arXiv:2601.15591v1 [math.HO] 22 Jan 2026

狂野的施泰纳-莱姆斯追逐

施泰纳-莱姆斯等长角平分线定理的并列证明

Eric L. Grinberg 和 Mehmet Z.Orhon

摘要

我们通过将正弦定理连续应用于并列比较，给出了施泰纳-莱姆斯等长角平分线定理的一个证明。近两个世纪以来，人们一直致力于寻找该定理的直接证明，并不断尝试证明和重新证明它。我们认为，背后或许还有另一股推动力量。

1. 每个证明都讲述一个故事 2021年最后几天，我们读了 Hillel Furstenberg 的阿贝尔奖访谈[7]，并观看了相关视频 [9]。他讲道：

> 有一道特别的题目，成就了我的职业生涯。

在求学早期，Furstenberg 面临一道挑战：证明在一个三角形中，如果两条角平分线长度相等，那么这个三角形就是等腰三角形。他成功证明了这一点，也由此开启了自己的职业生涯。此外，Furstenberg 的同学、后来成为杰出数学家的 Shlomo Sternberg，当时也经历了同样的事，遇到同一道题目；Furstenberg 后来的一位同事、数学经济学家及未来的诺贝尔奖得主 Robert J. Aumann，也有过类似的职业生涯起步经历。

看过 Abel 访谈后不久，我们观看了 Simons Foundation《*ScienceLives*》系列中的一段节目，这一集的主角是杰出数学家 Elias M. Stein，采访他的是他的昔日学生 Charles Fefferman [8]。访谈开始几分钟后，我们得知，Eli 求学早期曾遇到同一个定理，以及一个“巧妙”的证明。他看到了挑战，便宣称：“我要试着为这个定理找出另一种证明。”一段时间后，他成功了：

> 这让我坚信自己也能学好数学。

这会不会只是巧　合？这个定理及其各种证明，又开启了多少人的职业生涯？

我们很快了解到，这个定理有一个名字，叫***Steiner-Lehmus*定理**（简称 SLT），而且有着悠久而有趣的历史，其间不乏各种证明与再证明。尽管本文作者的职业生涯比前面提到的数学巨匠更为成熟，但重新证明这个定理的挑战依然令人心动。想到另一个被反复证明的定理，[21] 也增添了动力。由此，我们得出了一个新的初等证明——又一个证明。经过一些关于再证明的说明后，我们将在下文详述。[再证明补记：就在我们即将定稿时，我们得知另一位杰出的数学家 Steven Strogatz 也曾因 Steiner-Lehmus 定理而开启职业生涯的新篇章。请参见 [24]，，Grant Sanderson 在 3Blue1Brown播客系列中对 Strogatz 的采访。有趣的是，Strogatz 还提到了一种启发人心的证明：他本科时在 Eli Stein 教授的课堂上学到的。这就是 Goursat对柯西积分定理的再证明。]

2. 不断带来惊喜的定理。 在初次了解Steiner-Lehmus定理后不久，我们发现了Susan D’Agostino那篇标题颇具吸引力的文章数学家永远不会停止证明素数定理 [5]。我们尤其对副标题感兴趣：

> 为什么数学家喜欢用不同的方法证明相同的结果？

虽然 [5] 的重点是素数定理，但文中也提到了其他一些被反复证明的定理。随后我们了解到，有一整本书专门探讨反复证明这一做法：J.W. Dawson 于2015年出版的著作，书名颇有意味，叫作《为什么要再证明一次？》[6]。此外，Paul Erd˝os 著名的《那本书》概念，正如 [1], 中所广为人知地阐述的那样，讲的也是重新证明，不过只收录最好的证明。 [18] 则有一整本书，专门讨论某个单一定理的各种证明。D. 希尔伯特的第24问题以及与之相关的方法的纯粹性这一概念也与此有关，它追求尽可能简单的证明；参见 [12]。

Th关于这一范式还有更多可说之处，但我们离题了。现在是进行（重新）证明的时候了 f.

