arXiv:2601.15524v1 [math.GT] 21 Jan 2026

双曲曲面上填充对的长度最小化

NI AN、BHOLA NATH SAHA、BIDYUT SAN KI

Abstract. 曲面 S_g 上的填充对（α, β）是指处于最小位置的一对简单闭曲线，且 $\alpha \cup \beta$ 在 S_g 中的补集由互不相交的拓扑圆盘组成。若一对填充对之间的交点数，或等价地，其补圆盘数，在 S_g的所有填充对中达到最小，则称这对填充对为交点数极小的填充对。对于亏格为 $g \geq 3$的曲面，最小填充对已得到充分了解；而在二亏格曲面上，这样的一对曲线恰好将曲面分成两个圆盘。本文将亏格二曲面上所有最小填充对按映射类群的作用分类，并确定最短最小填充对的长度。

1. Introduction

设 S_g 是一个亏格为 g的闭可定向曲面。曲面 S_g 上的填充系统是由一组 $\Omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 构成的，其中包含若干条同伦意义下不同的简单闭曲线，其补集 $S_g \setminus \bigcup_i \alpha_i$ 是互不相交的拓扑圆盘之并。假设 Ω 中的曲线两两处于最小位置。填充系统在曲面拓扑、映射类群和 Teichm¨uller 空间的研究中发挥着基础作用。它们有多种重要应用，例如用于构造高度非平凡的映射类群元素，如伪阿诺索夫映射 [FLP12，Pen88]。Thurston [Thu86] 曾利用填充系统构造 Teichm¨uller 空间的骨架。

一个填充对是恰由两条曲线组成的填充系统。如果两条曲线之间的几何交数，或等价地说，补集中的补圆盘数量，在所有填充对中最小，则称该填充对为最小相交或简称极小。在 [AH15中，San18], 作者展示了最小相交填充对的存在性并构造了这类填充对。

Date：2026年1月23日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：57M50；次要分类：57M15、05C10。1

最小相交填充对。他们证明，当 $g \geq 3$时，极小填充对的补圆盘数量为一；而当 $g = 2$时，该数量为二。映射类群以自然的方式作用于最小相交填充对的集合。在 [AH15], 中，作者研究了这一作用的轨道数量的上下界。

我们按如下方式定义填充系统的长度：若 $\Omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是闭双曲曲面 X上的一个填充系统，则填充系统 Ω 的长度为

$$\text{length}_X(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} l_X(\alpha_i),$$

其中 $l_X(\alpha_i)$ 表示 α_i 在双曲曲面 X中的测地代表的长度。研究双曲曲面上填充系统的长度是一个有趣的问题。P. Schmutz [SS99]证明，对于给定的填充系统，存在唯一的双曲结构，使得填充对的最小长度在该结构下取得。沿着这一方向，如何显式求出使给定填充系统长度最小的曲面双曲结构，一般而言仍是一个开放问题。另一个有趣的问题是确定最小相交填充对可能达到的最短长度；由于领圈引理（第 4 节），这类填充对没有统一的上界。1 [Bus10]。Aougab- Huang 为 $g \geq 3$上的最小相交填充对的长度给出了紧下界，而证明该结果的主要工具之一是双曲多边形的等周不等式 [Bez84]。

在 [SS25], Saha-Sanki 研究了至少包含一条分离曲线的最小填充对，并确定了这类填充对可能达到的最短长度。回顾一下：带 puncture 曲面上的一组简单闭曲线若满足其并集的补集是若干互不相交的圆盘或单点穿孔圆盘的并，则称其为填充对 。在后续的一项工作中 [SS24],作者研究了单点穿孔双曲曲面上最小填充对的长度。

在二亏格情形下，扩展 Aougab-Huang 方法以确定最小填充对最短长度的主要障碍在于：一个最小填充对有两个补区域，而这两个区域中的边数并非唯一确定。

请注意，对于填充对 (α, β)，一个区域的边数对应于其边界上的 α-弧和 β-弧的总数。通过欧拉示性数论证可知，这两个区域的边数总和为 16，因此有三种可能的构型：$\{4,12\}$、$\{6,10\}$ 和 $\{8,8\}$。我们分别将对应于这些情形的填充对称为类型 $\{4,12\}$、$\{6,10\}$ 和 $\{8,8\}$。作为理解二亏格曲面上极小填充结构的第一步，我们排除了类型 $\{6,10\}$ 的构型。具体而言，我们证明了以下命题。

定理 1.1。闭曲面 S_2（亏格为二）上的一个最小相交填充对 (α, β) 属于类型 $\{4,12\}$ 或类型 $\{8,8\}$（等价地说，S_2上不存在类型为 $\{6,10\}$ 的填充对）。

定理 1.1 的证明依赖于胖图理论（下一节将给出胖图的正式定义）。

令 Σ 表示 S_2上所有最小相交填充对的集合。映射类群 $\mathrm{Mod}(S_2)$ 以如下方式作用于 Σ：对于 $f \in \mathrm{Mod}(S_2)$ 和 $(\alpha, \beta) \in \Sigma$，有$f \cdot (\alpha, \beta) = (f(\alpha)\ f(\beta))$。在证明定理 1.1的过程中，我们得到以下定理。

定理 1.2. 在 S_2中，恰有两个（在映射类群作用下等价的）最小填充对。

定理 1.2 的证明基于胖图理论，并沿用了 Aougab 和 Huang 的方法（参见 [AH15] 中的引理 2.3 的证明）。该定理在最小化最小填充对的长度方面具有显著优势。我们分两种不同情形讨论长度问题：$\{4,12\}$ 情形和 $\{8,8\}$ 情形，这两种情形将在以下两个定理中给出。

定理 引理 1.3。设(α, β) 是双曲曲面 $X \in \mathcal{T}_2$ 上的一个 $\{8,8\}$ 填充对。 n

$$\mathrm{length}_X(\alpha, \beta) \geq 8 \cdot \cosh^{-1}\left(\sqrt{2}+1\right) \approx 12.228567.$$

定理 1.3 的证明基于研究这两条曲线的测地线代表在交点处的角，并应用双曲多边形的等周不等式。

在定理 1.3中，我们已经看到，$\{8,8\}$ 填充对的最小长度由正则构型给出。令人惊讶的是，在亏格二曲面上，这种构型并不能给出长度最小填充对的全局最小值。我们将在下面的定理中看到，最小值出现在 $\{4,12\}$ 情形。

定理 1.4. 设(α,β) 是双曲曲面 $X \in \mathcal{T}_2$上的 $\{4,12\}$ 填充对。那么

$$\operatorname{length}_X(\alpha,\beta) \geq L_0,$$

其中 $L_0 = 6 \cdot \cosh^{-1}(7/2) \approx 11.5490838.$

定理 1.4 的证明建立在这些思路之上，也运用了数值计算。最后，我们证明定理 1.4 得到的下界是亏格二曲面上任意填充对的全局下界。

2. Preliminaries

本节将回顾本文中会频繁用到的一些定义。我们首先回顾图的定义。尽管这一定义并非标准定义，但它与标准定义等价，且非常适合用于定义胖图。本节最后给出引理2.4 ，讨论胖图的边界分支。

定义 2.1 （图）**：** 图 G 是一个三元组 $G = (E, \sim, \sigma_1)$，其中

(1) $E = \{e_1, e_1^{-1}, \ldots, e_n, e_n^{-1}\}$ 是一个有限非空集合，称为有向边集。(2) $\sim$是 E上的一个等价关系。(3) $\sigma_1 : E \to E$是一个无不动点的对合，它将一条有向边映射为其反向有向边，即 $\sigma_1(e_i) = e_i^{-1}$，对所有 $e_i \in E$均成立。

