条形码熵与相对辛上同调

JONGHYEON AHN

arXiv:2601.15606v1 [math.SG] 22 Jan 2026

Abstract. 本文研究与嵌入辛流形M中的 Liouville 域 K 的相对辛上同调 $SH_M(K)$相关联的持久模的条形码熵——即长度不太短的条的数量的指数增长率。我们的主要结果建立了这一弗洛尔理论不变量与 ∂K上 Reeb 流动力学之间的定量联系。更确切地说，我们证明，相对辛上同调 $SH_M(K)$的条形码熵不超过该区域边界上 Reeb 流的拓扑熵的某个常数倍，其中该常数取决于 K 到 M的嵌入。

Contents

1. 引言 1 1.1. 研究动机 1 1.2. 主要结果 3 2. 预备知识 5 2.1. 持久模理论基础 5 2.2. 弗洛尔理论基础 6 2.3. 动力系统理论基础 9 3. Liouville 域的相对辛上同调 11 3.1. 定义的重新表述 11 3.2. 滤过相对辛上同调 14 4. 条形码熵 23 4.1. 定义 23 4.2. 条形码熵的比较 25 5. 相对辛上同调条形码熵的上界 26 5.1. 拉格朗日断层扫描与克罗夫顿不等式 26 5.2. 定理 A 的证明 27 参考文献 29

1. Introduction

1.1. 研究动机。 持久模最初是在拓扑数据分析框架中引入的，用于编码过滤过程中（上）同调特征的演变，如今其应用已远超最初的范畴。特别是，Polterovich 和 Shelukhin [19], 将这一概念引入辛几何领域，为研究

哈密顿系统的定量与动力学方面提供了强有力的代数形式体系。继他们的工作之后，持久模已成为研究弗洛尔理论不变量及其与哈密顿动力学之间联系的核心对象。

持久模理论中的一项基本结果是标准形定理，它断言每个持久模 (V,π) 都由一个区间多重集 $\mathcal{B}(V,\pi) = \{(I_i, m_i)\}$ 完全确定，其中区间带有重数 m_i。这个多重集 $\mathcal{B}(V,\pi)$ 称为 (V,π) 的条形码，其元素 $\mathcal{B}(V,\pi)$ 称为条。Cineli、Ginzburg 和 Gurel [3], 提出的持久模 (V,π) 的条形码熵，衡量条形码 $\mathcal{B}(V,\pi)$ 中"并非太短"的条的指数增长率。尽管条形码熵已在若干弗洛尔理论背景下得到研究，但其在相对辛上同调背景中的表现尚未得到探索。本文通过引入并分析与 Varolgunes 于 [24] 提出的相对辛上同调相关的条形码熵，开启了这方面的研究。

Cineli、Ginzburg 和 Gurel 对条形码熵的初步研究 [3] 着重于由哈密顿同伦的拉格朗日子流形对的拉格朗日弗洛尔上同调所产生的持久模结构。对于两个拉格朗日子流形 L 和 L'，其中 $L' = \varphi_H(L)$，且 φ_H 是与 H对应的哈密顿微分同胚，我们用 $\hbar(\varphi_H; L)$ 表示 $HF(L, L')$ 的条形码熵。他们的核心结果是，这一条形码熵受 φ_H的动力学控制：他们证明，条形码熵 $\hbar(\varphi_H; L)$ 不超过哈密顿微分同胚φ_H的拓扑熵 $h_{\mathrm{top}}(\varphi_H)$。

