5.8 结合，可得

$$\begin{aligned} F_{n,N}(\mu_n) &\leq 1 - \left(1 - \frac{1}{M_n}\right)^N + O(1/n) + O\left(\frac{N^2}{M_n^2}\right) \\ &\leq \frac{N}{M_n} + O\left(\frac{N^2}{M_n^2}\right) + O(1/n) \\ &\leq \frac{1}{M_n^\varepsilon} + O\left(\frac{1}{M_n^{2\varepsilon}}\right) + O(1/n) \leq \delta_n, \end{aligned}$$

对 $n \geq n_1(\varepsilon)$ 成立，其中我们还使用了不等式 $(1-x)^N \geq 1 - Nx,\ x \in [0,1]$。因此，

$$\varrho_1(\mu_n, \delta_n) \geq (1-\varepsilon)T_n. \tag{17}$$

如果 $N \geq e^{(1+\varepsilon)T_n} = M_n^{1+\varepsilon}$，则（14）中的左侧不等式给出

$$\begin{aligned} F_{n,N}(\mu_n) &\geq 1 - \left(1 - \frac{1}{M_n}\right)^N \geq 1 - \exp\left(-\frac{N}{M_n}\right) \\ &\geq 1 - \exp\left(-M_n^\varepsilon\right) \geq 1 - \delta_n, \end{aligned}$$

对 $n \geq n_2(\varepsilon)$ 成立，其中我们还使用了不等式 $(1-x) \leq e^{-x}$。因此，

$$\varrho_2(\mu_n, \delta_n) \leq (1+\varepsilon)T_n. \tag{18}$$

结合（17）和（18），我们得到尖锐阈值。 □

注 5.9。 对于 $r = 1$，我们对每个 $p \geq 1$都有 $L_n = \mathbb{Z}^n \cap B_p^n = \{0, \pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$。因此，$M_n = 2n + 1$ 并按照前面的记号， $T_n = \log(2n + 1)$。 直接计算可得

$$\Lambda_{\mu_n}(\xi) = \log\left(1 + \sum_{i=1}^{n}(e^{\xi_i} + e^{-\xi_i})\right) - \log(2n + 1)$$

对每个 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 都成立。此外，我们有 $\Lambda^*_{\mu_n}(0) = 0$ 且 $\Lambda^*_{\mu_n}(\pm e_i) = \log(2n + 1)$，对每个 $1 \leq i \leq n$ 都成立。因此，

$$\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}] = \frac{2n}{2n + 1}\log(2n + 1),$$

这意味着 $\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}] \sim T_n$，因为 $n \to \infty$。

6 反例

6.1 量 $\beta(\mu)$ 以及乘积阈值的反例

该相对方差参数

$$\beta(\mu) := \frac{\mathrm{Var}_\mu(\Lambda^*_\mu)}{\left(\mathbb{E}_\mu[\Lambda^*_\mu]\right)^2}$$

在 [8] 中引入，作为衡量随机变量 Λ^*_μ 在其均值附近集中程度的定量指标。在连续对数凹情形下（实数集 $\mathbb{R}^n$ 上具有连续密度的对数凹概率测度），该参数与随机多胞体的期望 μ–质量存在阈值现象直接相关，因而也与由 $\mathbb{E}_\mu[\Lambda^*_\mu]$ 控制的量相关；参见 [8] 及 [6] 中的进一步发展。特别地，要为所有连续对数凹测度获得阈值结论，一个自然的途径是证明

$$\beta_n := \sup\{\beta(\mu) : \mu \text{ is log-concave on } \mathbb{R}^n \text{ with continuous density}\}$$