等价关系 $\sim$ 由 $e_1 \sim e_2$ 定义：若 e_1 和 e_2 具有相同的起始顶点。在通俗的说法中，$V = E/\sim$ 是所有顶点的集合，而 E/σ_1 是图中所有无向边的集合。与某个顶点关联的边的数量称为该顶点的度

（更多详情，请参阅 [San18], 第2节）。现在，我们定义如下的胖图。

定义 2.2. 一个胖图是一个四元组 $\Gamma = (E, \sim, \sigma_1, \sigma_0)$，其中

(1) $G = (E, \sim, \sigma_1)$ 是一个图。(2) σ_0 是 E 上的一个置换，使得每个循环都对应于从某个顶点出发的有向边集合上的一个循环次序。

定义 2.3 （标准圈）。 偶数价胖图中的闭路称为标准圈，如果循环中每对连续的边在其公共顶点处关联边集合的循环次序中彼此相对。

与胖图相关联的曲面。给定一个胖图 $\Gamma = (E, \sim, \sigma_1, \sigma_0)$，我们按如下方式构造一个带边界分支的有向拓扑曲面 $\Sigma(\Gamma)$：为每个顶点取一个闭圆盘，为每条无向边取一个矩形。然后根据顶点处关联边的次序，将矩形的边与圆盘的边界粘合。局部示意图见图2.1 。我们将胖图的边界 Γ 定义为曲面 $\Sigma(\Gamma$的边界。沿边界粘上拓扑圆盘，即可由 $\Sigma(\Gamma$得到一个闭曲面。

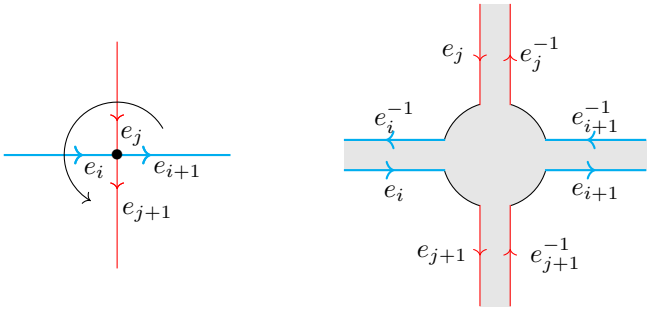

FIGURE 2.1. 由胖图得到的曲面的局部图像。

引理 2.4. 胖图 $\Gamma = (E, \sim, \sigma_1, \sigma_0)$ 的边界分支数与 $\sigma_0\sigma_1$ 中不相交的圈的数量相同。此外，在适当的标记下，$\sigma_0\sigma_1$ 的循环与 Γ 的边界词相一致。

证明。 我们从局部角度考察胖图（见图 2.2）。为方便起见，假设图的度数为 4。其他度数的情形证明类似。我们采用图 $\Sigma(\Gamma)$ 中图 2.2所示的边界词标记约定。更具体地说，沿着边 α_i行进时，右侧的边界标记为 α_i，而左侧的边界标记为α_i^{-1}。

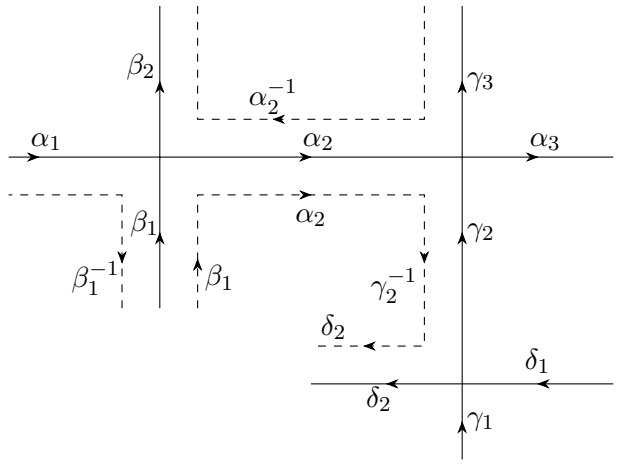

FIGURE 2.2. 曲面的边界取向使曲面部分位于右侧。

根据图 2.2，置换 σ_0 的形式为

$$\sigma_0 = (\alpha_2, \beta_2, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1})(\alpha_3, \gamma_3, \alpha_2^{-1}, \gamma_2^{-1})(\delta_1^{-1}, \gamma_2, \delta_2, \gamma_1^{-1}) \cdots .$$

现在，我们考察置换 $\sigma_0\sigma_1$ 中包含 β_1 的循环，并将此循环与 $\Sigma(\Gamma)$中包含 β_1的边界字进行比较。可以看出， $\sigma_0\sigma_1$中包含 β_1 的循环为（β_1， α_2， γ_2^{-1}， $\cdots$）（见图2.3）。因此，边界字与循环一致，证明至此完成。

$$\beta_1 \xrightarrow{\sigma_1} \beta_1^{-1} \xrightarrow{\sigma_0} \alpha_2 \xrightarrow{\sigma_1} \alpha_2^{-1} \xrightarrow{\sigma_0} \gamma_2^{-1} \cdots$$

FIGURE 2.3. $\sigma_0\sigma_1$的作用。

□

3. Classification of minimal filling pairs up to mapping class group action

本节首先根据补多边形中边的数量，对 S_2 上所有最小填充对进行分类。映射类群 $\mathrm{Mod}(S_2)$ 对所有最小填充对组成的集合的作用如下： $f \cdot (\alpha, \beta) = (f(\alpha), f(\beta))$，其中 $f \in \in \mathrm{Mod}(S_2)$，且 (α, β) 是 S_2 上的一个最小填充对。最后，我们将精确确定该作用的轨道数。

设 (α, β) 是 S_2 上的一个极小填充对，且 $S_2 \setminus (\alpha \cup \beta) = D_1 \sqcup D_2$. 。由欧拉示性数公式可得 $i(\alpha, \beta) = 4$。容易看出 $|D_1| + |D_2| = 16$，其中 $|D_i|$ 表示 $D_i, i = 1,2$ 中边的数量。由于 $|D_1|, |D_2| \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$，$\{|D_1|, |D_2|\} = \{4, 12\}$ 或 $\{6, 10\}$ 或 $\{8, 8\}$。如果补圆盘包含 4 条和 12 条边，我们称极小填充对为类型 $\{4, 12\}$。类型为 $\{6, 10\}$ 或 $\{8, 8\}$ 的填充对也可类似定义。首先，我们证明情形 $\{6, 10\}$ 不可能发生。

定理 3.1. 闭曲面 S_2 上的一个最小相交填充对(α, β)，其亏格为二，必属于类型 $\{4, 12\}$ 或类型 $\{8, 8\}$（等价地说，在 S_2上不存在类型为 $\{6, 10\}$ 的填充对）。

证明. 我们可以将并集 $\alpha \cup \beta$ 视为一个胖图，其中顶点对应于交点 $\alpha \cap \beta$，边是 α 和 β 上相邻交点之间的弧，而每个顶点处的循环次序由曲面的定向决定。我们固定一个方向，并选取 α上的一条弧作为起始弧，将其标记为 α_1。沿此方向依次将 α 上的其余弧标记为 α_2, α_3，和 α_4。类似地，我们将 β 上的弧标记为 $\beta_1, \ldots, \beta_4$。