3. 证明 Steiner-Lehmus定理。 受优秀文章 [2], 的启发，我们以一种避开一个逆否命题的形式陈述 SLT。

定理。 设三角形 $T \equiv \triangle ABC$ 的底角为 $\angle A$、$\angle B$，且 $\angle A$ 大于 $\angle B$。则在 T 中的 $\angle A$ 的内角平分线段，比在 T中的 $\angle B$ 的内角平分线段更短。

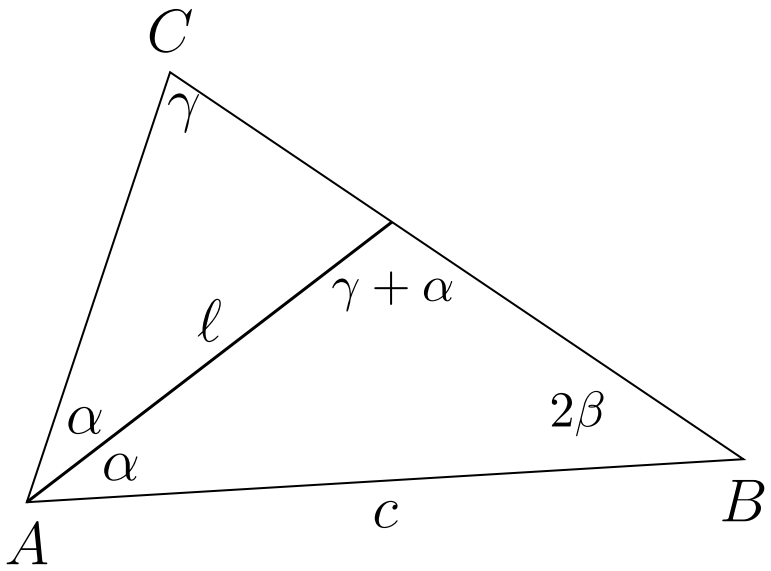
简而言之: *The larger angle has the smaller bisector.*

证明。 从图 1 开始，标出角度 2α、2β、γ，它们分别对应于顶点 A、B、C。将角 $\angle A$平分后，延长角平分线段，直到它与对边 BC相交，并用 ℓ表示所得的线段及 其长度。（这里我们承认记号使用得不够严谨。）我们的基本假设是， 2β 是两个底角中较小的一个:

$$2\beta < 2\alpha\,.$$

现在， ℓ 将 $\triangle ABC$ 分成两个子三角形，我们分别将它们视为 ℓ上和 ℓ下三角形。在 ℓ下三角形中， ℓ 与 BC 相交处的角，与 ℓ上三角形中的一个角互补，而该角又与 $\gamma + \alpha$互补，因此这个角等于 $\gamma + \alpha$ （稍后记作 γ'）：