满足 $\beta_n \to 0$ as $n \to \infty$。上述类别对应的猜想已被提出，据我们所知，目前还没有发现反例。

此外，在连续情形下，已证明 [6] 的阈值行为适用于定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的乘积测度，其一维边缘分布是对数凹的，但不一定相同（即，具有不同一维对数凹分布的独立坐标）。相比之下，在离散对数凹类别中，这两种现象都可能失效：首先，即使维数固定，量 $\beta(\mu)$ 也可能无界；其次，上述阈值的“乘积稳定性”可能不成立（稍后将讨论一个明确的离散反例）。我们首先说明第一个障碍，即

$$\tilde{\beta}_n = \sup\{\beta(\mu) : \mu \text{ is discrete log-concave on } \mathbb{R}^n\}$$

可能为无穷大。

我们首先注意到，在连续对数凹情形下，始终有 $\beta_1 < +\infty$ （见[6]）。然而，在离散对数凹情形下，这并不成立。更准确地说，我们可以证明:

˜**命题 6.1**。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有 $\beta_n = +\infty$。

证明。 如果 $p \in (0, 1)$，令 ν^p 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的概率测度，满足 $\nu^p(\{0\}) = 1 - p$ 且 $\nu^p(\{1\}) = p$。我们还令 $\nu^p_n = \nu^p \otimes \cdots \otimes \nu^p$。简单计算可得

$$\Lambda_{\nu^p}(\xi) = \log(1 - p + pe^{\xi}),\ \xi \in \mathbb{R}$$

and

$$\Lambda^*_{\nu^p}(0) = -\log(1-p), \qquad \Lambda^*_{\nu^p}(1) = -\log p.$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}_{\nu^p}[\Lambda^*_{\nu^p}] = -p\log p - (1-p)\log(1-p) \tag{19}$$

and

$$\mathrm{Var}_{\nu^p}(\Lambda^*_{\nu^p}) = p(1-p)\log^2\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

注意到

$$\mathbb{E}_{\nu^p}[\Lambda^*_{\nu^p}] \sim -p\log p, \qquad \mathrm{Var}_{\nu^p}(\Lambda^*_{\nu^p}) \sim p\log^2 p \tag{20}$$

当 $p \to 0$ 时。因此，存在 c，$C > 0$ 使得对每个 $p \in (0,\ 1/2]$：

$$\mathbb{E}_{\nu^p}[\Lambda^*_{\nu^p}] \le -Cp\log p, \qquad \mathrm{Var}_{\nu^p}(\Lambda^*_{\nu^p}) \ge cp\log^2 p.$$

$_n$对每个 $x \in \{0,1\}^n$，我们都有 $\Lambda^*_{\nu_n^p}(x) = \sum_{k=1} \Lambda^*_{\nu^p}(x_k)$，这意味着

$$\mathbb{E}_{\nu_n^p}[\Lambda^*_{\nu_n^p}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_{\nu^p}[\Lambda^*_{\nu^p}], \qquad \mathrm{Var}_{\nu_n^p}(\Lambda^*_{\nu_n^p}) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}_{\nu^p}(\Lambda^*_{\nu^p}).$$

因此，对每个 $p \in (0,\ 1/2]$,

$$\beta(\nu_n^p) = \frac{\mathrm{Var}_{\nu_n^p}(\Lambda^*_{\nu_n^p})}{(\mathbb{E}_{\nu_n^p}[\Lambda^*_{\nu_n^p}])^2} \ge \frac{c}{C^2}\frac{1}{np},$$

由此可得

$$\lim_{p\to 0} \beta(\nu_n^p) = +\infty.$$

□

现在我们转向由 n 个不一定相同的测度构成的乘积情形。在连续对数凹情形中，我们知道，若 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一列对数凹概率测度，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\mu_n = \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n$，那么

$$\beta(\mu_n) \to 0,$$

当 $n \to \infty$ 和 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 呈现尖锐阈值时。我们将证明，在离散情形下，这一结论不再成立。

定理 6.2. 存在一个离散对数凹概率测度序列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$，定义在$\mathbb{R}$上，使得若对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $\mu_n = \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n$，则

$$\beta(\mu_n) \to +\infty,$$

当 $n \to \infty$ 且$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不呈现尖锐阈值时。