为证明该命题，我们明确确定所有具有两个标准循环和四个顶点的可能胖图。这些构型将作为刻画 S_2 中所有极小填充对的基础。我们分八种不同情形进行分析。

（1）首先，我们考虑图 3.1 中的胖图。置换 σ_0 和边界字 $\sigma_0^{-1}\sigma_1$ 如下:

$$\sigma_0 = (\alpha_1, \beta_4^{-1}, \alpha_4^{-1}, \beta_1)(\alpha_2, \beta_3, \alpha_1^{-1}, \beta_2^{-1})(\alpha_3, \beta_2, \alpha_2^{-1}, \beta_1^{-1})(\alpha_4, \beta_3^{-1}, \alpha_3^{-1}, \beta_4),$$
$$\sigma_0\sigma_1 = (\alpha_1, \beta_2^{-1}, \alpha_2^{-1}, \beta_3, \alpha_3^{-1}, \beta_2, \alpha_2, \beta_1^{-1})(\alpha_1^{-1}, \beta_4^{-1}, \alpha_4, \beta_1, \alpha_3, \beta_4, \alpha_4^{-1}, \beta_3^{-1}).$$

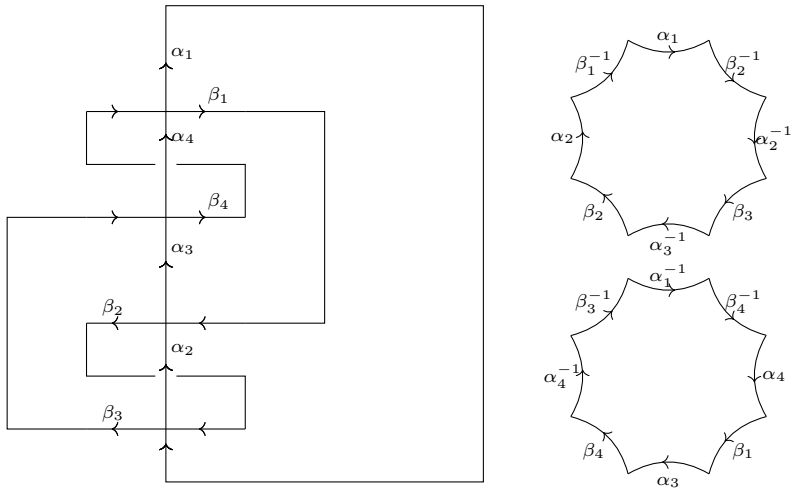

FIGURE 3.1. 情况 1

(2) 置换 σ_0 和 $\sigma_0^{-1}\sigma_1$ 由下式给出（见图 3.2）

$$\sigma_0 = (\alpha_1, \beta_4^{-1}, \alpha_4^{-1}, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2^{-1}, \alpha_1^{-1}, \beta_3)(\alpha_3, \beta_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \beta_2)(\alpha_4, \beta_3^{-1}, \alpha_3^{-1}, \beta_4),$$
$$\sigma_0\sigma_1 = (\alpha_1, \beta_3, \alpha_3^{-1}, \beta_1^{-1})(\alpha_1^{-1}, \beta_4^{-1}, \alpha_4, \beta_1, \alpha_2^{-1}, \beta_2^{-1}, \alpha_3, \beta_4, \alpha_4^{-1}, \beta_3^{-1}, \alpha_2, \beta_2).$$

(3) 置换 σ_0 和 $\sigma_0^{-1}\sigma_1$ 由下式给出（见图 3.3）

$$\sigma_0 = (\alpha_1, \beta_4^{-1}, \alpha_4^{-1}, \beta_1)(\alpha_2, \beta_1^{-1}, \alpha_1^{-1}, \beta_2)(\alpha_3, \beta_4, \alpha_2^{-1}, \beta_3^{-1})(\alpha_4, \beta_3, \alpha_3^{-1}, \beta_2^{-1}),$$
$$\sigma_0\sigma_1 = (\alpha_1, \beta_2, \alpha_4, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_4^{-1}, \alpha_2^{-1}, \beta_1^{-1})(\alpha_2, \beta_3^{-1}, \alpha_3^{-1}, \beta_4, \alpha_4^{-1}, \beta_3, \alpha_3, \beta_2^{-1}).$$

(4) 置换 σ_0 和 $\sigma_0^{-1}\sigma_1$ 为

$$\sigma_0 = (\alpha_1, \beta_4^{-1}, \alpha_4^{-1}, \beta_1)(\alpha_2, \beta_3, \alpha_1^{-1}, \beta_2^{-1})(\alpha_3, \beta_4, \alpha_2^{-1}, \beta_3^{-1})(\alpha_4, \beta_1^{-1}, \alpha_3^{-1}, \beta_2),$$

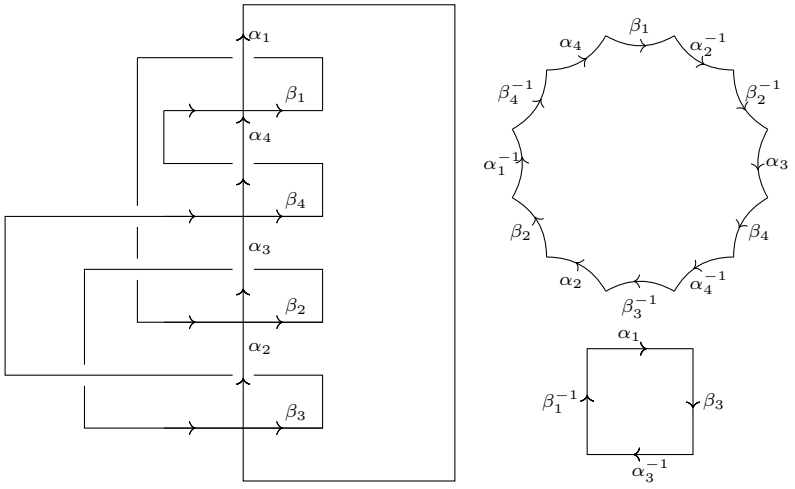

FIGURE 3.2. 情形2

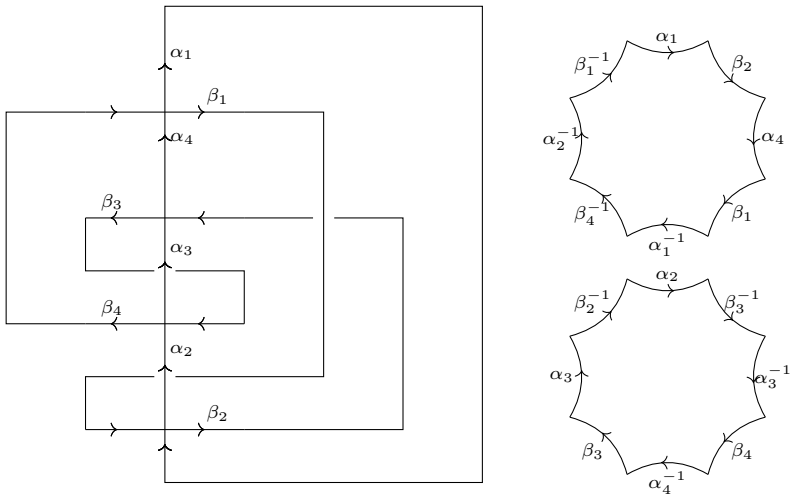

FIGURE 3.3. 情形3

$$\sigma_0\sigma_1 = (\alpha_1, \beta_2^{-1}, \alpha_4, \beta_1, \alpha_3^{-1}, \beta_4, \alpha_4^{-1}, \beta_1^{-1})(\alpha_1^{-1}, \beta_4, \alpha_2^{-1}, \beta_3, \alpha_3, \beta_2, \alpha_2, \beta_3^{-1}).$$