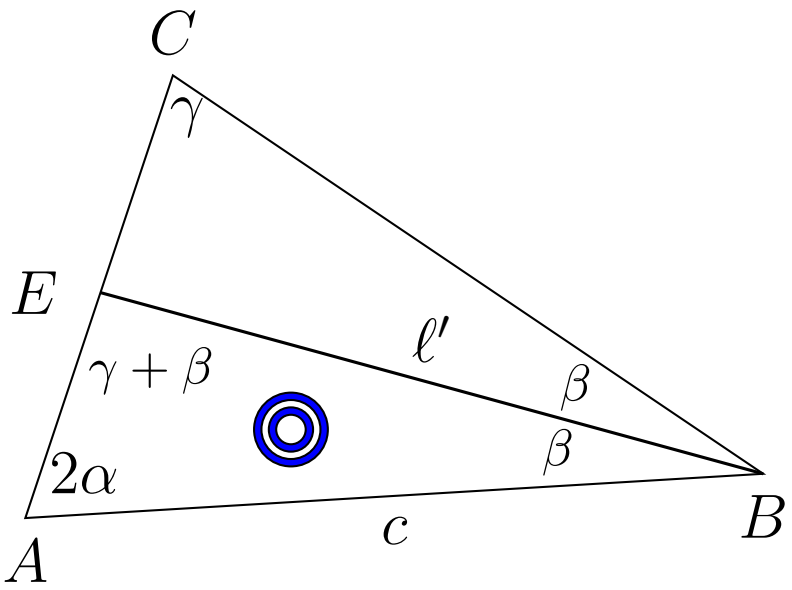
图 1：含有第一条角平分线的三角形



诚然，引入 $\gamma + \alpha$ 的同义说法 γ' 会增加符号负担，但也能让后续图示更加简洁。

接下来，平分 $\angle B$，并将对应的角平分线段及其长度都记作 ℓ'（继续沿用略有滥用符号的做法）。这条线段也将 $\triangle ABC$ 分成两个子三角形，分别视为 ℓ'上方和 ℓ'下方，如图2所示。

图2：带有第二条角平分线的三角形



将角平分线段 ℓ' 与边 AC的交点记作 E。在下方的 ℓ' 三角形（$\triangle ABE$）上添加一个虚拟的蓝白色“靶心”圆盘；当我们对该三角形进行反射和平移时，将用它来聚焦注意力。

取图2中的 ℓ'下方三角形 $\triangle AEB$ 的一个副本，将它沿着穿过靶心且垂直于 AB 的直线反射，得到一个与右侧缩略图所示图形相似的三角形。将反射后的三角形平移，使其“叠放”在原始的——

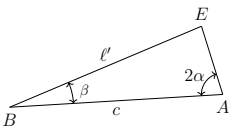


图1中的原始三角形 $\triangle ABC$ 上，让平移后的顶点 B 与原始顶点A重合，并使平移后的边 BA 沿着原始边 AB放置，如图3所示。

在图3中，我们使用记号 $\delta \equiv \alpha - \beta$，再次以增加记号负担为代价来减少杂乱。在顶点$B$处，标出一个与底边 AB成 $2\beta + \delta$ 角的角。这个角与 AE 相交于一点 D。角 $\angle x \equiv \angle ADB$与 $\beta + 2\beta + \delta = \alpha + 2\beta$互为补角。现在，$\gamma'$ 也与 $\alpha + 2\beta$互为补角，如图1中的 ℓ-下方 三角形所示，因此 $\angle x = \gamma'$。

在 $\triangle ADB$ 中，对 $\angle D \equiv \angle x \equiv \gamma'$ 和 $\angle B$ 应用正弦定理，得：

$$\sin(\gamma')/c = \sin(2\beta + \delta)/AD\,.$$

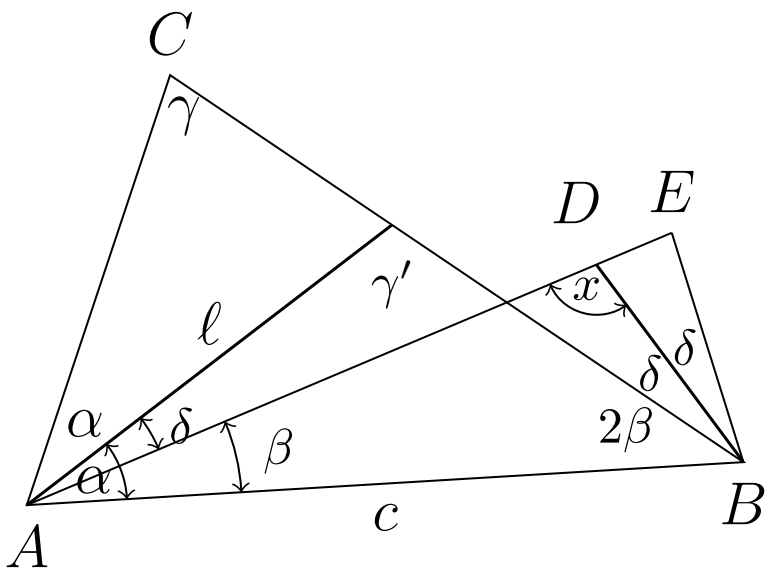
在图1的 ℓ-下方 三角形中，对 $\angle\gamma' = \gamma + \alpha$ 和 $\angle 2\beta$ 应用正弦定理，得

