arXiv:2601.15469v1 [math.KT] 21 Jan 2026

Gorenstein平坦预包络与弱Ding内射覆盖

ALINA IACOB

ABSTRACT. 我们考虑一个（左）相干环 R。我们证明，如果每个 Ding 内射（左） R- 模的特征模都是 Gorenstein 平坦的，那么 Gorenstein平坦（右） R-模类$\mathcal{GF}$是预包络的。当每个内射（左） R-模具有有限平坦维数时，我们证明上述条件成立。特别地，$\mathcal{GF}$ 在任意 Ding-Chen环上都是预包络的。
证明使用了弱Ding内射（左） R-模类$w\mathcal{DI}$。我们证明，当 $w\mathcal{DI}$ 关于扩张封闭时，以下陈述等价：1. 每个 Ding内射左 R-模的特征模都是 Gorenstein平坦右R-模。2. 弱Ding内射左 R-模类关于直极限封闭。3. 弱Ding内射模类是覆盖的。这些等价陈述（1）—（3）推出 $\mathcal{GF}$ 是预包络的。

关键词和短语。弱 Ding 内射覆盖，Gorenstein平坦预包络。

1. INTRODUCTION

Gorenstein同调代数是同调代数的相对版本，它以 Gorenstein射影（ Gorenstein内射、Gorenstein平坦）分解取代经典的射影（内射、平坦）分解。然而，尽管在经典同调代数中，任意环上的射影（内射、平坦）分解的存在性早已众所周知，但 Gorenstein同调代数的情形却略有不同。任意环上 Gorenstein内射包络的存在性曾长期是一个未解问题。Saroch 和 Stovicek 在 [38] 中肯定地解决了这一问题。Gorenstein内射覆盖的存在性也曾是一个未解问题。最近，我们证明（见 [27]），Gorenstein内射类是覆盖类，当且仅当它对直接极限封闭，且仅当该环是 Noetherian 环，并且每个 Gorenstein内射左 [38]-模的特征模都是 Gorenstein平坦右 [27]-模。

2000年数学主题分类。18G25；18G35。

当且仅当它对直接极限封闭；而这又当且仅当该环是 Noetherian 环，且每个 Gorenstein内射左 R-模的特征模都是 Gorenstein平坦右 R-模。

我们在此考虑另一个开放问题：Gorenstein平坦模类 $\mathcal{GF}$ 何时具有预包络性？回顾一下，右 R-模G 若是一个平坦右 R-模 F 构成的正合复形的圈，且对任意内射${}_RI$， $F \otimes I$ 仍为正合复形，则称其为 Gorenstein平坦模。众所周知， $\mathcal{GF}$ 在任意环上都是 Kaplansky 类。这意味着， $\mathcal{GF}$ 具有预包络性，当且仅当它对直积封闭（见 [9], 定理2.5及注3）。Gorenstein平坦（右） R-模类对直积封闭，要求该环是（左）相干的，因此，这是可能使 GF 具有预包络性的最大环类。为此，本文中我们始终假设 R 是左相干环。

我们的结果用到了弱Ding内射模类 $w\mathcal{DI}$、其左正交类 ${}^{\perp}w\mathcal{DI}$，以及类 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。Ding 内射模是内射模构成的正合复形的圈，并且该复形在应用函子 $Hom(A, -)$ 后仍保持正合，其中A为任意 FP-内射模。弱Ding内射模是 FP-内射模构成的正合复形的圈，并且该复形在应用函子 $Hom(A, -)$ 后仍保持正合，其中 A 为任意 FP-内射模。我们的主要结果给出了 Gorenstein平坦预包络存在的一个充分条件。更确切地说，我们证明，若任意 Ding 内射模的特征模都是 Gorenstein平坦的，则 Gorenstein平坦右 R-模类具有预包络性。

如前所述，证明中使用了弱Ding内射模类。我们首先证明（命题 1），任意弱Ding内射模 M 都可分解为直和 $M = F \oplus D$，其中 F 是 FP-内射模，而 D 是 Ding 内射模。我们还证明（定理 3），$({}^{\perp}w\mathcal{DI}, ({}^{\perp}\mathcal{DI})^{\perp})$ 是一个完备遗传对。命题 7 表明，以下陈述等价：

1. $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp})$ 是一个预覆盖类。2. $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp})$ 是一个覆盖类。3. $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp})$ 在直极限下封闭。因此，类 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp})$ 满足 Enochs 猜想（它是覆盖类，当且仅当它在直极限下封闭）。

命题12表明，当任意 Ding 内射模的特征模都是 Gorenstein平坦时，$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp})$ 是一个覆盖类。定理

5 表明，在这种情况下，Gorenstein平坦右 R-模类在直积下封闭，因此是预包络的。命题 13 证明，在任意左相干环 R 上，只要每个内射模都具有有限平坦维数，任意 Ding 内射左R-模的特征模就是Gorenstein平坦的。一个直接的应用是，在任意 Ding-Chen环上，Gorenstein平坦右 R-模类 $\mathcal{GF}$ 是预包络的。

定理6表明，若 R 左相干，且弱Ding内射左 R-模类在扩张下封闭，则以下命题等价：

1. 每个弱Ding内射 R-模的特征模都是 Gorenstein平坦右 R-模。

2. 每个 Ding 内射 R-模的特征模都是 Gorenstein平坦右 R-模。

3. ($w\mathcal{DI}$， $\mathcal{GF}$) 是一个对偶对。
4. 弱Ding内射模类在直极限下封闭。

5. 弱Ding内射模类是覆盖的。

等价命题（1）—（5）推出以下命题：6. Gorenstein平坦右R-模类是预包络的。

2. PRELIMINARIES

全文中， R 表示一个含幺结合环。除非另有说明，模指左 R-模。

我们用 Inj 表示所有内射模组成的类。回顾一下，若一个 R-模 M 存在一个由内射模组成的正合且$Hom(Inj, –)$正合复形

$\mathbf{I} = \ldots \to I_1 \to I_0 \to I_{-1} \to \ldots$ 使得 $M = Ker(I_0 \to I_{-1})$，则称其为Gorenstein内射模。我们用记号 $\mathcal{GI}$ 表示Gorenstein内射模类。

给定一类 R-模 $\mathcal{F}$，按照惯例，我们将 $\mathcal{F}^{\perp}$记作所有满足以下条件的 R-模 M 所成的类：对于每个 $F \in \mathcal{F}$，都有 $Ext^1(F, M) = 0$。 $\mathcal{F}$ 的左正交类记作 ${}^{\perp}\mathcal{F}$，是所有满足以下条件的 ${}_RN$所成的类：对于每个 $F \in \mathcal{F}$，都有 $Ext^1(N, F) = 0$。

Ding 内射模在 [5] 中被引入，当时称为 Gorenstein FP-内射模。后来，它们在 [5] 中被重新命名为 Ding

内射模。在 [19]中，我们回顾如下：若存在一个正合且 $Hom(\mathcal{FI}, -)$正合的内射模复形 $E = \ldots \to E_1 \to E_0 \to E_{-1} \to \ldots$，使得$M = Ker(E_0 \to E_{-1})$，则 R-模 M 是 Ding 内射的。

我们用 $\mathcal{DI}$ 表示 Ding内射模类。弱Ding内射模由 [46] 引入。

定义 1. 如果存在一个由 *FP*-内射模构成的正合复形 G $\boldsymbol{E}$，使得对任意 *FP*-内射模 F， $Hom(F, \boldsymbol{E})$ 均为正合的，且满足 $G = Z_0\boldsymbol{E}$，则称模 G 为弱*Ding*内射模。

我们用 $w\mathcal{DI}$ 表示弱Ding内射模类。根据定义可直接得出，任何 Ding 内射模都是弱Ding内射模，且任何 FP-内射模也是弱Ding内射模。

给定一个 R-模类 $\mathcal{F}$，我们照常用 $\mathcal{F}^{\perp}$ 表示所有满足以下条件的 R-模 M 所成的类：对每个 $M \in \mathcal{F}$，都有 $Ext^1(F, M) = 0$。F 的左正交类记作 ${}^{\perp}\mathcal{F}$，它由所有满足以下条件的 ${}_RN$ 构成：对每个 $F \in \mathcal{F}$，都有 $Ext^1(N, F) = 0$。