(5) 置换 σ_0 和 $\sigma_0^{-1}\sigma_1$ 见图3.5)

$$\sigma_0 = (\alpha_1, \beta_4^{-1}, \alpha_4^{-1}, \beta_1)(\alpha_2, \beta_3^{-1}, \alpha_1^{-1}, \beta_4)(\alpha_3, \beta_2, \alpha_2^{-1}, \beta_1^{-1})(\alpha_4, \beta_3, \alpha_3^{-1}, \beta_2^{-1}),$$

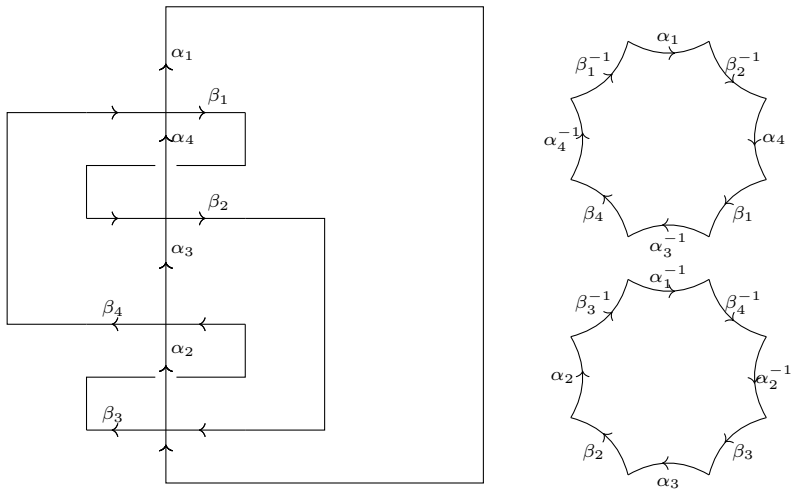

FIGURE 3.4. 情形 4

$$\sigma_0\sigma_1 = (\alpha_1, \beta_4, \alpha_4^{-1}, \beta_3, \alpha_1^{-1}, \beta_4^{-1}, \alpha_2, \beta_1)(\alpha_4, \beta_1, \alpha_3, \beta_2^{-1}, \alpha_2^{-1}, \beta_3^{-1}, \alpha_3^{-1}, \beta_2).$$

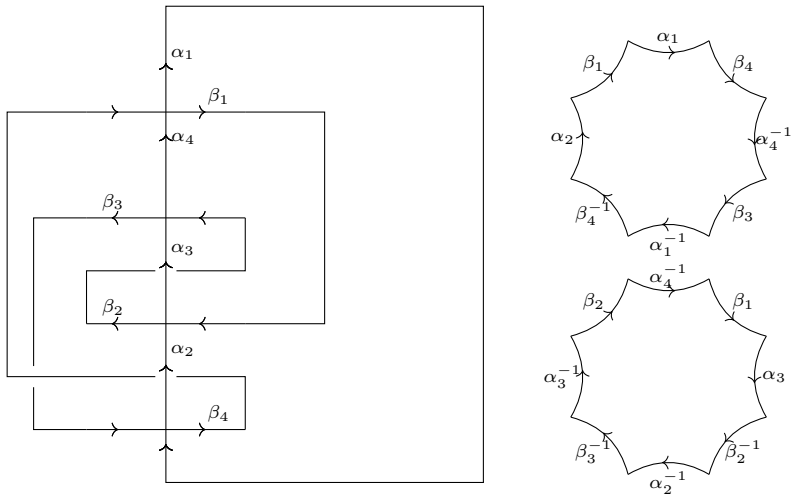

FIGURE 3.5. 情形 5

（6）置换 σ_0 和 $\sigma_0^{-1}\sigma_1$ 见图3.6所示）

$$\sigma_0 = (\alpha_1, \beta_4^{-1}, \alpha_4^{-1}, \beta_1)(\alpha_2, \beta_3^{-1}, \alpha_1^{-1}, \beta_4)(\alpha_3, \beta_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \beta_2)(\alpha_4, \beta_2^{-1}, \alpha_3^{-1}, \beta_3),$$

$$\sigma_0\sigma_1 = (\alpha_1, \beta_4, \alpha_4^{-1}, \beta_2^{-1}, \alpha_3, \beta_3, \alpha_1^{-1}, \beta_4^{-1}, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3^{-1}, \beta_1^{-1})(\alpha_4, \beta_1, \alpha_2^{-1}, \beta_3^{-1}).$$

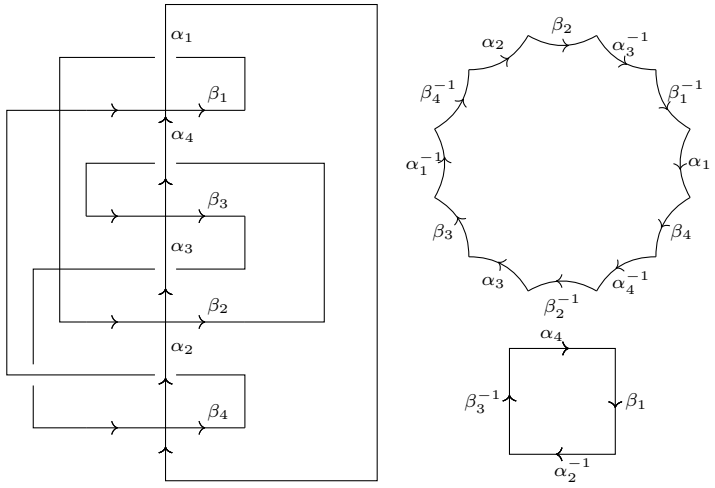

FIGURE 3.6. 情形 6

（7）置换 σ_0 和 $\sigma_0^{-1}\sigma_1$ 见图3.7所示）

$$\sigma_0 = (\alpha_1, \beta_4^{-1}, \alpha_4^{-1}, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2^{-1}, \alpha_1^{-1}, \beta_3)(\alpha_3, \beta_3^{-1}, \alpha_2^{-1}, \beta_4)(\alpha_4, \beta_1^{-1}, \alpha_3^{-1}, \beta_2),$$
$$\sigma_0\sigma_1 = (\alpha_1, \beta_4, \alpha_2^{-1}, \beta_2^{-1}, \alpha_4, \beta_1, \alpha_3^{-1}, \beta_4^{-1}, \alpha_2, \beta_3, \alpha_4^{-1}, \beta_1^{-1})(\alpha_1^{-1}, \beta_3^{-1}, \alpha_3, \beta_2).$$

(8) 置换 σ_0 和 $\sigma_0^{-1}\sigma_1$ 如图 3.8所示给出

$$\sigma_0 = (\alpha_1, \beta_4^{-1}, \alpha_4^{-1}, \beta_1)(\alpha_2, \beta_1^{-1}, \alpha_1^{-1}, \beta_2)(\alpha_3, \beta_3^{-1}, \alpha_2^{-1}, \beta_4)(\alpha_4, \beta_2^{-1}, \alpha_3^{-1}, \beta_3),$$
$$\sigma_0\sigma_1 = (\alpha_1, \beta_2, \alpha_3^{-1}, \beta_3^{-1}, \alpha_4, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_4^{-1}, \alpha_3, \beta_3, \alpha_2^{-1}, \beta_1^{-1})(\alpha_2, \beta_4, \alpha_4^{-1}, \beta_2^{-1}).$$