通过考察对角线 Δ 以及 φ_H的图像 Γ_{φ_H}，这一构造还为微分同胚φ_H 本身给出了条形码熵 $\hbar(\varphi_H)$ 的概念，即

$$\hbar(\varphi_H) = \hbar(\mathrm{id} \times \varphi_H; \Delta)$$

在这种情况下，我们仍然有相同的上界：

$$\hbar(\varphi_H) \leq h_{\mathrm{top}}(\varphi_H).$$

值得注意的是，这些条形码熵是有限的，因为已知光滑映射的拓扑熵是有限的。此外，他们还为 $\hbar(\varphi_H)$ 建立了一个非平凡的下界，表明

$$\hbar(\varphi_H) \geq h_{\mathrm{top}}(\varphi_H|_X)$$

只要 X 是 φ_H 的紧致双曲 不变集即可。特别是，这一下界表明 $\hbar(\varphi_H)$ 并非总是为零。因此，当环境辛流形是二维时，以下等式成立：

$$\hbar(\varphi_H) = h_{\mathrm{top}}(\varphi_H).$$

自 [3], 引入条形码熵以来，Floer 理论和动力系统的不同背景下发展出了各种相关概念。 [13], 引入了一种 Morse 理论意义下的条形码熵，并证明它与测地流的拓扑熵具有可比性。 [11] 将这一框架扩展到 Liouville 域的辛上同调，并证明条形码熵可以用边界上 Reeb 流的拓扑熵给出上界。随后， [4] 补充了与之匹配的下界。在最初的研究 [3], 中，拉格朗日条形码熵 $\hbar(\varphi_H; L)$ 并未得到下界。后来，

在 [15], 中建立了这一类下界，进一步阐明了该不变量在动力学方面的意义。最近，研究者在包裹弗洛尔上同调的背景下也得到了条形码熵类似的上界和下界；参见 [9, 10]。

尽管取得了这些进展，现有关于条形码熵的研究主要集中于绝对的弗洛尔理论不变量。相对辛上同调所处的位置在根本上有所不同：它所捕捉的弗洛尔理论信息不仅取决于 Liouville 域的内在几何，还取决于该区域如何嵌入更大的辛流形之中。这种额外的灵活性引出了新的概念性问题：持久性与熵应如何同时反映环境动力学和边界动力学。本文旨在弥补这一空白，为相对辛上同调发展一种条形码熵的概念，并确立它与边界上的 Reeb 流动力学之间精确的定量关系。

1.2. 主要结果。本小节陈述我们的主要结果。如上所述，我们将引入相对辛上同调 $SH_M(K)$ 的条形码熵。我们的主要贡献是为这一条形码熵建立一个上界：它不超过 Reeb 流的拓扑熵的某个常数倍。该常数取决于子集 K 在环境辛流形 M 中的嵌入方式，这体现了该不变量真正的相对性质。

设 (M,ω) 是一个闭辛流形，且 $K \subset M$ 是一个紧子集。Varolgunes[24] 在 M 中引入了 K 的相对辛上同调 $SH_M(K)$。在适当条件下，这种相对辛上同调具有持久模结构，现解释如下。若辛流形 (M,ω) 满足 $\omega|_{\pi_2(M)}=0$ 且 $c_1(TM)|_{\pi_2(M)}=0$，则称其为辛非球面的，其中 $c_1(TM)$ 是 M 的切丛TM的第一陈类。就我们而言，子集 $K \subset M$ 必须是一个 Liouville 域。这意味着， K 是 M 的一个余维为 0 且具有光滑边界的子流形，并且存在一个定义在 K 上的向量场 X，使得 $\mathcal{L}_X\omega = \omega$。Liouville 域的一个重要特征是，其边界 ∂K 自然携带一个接触结构：接触形式 α 由辛形式 ω 与向量场 X 的内 contraction 给出，即 $\alpha = \iota_X\omega|_{\partial K}$。对于这样的 Liouville 域 $K \subset M$，如果对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，在 $(\partial K,\alpha)$ 上、在 M 中可缩且其 Conley-Zehnder 指标为 k 的 $(\partial K,\alpha)$ 的 Reeb 轨道的周期集合是有界的，则称接触流形 $(\partial K,\alpha)$ 是指标有界的。