我们还回顾预覆盖、覆盖和特殊预覆盖的定义。

定义 2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 *R*-模类。若同态 ϕ:$G \to M$ 满足 $G \in \mathcal{C}$，且对于任意模 $G' \in \mathcal{C}$ 及任意 $\phi' \in Hom(G', M)$，存在 $u \in Hom(G', G)$ 使得 $\phi' = \phi u$，则称其为 $\mathcal{C}$-预覆盖 M。若任何满足 $\phi v = \phi$ 的 $v \in End_R(G)$都是 G的自同构，则称 $\mathcal{C}$-预覆盖 ϕ为覆盖。
若 $Ker(\phi)$ 属于 $\mathcal{C}$ 的右正交类（即若对于所有模 $G' \in \mathcal{C}$，都有 $Ext^1(G', Ker(\phi)) = 0$），则称 $\mathcal{C}$ 预覆盖 ϕ 为特殊预覆盖。

（预）覆盖的重要性在于它们能用于定义分解：如果环 R 满足每个 R-模 M 都有一个 C 预覆盖，那么对于每个 M，都存在一个 $Hom(\mathcal{C}, -)$ 正合复形$\ldots \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$，其中 $G_0 \to M$ 和 $G_i \to Ker(G_{i-1} \to G_{i-2})$ 是 $\mathcal{C}$-预覆盖。这样的复形称为 M 的 $\mathcal{C}$ 分解；它在同伦意义下唯一，因此可用于计算 Hom 的右导出函子。

我们还使用 Gorenstein平坦右 R-模。它们通过张量积来定义:

定义 3. 右 R-模 G是 *Gorenstein*平坦的，若存在一个由平坦右 R-模组成的正合复形 $\mathbf{F} = \ldots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to \ldots$，使得对于任意内射模 I，$\mathbf{F} \otimes I$ 仍然正合，并且满足$G = Ker(F_0 \to F_{-1})$。

这样的复形 $\mathbf{F}$ 称为 F-全无挠复形。

我们用 $\mathcal{GF}$ 表示 Gorenstein平坦右 R-模的类。

定义 4. 右 R-模 M的 *Gorenstein*平坦预包络是一个同态 $\phi : M \to G$，其中 $G \in \mathcal{GF}$，并且对于任意$G' \in \mathcal{GF}$及任意 $f \in Hom(M, G')$，存在 $u \in Hom(G, G')$，使得 $f = u \circ \phi$。

如果 R 是一个使 $\mathcal{GF}$ 成为预包络的环，那么每个右 R 模 M 都有一个右 Gorenstein 平坦分解（或 Gorenstein 平坦余分解）。这样的余分解是一个复形 $0 \to M \to G^0 \to G^1 \to G^2 \to \ldots$，其中 $M \to G^0$，且 $Coker（G_{i-1} \to G_i） \to G_{i+1}$ 是一个 Gorenstein平坦预包络。这样的余分解在同伦意义下唯一，因此可用于计算 Hom 的导出函子。

本文将始终用到余挠对，因此我们回顾一下，若一对 $(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ 满足 $\mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{C}$ 和 ${}^{\perp}\mathcal{C} = \mathcal{L}$，则称其为一个 余挠对。
若对每个 ${}_RM$ 都存在正合序列 $0 \to C \to L \to M \to 0$ 和 $0 \to M \to C' \to L' \to 0$，且 C、C' 属于 $\mathcal{C}$，而 L、 L' 属于 $\mathcal{L}$，则称余挠对 $(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ 是 完备的。

定义 5。 *(*[37], 定义 *1.2.10)* 若以下等价陈述之一成立，则称余挠对 $(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ 为遗传的:

(1) $\mathcal{L}$ 是分解闭的，即 $\mathcal{L}$ 对取满态射的核封闭。(2) $\mathcal{C}$ 是余分解闭的，即 $\mathcal{C}$ 对取单同态的余核封闭。(3) $Ext^i(F, C) = 0$ 对任意 $F \in \mathcal{F}$、 $C \in \mathcal{C}$ 和 $i \geq 1$均成立。

我们还将使用对偶对。它们由 Holm 和 Jorgensen 在 [24] 中引入。我们回顾一下定义:

定义 6. . 设 $\mathcal{C}$ 是一类 R-模， $\mathcal{L}$ 是一类右 R-模。若以下条件成立，则称对 $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ 为对偶对：*1.* $M \in \mathcal{C}$ 当且仅当 $M^+ \in L$。

2. 类 $\mathcal{L}$ 在直和项及有限直和下封闭。

根据 [24] 定理 3.10，若 $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ 是一个对偶对，则 $\mathcal{C}$ 在纯子模、纯扩张和纯商下封闭。此外，若 $\mathcal{C}$也在直和下封闭，则 $\mathcal{C}$ 是一个覆盖类。

本文中会用到的一些结果:

定理 1. *([22],* 定理 *44)* 对任意环，数对$({}^{\perp}\mathcal{DI}, \mathcal{DI})$ 都是一个完备遗传余挠对 R（事实上，这是一个完美余挠对，即 ${}^{\perp}\mathcal{DI}$ 是覆盖类，且 $\mathcal{DI}$ 是包络类）。

定理2. *([46],* 引理*5.3.9)* 设 R 是一个左相干环。若M 是一个弱 *Ding* 内射 R-模，则 $M = F \oplus D$ ，其中 F 是一个 *FP*-内射模，且 $D \in \mathcal{FI}^{\perp}$ 。

事实上， [46] 中给出的这一结果的证明对模 F 和 D提供了更多细节。由于模 M 是弱Ding内射的，因此存在正合序列 $0 \to M \to F^0 \to K \to 0$，其中 F^0是 FP-内射的，且 K 是弱Ding内射的。定理2的证明表明，$M = F \oplus H$，其中 F同构于 F^0的一个直和项，而 D同构于 H，其中 $0 \to H \to G \to K \to 0$ 是正合的，使得 $G \to K$ 是一个 FP-内射覆盖。

3. MAIN RESULTS

我们证明，在任意相干环 R上，每个弱Ding内射模 M 都是一个直和 $M = F \oplus D$ ，其中 F 是 FP-内射的，且 D 是 Ding内射的。

引理 1. 设 R 是一个左相干环。若 $M = F \oplus I$ 是一个弱*Ding*内射模，且 F 是 *FP*-内射的，并且 I 属于 $\mathcal{FI}^{\perp}$，则存在一个正合且 $Hom(\mathcal{FI}, -)$ 正合复形 $\ldots \to E_2 \to E_1 \to E_0 \to H \to 0$ ，其中所有 E_i 都是内射模。

证明。 根据定理2的证明， I 是弱Ding内射模的一个 FP-内射覆盖的核。由于 M 是弱 Ding 内射，且因为 $M = I \oplus K$，因此该 FP-内射覆盖

M是满射，其形式为 $E \oplus K \to I \oplus K \to 0$。
因此存在正合序列 $0 \to J \to E \to I \to 0$，其中 $E \to I$ 是一个 FP-内射覆盖，且 $K \in w\mathcal{DI}$。

I和 J都属于 $\mathcal{FI}^{\perp}$，所以 $E \in \mathcal{FI}^{\perp} \bigcap \mathcal{FI}$。因此， E是一个内射模。

根据弱Ding内射模的定义，存在正合序列 $0 \to M_0 \to F_0 \to M \to 0$，其中 F_0 是 FP-内射的，且 M_0是弱Ding内射的。

由定理2的证明可知， $F_0 = E \oplus K \oplus V$和 $M_0 = J \oplus V$，其中 V是 FP-内射的，且 $J \in \mathcal{FI}^{\perp}$。
于是（由于 $M_0 = J \oplus V$ 是弱Ding内射的），存在正合序列 $0 \to J_1 \to E_1 \oplus V \to J \oplus V \to 0$，其中 $E_1 \oplus V \to J \oplus V = M_0$是一个 FP-内射覆盖，因此 $J_1 \in \mathcal{FI}^{\perp}$。由此得到正合序列$0 \to J_1 \to E_1 \to J \to 0$，其中 J， $J_1 \in \mathcal{FI}^{\perp}$均如此。因此 $E_1 \in \mathcal{FI} \bigcap \mathcal{FI}^{\perp} = Inj$。