证明。对每个 $k \in \mathbb{N}$，我们定义

$$p_k = \frac{1}{k\log^3(k+3)}$$

并且 $\lambda_k = \nu^{p_k}$，沿用前面的记号。

引理 6.3. 我们有 $\beta(\mu_n) \to \infty$，因为 $n \to \infty$。

$_n$证明. 对于每个 $x \in \{0,1\}^n$，我们有 $\Lambda^*_{\mu_n}(x) = \sum_{k=1} \Lambda^*_{\lambda_k}(x_k)$，由此可得

$$\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_{\lambda_k}[\Lambda^*_{\lambda_k}], \qquad \mathrm{Var}_{\mu_n}(\Lambda^*_{\mu_n}) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}_{\lambda_k}(\Lambda^*_{\lambda_k}).$$

根据（20），存在 $c,\ C > 0$，使得对于每个 $p \in (0,\ 1/2]$,

$$\mathbb{E}_{\nu^p}[\Lambda^*_{\nu^p}] \le -Cp\log p, \qquad \mathrm{Var}_{\nu^p}(\Lambda^*_{\nu^p}) \ge cp\log^2 p.$$

因此，现在我们有

$$\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}] \le C\sum_{k=1}^n p_k \log\left(\frac{1}{p_k}\right) \le C\sum_{k=1}^\infty \frac{\log\left(k\log^3(k+3)\right)}{k\log^3(k+3)} \le \tilde{C}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\log^2(k+3)} < +\infty,$$

这意味着

$$\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}] \to A \in (0,+\infty),$$

当 $n \to \infty$ 时。然而,

$$\mathrm{Var}_{\mu_n}(\Lambda^*_{\mu_n}) \ge c\sum_{k=1}^n p_k \log^2\left(\frac{1}{p_k}\right) = c\sum_{k=1}^n \frac{\log^2\left(k\log^3(k+3)\right)}{k\log^3(k+3)} \ge \tilde{c}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k\log(k+3)} \to +\infty,$$

当 $n \to \infty$ 时。这意味着

$$\beta(\mu_n) = \frac{\mathrm{Var}_{\mu_n}(\Lambda^*_{\mu_n})}{(\mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda^*_{\mu_n}))^2} \to +\infty,$$

当 $n \to \infty$ 时。 □

现在我们继续证明 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不可能出现任何阈值。

引理 6.4。 存在某个 $\delta_0 \in (0, 1/2)$，使得对每个 $n, N \in \mathbb{N}$，我们都有 e

$$\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)] \ge \delta_0.$$

证明。 令 $n, N \in \mathbb{N}$。显然 $K_1 \subseteq K_N$，并且我们有

$$\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_1)] = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \mu_n^2(\{x\}) \ge \mu_n^2(\{(0,\dots,0)\})$$

and

$$\mu_n(\{(0,\dots,0)\}) = \prod_{k=1}^n \lambda_k(\{0\}) = \prod_{k=1}^n (1-p_k) \ge \prod_{k=1}^\infty (1-p_k) > 0,$$

因为 $\sum_{k=1}^\infty p_k < +\infty$。因此，若我们设

$$\delta_0 = \left(\prod_{k=1}^\infty (1-p_k)\right)^2 \in (0,1/2)$$

我们得到 $\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)] \ge \delta_0$。 □

引理 6.5。 设 $n \in \mathbb{N}$。对每个 $\delta > 0$，存在 $N_0(n,\delta) \in \mathbb{N}$，使得对每个$N \ge N_0(n,\delta)$，我们有

$$\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)] \ge 1 - \delta.$$

此外，如果 $n \ge 2$ 和 $0 < \delta < \delta_0$，那么我们有 $\varrho_2(\mu_n, \delta) \ge \log 2$。