按照 [3], 中给出的持久模条形码熵定义，我们可以定义**相对辛上同调条形码熵**，并将其记为$\hbar(SH_M(K))$。粗略地说，这个量衡量了持久模 $SH_M(K)$ 的条形码中“不会太短”的条的指数增长率：对于 $\epsilon > 0$，令

$$b_\epsilon(\mathrm{tru}(SH_M(K)),\sigma)$$

表示在 σ 处持久模 $SH_M(K)$ 的截断中长度大于或等于 ϵ 的条数。注意， $b_\epsilon(\mathrm{tru}(SH_M(K))\ \sigma)$ 是关于 σ 的递增函数，也是关于 ϵ 的递减函数。我们定义

$$\hbar_\epsilon(SH_M(K)) = \limsup_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma} \log^+ b_\epsilon(\mathrm{tru}(SH_M(K)),\sigma),$$

and

$$\hbar(SH_M(K)) = \lim_{\epsilon\to 0} \hbar_\epsilon(SH_M(K))$$

其中 $\log^+ a = \max\{\log_2 a,\ 0\}$。

我们的结果是，条形码熵 $\hbar(SH_M(K))$ 有一个上界，即 Reeb 流 φ_α^t 在 $(\partial K, \alpha)$ 上的拓扑熵 $h_{\mathrm{top}}(\varphi_\alpha^t)$ 的某个常数倍；该常数取决于 K 嵌入 M的方式。

定理 A (定理 5.2)。 设(M,ω) 是一个闭辛流形， $K \subset M$ 是一个 ***Liouville*** 域。假设(M, ω) 是辛非球面的，且$(\partial K, \alpha)$ 是指标有界的。那么存在一个常数 $C = C(M, K) > 0$， 它取决于这对(M, K)，使得

$$\hbar(SH_M(K)) \le C\, h_{top}(\varphi_\alpha^1)$$

其中 φ_α^t 是$(\partial K, \alpha)$上的 ***Reeb*** 流。

定理 A 中的常数 $C(M, K)$ 源于对一个领圈邻域的选择：该邻域经辛嵌入后位于 M 中，且其边界为∂K 。固定这样一个有限长度的领圈后，考虑在领圈的某个子区域上关于径向坐标呈线性的哈密顿函数。定理 A 中的估计涉及此类哈密顿函数斜率的下确界，而最优上界则通过改变领圈长度直至嵌入所允许的最大值来获得。因此，常数 $C(M, K)$ 反映了 K 嵌入 M的定量规模。从概念上说，这表明相对辛上同调的持久性结构的复杂性受 Liouville 域边界上 Reeb 流的动力学复杂性所控制。与孤立 Liouville 域的辛上同调不同，相对不变量保留了边界附近周围辛几何的信息，突显了它对 K 嵌入 M这一选择的敏感性。

定理 A 的一个直接推论是，条形码熵 $\hbar(SH_M(K))$ 是有限的，因为已知光滑流的拓扑熵是有限的。此外， $SH_M(K)$ 中长度不太短的条的数量至多呈指数增长。

论文结构。由于本文涉及数学的多个领域，我们在第 2 节汇集各个领域的基本概念和事实，以供全文使用。本预备章节并不旨在面面俱到；建议读者查阅各小节提供的参考文献，以了解更多细节。第 3 节详细阐述 Liouville 域的相对辛上同调的定义与结构。第 4 节正式定义相对辛上同调条形码熵 $\hbar(SH_M(K))$，并探讨它与先前定义的、关联于哈密顿函数的条形码熵之间的关系。上界定理 A 的证明将在第 5 节给出，我们首先说明论证所需的关键概念和要素。

致谢。 作者感谢 Rafael Fernandes 和 Joao Pering 提供了有益的讨论，并感谢 Yong-Geun Oh 的鼓励和真知灼见。作者还感谢 Ely Kerman 阅读了本文的早期稿件。

2. 预备知识

2.1. 持久模理论简介。 下文将简要回顾持久模理论，大部分内容改编自 [7, 18]。在给出持久模的定义之前，先固定一个基域 $\Bbbk$，并且通常在记号中省略它。