因此，我们得到一个正合序列 $0 \to J_1 \to E_1 \to E \to I \to 0$，其中$E$， E_1为内射模，且满足 $J_1 \in \mathcal{FI}^{\perp}$。
此外，由于 $M_0 = J \oplus V$ 是弱 Ding 内射的，存在一个正合序列 $0 \to M_1 \to F_1 \to M_0 \to 0$。定理2的证明表明，$M_1 = J_1 \oplus T$，其中 T 是 FP-内射的。接着，采用与上文相同的论证可知，存在一个正合序列 $0 \to J_2 \to E_2 \to J_1 \to 0$，其中 $J_2 \in \mathcal{FI}^{\perp}$，且满足 $E_2 \in \mathcal{FI} \bigcap \mathcal{FI}^{\perp} = Inj$。

继续下去，我们得到一个正合复形 $\ldots \to E_2 \to E_1 \to E \to I \to 0$，其中所有的 E_i 都是内射模，且所有圈都属于 $\mathcal{FI}^{\perp}$。□

引理2。 设 R 为左凝聚环。若 $M = F \oplus I$ 是弱*Ding*内射模，且 F 为*FP*-内射，并且 I 属于 $\mathcal{FI}^{\perp}$，则存在一个正合且 $Hom(\mathcal{FI}, -)$ 正合复形 $0 \to I \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to$.....，其中所有 E^i 均为内射模。

证明。 根据定义，存在正合序列 $0 \to M \to F^0 \to M^0 \to$0，其中 F为FP-内射，且 M^0 为弱 Ding 内射。根据定理2的证明， $M = I \oplus K$ 其中 K 为FP-内射，且 $I \in \mathcal{FI}^{\perp}$。
更确切地说，存在正合序列 $0 \to I \to F \to M^0 \to 0$，其中$F \to M^0 \to 0$ 为FP-内射覆盖。
M^0是弱 Ding 内射，因此存在正合序列 $0 \to M^0 \to F^1 \to M^1 \to 0$，其中 F^1是 FP-内射，且 M^1是弱 Ding 内射。如上所述， $M^0 = I^1 \oplus K^1$, $F^1 = K^1 \oplus F'$，其中 $0 \to I^1 \to F^1 \to M^1 \to 0$是正合的，且 $F^1 \to M^1 \to 0$是 FP-内射覆盖。

由于 $M^0 = I^1 \oplus K^1$具有 K^1FP-内射，且 $F \to M^0$是 FP-内射覆盖，因此可得 $F = E^1 \oplus K^1$。
因此有正合序列 $0 \to I \to E^1 \oplus K^1 \to I^1 \oplus K^1 \to 0$。将正合子复形 $0 \to K^1 = K^1 \to 0$ 商掉后，我们得到正合序列 $0 \to I \to E^1 \to I^1 \to 0$，其中 I，$I^1 \in \mathcal{FI}^\perp$ 且其中$E^1 \in \mathcal{FI} \bigcap \mathcal{FI}^\perp = Inj$。

继续下去，我们得到正合复形 $0 \to I \to I^1 \to I^2 \to \ldots$，其中所有 E^j 都是内射模，且所有圈都属于 $\mathcal{FI}^\perp$。□

命题 1. 设 R 是相干环。若 M 是弱 *Ding* 内射 R-模，则 $M = K \oplus I$，其中 I 是 *Ding* 内射，且 K是 ***FP***-内射。

证明. 由定理2，$M = K \oplus I$ 是 FP-内射，且$I \in \mathcal{FI}^\perp$。由引理 1 和引理 2，可得如下正合复形:

$$0 \to I \to E^1 \to E^2 \to \ldots$$

and

$$\ldots \to E_2 \to E_1 \to E \to I \to 0$$

所有 E_j 和 E^i 内射模，以及 $\mathcal{FI}^\perp$中的所有圈。
将它们粘合起来，我们得到一个内射模的正合且 $Hom(\mathcal{FI}, -)$ 正合复形 $\ldots \to E_2 \to E_1 \to E \to E^1 \to E^2 \to \ldots$，其中 I 是其中一个圈。

因此，I 是一个 Ding 内射模。 □

命题2. 设 R 是一个左凝聚环。那么 $w\mathcal{DI}$ 的左正交类是 $FP - Proj \bigcap ({}^\perp\mathcal{DI})$。

证明. ”$\supseteq$”设 $T \in FP - Proj \bigcap ({}^\perp\mathcal{DI})$。若 M是一个弱Ding内射模，则 $M = F \oplus H$，其中 F是一个 FP-内射模，且 H是 Ding 内射。于是 $Ext^1(T, M) \simeq Ext^1(T, F) \oplus Ext^1(T, H)$。由于 T是 FP-投射，故 $Ext^1(T, F) = 0$; 又由于 T属于 ${}^\perp\mathcal{DI}$，我们有 $Ext^1(T, H) = 0$。由此可得 $Ext^1(T, M) = 0$。

”$\subseteq$”我们有 $FP - Inj \subseteq w\mathcal{DI}$，这意味着 ${}^\perp w\mathcal{DI} \subseteq {}^\perp FP - Inj = FP - Proj$。由于 $\mathcal{DI} \subseteq w\mathcal{DI}$，我们还可得 ${}^\perp w\mathcal{DI} \subseteq {}^\perp \mathcal{DI}$。因此 ${}^\perp w\mathcal{DI} \subseteq FP - Proj \bigcap {}^\perp \mathcal{DI}$。□

引理 3. 设 R 是一个相干环。设 $M \in ({}^\perp w\mathcal{DI})^\perp$。如果 M 也属于 ${}^\perp\mathcal{DI}$，那么 M 是 ***FP***-内射的。

证明。 由于 $(FP - Proj, \mathcal{FI})$ 是一个完备的余挠偶（根据 [40],定理 3.8），因此存在一个正合序列 $0 \to M \to A \to T \to 0$，其中

AFP-内射，且 T FP-投射。
M 和 A 都属于 ${}^{\perp}\mathcal{DI}$，且该类是厚子类（由 [22], 引理22可知）。因此， T 也属于 ${}^{\perp}\mathcal{DI}$。
因此 $T \in FP-Proj \bigcap {}^{\perp}\mathcal{DI} = {}^{\perp} w\mathcal{DI}$（由命题2可知），且 $M \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。所以 $Ext^1(T, M) = 0$。于是 $A \simeq M \oplus T$，这意味着 M 是一个 FP-内射模。□

引理4。设 R 是一个左相干环。 ${}_RM \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 当且仅当存在一个正合序列 $0 \to D \to F \to M \to 0$ ，其中 D 是 ***Ding*** 内射，且 F 是 ***FP***-内射。

证明。假设 ${}_RM \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。由于（${}^{\perp}\mathcal{DI}, \mathcal{DI}$）是一个完备余挠对，因此存在一个正合序列 $0 \to D \to C \to M \to 0$ ，其中$D \in \mathcal{DI} \subseteq ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$，且 $C \in {}^{\perp}\mathcal{DI}$。

D 和 M 这两个模都属于（${}^{\perp}w\mathcal{DI}$）$^{\perp}$，这意味着 C 也属于（${}^{\perp}w\mathcal{DI}$）$^{\perp}$。但这样一来， C 既属于 ${}^{\perp}\mathcal{DI}$ ，也属于（${}^{\perp}w\mathcal{DI}$）$^{\perp}$，因此根据引理 3，它是一个 FP-内射模。

反过来，假设存在一个正合序列 $0 \to D \to F \to M \to 0$ ，其中 D 是 Ding 内射的，且 F 是 FP-内射的。
令 $T \in {}^{\perp} w\mathcal{DI} = FP-Proj \bigcap ({}^{\perp}\mathcal{DI})$。我们有一个正合序列： $0 = Ext^1(T, F) \to Ext^1(T, M) \to Ext^2(T, D) = 0$（因为（${}^{\perp}\mathcal{DI}, \mathcal{DI}$）是一个遗传余挠对，由 [22]可知）。所以 $Ext^1(T, M) = 0$，因此${}_RM \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。□