$$\sin(\gamma')/c = \sin(2\beta)/\ell\,.$$

结合最后两个方程，我们得到

$$AD = \left(\frac{\sin(2\beta + \delta)}{\sin(2\beta)}\right)\ell\,. \tag{1}$$

图3：反射后的三角形



我想让你比较Lee Iacocca
克莱斯勒 20世纪80年代复兴运动
[14]

这篇论文的作者或许有些迟钝，但角 $\angle(2\beta+\delta)$可一点也不迟钝。这是因为$\angle(2\beta+\delta)$恰好位于 $\angle 2\beta$ 和 $\angle 2\alpha$ 之间；它们是一个三角形的两个角，而剩下的角 γ 需要留出一点呼吸空间。因此，正弦函数从 2β 到 $2\beta+\delta$ 严格单调递增，而（1）表明 AD 比 ℓ长。由于 AD 是 AE的一个子线段，且 AE 的长度为 ℓ'，我们由此推得

$$\ell' > AD > \ell\,.$$

因此</style}较大的角有较小的角平分线 角平分线，这就证明了我们关于施泰纳-莱穆斯定理的陈述 m. □

反射这一步绝对有必要吗？不，证明可以不借助反射来改写，但反射确实提供了一种可视化工具——当两条线段的方向更接近时，用肉眼比较它们的长度会更容易。事实上，J. Steiner 的原始证明也将翻转用作一种可视化¨工具：“概览”；见 [22,第 225]页。

我们注意到，该证明比 V. Cristescu 在 1916 [4]，中给出的正弦定理证明更为简短；该证明在 [20] 中被转载，并被认为是 SLT 的“最简短三角证明”之一。此外，这一证明主要采用几何方法，几乎不涉及三角证明中通常包含的代数或分析。

4. 最古老的间接证明？ 在欧几里得《几何原本》的前几篇中，我们会看到著名的驴桥命题：等腰三角形的底角相等；欧几里得的证明较为复杂，因此

得名 [19, p. 105], 但它是直接证明。如今的讲解通常会采用帕普斯后来提出的、简单得多的证明，这同样是直接证明。但驴桥命题有一个逆命题：在一个三角形中，如果两个底角相等，那么对应的两条边也相等，也就是说，这个三角形是等腰三角形。这是《几何原本》中的命题 6，其证明从一开始就是间接证明。事实上，它似乎是最古老、广为人知的间接证明之一。

现代论述批评了欧几里得关于驴桥命题逆命题的证明，因为该证明隐含地依赖面积考量，却没有为此建立相应的理论。在现代改写版本中 [13, 第 98]页，证明与《几何原本》中的证明几乎相同，只是将结尾处的面积论证替换为希尔伯特角复制公理 C4；它仍然是间接的。另一种方法是， [19] 采取了不同的路径，使用角边角全等定理，并将间接性融入其中；见下文。无论如何，似乎可以说，Steiner-Lehmus定理有一个源自古代、带有间接且非构造性根基的姊妹命题。

5. 构造性批评与间接成本 我们已经说明， [2] 影响了我们，使我们以一种避免在证明中使用一次逆否命题的形式陈述主定理。然而，这里还有其他问题。

在编制联邦拨款预算时，有一个名为间接成本的项目。这里也使用同一个短语，但含义有所不同。我们使用了初等几何中的一些工具，而这些工具的基础具有间接且非构造性的根源。其中一个贯穿整个证明所需的工具是：三角形的内角和为 180° （在中性几何中为 $\leq 180^\circ$ ）。在现代论述中，这一结论通过对萨凯里四边形的分析间接证明。见 [19, 第 10 节。4]另一个工具是著名的角边角 三角形全等定理，它从边角边 全等原则中以非构造方式证明出来。反过来，边角边全等在欧几里得的体系中是一个定理，但在现代论述中则是一条公理；见 [19, 第 6 章和第 10]章。此外，边角边全等和角边角全等在欧几里得几何一致性的证明中也占有重要地位。因此，在考察 SLT 的众多证明时，我们发现，间接性不仅存在于基本结构中，也存在于对间接来源工具的依赖之中。