可以看出，这就是满足所需条件的胖图的完整列表。至此，命题得证。□

注 3.2。类型 $\{4, 12\}$ 的边界字在对边进行重新标记后相同。例如，在案例 2 中，如果我们将边 α_i 重新标记为 α_{i+1} (模 4) 并将 β_i 重新标记为 β_{i+1} (模 4)，那么边界字就与案例8中的相同。我们可以验证，类型 $\{8, 8\}$ 的填充对也同样如此。

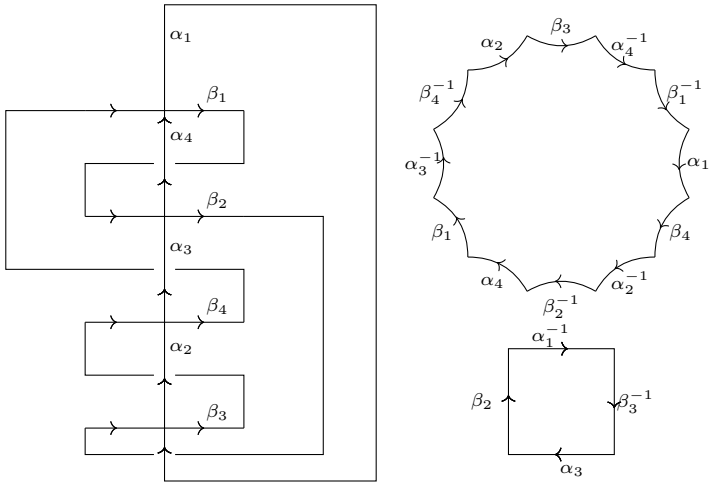

FIGURE 3.7. 情形7

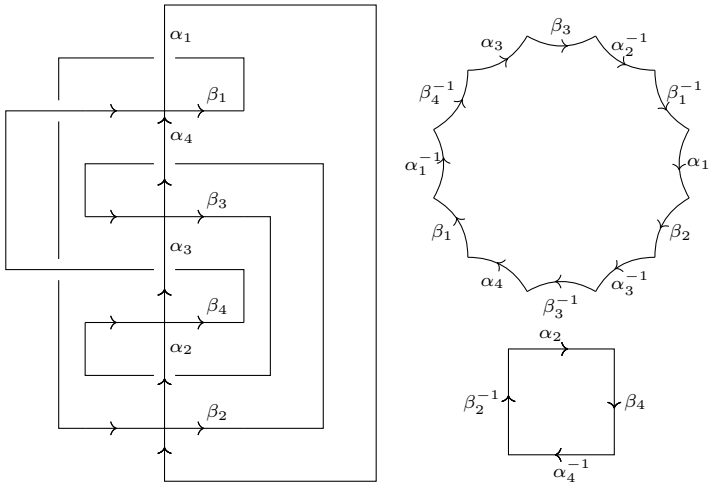

FIGURE 3.8. 情形8

注3.2给出了以下结论。

定理3.3。 在 S_2中恰有两个（在映射类群作用下）极小填充对。

证明。 由命题 1.1 可知，在S_2上至少有两个极小填充对，分别属于类型 $\{4,12\}$ 和类型 $\{8,8\}$。我们将证明，在同胚意义下，类型 $\{4,12\}$ 和 $\{8,8\}$的填充对各自唯一。

我们证明类型为 $\{4,12\}$ 的填充对的唯一性。其他类型的唯一性可用类似方法证明。设 (α,β) 和 (α',β') 是 S_2 中类型为 $\{4,12\}$ 的两个填充对。假设 $S_2\backslash(\alpha\cup\beta) = D_1 \bigsqcup D_2$, $S_2\backslash(\alpha'\cup\beta') = D_1' \bigsqcup D_2', |D_1| = |D_1'| = 4, |D_2| = |D_2'| = 12$。我们对每个填充对中的曲线子弧进行标记，使补圆盘的边界字模去撇号后相同（这可由注 3.2 得知）。设 q: $D_1 \bigsqcup D_2 \to S_2$ 和 q': $D_1' \bigsqcup D_2' \to S_2$ 为商映射，且 $f: D_1 \bigsqcup D_2 \to D_1' \bigsqcup D_2'$ 为一个将 $D_1 \bigsqcup D_2$ 的边映射到 $D_1' \bigsqcup D_2'$ 中对应边的同胚（例如 $\alpha_1 \mapsto \alpha_1'$，等等）。那么，将 (α,β) 映射到 (α',β') 的曲面 S_2 上的同胚由 $q' \circ f \circ q^{-1}$ 给出。□

4. Length of minimal filling pairs in genus two

本节中，我们为亏格为二的曲面上的最小填充对的长度求一个下界。我们分两部分进行。首先，我们在以下定理中确定类型 $\{8,8\}$ 的填充对的最小长度。本节最后，我们在定理 $\{4,12\}$ 中，通过最小化类型 4.3的填充对的长度来完成讨论。

定理 4.1。 设 (α,β) 是双曲曲面 $X \in \mathcal{T}_2$ 上类型为 $\{8,8\}$ 的填充对。那么

$$\operatorname{length}_X(\alpha,\beta) \geq 8 \cdot \cosh^{-1}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

证明。我们假设曲线 α 和 β 都是简单闭测地线。沿 α 依次排列的交点处的角记为 θ_1、θ_2、θ_3和 θ_4 （见图 4.1）。根据假设，填充对 (α,β) 将曲面分解为两个八边形，分别记为 P_1 和 P_2。于是，这两个八边形的内角如图 4.1 所示。根据高斯–博内定理，多边形的面积分别为 $(2\pi-\theta)$ 和 $(2\pi+\theta)$，其中 $\theta = \theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4$。$\theta$的取值范围为 $(-2\pi, 2\pi)$。现在假设 P_1和 P_2是正八边形，且 $\operatorname{Area}(P_i) = \operatorname{Area}(P_i)$ $i = 1, 2$。众所周知，在所有面积固定的双曲n边形中，正多边形的周长最小（见 [Bez84]）。因此，

由此可得

$$\mathrm{Perim}(\tilde{P}_1) + \mathrm{Perim}(\tilde{P}_2) \leq \mathrm{Perim}(P_1) + \mathrm{Perim}(P_2).$$

利用基本的双曲三角学，我们有

$$\mathrm{Perim}(\tilde{P}_1) = 8 \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{16}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{16}\right)}\right),$$

$$\mathrm{Perim}(\tilde{P}_2) = 8 \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{16}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{16}\right)}\right).$$

由下文的引理 4.2 可知 $2 \cdot (8 \cdot$双曲余弦$^{-1}(\sqrt{2}+1)) \leq$周长$(\tilde{P}_1) +$周长$(\tilde{P}_2)$, 其中 $8 \cdot$双曲余弦$^{-1}(\sqrt{2}+1)$ 是面积为 2π 的正则直角八边形的周长。根据高斯–博内定理，面积为 2π 的正则八边形的内角为 $\frac{\pi}{2}$。这表明该定理中的不等式是锐利的，为类型 $\{8,8\}$ 的填充对提供了紧下界。□