命题3. 设 R 是一个相干环。若 $M \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ ，则存在一个正合且 $Hom(\mathcal{FI}, -)$ 正合的复形 $\ldots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ ，其中每个 F_j 都是 ***FP***-内射的。

证明。由引理4，存在一个正合序列 $0 \to D \to C \to M \to 0$，其中 D 是 Ding 内射的，且 C 是一个 FP-内射模。
由于 D 是 Ding 内射的，因此存在一个正合复形 $\ldots \to F_2 \to F_1 \to D \to 0$ ，其中所有 F_i 都是内射模，且所有圈都是 Ding 内射模。由此可得一个正合复形 $\ldots \to F_2 \to F_1 \to C \to M \to 0$ ，其中 C 且所有 F_j 都是 FP-内射的。由于所有第 i 个圈（$i \geq 1$）都是 Ding 内射模，该复形是 $Hom(\mathcal{FI}, -)$ 正合的。□

我们证明，如果（R 是相干的，且）$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 中每个模的特征模都是 Gorenstein平坦的，那么$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 在直极限下封闭，并且它是一个覆盖类。

接着我们证明，在相同的假设下（R 是相干的，并且$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 中每个模的特征模都是Gorenstein平坦模），

Gorenstein平坦模类是预包络的。特别地，我们证明，当 R 是Ding-Chen环时，情况也是如此。
我们首先证明，$({}^{\perp}w\mathcal{DI}，({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp})$ 是一个完备遗传对。

命题4。 设 R 是一个左凝聚环。那么 $({}^{\perp}w\mathcal{DI},({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp})$ 是一个遗传余挠对。

证明。 众所周知，$({}^{\perp}w\mathcal{DI}，({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp})$ 是一个余挠对。

我们证明该对是遗传的。设 M 是一个弱Ding内射模。则 $M = F \oplus D$，其中 F 是一个FP-内射模，且 D 是一个Ding内射模。设 $T \in^{\perp} w\mathcal{DI}$。根据命题2， $M \in FP - Proj \bigcap({}^{\perp}\mathcal{DI})$。

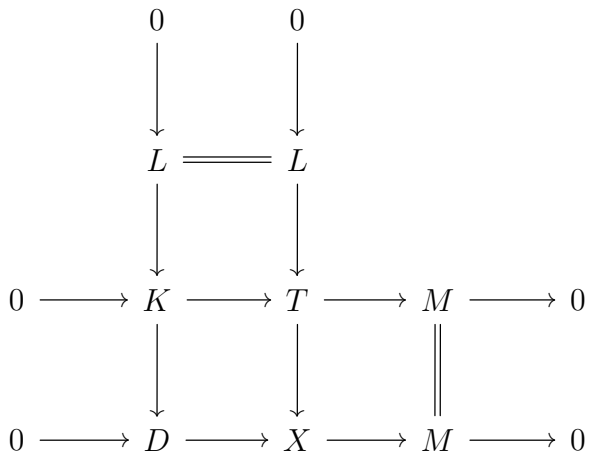
由于 $T \in FP - Proj$、 $F \in \mathcal{FI}$，且 R 是一个相干环（因此，根据 [33],命题4.2, $\mathcal{FI}$ 对单同态的余核封闭），我们有 $Ext^i(T，F) = 0$，对所有 $i \geq 1$ 均成立。

由于 $({}^{\perp}\mathcal{DI}，\mathcal{DI})$ 是一个遗传余挠对（在任意环上），我们有 $Ext^i(T，D) = 0$ 对所有 $i \geq 1$ 都成立。因此，对于所有 $i \geq 1$， $Ext^i(T，M) = Ext^i(T，F) \oplus Ext^i(T，D) = 0$。□

定理 3。 设 R 是一个相干环。那么 $({}^{\perp}w\mathcal{DI}、({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp})$ 是一个完备的遗传余挠对。

证明。 我们证明 ${}^{\perp}w\mathcal{DI}$ 是特殊预覆盖的。
设 M 是一个左 R-模。由于 $({}^{\perp}\mathcal{DI}，\mathcal{DI})$ 是一个完备的遗传余挠对，存在一个短正合序列 $0 \to D \to X \to M \to 0$，其中 $X \in^{\perp} \mathcal{DI}$，且 $D \in \mathcal{DI}$。由于 R 是相干的，余挠对 $(\mathcal{FP} - Proj，\mathcal{FI})$ 是完备的，因此存在一个正合序列$0 \to L \to T \to X \to 0$，其中 T 是 FP-投射模，且 L 是 FP-内射。我们有 $L \in \mathcal{FI} \subseteq^{\perp} \mathcal{DI}$，并且 $X \in^{\perp} \mathcal{DI}$。由于 ${}^{\perp}\mathcal{DI}$在扩张下封闭，因此可得 $T \in \mathcal{FP} - Proj \cap^{\perp} \mathcal{DI}$，即 $T \in^{\perp} w\mathcal{DI}$。

构造拉回图



正合序列 $0 \to L \to K \to D \to 0$ with $L \in \mathcal{FI} \subseteq w\mathcal{DI} \subseteq ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ and $D \in \mathcal{DI} \subseteq w\mathcal{DI} \subseteq ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ gives that$K \in \subseteq ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。

正合序列 $0 \to K \to T \to M \to 0$ （其中 $T \in {}^{\perp} w\mathcal{DI}$，且$K \in \subseteq ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$）表明， $T \to M$ 是一个特殊的 ${}^{\perp}w\mathcal{DI}$ 预覆盖。

因此，$({}^{\perp}w\mathcal{DI}, ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp})$ 是一个完备遗传余挠对。

□

引理5. 设 R 是一个左相干环。那么 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 在直和项以及单同态的余核下封闭。

证明. 由于 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是一个遗传余挠对的右半部分（由命题4可知），因此 $w\mathcal{DI}$ 在单同态的余核下封闭。此外，作为余挠对的右半部分，$w\mathcal{DI}$ 在直和项下封闭。□

现在我们可以证明，对于相干环 R，类 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是特殊预覆盖类，当且仅当它在直极限下闭。特别地，$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是覆盖类，当且仅当它在直极限下闭。证明使用以下结果（[28],命题3）：

命题5. 设 $\mathcal{W}$ 是一个模类，它对直和项、纯单态射的余核以及纯超限扩张封闭。那么 $\mathcal{W}$ 对直极限封闭。

我们还要用到以下结果：

命题 6. 如果每个 R-模都有一个特殊$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$-预覆盖，那么类$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 在超限扩张下封闭。

证明。 为简便起见，令 $\mathcal{A}$ 表示类 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 。
令 $(G_\alpha, \alpha \leq \lambda)$ 为由单同态组成的直接系统，其中每个 $G_\alpha \in \mathcal{A}$ ，并令 G 为该系统的直接极限。由于对每个 α，都有 $G_\alpha \in {}^{\perp}(\mathcal{A}^{\perp})$，因此可得 $G \in {}^{\perp}(\mathcal{A}^{\perp})$（由 Eklof 引理）。类 $\mathcal{A}$ 是预覆盖的，且对直和项封闭，所以 $\mathcal{A}$ 对任意直和封闭（[40], 引理 9.14）。因此 $\oplus_{\alpha\leq\lambda}G_\alpha \in \mathcal{A}$。

由于存在一个短正合序列 $0 \to K \to \oplus_{\alpha\leq\lambda}G_\alpha \to G \to 0$ ，其中 $\oplus_{\alpha\leq\lambda}G_\alpha \in \mathcal{A}$，因此任何 $\mathcal{A}$-预覆盖 G 都必为满射。类 $\mathcal{A}$ 是特殊预覆盖的，因此存在一个正合序列 $0 \to A \to G \to G \to 0$ ，其中 $A \in \mathcal{A}^{\perp}$ 且 $G \in \mathcal{A}$。但 $G \in {}^{\perp}(\mathcal{A}^{\perp})$，所以我们有 $Ext^1(G; A) = 0$。因此 G 是 G的一个直和项，故 $G \in \mathcal{A}$。