6.D`ej´又一次全盘重演? 既然中心定理已有如此多的证明，出现相似之处也在所难免。一位读过本文早期版本的读者发现，它与 [11] 相似。不过，这种相似仅限于证明的准备阶段。借用国际象棋打个比方，广受欢迎的西班牙开局有些变例会延续到第九步；而有些棋局的前九步完全相同，后续却大不相同。我们证明中的准备部分，是为了应用正弦定理；大多数高中几何课程都会讲到这一定理。 [11] 中的证明依赖于圆内接四边形这一概念，而课程中并未涉及。请参阅 [13]和 [16], ：书中提到了正弦定理，但索引中没有圆内接一词。M. Lewin 指出 [17]，尽管 [11], 中的证明是从众多贡献中选出的，但它“实质上与”C.L. Lehmus 最初于 1850年提出的证明“完全相同”。这本侧重历史、备受推崇的著作《几何学史》 [22]给出了一种归于 V. Th´ebault 的证明（见 [25]），其基本上与 [11], 相同，只是细节更多。 [22], 中也收录了施泰纳在19世纪40年代给出的证明，但我们没有找到其中提及 Lehmus 于 1850年提出的证明。施泰纳–Lehmus 证明所构成的拓扑空间很可能是一个环空间：“圆环闭合” [17] 。

7. 为什么要重新证明? 有些定理不断催生新的证明，或是新近提出的证明。但这是为什么呢？莫利三等分定理（MTT） [21] 就是一个例子。它与 SLT 一样，都是陈述层次属于古代几何的三角形定理；这两个定理都收录于马丁·加德纳的汇编 [10]中。莫利三等分定理的证明层出不穷；参见 [21] ，其中有大量（可谓汗牛充栋？）证明，此外《数学评论》还收录了数十篇后续证明。然而，重新证明的动机颇为微妙。也许其中有一丝不安。找到走失的小狗并把它送回家后，主人可能会反复确认，确保小狗还在身边，没有再次走丢。莫利三等分定理是偶然发现的；这是一个令人惊讶的结果，甚至被称为奇迹。事实上，即使反复检验，莫利三等分定理带来的惊奇似乎也不会消退。重新证明或许能让人确信，这个定理依然成立、依然有效，而且

没有被遗忘。（当然，新证明也能以其他方式增添价值，例如为更深入、更广泛的理解创造机会。）

对于 SLT，重新证明的标准解释是，人们希望得到一个直接论证；如果找不到，就应当尽可能地接近直接证明。J.H. Conway 和 A. Ryba 曾有力地论证，直接证明是不可能的 [3], ，至少在几何学的某些熟悉语境中如此。最近，V. Pambuccian 证明了直接证明抽象地存在 [23], ，尽管它可能长达数千行；A. Kellison 则给出了一个具体的、经机器检验的直接证明 [15]。这些证明援引了经过调整的语境转换公理；它们并未推翻 Conway 和 Ryba 的论断。我们也必将看到未来出现更多证明。上述四位 [应为五位]杰出数学家的经历表明，除了对直接证明的追求之外，人们对 SLT 的兴趣还有另一个缘由：它是年轻数学家的职业起点。