证明。 设 $\delta > 0$ 和 $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个独立随机向量序列，其分布为 μ_n。根据引理 5.2

$$\{\{X_1, \dots, X_N\} = \{0,1\}^n\} = \{\mu_n(K_N) = 1\}$$

and

$$\lim_{N\to\infty} \mu_n^N\left(\{X_1, \dots, X_N\} = \{0,1\}^n\right) = 1.$$

因此，存在 $N_0(n,\ \delta) \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $N \geq N_0(n,\ \delta)$，

$$\mu_n^N\left(\{X_1, \dots, X_N\} = \{0,1\}^n\right) > 1 - \delta.$$

因此，根据马尔可夫不等式

$$\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)] > 1 - \delta$$

对于每个 $N \geq N_0(n,\ \delta)$，这意味着 $\varrho_2(\mu_n,\ \delta)$ 定义良好。

现在，如果 $n \geq 2$ 和 $0 < \delta < \delta_0$，我们有

$$\mathbb{E}[\mu_n(K_1)] \leq \mu_n(\{0, \dots, 0\}) = \prod_{k=1}^{n}(1 - p_k) \leq 1/2.$$

因此，
如果

$$\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)] > 1 - \delta$$

对于某个 $N \in \mathbb{N}$，我们必须有 $N \geq 2$，由此得到 $\varrho_2(\mu_n,\ \delta) \geq \log 2$。 □

现在设 $n \geq 2$ 和 $0 < \delta < \delta_0$。根据引理 6.4，$\varrho_1(\mu_n,\ \delta)$ 没有明确定义，因为 $\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)]$ 不会变得任意小。然而，根据引理 6.5，我们有 $\varrho_2(\mu_n,\ \delta)$ 定义良好，事实上 $\varrho_2(\mu_n,\ \delta) \geq \log 2$。因此，根据我们的定义，$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不会表现出任何阈值。 □

6.2 q_μ 和 Λ_μ^*的期望

为回答 [19],中提出的一个问题，Brazitikos、Giannopoulos 和 Pafis 在 [7]中证明了以下关于（连续）对数凹概率测度的 Tukey半空间深度期望的结果：

定理 6.6. 存在绝对常数 c_1、$c_2 > 0$，使得对于实数集 $\mathbb{R}^n$ 上的每个对数凹概率测度 μ，我们都有

$$e^{-c_1 n} \leq \mathbb{E}_\mu[q_\mu] \leq e^{-c_2 n}.$$

后一个结论也考虑了各向同性常数猜想的解决过程：最初由 Klartag 和 Lehec [18], 解决，不久后又由 Bizeul [1]解决。因此，我们不禁要问，在离散对数凹情形下是否也成立相同的界。对于上界，答案是否定的。

命题 6.7. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 我们有

$$\sup_X \mathbb{E}_X[q_X] = 1,$$

其中，上确界取遍所有具有独立且为离散对数凹坐标的 $X \in \mathbb{Z}^n$ 中的随机向量。

证明。令 $\varepsilon \in \in (0,\ 1)$，并考虑独立随机变量 $X_1,\ \ldots,\ X_n$，其服从 $X_i \sim$ 伯努利(p_i)分布，其中 $p_i = \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ 对每个 $1 \le i \le \sout{n}$均成立。若令 $X = (X_1,\ \ldots,\ X_n)$，则对每个 $x \in \{0,1\}^n$均有 $q_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_X[q_X] &= \sum_{x\in\{0,1\}^n} \mathbb{P}(X=x)^2 = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)^2 \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{x\in\{0,1\}} \mathbb{P}(X_i = x_i)^2 = \prod_{i=1}^n (1 - 2p_i(1-p_i)) \\ &\ge 1 - 2\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) \ge 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