□

命题 7. 设 R 是左相干环。当且仅当类 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 对直极限封闭时，它是特殊预覆盖类。

证明。 假设 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 对直极限封闭。由于 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是完备遗传余挠对的右半部分，因此它是一个可定义类（[39]）。所以 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 对纯子模封闭。又由于 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 也对单态射的余核封闭，因此 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 也对纯商封闭。根据 [26], ，对纯商和直和封闭的模类是覆盖类。因此 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是覆盖类。由于 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是覆盖类且对直和项封闭，所以它是一个特殊预覆盖类。

反过来，假设 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是特殊预覆盖类。由于 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 对超限扩张封闭（由命题 6 得出），并且也对直和项、单射的余核以及纯超限扩张封闭，因此可得（命题5）$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 对直极限封闭。□

推论 1. 类 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是覆盖类，当且仅当它对直极限封闭。

证明。 如果 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 在直极限下封闭，那么根据命题 7 的证明，它是覆盖的。

反过来，假设 $(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是覆盖的。由于 $(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 在直和因子下封闭，它也是特殊预覆盖的。根据命题 7，它在直极限下封闭。□

命题8。 设 R 是一个相干环。若任意 ${}_RM \in (^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 的特征模都是 *Gorenstein*平坦右 R-模，则$((^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}, \mathcal{GF})$ 是一个对偶对。

证明。 由于 Gorenstein平坦模类在直和项和直和下封闭，只需证明 K 是弱 Ding 内射，当且仅当其特征模 K^{+}是 Gorenstein平坦模。其中一个方向是我们对该环所作的假设。

反过来，假设 K^{+} 是 Gorenstein平坦模。数对（$^{\perp}\mathcal{DI}, \mathcal{DI}$）是完备的，因此存在正合序列 $0 \to D \to L \to K \to 0$，其中 D是 Ding 内射，并且 $L \in {}^{\perp}\mathcal{DI}$。由于 Q/Z 是内射 Z-模，序列 $0 \to K^{+} \to L^{+} \to D^{+} \to 0$ 是正合的。根据我们对该环所作的假设， D^{+} 是 Gorenstein平坦模。由于 K^{+} 也是 Gorenstein平坦模，因此可知 L^{+} 是 Gorenstein平坦模。但 $L^{+} \in \mathcal{GF}^{\perp}$ （因为对于任意 Gorenstein平坦模 Y，都有 $Ext^1(Y, L^{+}) \simeq Ext^1(L, Y^{+}) = 0$，这是因为 Y^{+}是 Ding 内射）。所以 $L^{+} \in \mathcal{GF} \cap \mathcal{GF}^{\perp} = Flat \cap Cotorsion$([13])。由于 L^{+} 是平坦模且 R 是相干的，因此 L 是 FP-内射的。因此我们有一个正合序列 $0 \to D \to L \to K \to 0$，其中$D$ 是 Ding 内射，且 L 是 FP-内射的。

设 $A \in {}^{\perp} w\mathcal{DI} = \mathcal{FP} - Proj \cap {}^{\perp}\mathcal{DI}$。正合序列 $0 \to D \to L \to K \to 0$ 给出一个正合序列 $0 = Ext^1(A, L) \to Ext^1(A, K) \to Ext^2(A, D) = 0$（因为对偶对 $(^{\perp}\mathcal{DI}, \mathcal{DI})$ 是遗传的）。因此，对所有 $A \in {}^{\perp} w\mathcal{DI}$，都有 $Ext^1(A, K) = 0$，从而 K 属于 $(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。□

命题9。 设 R 是一个左相干环。若任意 ${}_RM \in (^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 的特征模都是 *Gorenstein*平坦，则类 $(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 对直极限封闭。特别地，在这种情况下，$(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是一个覆盖类。

证明。 根据命题8，$((^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}, \mathcal{GF})$ 是一个对偶对。因此，$(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 对纯子模封闭。由于 $(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 对直积封闭，并且一族模的直和是其直积的纯子模，因此 $(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 对直和封闭。

根据 [25], 定理 3.1，$(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 也对纯商封闭。由于对于任意有向系统，直极限都是该模的直和的纯商，因此我们有$(^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 对直极限封闭。

根据 [26], 定理2，对纯商和直和封闭的模类是覆盖类。因此，(${}^{\perp}w\mathcal{DI}$)$^{\perp}$ 是覆盖类。□

4. Gorenstein flat preenvelopes

众所周知，Gorenstein平坦模类 $\mathcal{GF}$ 是一个 Kaplansky 类。众所周知，Kaplansky 类是预包络类，当且仅当它对直积封闭。我们证明，在任意左相干环 R 上，只要该类中每个模的特征模（${}^{\perp}w\mathcal{DI}$）$^{\perp}$ 都是 Gorenstein平坦右R-模， $\mathcal{GF}$ 就对直积封闭。

定理 4. 设 R 是一个左相干环。若任意 ${}_RM \in({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 的特征模都是 *Gorenstein*平坦右模，则 *Gorenstein*平坦右 R-模类对直积封闭。

证明。 由命题 9，该情形下类（${}^{\perp}w\mathcal{DI}$）$^{\perp}$ 是覆盖类，因此对直和封闭。

设（G_i）是一个 Gorenstein平坦右 R-模族。每个 G_i^+ 都是 Ding内射模，因而是弱 Ding 内射模，所以属于（${}^{\perp}w\mathcal{DI}$）$^{\perp}$。由上文可知， $\oplus_i G_i^+$ 属于（ ${}^{\perp}w\mathcal{DI}$ ）$^{\perp}$。根据假设， （ $\oplus_i G_i^+$ ）$^+$ 是一个 Gorenstein 平坦模。因此 $\prod G_i^{++} \simeq$ （$\oplus_i G_i^+$ ）$^+$ 是 Gorenstein平坦的。

对于每个 $i \in I$，我们都有一个纯正合序列： $0 \to G_i \to G_i^{++} \to Y_i \to$ **0**。因此，我们有一个正合序列 $0 \to \prod_i G_i \to \prod_i G_i^{++} \to \prod_i Y_i \to$**0**。

我们证明这个序列也是纯正合的。

设 A_R 是有限表示的 R-模。那么，对于每个 i，序列$0 \to Hom(A,\ G_i) \to Hom(A,\ G_i^{++}) \to Hom(A,\ Y_i) \to 0$ 仍然是正合的。因此，我们有一个正合序列

$$0 \to \prod_i Hom(A, G_i) \to \prod_i Hom(A, G_i^{++}) \to \prod_i Hom(A, Y_i) \to 0$$

由于 $\prod_i Hom(A,\ G_i) \simeq Hom(A,\ \prod_i G_i)$、 $Hom(A,\ \prod_i G_i^{++})$以及 $\prod_i Hom(A,\ Y_i) \simeq Hom(A,\ \prod_i Y_i)$，可知对于任意有限表示模 A_R，序列 $0 \to Hom(A,\ \prod_i G_i) \to Hom(A,\ \prod_i G_i^{++}) \to Hom(A,\ \prod_i Y_i) \to$0仍然是正合的。

因此， $\prod_i G_i$ 是Gorenstein平坦模 $\prod_i G_i^{++}$ 的纯子模。因此，$(\prod_i G_i)^+$ 是Ding内射模$(\prod_i G_i^{++})^+$的直和项，所以$(\prod G_i)^+$ 是Ding内射模，因而是Gorenstein内射模。根据 [24], 定理3.6，由于 R 是左相干环，这意味着 $\prod_i G_i$是Gorenstein平坦模。□

推论2。 设 R 是左相干环。如果任意 ${}_RM \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 的特征模都是 *Gorenstein*平坦右 R-模，那么*Gorenstein*平坦右 R-模类是预包络的。