定义 2.1。 一个**持久模** 是一个二元组 $(V,\ \pi)$，其中 V是由有限维向量空间组成的集合，这些向量空间定义在$\Bbbk$ 上，而 $\pi = \{\pi_{\tau_1\tau_2} : V_{\tau_1} \longrightarrow V_{\tau_2}\}_{\tau_1,\ \tau_2\in\mathbb{R}}$ 是从 V_{τ_1} 到 V_{τ_2} 的线性映射集合，其中 $\tau_1 \le \tau_2$ 满足以下条件:

(a) 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$、 $\pi_{\tau\tau} = id_{V_\tau}$ 以及任意 $\tau_1 \le \tau_2 \le \tau_3$、 $\pi_{\tau_1\tau_3} = \pi_{\tau_2\tau_3} \circ \pi_{\tau_1\tau_2}$，均有。

$$V_{\tau_1} \xrightarrow[\pi_{\tau_1\tau_2}]{} V_{\tau_2} \xrightarrow[\pi_{\tau_2\tau_3}]{} V_{\tau_3}, \qquad V_{\tau_1} \xrightarrow{\pi_{\tau_1\tau_3}} V_{\tau_3}$$

(b) 存在一个闭的、有下界且处处稀疏的子集 Spec$(V,\ \pi) \subset \mathbb{R}$，称为 $(V,\ \pi)$ 的**谱**，使得当 τ_1 和 τ_2 位于 Spec$(V,\ \pi)$ 的同一个连通分支中时，$\pi_{\tau_1\tau_2} : V_{\tau_1} \longrightarrow V_{\tau_2}$ 是同构。

(c) 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$，以及任意与 τ 足够接近的 $\tau' \le \tau$，映射 $\pi_{\tau'\tau}\colon V_{\tau'} \longrightarrow V_\tau$ 是同构。

(d) 存在 $\tau_0 \in \mathbb{R}$，使得对于 $\tau \le \tau_0$，有 $V_\tau = 0$。

当上下文清楚时，我们通常用记号 V 表示持久模 (V, π)。

区间持久模是持久模的一个重要例子。对于区间 $I = (a, b]$，其中 $-\infty < a < b \le \infty$，区间持久模 $\Bbbk I = (V, \pi)$ 定义为

$$V_\tau = \begin{cases} \Bbbk & \text{if } \tau \in I \\ 0 & \text{if } \tau \notin I, \end{cases}$$

and

$$\pi_{\tau_1\tau_2} = \begin{cases} \mathrm{id}_\Bbbk & \text{if } \tau_1, \tau_2 \in I \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

持久模理论中的一个关键事实是标准形定理。在陈述该定理之前，我们需要了解持久模之间的等价概念。设 (V, π) 和 (V', π') 是两个持久模。**态射** $A : (V, \pi) \longrightarrow (V', \pi')$ 是一族线性映射$\{A_\tau\colon V_\tau \longrightarrow V'_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$，满足 $A_{\tau_2} \circ \pi_{\tau_1\tau_2} = \pi'_{\tau_1\tau_2} \circ A_{\tau_1}$对所有 $\sigma \le \tau$ 均成立。

$$\begin{array}{ccc} V_{\tau_1} & \xrightarrow{A_{\tau_1}} & V'_{\tau_1} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\tau_1\tau_2}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'_{\tau_1\tau_2}} \\ V_{\tau_2} & \xrightarrow[A_{\tau_2}]{} & V'_{\tau_2} \end{array}$$

如果存在两个态射，则称两个持久模 (V,π) 和 (V',π') **同构**

$$A:(V,\pi)\longrightarrow(V',\pi') \text{ and } B:(V',\pi')\longrightarrow(V,\pi)$$