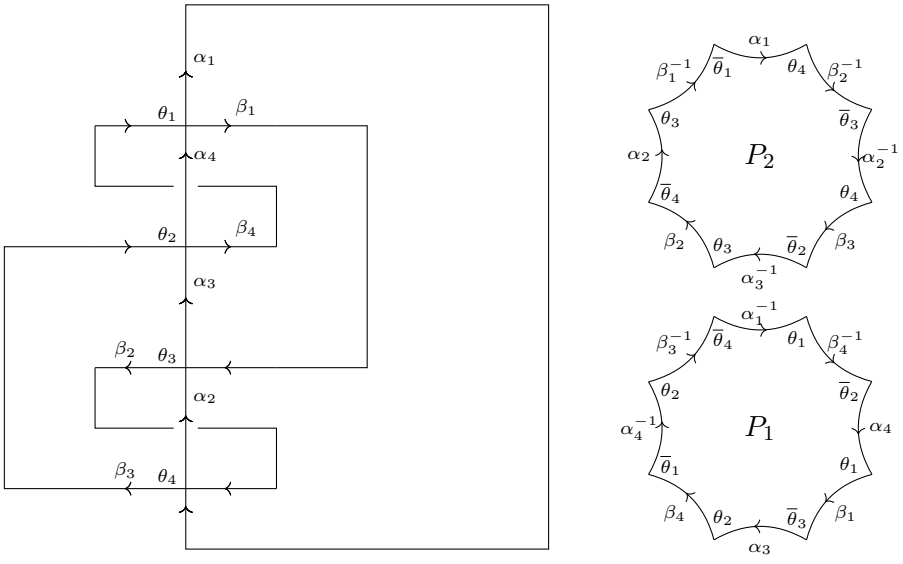

FIGURE 4.1.

Le ˜ ˜**引理 4.2**。设 P_1 和 P_2 如定理 *4.1*的证明中所定义。那么

$$\mathrm{Perim}(\tilde{P}_1) + \mathrm{Perim}(\tilde{P}_2) \geq 2 \cdot (8 \cosh^{-1}(\sqrt{2}+1)).$$

证明。令

$$\begin{aligned} f(\theta) &\coloneqq \operatorname{Perim}(\tilde{P}_1) + \operatorname{Perim}(\tilde{P}_2) \\ &= 8 \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{16}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{16}\right)}\right) + 8 \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{16}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{16}\right)}\right) \\ &= 8 \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2} + 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) + 8 \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{2} + 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right). \end{aligned}$$

Then

$$f'(\theta) = \frac{(2+\sqrt{2})\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{8}\right)}} - \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{8}\right)}}\right].$$

显然可以看出

$$\begin{aligned} f'(\theta) < 0, \text{ for } -2\pi < \theta < 0, \\ = 0 \text{ for } \theta = 0, \\ > 0 \text{ for } 0 < \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

这表明函数 $f(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 处取得最小值。引理的证明至此完成。□

4.1. 填充对的长度 $\{4, 12\}$ 。 本小节旨在证明以下定理。

定理 4.3。 设 (α, β) 是双曲曲面 $X \in \mathcal{T}_2$ 上的一个 $\{4, 12\}$ 填充对。那么

$$\operatorname{length}_X(\alpha, \beta) \geq L_0,$$

其中 L_0 是 $6 \cdot$ 双曲余弦$^{-1}(7/2) \approx 11.5490838.$

证明。设交点处 α 与 β 之间的角分别为 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3 和 ϕ_4 （沿着 α依次列出）。设 $X \setminus (\alpha \cup \beta) = Q_1 \bigsqcup Q_2$，其中 Q_1和 Q_2分别为十二边形和四边形（见图 4.2）。那么，Q_1 和 Q_2 的面积分别为 $4\pi - \phi$ 和 ϕ，其中 $\phi = \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4$。 ϕ 的取值范围为区间 $(0, 2\pi)$。

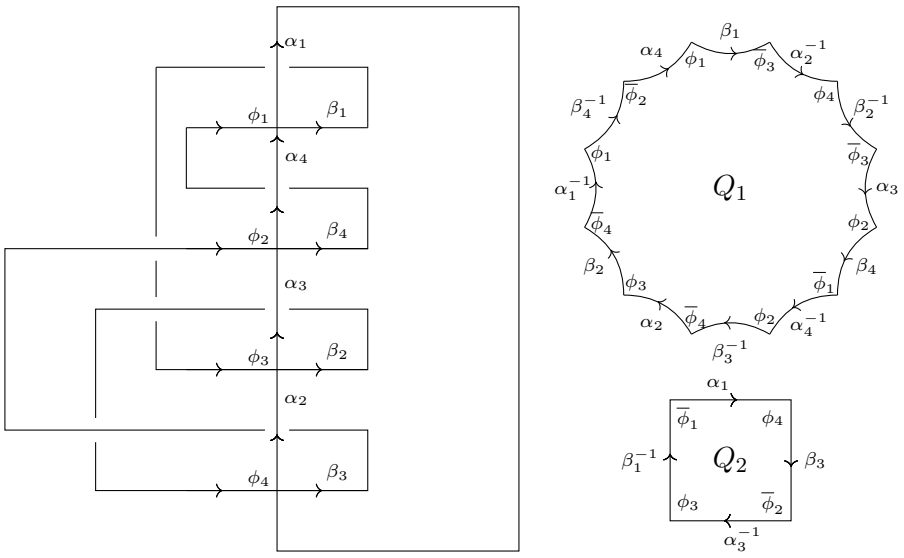

FIGURE 4.2.

现在我们研究曲面 $X_0 \in \mathcal{T}_2$ 的性质，其中填充对 (α, β) 的长度达到最小值。命题 2.4 [Sch93]保证了此类曲面 X_0 的存在性与唯一性。众所周知，若 $\tau: S_2 \to S_2$ 是一个微分同胚，则 $(\tau(\alpha)\ \tau(\beta))$ 的长度最小点为 $\tau^{-1} \cdot X_0$（见第 12 [FM12] 章）。设 τ_1 和 τ_2 分别为图 4.3 所示的红色轴和绿色轴上的反射。显然， $\tau_i(\alpha) = \alpha$ 且 $\tau_i(\beta) = \beta$，因此 $\tau_i \cdot X_0 = X_0, i = 1, 2$。由于$\tau_1(\alpha_4) = \alpha_2$，可得 $l_{X_0}(\alpha_4) = l_{\tau_1 \cdot X_0}(\alpha_2) = l_{X_0}(\alpha_2)$。类似地，可以证明 $l_{X_0}(\beta_2) =l_{X_0}(\beta_4)\ l_{X_0}(\alpha_1) = l_{X_0}(\alpha_3)$。角还满足以下条件： $\phi_2 = \phi_4$和 $\phi_3 = \phi_1$。现在，利用映射 τ_2，可得 $l_{X_0}(\alpha_3) = l_{X_0}(\beta_3)\ l_{X_0}(\alpha_1) = l_{X_0}(\beta_1)$ 且$\phi_3 = \phi_4$。结合以上关系，得到 $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \theta$ （记作） $l_{X_0}(\alpha_1) =l_{X_0}(\beta_1) = l_{X_0}(\alpha_3) = l_{X_0}(\beta_3)$，以及 $l_{X_0}(\alpha_2) = l_{X_0}(\beta_2) = l_{X_0}(\alpha_4) = l_{X_0}(\beta_4)$。

不难看出，这个十二边形可以由图 4.5 （左）所示的四边形复制八份，并沿着标记为 y 和 z的边粘合而成。因此，要确定 $\{4, 12\}$ 填充对的最短长度，只需找出 $x + l$的最小值，其中 x 和 l 是图中四边形的边长