命题10。 如果 R 是*Ding-Chen*环，那么*Gorenstein*平坦右 R-模类是预包络的。

证明。 只需证明，对于任意 ${}_RM \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$， $M^+ \in \mathcal{GF}$。令 ${}_RM \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。由引理4，存在正合序列 $0 \to D \to L \to M \to 0$ ，其中 D 是 Ding 内射，且 L 是 FP-内射。这意味着存在一个正合且 $Hom(\mathcal{FI},\ -)$ 的正合复形$\ldots \to E_2 \to E_1 \to L \to M \to 0$。将其与 M 的通常内射分解拼接，可得到一个由 FP-内射模构成的正合复形**F** ，使得 $M = Z_0$**(F)**。

于是 $M^+ = Z_0(F^+)$，其中 F^+ 是一个由平坦模构成的正合复形。由[20]， M^+ 是 Gorenstein平坦。
由推论2，Gorenstein平坦右 R-模的类是预包络的。□

我们证明，对于任意 ${}_RM \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ ， M^+ 是 Gorenstein平坦这一条件，等价于任意 Ding 内射左 R-模的特征是 Gorenstein平坦这一条件。

命题11。 设 R 是一个左凝聚环。当且仅当任意 *Ding* 内射左 R-模的特征模是 *Gorenstein*平坦时，每个 ${}_RM \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 的特征模都是 *Gorenstein*平坦右 R-模。

证明。 一个蕴含关系是显然的。我们有 $\mathcal{DI} \subseteq ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。因此，如果每个 ${}_RM \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 的特征模都是 Gorenstein平坦的，那么对于任意 Ding 内射模 D，都有 $D^+ \in \mathcal{GF}$。

反之，假设对于任意 Ding 内射模 D，都有 $D^+ \in \mathcal{GF}$。令 ${}_RM \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。根据引理4，存在一个正合序列 $0 \to D \to F \to M \to 0$，其中 D 是 Ding 内射模，且 F 是一个 FP-内射模。这给出了正合序列 $0 \to M^+ \to F^+ \to D^+ \to 0$。该环是相干的，因此 F^+ 是平坦的，进而是 Gorenstein平坦的。根据假设，D^+ 是 Gorenstein平坦的。由于 $\mathcal{GF}$ 对于满同态的核是封闭的，因此 M^+ 是 Gorenstein平坦的。□

利用命题11，我们得到：

命题 12。设 R 是左相干环。若任意 *Ding* 内射模的特征模都是 *Gorenstein*平坦的，则类$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$在直极限下封闭。特别地，在这种情况下，$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$ 是一个覆盖类。

证明。这由命题9和命题11得出。□

定理5。设 R 是左相干环。若每个 *Ding* 内射左 R-模的特征模都是 *Gorenstein*平坦的，则 *Gorenstein*平坦右 R-模构成的类在直积下封闭。

证明。该结果由定理 4 和命题11得出。□

推论3. 设 R 是一个左相干环。若每个 *Ding* 内射左 R-模的特征模都是 *Gorenstein*平坦的，则 *Gorenstein*平坦右 R-模类是预包络的。

证明. 该结论由推论2和命题10推出。□

下一个结果推广了命题10。证明将用到以下引理。

引理6. 设 *R* 是一个左相干环，且每个内射左 *R* 模都有有限平坦维数。那么，右 *R*-模是 *Gorenstein*平坦的，当且仅当它是一个由平坦右 *R* 模构成的正合复形的一个圈。

证明. 根据 Gorenstein平坦模的定义，一个方向显然成立。

反过来，假设每个内射左R-模 I 都有有限平坦维数。设 **F** $= \ldots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to \ldots$ 是由平坦右R-模组成的正合复形。我们证明，对于任意

内射 $_RI$。

对 $n = flat.dim.I$. 使用归纳法证明
I. 若 n $= 0$，则 I 是平坦的，因此 $\mathbf{F} \otimes I$ 是正合的。

II. $n-1 \to n$。存在一个正合序列 $0 \to L \to T \to I \to 0$，其中$T$是平坦的，且满足 $flat.dimL = n-1$。
由于每个 F_n 都是平坦的，我们有一个正合序列 $0 \to F_n \otimes L \to F_n \otimes T \to F_n \otimes I \to 0$。因此，我们有一个复形的正合序列 $0 \to \mathbf{F} \otimes L \to \mathbf{F} \otimes T \to \mathbf{F} \otimes I \to 0$。模 T 是平坦的，因此$\mathbf{F} \otimes T$ 是正合的。根据归纳假设，$\mathbf{F} \otimes L$ 也是正合的。由此可得，$\mathbf{F} \otimes I$ 是一个正合复形。因此，任意平坦右R-模正合复形的圈都是 Gorenstein平坦的。

□

命题13。 设 R 是左相干环。若每个内射左R-模的平坦维数有限，则任意 *Ding* 内射左*R*-模的特征模都是 *Gorenstein*平坦的。

证明。 设 D 是 Ding 内射的。则存在一个由内射左 R-模组成的正合复形$\mathbf{E}$，使得 $D = Z_0(\mathbf{E})$。于是 $D^+ = Z_0(\mathbf{E}^+)$。由引理6， D^+ 是 Gorenstein平坦的。□

推论4。 设 R 是左相干环。若每个内射左 R-模的平坦维数有限，则 *Gorenstein* 平坦右 *R*- 模类 $\mathcal{GF}$ 是预包络的。

证明。 结论由命题13和推论3得出。 □

我们的下一个结果要用到以下内容:

引理7。 设 R 是左相干环， M 是右 R-模。若 M^+ 是弱 *Ding* 内射的，则 M 是 *Gorenstein*平坦的。

证明。 由于 $M^+ \in w\mathcal{DI}$ 存在一个正合序列 $0 \to Z \to I \to M^+ \to 0$，其中 I 是 FP-内射的。这给出了一个单射 $M^{++} \to I^+$，其中 I^+ 是平坦的。典范映射 $M \to M^{++}$ 也是单射的，因此存在一个单射态射 $M \to I^+$，其中 I^+ 是平坦的。由此可知，任意平坦预包络 $M \xrightarrow{\phi} F_{-1}$ 都是单射的。

考虑正合序列 $0 \to M \xrightarrow{\phi} F_{-1} \to C_{-1} \to 0$，其中 ϕ 是一个平坦预包络。则序列 $0 \to C_{-1}^+ \to F_{-1}^+ \to M^+ \to 0$是正合的

其中 M^+是弱 Ding 内射，且 F^+_{-1}是内射的。我们证明$C^+_{-1} \in \mathcal{FI}^\perp$。这等价于证明，对于任意 FP-内射模 T，序列 $Hom(T, F^+_{-1}) \to Hom(T, M^+) \to 0$是正合的（因为 F^+_{-1}是内射的，所以 $Ext^1(T, F^+_{-1}) = 0$）。

考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} Hom(T, {F_{-1}}^+) & \xrightarrow{l} & Hom(T, M^+) & & \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ Hom(F_{-1}, T^+) & \xrightarrow{g} & Hom(M, T^+) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由于 $M \to F_{-1}$ 是平坦预包络，且 T^+ 是平坦的，我们有$Hom(F_{-1}, T^+) \to Hom(M, T^+) \to 0$是正合的。因此，序列$Hom(T, F^+_{-1}) \to Hom(T, M^+) \to 0$是正合的。我们还有一个正合序列 $Hom(T, F^+_{-1}) \to Hom(T, M^+) \to Ext^1(T, C^+_{-1}) \to Ext^1(T, F^+_{-1}) =$0（因为$F^+_{-1}$是内射的）。由此可得，对于任意 FP-内射模 T，$Ext^1(T, C^+_{-1}) = 0$。因此C^+_{-1}属于 $\mathcal{FI}^\perp$，故 $F^+_{-1} \to M^+$是 M^+的特殊 FP-内射预覆盖。

根据命题 1，$M^+ = F \oplus K$是 FP-内射的，且 F是 FP-内射的，K是 Ding 内射的。
由于 K 是 Ding 内射的，因此存在正合序列 $0 \to K' \to E \to K \to 0$，其中 E 是内射的，且 K' 是 Ding 内射的。因此，$E \to K$ 是 K 的特殊 FP-内射预覆盖。所以，K 的 FP-内射覆盖具有 $V \to K$ 的形式，其中 V 是 E 的直和项，因此 V 是内射的。此外，若 $W = Ker(V \to K)$，则 W 是 K' 的直和项，因此它是 Ding 内射的。
M^+ 的 FP-内射覆盖具有 $F \oplus V$ 的形式，其中 $V \to K$ 是 FP-内射覆盖，V 是内射模，而 $W = Ker(V \to K)$ 是 Ding 内射的。