□

注 6.8。事实上，在定理 6.6 上界的证明中，作者证明了若μ 是 $\mathbb{R}^n$上的对数凹概率测度，则

$$\mathbb{E}_\mu[e^{-\Lambda_\mu^*}] \le e^{-c_1 n},$$

其中 $c_1 > 0$ 是一个绝对常数。应用詹森不等式可得

$$\mathbb{E}_\mu[\Lambda_\mu^*] \ge c_1 n.$$

他们还在 [7, 推论 1.5] 中证明，存在一个绝对常数 $c_2 > 0$，使得

$$\sup_\mu \left(\sup \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \le e^{c_1 n} \right\} \right) \longrightarrow 0$$

当 $n \to \infty$时，其中第一个上确界取遍 $\mathbb{R}^n$上的所有对数凹概率测度 μ。定理 2.4 与注 5.9 结合起来，尤其是 (19) 与引理 6.4 一起表明，这两个结果在离散对数凹情形下都没有类似结论。

现在设 μ 是 $\mathbb{R}$上的一个概率测度。考虑不等式 $e^{\Lambda_\mu^*} \le 1/q_\mu$ 和 [6, 命题 3.2 b)], ，我们现在知道，对于每个 $\alpha \in$，都有 $\mathbb{E}_\mu[e^{\alpha\Lambda_\mu^*}] < +\infty$ $(0,\ 1)$。特别地，Λ_μ^*的所有矩均有限。下面我们给出一些 $\mathbb{R}^n$上的概率测度示例，它们具有特定性质，但这些性质仍不足以保证甚至 $\mathbb{E}_\mu[\Lambda_\mu^*]$ 有限。

在我们提到的 Brazitikos 和 Chasapis 的结果之前，人们已知：若概率测度 μ 在 $\mathbb{R}$ 上具有有限的一阶矩，则对每个 $\alpha \in (0,\ 1)$，都有 $\mathbb{E}_\mu[e^{\alpha\Lambda_\mu^*}] < +\infty$ （见 [12, 习题 1.2.9]）。我们先证明，这一性质并不适用于 $\mathbb{R}^n$，$n \ge 2$。事实上，我们将证明一个更强的结论：即使具有紧支撑，也不足以保证 Λ_μ^* 的一阶矩有限。

命题 6.9。设 $n \ge 2$。存在一个满维、紧支撑的概率测度 μ_n，定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，满足 $\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda_{\mu_n}^*] = +\infty.$

证明。设 $n \ge 2$。令

$$x_2 = 0, \qquad x_k = (\cos(1/k), \sin(1/k),\ 0\ , \ldots,\ \underbrace{1}_{k-\text{index}}\ ,\ 0\ , \ldots, 0), \qquad 3 \le k \le n$$

and

$$x_k = (\cos(1/k), \sin(1/k),\ 0\ , \ldots,\ 0), \qquad k \ge n+1.$$

对于每个 $k \ge 2$，我们还令 $p_k = c/k\log^2 k$，其中 $c > 0$ 是一个归一化常数，使得 $\sum_{k=2}^\infty p_k = 1$。我们定义概率测度

$$\mu_n = \sum_{k=2}^\infty p_k \delta_{x_k},$$

其中 δ_{x_k} 是位于 x_k处的狄拉克测度。注意， μ_n 是满维的。显然，由于μ_n 是紧支撑的，因此对于每个 $\xi \in \mathbb{R}^n$，都有 $\Lambda_{\mu_n}(\xi) < +\infty$ 。

现在令 $k \geq 3$ 和 $t > 0$。令 $\xi_k = (\cos(1/k), \sin(1/k) 0, \ldots\ldots, 0)$，则有

$$e^{\Lambda_{\mu_n}(t\xi_k)} = \sum_{m=2}^{\infty} p_m e^{t\langle \xi_k, x_m \rangle} = e^{t\langle \xi_k, x_k \rangle} \left(p_k + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^{\infty} p_m e^{t\langle \xi_k, x_m - x_k \rangle} \right).$$

现在，如果 $m \geq 2$ 和 $m \neq k$，那么

$$\langle \xi_k, x_m - x_k \rangle \leq \cos\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right) - 1 \leq \cos\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) - 1 = B_k < 0.$$