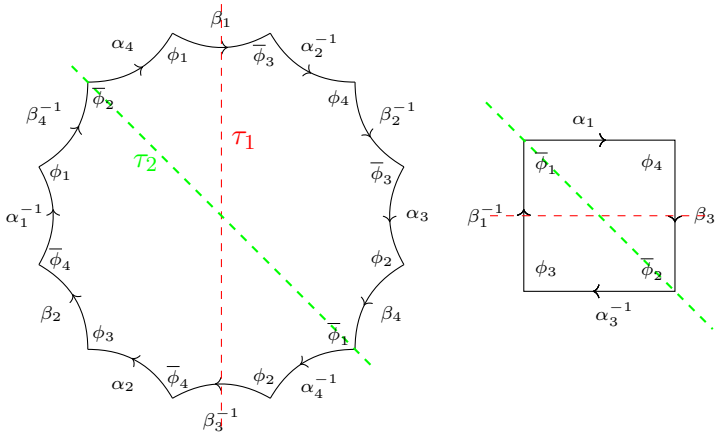

FIGURE 4.3. 映射 τ_1 是关于红弧的反射，而 τ_2 是关于绿色弧的反射。

图 4.5 （左）。现在，证明的其余部分可由定理 4.4 以及 $\cosh^{-1}\binom{7}{2} = 2\cosh^{-1}\binom{3}{2}$这一事实推出。□

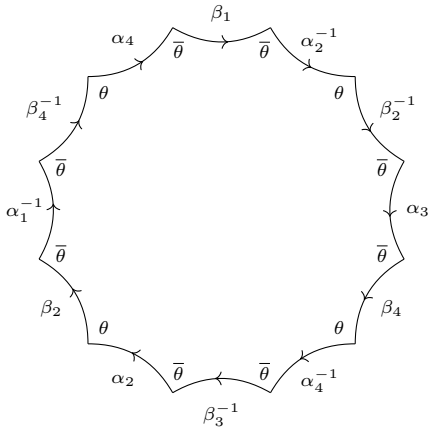

FIGURE 4.4.

将数值 $x+l$ 最小化。根据假设，四边形的一条边长为$\frac{l}{2}$，内角为 $\frac{\pi}{4}$、 $\frac{\pi}{2}$、 $\pi-\theta$和 $\frac{\theta}{2}$（见图 4.5）。设另外三条边的长度为x、 y、 z。我们的目标是在满足图 4.5中两个四边形的几何约束的同时，将 $x+l$ 最小化。

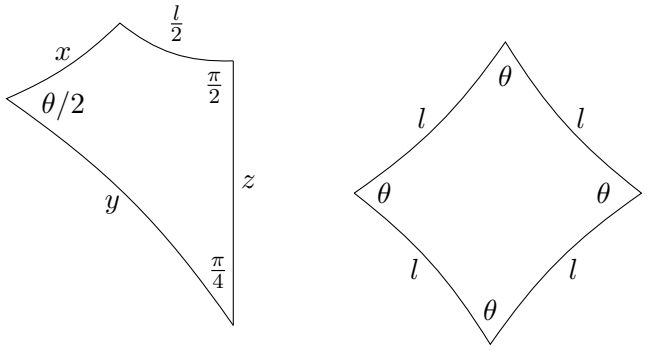

FIGURE 4.5.

对于角为 A、 B、 C and 且对边长度为 a、 b、 c 的双曲三角形，以下恒等式成立。

$$\cosh a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}. \tag{4.1}$$

现在使用恒等式 (4.1) 于图 4.5 中的四边形（右侧），边长l 为

$$\cosh l = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{4.2}$$

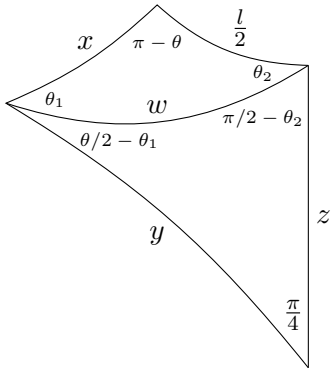

FIGURE 4.6.

对于图4.5中的左侧四边形，我们引入一条长度为 w的辅助测地线，见图4.6。将方程（4.1）应用于图4.6中的两个三角形，可得

可知

$$\cosh w = \frac{-\cos\theta + \cos\theta_1 \cos\theta_2}{\sin\theta_1 \sin\theta_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(\frac{\theta}{2} - \theta_1)\sin\theta_2}{\sin(\frac{\theta}{2} - \theta_1)\cos\theta_2}. \tag{4.3}$$

类似地， l 和 x 也可以用三角形的三个角表示:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{\cos\theta_2 - \cos\theta\cos\theta_1}{\sin\theta\sin\theta_1} \\ \cosh\left(\frac{l}{2}\right) &= \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta\cos\theta_2}{\sin\theta\sin\theta_2}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

然而，从理论上推导 $x + l$ 的最小值仍然颇具挑战。由长度函数 length $x+l$ 的凸性可知， $x(\alpha, \beta)$的最小值是唯一的，因此可以通过数值计算求出最小点。数值计算方法可表述如下: 对于五个变量 l, θ, x, y, z 以及四个约束（一个约束来自（4.2），一个约束来自（4.3），另外两个约束来自（4.4）），我们可以使用 θ 求解其余变量。这样， $x + l$ 就变成了一个依赖于 θ的函数，其最小值可通过梯度下降进行数值求解。此数值方法可参见 [AII25]的第3.2节。我们使用 Python [1]实现了这一数值计算。随后，可以使用 Sage Math 等数学工具确定最小点的精确值。

并给出最小点的精确值。为严格证明这一结果，我们采用约束优化中的拉格朗日乘子法。对于可微目标函数 $\mathbf{f}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 及等式约束 $g_i(\mathbf{x}) = 0$，我们构造拉格朗日函数:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}),$$

其中驻点满足 $\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L} = \mathbf{0}$ 且 $g_i(\mathbf{x}) = 0$。有关拉格朗日乘子的更多详情，请参阅 [HHW17]第14.8节。将此框架应用于我们的问题，结合$f = x + l$ 和四个约束，可得出必要且充分的最优性条件。定理如下:

[1]与这项工作相关的代码可在本文的 arXiv 版本中获取

定理 4.4. $f(x,l,\theta,\theta_1,\theta_2)=x+l$ 在四个约束条件下的最小点:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \frac{-\cos\theta+\cos\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_1\sin\theta_2}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos(\frac{\theta}{2}-\theta_1)\sin\theta_2}{\sin(\frac{\theta}{2}-\theta_1)\cos\theta_2}=0\\
g_2 &= \cosh l-\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=0\\
g_3 &= \cosh x-\frac{\cos\theta_2-\cos\theta\cos\theta_1}{\sin\theta\sin\theta_1}=0\\
g_4 &= \cosh(\frac{l}{2})-\frac{\cos\theta_1-\cos\theta\cos\theta_2}{\sin\theta\sin\theta_2}=0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

由下式给出

$$
p_0=\left(\cosh^{-1}\left(\frac{7}{2}\right),\cosh^{-1}\left(\frac{3}{2}\right),\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right),\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{6}}{41}\right),\tan^{-1}\left(\frac{6\sqrt{30}}{25}\right)\right).
$$

证明。令

$$
\mathcal{L}(x,l,\theta,\theta_1,\theta_2,\boldsymbol{\lambda})=x+l-\sum_{i=1}^{4}\lambda_i g_i,
$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4)$。通过拉格朗日乘子法可知，$\boldsymbol{p_0}$ 是极小点当且仅当存在 $\boldsymbol{\lambda_0}=(\lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_n^0)$，使得在 $(\boldsymbol{p_0},\ \boldsymbol{\lambda_0})$ 处，下列等式成立:

$$
\mathcal{L}(\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{\lambda_0})=0,\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_i}=0
$$

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial l}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2}=0
$$

$\boldsymbol{\lambda_0}$ 可以 b 通过使用 Mathematica 进行计算得到[2]，其中 $\boldsymbol{\lambda_0}=(70\,341,\ \frac{3}{5\sqrt{5}},\ \frac{2}{3\sqrt{5}},\ 14\,5)$.