由于 $0 \to W \to F \oplus V \to F \oplus K \to 0$ 是正合的，且 $F \oplus V \to F \oplus K$ 是 FP-内射覆盖，并且 $0 \to C^+_{-1} \to F^+_{-1} \to F \oplus K \to 0$ 是正合的，且 $F^+_{-1} \to F \oplus K$ 是特殊 FP-内射预覆盖，因此可得$F^+_{-1} = F \oplus V \oplus U$，以及 $C^+_{-1} = W \oplus U$。由于 U 是内射模 F^+_{-1} 的直和项，因此它是内射的。

因此，$C^+_{-1} = W \oplus U$ 是 Ding 内射，故为 Gorenstein内射。

由于 R 是相干的，由此可得（[23]） C_{-1} 是 Gorenstein平坦。正合序列 $0 \to M \xrightarrow{\phi} F_{-1} \to C_{-1} \to 0$ 中， F_{-1} 是平坦的，且 C_{-1}是Gorenstein平坦的，因此 M 是 Gorenstein平坦的。

□

命题14。 设 R 为相干环。以下陈述等价:

(1) $w\mathcal{DI} = ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。
(2) 弱*Ding*内射模类在扩张下封闭。

证明。 “(1) $\Rightarrow$ (2)” 右正交类总是在扩张下封闭。

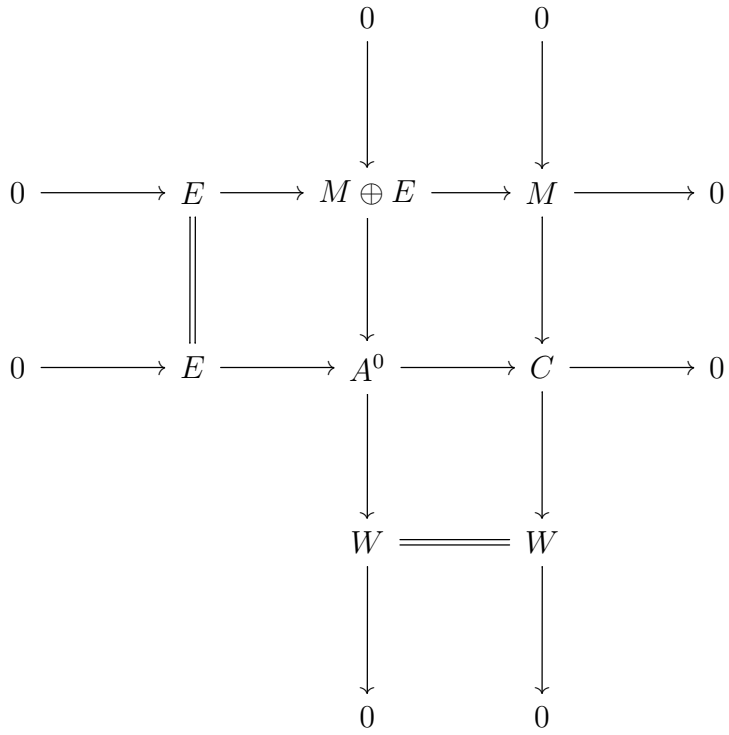
“(2) $\Rightarrow$ (1)” 设 $M \in ({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。则存在一个正合序列$0 \to D' \to F \to M \to 0$，其中 F为一个 FP-内射模，且 D'为Ding内射模（根据引理4）。

此外，还有一个正合序列 $0 \to D' \to E \to D \to 0$，其中 E是内射的，且 D' 是 Ding 内射。由于 E 是内射的，我们得到一个行和列均正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & F & \xrightarrow{l} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E & \xrightarrow{g} & D & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

因此，我们得到复形的一个映射 $f:\ U \to V$，其中 $U = 0 \to D' \to F \to M \to 0$，且 $V = 0 \to D' \to E \to D \to 0$。因此，我们得到复形的一个正合序列 $0 \to V \to c(f) \to U[1] \to 0$。复形$c(f)$具有正合子复形 $D' = 0 \to D' \xrightarrow{1_{D'}} D' \to \underline{0}$。由此可知，复形 $c(f)$ $/D' = 0 \to F \to E \oplus M \to D \to 0$ 也是正合的。 F 和 D 都是弱Ding内射模，并且 $0 \to F \to E \oplus M \to D \to 0$ 是正合的。根据(2)，模 $M \oplus$ E 也是弱Ding内射模。因此，存在一个正合且 $Hom(\mathcal{FI}, -)$ 正合的序列 $0 \to M \oplus E \to A^0 \to W \to 0$，其中 A^0 是FP-内射的，且 W 是弱Ding内射的。

考虑推出图:



因此，我们有正合复形的正合序列 $0 \to X \to Y \to Z \to$0，其中 X、 Y 和 Z 是上图中的各列:
$X = 0 \to E \xrightarrow{1_E} E \to 0$、 $Y = 0 \to M \oplus E \to A^0 \to W \to 0$ 和
$Z = 0 \to M \to C \to W \to 0$。
由于 $0 \to E \to A^0 \to C \to 0$ 正合，且 E 内射、 A^0 FP-内射，因此 C 是 FP- 内射。
由于 E 是内射的，上述交换图中的每一行都是分裂正合的。因此，对于每个 FP-内射模 I，序列 $0 \to Hom(I, X_n) \to Hom(I, Y_n) \to Hom(I, Z_n) \to 0$ 对所有 n 都是正合的。由此，我们得到复形的正合序列 $0 \to Hom(I, X) \to Hom(I, Y) \to Hom(I, Z) \to 0$。 $Hom(I, X)$ 和 $Hom(I, Y)$ 都是正合复形，因此 $Hom(I, Z)$ 也是正合的；也就是说，复形
$0 \to M \to C \to W \to 0$ 是正合的，且 $Hom(\mathcal{F}\mathcal{I}, -)$ 正合。
由于 W是弱 Ding 内射的，因此存在一个正合且 $Hom(\mathcal{F}\mathcal{I}, -)$ 正合的复形 $0 \to W \to A^1 \to A^2 \to \ldots$，其中所有 A^i 都是 FP-内射模。因此，复形 $0 \to M \to C \to A^1 \to \ldots$是正合且$Hom(\mathcal{F}\mathcal{I}, -)$ 正合的。由于 $M \in ({}^{\perp}{}_{w}\mathcal{D}\mathcal{I})^{\perp}$，还存在一个正合且

$Hom(\mathcal{FI}, -)$ 正合的复形 $\ldots \to A^1 \to A^0 \to M \to 0$，其中所有$A^j$ 都是 FP-内射模（根据命题3）。将它们拼接起来，我们得到一个由 FP-内射模构成的正合且 $Hom(\mathcal{FI}, -)$ 正合的复形 A，其中 $M = Z_0(A)$。因此 $({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp} \subseteq w\mathcal{DI}$。反向包含关系始终成立，所以有 $w\mathcal{DI} =({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp}$。

□

定理6。设 *R* 是一个左凝聚环，且弱*Ding*内射模类在扩张下封闭。以下命题等价：

1. 每个弱 *Ding* 内射 R-模的特征模都是 *Gorenstein*平坦右 R-模。
2. 每个 *Ding* 内射 R-模的特征模都是 *Gorenstein*平坦右 R-模。*3.* $(w\mathcal{DI}, \mathcal{GF})$ 是一个对偶对。*4.* 弱*Ding*内射模类在直极限下封闭。*5.* 弱*Ding*内射模类有覆盖。

等价命题 *(1)-(5)* 还蕴含以下命题：*6. Gorenstein*平坦右 *R*-模类是预包络的。

证明。 $1 \Leftrightarrow 2$是命题11（因为在此情形下，由命题14可知，$({}^{\perp}w\mathcal{DI})^{\perp} = w\mathcal{DI}$ ）。
$1 \Rightarrow 3$ 是命题8（因为根据命题14，在这种情况下（${}^{\perp}w\mathcal{DI}$）$^{\perp} = w\mathcal{DI}$ ）。