参考文献

[1] Aigner, M., Ziegler, G.（2018）。《来自天书的证明》。第6版。（Hofmann, K. H.，插图）柏林：施普林格出版社。[2] Bauer, A.（2017）。接受构造性数学的五个阶段。《美国数学会通报》，54，481–498。[3]Conway, J., Ryba, A.（2014）。Steiner-Lehmus角平分线定理。《数学公报》：98(542)，193–203。[4] Cristescu, V.（1916年）。关于一个几何学问题（罗马尼亚语），《数学公报》（布加勒斯特），22(1916)，第2期，35–37。[5] D'Agostino, Susan（2021）。为什么数学家喜欢用不同方法证明相同的结果？《数学家永远不会停止证明素数定理》。《量子杂志》。www.quantamagazine.org/mathematicians-will-never-stop-proving-the-prime-number-theorem-20200722/ ；访问于2021年12月31日。[6] Dawson, J. W.（2015）。《为什么要再证明一次？数学实践中的替代证明》。海德堡–纽约–多德雷赫特–伦敦：施普林格，[7] Dundas, B.I. 和 Christian Skau, C.（2021）。采访2020年阿贝尔奖得主Hillel Furstenberg。《美国数学会通知》。第68卷，第7期，1189–1196。[8] Fefferman, C.（2012）。Elias M. Stein访谈。Science Lives。Simons Foundation。https://www.simonsfoundation.org/2017/03/13/elias-stein/ ；访问于2021年12月31日。[9] Furstenberg, H.（2020）。我为何投身数学。2020年阿贝尔奖庆祝视频。www.youtube.com/watch?v=OyrvqOEwDMA ；访问于2021年12月31日。[10] Gardner, M.（1961年）。谈一本几何学新书中的消遣。《科学美国人》[11] Gilbert, G., MacDonnell, D.（1963年）。课堂札记：Steiner-Lehmus定理。《美国数学月刊》70，第1期，79–80。[12] Greenberg, M. J.（2010年）。初等平面欧几里得几何与非欧几里得几何基础中的新旧成果。《美国数学月刊》117，第3期，198–219。[13] Hartshorne, R.（2000年）。《几何学：从欧几里得到更进一步》。纽约：施普林格。[14] McFadden, R.D.（2019年）。Lee Iacocca，富有远见的汽车制造商。《纽约时报》。www.nytimes.com/2019/07/02/obituaries/lee-iacocca-dead.html

[15] Kellison, A.（2021年）。Steiner-Lehmus定理的机器验证直接证明。arXiv.org。http://https://arxiv.org/abs/2112.11182；访问于2021年12月31日。[16] Lee, J.M.（2014年）。公理几何美国数学会。[17] Lewin, M.（1974年）。论Steiner-Lehmus定理。数学杂志47，87–89。[18] Loomis, E. S.（1968年）。《勾股命题》。华盛顿特区：美国全国数学教师理事会。[19] Moise, E.（1990年）。《从高等观点看初等几何》。第3版。马萨诸塞州雷丁：Addison-Wesley出版公司。[20] Ol´ah-G´al, R.; S´andor, J.（2009年）。关于Steiner-Lehmus定理的三角证明。几何论坛9：155–160。[21] Oakley, C. O., Baker, J. C.（1978年）。莫利三等分线定理。《美国数学月刊》。85(9)：737–745。Ostermann, Alexander(A-INSB-DM); Wanner, Gerhard(CH-GENV-SM)《几何学史》。数学本科教材。数学阅读。施普林格，海德堡，2012年。xii+437 页。[22] Ostermann, A. 和 Wanner, G.（2012年）《几何学史》。海德堡：施普林格出版社。[23] Pambuccian, V.（2017年）。Steiner–Lehmus定理的无否定、无矛盾证明。《圣母大学形式逻辑杂志》。59(1)：75–90。[24] Sanderson, G.（2021年）。Steven Strogatz访谈。*3b1b*播客2:40。3Blue1Brown.com。https://www.youtube.com/watch?v=SUMLKweFAYk&t=1048s；访问于2023年6月4日。[25] Th´ebault, V.（1937年）。论等腰三角形。《数学公报》。21:242，52–53。马萨诸塞大学波士顿分校和新罕布什尔大学

eric.grinberg@umb.edu 和 mo@unh.edu