□

5. Length of arbitrary filling pairs in genus two

在本节中，我们证明，亏格为二的双曲曲面上任意填充对的长度都不小于 L_0，其中 L_0 是类型为 L_0的极小填充

[2]与本研究相关的代码可在本文的 arXiv 版本中找到

对的最短长度。为此，我们需要一些图论结果。首先，我们回顾一些基本定义。

定义 5.1。图 G 的子图 $H \subset G$ 称为生成的，如果它包含 G 的所有顶点。子图 $H \subset G$ 称为分散的，如果从某个顶点引出的任意两条边 e 和 e' 在 G 中都不相邻。

我们使用以下由 Jonah Gaster 得出的结果（见第 2 [Gas21]节）。

引理 5.2。设(α, β) 是闭可定向曲面 S 上处于最小位置的一对简单闭曲线组成的填充对。如果 α 是非分离的，那么 $\alpha \cup \beta$ 的对偶图存在一棵分散生成树。如果 α 是分离的，那么该对偶图存在一个含两个连通分支的分散生成森林。

关于 S_2上填充对的补多边形边数的一个观察。设 $S_2 \setminus (\alpha \cup \beta) = \bigsqcup_{i=1}^{f} D_i$。设 D_i 中的边数为 $|D_i| = 4k_i + j_i$，其中 $k_i \geq 1$ 和 $j_i = 0$ 或 2，$i = 1, \ldots\ldots, f$。将 $(\alpha \cup \beta)$ 视为四价图，我们有

$$\begin{aligned} i(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{f} |D_i| \\ &= \sum_{i=1}^{f} k_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{f} j_i \end{aligned} \tag{5.1}$$

此外，利用欧拉示性数的论证，

$$i(\alpha, \beta) = f + 2. \tag{5.2}$$

根据方程（5.1）和（5.2），以下情况之一成立：

- $k_i = 1$对于所有 $i \in \{1, \ldots, f\}$，且 $j_i = 2$恰好对四个 $i \in \{1, \ldots, f\}$成立。
- $k_i = 2$对于一个 $i \in \{1, \ldots, f\}$，其余的 k_i均为 1，且 $j_i = 2$恰好对两个 $i \in \{1, \ldots, f\}$成立。
- $k_i = 2$对于两个 $i \in \{1, \ldots, f\}$。那么其余的 k_i均为 1，且所有 j_i均为零。
- $k_i = 3$ 对于一个 i，$k_i = 1$ 对于其他 i和所有 j_i均为零。

根据上述观察，我们得到以下引理。

引理 5.3。 任意亏格为 S_2 的填充对都具有这样的性质：其补集中的至少一个多边形包含 $4k$ 条边，其中 $k \in \{1,2,3\}$ 满足某种条件；但有一种例外情况，即补集包含 4 个多边形，且每个多边形都有 6 条边。

现在我们证明本节的主要定理。

定理 5.4。 设 (α,β) 是亏格为二的双曲曲面 X 上任意一对填充对。那么

$$l_X(\alpha,\beta) \geq L_0,$$

其中 $L_0 = 6 \cdot$ 双曲余弦$^{-1}(7/2)$，类型为 $\{4,12\}$ 的极小填充对的最短长度 .

证明。 首先，我们考虑可能出现的特殊情况，即 $X \setminus (\alpha \cup \beta)$ 由四个双曲六边形组成。在这种情况下，我们将这些六边形两两配对，并沿一条公共边拼接。这样会得到两个多边形 D_1 和 D_2，其总面积为 4π。公共顶点处的角均为 π，因此我们可以将每个拼接后的多边形视为一个八边形。此外，可以看出 $l_X(\alpha, \beta) \geq$ 周长(D_1) + 周长(D_2)。根据定理 4.1 的证明，我们有 $l_X(\alpha, \beta) \geq 8 \cdot$ 双曲余弦$^{-1}\left(\sqrt{2}+1\right)$。

–

现在，假设至少有一个补多边形具有 $4k$ 条边，其中$k \in \{1,2,3\}$。在这种情况下，为证明该定理，我们应用引理 5.2。

如果两条曲线都是分离的，则根据引理 5.2，(α,β) 的对偶图拥有一个具有两个连通分支的分散生成森林。沿着这些树粘合多边形后，我们得到两个八边形（详见 [Gas21] 的第 3 节以了解详细讨论）。

如果其中一条曲线是非分离的，我们固定 $4k$-边形，并根据引理 5.2得到的生成树粘合其余多边形。这样，我们得到一个 $4k$-边形（固定的那个）和一个（$4-k$）-边形。应用定理 4.1 或定理 4.4，我们得到

$$l_X(\alpha,\beta) \geq 8 \cdot \cosh^{-1}\left(\sqrt{2}+1\right) \quad \text{or} \quad l_X(\alpha,\beta) \geq L_0.$$

至此，证明完成。 □

References

[AH15] Tarik Aougab 和Shinnyih Huang。曲面上的最小相交填充对。 *Algebr. Geom.Topol.*，15(2):903–932，2015。[AII25] Ni An、Ferdinand Ihringer 和 Ingrid Irmer。短周期函数的小亏格、小指标临界点。 *arXiv preprint*，arXiv:2504.17316，2025。[Bez84] K. Bezdek。欧几里得平面和双曲平面等周不等式的一个初等证明。 *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*，27:107–112，1984。[Bus10] Peter Buser。 *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*。Modern Birkh¨auser Classics。Birkh¨auser Boston, Ltd.，美国马萨诸塞州波士顿，2010。1992 年版本的重印本。[FLP12] Albert Fathi、Fran.cois Laudenbach 和 Valentin Po´enaru。 *Thurston's Work on Surfaces*，第 48 卷，收录于 *Mathematical Notes*。Princeton University Press，2012。[FM12] Benson Farb 和 Dan Margalit。 *A primer on mapping class groups*，第 49 卷，收录于 *PrincetonMathematical Series*。Princeton University Press，美国新泽西州普林斯顿，2012。[Gas21] Jonah Gaster。Aougab-Huang 猜想的一个简短证明。 *Geom. Dedicata*，213:339–343，2021。[HHW17] Joel Hass、Christopher Heil 和 Maurice D. Weir。 *Thomas' Calculus*。Pearson，英国伦敦，2017。[Pen88] Robert C. Penner。伪阿诺索夫同胚的一种构造。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，310(1):179–197，1988。[San18] Bidyut Sanki。闭曲面的填充。 *J. Topol. Anal.*，10(4):897–913，2018。[Sch93] P. Schmutz。最短测地线长度达到最大值的黎曼曲面。 *Geom. Funct. Anal.*，3(6):564–631，1993。[SS99] Paul Schmutz Schaller。黎曼曲面上的短测地线与拓扑莫尔斯函数。 *J. Dif-ferential Geom.*，52(3):407–452，1999。[SS24] Bhola Nath Saha 和 Bidyut Sanki。带 puncture 曲面上填充对的长度。 *arXiv preprintarXiv:2409.05483*，2024。https://arxiv.org/abs/2409.05483。[SS25] Bhola Nath Saha 和 Bidyut Sanki。用分隔曲线填充。 *J. Topol. Anal.*，17(6):1841–1867，2025。[Thu86] W. Thurston。Teichm¨üller 空间的一个骨架。 *preprint*，1986。