$3 \Rightarrow 1$根据对偶对的定义。$3 \Rightarrow 4$ 是命题14（因为根据命题14，在这种情况下（${}^{\perp}w\mathcal{DI}$）$^{\perp} = w\mathcal{DI}$ ）。

$4 \Leftrightarrow 5$ 是推论 1（因为根据命题14，在这种情况下（${}^{\perp}w\mathcal{DI}$）$^{\perp} = w\mathcal{DI}$ ）。

$4 \Rightarrow 3$。由于 $w\mathcal{DI}$ 是完备遗传对的右半部分（根据命题4和14），并且它对直极限也封闭，因此它是一个可定义类（[39]）。根据引理 1.1（[12]），模M 是弱 Ding 内射，当且仅当 M^{++} 是弱 Ding 内射。根据引理7，（M^{+}）$^{+}$是弱 Ding 内射意味着 M^{+}是

Gorenstein平坦。
$2 \Rightarrow 6$是定理5。 □

References

[1] D. Bennis 和 N. Mahdou。强 Gorenstein 投射模、内射模和平坦模。《*J. Pure Apl. Algebra*》，210：437–445，2007年[2] D. Bravo、J. Gillespie 和 M. Hovey。一般环的稳定模范畴。可见 arXiv:1405.5768[3] L. Christensen、A. Frankild 和 H. Holm。关于 Gorenstein 投射模、内射模和平坦模：一种函子性描述及其应用 《代数杂志》，302(1)：231–279，2006年。[4] J. Chen、X. Zhang。相干环与 FP-内射环。科学出版社，2014年。[5] L. Christensen、H. Holm。完美复形的直极限闭包。《*Pure Appl. Alg.*》，219(3)：449-463，2015年。[6] L Mao 和 N. Ding，Gorenstein FP-内射模与 Gorenstein平坦模。《*Algebra Appl.*》，07(04)：491-506，2008年。[7] L. Mao 和 N. Ding，相对 FP-投射模。《*Com. Algebra*》，33：1587-1602，2005年。[8] N. Ding、Y. Li 和 L. Mao。强Gorenstein平坦模。《澳大利亚数学会杂志》，86：323-338，2009年。[9] E.E. Enochs、O.M.G. Jenda 和 B. Torrecillas。Gorenstein平坦模。《南京大学学报》10-19，1994年。[10] E.E. Enochs、J.A. Lopez-Ramos。Kaplansky类。《*Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*》(107)，10-19，2002年。[11] E.E. Enochs 和 O.M.G. Jenda。Gorenstein内射模与投射模。《*Math. Zeit.*，220：611-633，1995年。[12] E.E. Enochs、O.M.G. Jenda、J. Xu。复形范畴中的正交性。《*Math. J. Okayama Univ.*，38：25-46，1996年。[13] S. Estrada、A. Iacob、M. Perez，模型结构、相对Gorenstein平坦模与链复形。《*Contemporary Math*》，第751卷，135–176，2020年。[14]E.E. Enochs 和 O.M.G. Jenda。《相对同调代数》。$Walter\ deGruyter$，2000年。《数学论丛》丛书。[15] P. Eklof。同调代数与集合论。《*Trans. American Math. Soc.*》，(227)：207-225，1977年。[16] J. Gillespie。关于 Ding 内射模、Ding 投射模、Ding 平坦模及复形。《*Rocky Mtn. J. Math.*》，47(8)，2641=-2673，2017年。[17] Z. Gao 和 F. Wang。相干环与 Gorenstein FP-内射模。《*Com. Algebra*》，40：1669-1679，2012年。[18] J. Gillespie。由余挠对得到的 Gorenstein复形与再拼接。《*Advances in Math.*》，291：859-911，2016年。[19] J. Gillespie。Ding-Chen环上模的模型结构。《*Homology, Homotopy Appl.*》，12(1)：61-73，2010年。[20] J. Gillespie。关于 Ding 内射模、Ding 投射模、Ding 平坦模及复形。《*Rocky Mountain J. Math.*》，47：2641-2673，2017年。[21] J. Gillespie。Ch(R)上的平坦模型结构。《*Trans. Amer. Math. Soc.*》，356：33693-3390，2004年。

[22] J. Gillespie、A. Iacob。对偶对、广义Gorenstein模与Ding内射包络。《Comptes Rendus. Mathmatique》，360：381-398，2022年。[23] M. Harada。遗传半初等环与三角矩阵环。《Nagoya J. Math.》，27(2)：463-484，1966年。[24] H. Holm。Gorenstein同调维数。《J. Pure and Appl. Alg.》，189：167-193，2004年。[25] H. Holm 和 P. Jørgensen。由对偶对诱导的余挠对。《J. Commut. Algebra》1(4)：621-633，2009年。[26] H. Holm 和 P. Jørgensen。覆盖、预包络与纯性。《Illinois Journal of Mathematics》，52(2)：691-703，2008年。[27] A. Iacob。广义Gorenstein模。《Algebra Colloq.》，29(4)：651-662，2022年。[28] A. Iacob。Gorenstein内射模与Enochs猜想。《Acta Mathe matica Universitatis Comenianae》，93(4)，197–204，2025年。[29] A. Iacob。Gorenstein内射模的直极限。《Osaka J. Math.》，即将出版。[30] A. Iacob。弱Ding内射模与复形。《Com. Algebra》，51(12)，4899-4912，2023年。[31] A. Iacob。弱Ding内射预包络与覆盖。《Com. Algebra》，即将出版，在线发表：2025年4月17日。[32] J.S. Hu、Y.X. Geng、Z.W. Xie、D.D. Zhang。复形的Gorenstein FP-内射维数。《Com. Algebra》，43(8)：3515-3533，2015年。[33] K. Pinzon。绝对纯模。博士论文。[34] J. Stovicek。关于纯性、余导出范畴与奇点范畴。预印本，可见于 [arXiv:1412.1615[35] T. Y. Lam。《模与环讲义》。Springer Verlag，1999年。[36] D. Murfet 和 S. Salarian，诺特概形上的全正合复形。《Adv. Math.》226 (2011)，1096–1133。[37] J.R. Garc´ıa Rozas。模复形范畴中的覆盖与包络。CRC Press LLC，1999年。[38] Jan Saroch 和 Jan Stovcek。余挠与Gorenstein模的奇异紧致性与可定义性，《Selecta Math.》(N.S.) 26，2020年。[39] J. Saroch 和 J. Stovicek。模范畴的可数望远镜猜想。《Advances in Math.》，219(3)：1002-1036，2008年。[40] J. Trlifaj。模的逼近。NMAG 31讲义，在线可见：www.karlin.m .cuni.cz/ trlif aj。[41] G. Yang、Z. Liu 和 L. Liang。关于复形的Gorenstein平坦预包络。《Rend. Sem. Mat. Univ. Padova》，129：171-187，2013年。[42] Z. Wang、Z. Liu，FP-内射复形与复形的FP-内射维数。《Aust. Math. Soc.》，91：163-187，2011年。[43] G. Yang、Z.K. Liu、L. Liang。Ding投射模与Ding内射模。《Alg. Colloquium》20(4)，189(1)：601-612，2013年。[44] G. Yang 和 Z. Liu。强余挠（无挠）模与余挠对。《Proc. Edinburgh Math. Soc.》，52：783-797，2011年。[45] G. Yang、Z.K. Liu、L. Liang。Ding-Chen环上复形范畴的模型结构。《Com. Alg.》，41：50-69，2013年。[46] Y. Zeng、J. Chen。关于Gorenstein FP-内射模。《东南大学学报》，27(1)：115-118，2011年

[47] G. Yang 和 K. Z. Liu。《GF闭环上的 Gorenstein平坦覆盖》。《通信代数》，40:1632–1640，2012年。

作者:

Alina Iacob，佐治亚南方大学，美国，aiacob@georgiasouthern.edu