因此，

$$e^{\Lambda_{\mu_n}(t\xi_k)} \leq e^t \left(p_k + e^{tB_k} \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^{\infty} p_m \right) \leq e^t \left(p_k + e^{tB_k} \right).$$

于是，

$$\Lambda^*_{\mu_n}(x_k) \geq \langle t\xi_k, x_k \rangle - \Lambda_{\mu_n}(t\xi_k) \geq t - t - \log(p_k + e^{tB_k}) = -\log(p_k + e^{tB_k}).$$

令 $t \to +\infty$，可得 $\Lambda^*_{\mu_n}(x_k) \geq \log(1/p_k)$，从而由于 $\Lambda^*_{\mu_n}(x_2) \geq 0$，

$$\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}] \geq \sum_{k=3}^{\infty} \Lambda^*_{\mu_n}(x_k) p_k \geq \sum_{k=3}^{\infty} p_k \log\left(\frac{1}{p_k}\right) = +\infty.$$

□

注 6.10。 通过稍微修改引理 6.4 和引理 6.5，还可以证明序列 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不表现出阈值现象。

现在设 μ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的绝对连续概率测度。在 [6, 注释 3.3], 中，可以找到一个更简单的证明，证明对于每个 $\alpha \in (0, 1)$， $\mathbb{E}_\mu[e^{\alpha\Lambda^*_\mu}] < +\infty$ 。或许有人会问，这一性质是否足以保证 $\mathbb{E}_\mu[\Lambda^*_\mu]$ 有限。然而，我们再次证明，在 $\mathbb{R}^n$， $n \geq 2$，这一条件并不充分。

命题 6.11。 设 $n \geq 2$。存在一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的满维绝对连续概率测度 μ_n，使得 $\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}] = +\infty$.

证明。 设 $n \geq 2$。对于每个 $k \geq 2$，我们令 $x_k = (k, k^2, 0, \ldots\ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$，并令 $p_k = c/k\log^2 k$，其中$c > 0$ 是满足 $\sum_{k=2}^{\infty} p_k = 1$ 的归一化常数。我们还选择 $r_k = \frac{2}{9k^2}$。注意，$(B(x_k, r_k))_{k\geq 2}$ 是互不相交的集合。然后，我们将 μ_n 定义为 $\mathbb{R}^n$ 上密度为以下函数的概率测度

$$f_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k}{\mathrm{vol}_n(B(x_k, r_k))} \cdot \mathbb{1}_{B(x_k, r_k)}(x), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

对于每个 $k \geq 2$，我们也令 $\xi_k = (2bk\log k, -b\log k, 0, \ldots\ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$，其中 $b > 0$ 是一个稍后确定的常数。于是，对于每个 $m, k \geq 2$，我们有

$$\langle x_m, \xi_k \rangle = b\log k \ (k^2 - (k-m)^2),$$

这表明，对于每个 $m, k \geq 2$ 且满足 $m \neq k$ 的情况，我们有：

$$\langle x_k, \xi_k \rangle = bk^2 \log k \qquad \langle \xi_k, x_m - x_k \rangle = -b\log k \ (k-m)^2. \tag{21}$$

现在，令 $k \geq 2$。我们写作

$$\begin{aligned} e^{\Lambda_{\mu_n}(\xi_k)} &= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{p_m}{\mathrm{vol}_n(B(x_m, r_m))} \int\limits_{B(x_m, r_m)} e^{\langle \xi_k, y \rangle}\, dy \\ &= e^{\langle \xi_k, x_k \rangle} \left(\frac{p_k}{\mathrm{vol}_n(B(x_k, r_k))} \int\limits_{B(x_k, r_k)} e^{\langle \xi_k, y - x_k \rangle}\, dy \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{p_m}{\mathrm{vol}_n(B(x_m, r_m))} \int\limits_{B(x_m, r_m)} e^{\langle \xi_k, y - x_m \rangle + \langle \xi_k, x_m - x_k \rangle}\, dy \right). \end{aligned} \tag{22}$$

现在，对于每个 $m \geq 2$ 和 $y \in B(x_m,\ r_m)$，我们有

$$\langle \xi_k, y - x_m \rangle \leq \|\xi_k\|_2\ r_m \leq 3 b r_m k \log k. \tag{23}$$

因此，由 (21)、(22) 和 (23) 可得：

$$\begin{aligned} e^{\Lambda_{\mu_n}(\xi_k)} &\leq e^{\langle \xi_k, x_k \rangle} \left(p_k e^{3bkr_k \log k} + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^{\infty} p_m e^{3br_m k \log k - b \log k (k-m)^2} \right) \\ &= e^{\langle \xi_k, x_k \rangle} p_k e^{3bkr_k \log k} \left(1 + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{p_m}{p_k} e^{b \log k (3k(r_m - r_k) - (k-m)^2)} \right) \end{aligned} \tag{24}$$

现在很容易证明

$$3k(r_m - r_k) \leq 3kr_m = \frac{2k}{3m^2} \leq \frac{(k-m)^2}{2} \tag{25}$$

对于每个 $m,\ k \geq 2$ 且满足 $m \neq k$。此外，对于 $m,\ k \geq 2$：

$$\frac{p_m}{p_k} = \frac{k \log^2 k}{m \log^2 m} \leq Ak \log^2 k, \tag{26}$$

其中 $A = {}_{2}\frac{1}{\text{—对数}^2\,2}$。利用 (25) 和 (26)，可得：

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{p_m}{p_k} e^{b \log k (3k(r_m - r_k) - (k-m)^2)} &\leq Ak \log^2 k \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^{\infty} e^{-b \frac{(k-m)^2}{2} \log k} \\ &\leq 2Ak \log^2 k \sum_{m=1}^{\infty} e^{-b \frac{m^2}{2} \log k} = 2Ak \log^2 k \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{b/2}} \right)^{m^2} \\ &\leq 4Ak^{1-b/2} \log^2 k, \end{aligned} \tag{27}$$

若 $b \geq 2$。我们取 $b = 3$。因此，由 (24) 和 (27)，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对每个 $k \geq k_0$：

$$e^{\Lambda_{\mu_n}(\xi_k)} \leq 4 e^{\langle x_k, \xi_k \rangle} p_k, \qquad \|\xi_k\|_2\ r_k < 1.$$

现令 $k \geq k_0$ 和 $x \in B\ (x_k,\ r_k)$。我们有

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu_n}^*(x) &\geq \langle \xi_k, x \rangle - \Lambda_{\mu_n}(\xi_k) \geq \langle \xi_k, x - x_k \rangle - \log(4p_k) \\ &\geq -\|\xi_k\|_2 r_k - \log(4p_k) \geq -1 - \log(4p_k). \end{aligned}$$

因此，

$$\mathbb{E}_{\mu_n}[\Lambda^*_{\mu_n}] \geq C + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{p_k}{\mathrm{vol}_n(B(x_k, r_k))} \int\limits_{B(x_k, r_k)} \Lambda^*_{\mu_n}(x)\, dx$$
$$\geq C - 1 + \sum_{k=k_0}^{\infty} p_k \log\left(\frac{1}{4p_k}\right) = +\infty.$$

□

致谢。我们感谢 Apostolos Giannopoulos 提供宝贵的意见和建议，并感谢 Mihalis Kolountzakis 在评注 3.17 中给出的例子。

参考文献

[1] P. Bizeul，《通过小球估计研究切片猜想》，https://arxiv.org/abs/2501.06854。[2] S. Bobkov、A. Marsiglietti 和 J. Melbourne，《离散对数凹分布的集中函数与熵界》，Combin. Probab. Comput. 31 (2022), no. 1, 54–72。[3] G. Bonnet、G. Chasapis、J. Grote、D. Temesvari 和 N. Turchi，《高维随机多胞体的阈值现象》，Commun. Contemp. Math. 21 (2019), no. 5, 1850038, 30 pp.。[4] G. Bonnet、Z. Kabluchko 和 N. Turchi，《高维随机多胞体体积的相变》，Random Structures Algorithms 58 (2021), no. 4, 648–663。[5] C. Borell，《局部凸空间上的凸测度》，Ark. Mat. 12 (1974), 239–252。[6] S. Brazitikos 和 G. Chasapis，《对数凹测度的 Cramér 变换的尖锐估计及几何应用》，Adv. Math. 478 (2025), Article 110407。[7] S. Brazitikos、A. Giannopoulos 和 M. Pafis，《对数凹概率测度的半空间深度》，Probab. Theory Related Fields 188 (2024), no. 1-2, 309–336。[8] S. Brazitikos、A. Giannopoulos 和 M. Pafis，《随机多胞体期望测度的阈值》，Mathematische Annalen 388 (2024), no. 3, 2991–3024。[9] S. Brazitikos、A. Giannopoulos、P. Valettas 和 B-H. Vritsiou，《各向同性凸体的几何》，数学调查与专著，第196卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2014年。xx+594 页。[10] J. W. S. Cassels，《丢番图逼近导论》，剑桥数学与数理物理丛书，第45号，剑桥大学出版社，纽约，1957年。x+166页。[11] D. Chakraborti、T. Tkocz 和 B-H. Vritsiou，《关于随机多胞体体积阈值的一则注记》，Geom. Dedicata 213 (2021), 423–431。[12] J. D. Deuschel 和 D. W. Stroock，《大偏差》，纯粹与应用数学，第137卷，学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1989年。xiv+307页。[13] M. E. Dyer、Z. Füredi 和 C. McDiarmid，《超立方体中随机点张成的体积》，Random Structures Algorithms 3 (1992), 91–106。[14] A. Frieze、W. Pegden 和 T. Tkocz，《d维多胞体中的随机体积》，Discrete Anal. 2020, Paper No. 15, 17 pp.。[15] D. Gatzouras 和 A. Giannopoulos，《研究随机多胞体几何的大偏差方法》，Mathematika 53 (2006), no. 2, 173–210。[16] D. Gatzouras 和 A. Giannopoulos，《独立坐标随机点张成体积的阈值》，Israel J. Math. 169 (2009), 125–153。[17] A. Giannopoulos 和 N. Tziotziou，《对数凹概率测度的 Cramér 变换的矩》，https://arxiv.org/abs/2503.19528。[18] B. Klartag 和 J. Lehec，《利用 Guan界肯定地解决 Bourgain切片问题》，Geom. Funct. Anal. 35 (2025), no. 4, 1147–1168。[19] Mathoverflow，《对数凹测度的 Tukey半空间深度的期望值》，问题发表于 https://mathoverflow.net/questions/386972/。

[20] K. Murota, 《离散凸分析》，工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，2003年。xxii+389 页。[21] M. Pafis, 《独立坐标随机点凸包期望测度的阈值》，伦敦数学会公报 56 (2024), no. 1, 240–262。[22] P. Pivovarov, 《高斯和球面随机多胞体及其对偶体的体积阈值》，数学研究 183 (2007), no. 1, 15–34。[23] R. T. Rockafellar, 《凸分析》，普林斯顿数学丛书，第28号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年。xviii+451 页。[24] J. W. Tukey, 《数学与数据图示》，载于《国际数学家大会论文集》（温哥华，不列颠哥伦比亚省，1974年），第2卷，523–531。加拿大数学大会，蒙特利尔，魁北克。**数学主题分类（2020**70, 39 60 05, 52 22, 60 10 52 05, 60 12）。主要分类：D A F；次要分类：B G A。**关键词**。随机多胞体；Tukey 深度；Cramér变换；离散对数凹性；阈值现象。