使得 $A\circ B:(V',\pi')\longrightarrow(V',\pi')$ 是恒等态射，且 $B\circ A:(V,\pi)\longrightarrow(V,\pi)$ 也是恒等态射。此外，我们可以定义两个持久模 V 和 V' 的**直和** $(V\oplus V',\pi\oplus\pi')$，定义如下：

$$(V\oplus V')_\tau = V_\tau\oplus V'_\tau \text{ and } (\pi\oplus\pi')_{\tau_1\tau_2}=\pi_{\tau_1\tau_2}\oplus\pi'_{\tau_1\tau_2}$$

并且，这一定义可以直接推广到无限多个持久模。

定理 2.2 (标准形定理)。设 (V,π) 是一个持久模。那么存在一个可数集合 $\{(I_i,m_i)\}_{i=1,\,2,\,3,\,\cdots}$，由区间 I_i 构成，重数为 m_i，使得

$$(V,\pi)\cong\bigoplus_{i=1}^{\infty}(\Bbbk I_i)^{m_i}.$$

此外，这种分解在置换意义下是唯一的；也就是说，对于任意持久模 (V,π)，都存在唯一的多重集 $\mathcal{B}(V,\pi)$，它由区间 I_i 构成，重数为 m_i。这个多重集 $\mathcal{B}(V,\pi)$ 称为该持久模 V 的条形码，而 $\mathcal{B}(V,\pi)$ 中的一个元素称为条 (V,π)。

我们通过介绍一种对持久模的有用运算来结束本小节，该运算将在下文中发挥重要作用。令 $\sigma\in\mathbb{R}$。$(V,\ \pi)$ 的 **截断**$\mathrm{tru}(V,\ \pi;\sigma)\ =(\mathrm{tru}(V;\sigma),\ \mathrm{tru}(\pi;\sigma))$ 定义为

$$\mathrm{tru}(V;T)_\tau=\begin{cases}V_\tau & \text{if } \tau<\sigma\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

and

$$\mathrm{tru}(\pi;\sigma)_{\tau_1\tau_2}=\begin{cases}\pi_{\tau_1\tau_2} & \text{if } \tau_2<\sigma\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

2.2. **弗洛尔理论**。本小节回顾下文所需的弗洛尔理论的基本方面。经验丰富的读者可以直接继续阅读下一节。

2.2.1. *Hamiltonian Floer* 上同调。我们首先介绍基环。**Novikov 域** Λ 定义为

$$\Lambda=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}a_iT^{\lambda_i}\;\middle|\;a_i\in\mathbb{Q},\lambda_i\in\mathbb{R}\text{ and }\lim_{i\to\infty}\lambda_i=\infty\right\}$$

其中 T 是一个形式变量。存在一个 **赋值映射** $\mathrm{val}:\ \Lambda\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，定义如下：

$$\mathrm{val}(x)=\begin{cases}\min\limits_i\{\lambda_i\mid a_i\neq0\} & \text{if } x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_iT^{\lambda_i}\neq0\\ \infty & \text{if } x=0.\end{cases}$$

对于任意 $r \in \mathbb{R}$，定义 $\Lambda_{\geq r} = \mathrm{val}^{-1}([r, \infty])$。特别地，我们称

$$\Lambda_{\geq 0} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \in \Lambda \,\middle|\, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

该**Novikov环**。

设 (M, ω) 为一个辛流形，且 $H\colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$ 是 M 上的一个哈密顿函数。H 的 **哈密顿向量场** X_H 定义为

$$\iota_{X_H}\omega = dH.$$

若哈密顿函数 $H\colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$ 满足：X_H 的每个 1-周期轨道x 都是**非退化**的，则称其为非退化函数。也就是说，对于 H 的哈密顿流ϕ_H^t，映射

$$(d\phi_H^1)_{x(0)} : T_{x(0)}M \longrightarrow T_{x(1)}M = T_{x(0)}M$$

没有等于 1 的特征值。我们用 $\mathcal{P}(H)$ 表示 X_H 的所有非退化可缩1-周期轨道的集合。设 $x \in \mathcal{P}(H)$ 和 c_x 是一个圆盘封帽。(x, c_x) 的**作用量**定义为

$$\mathcal{A}_H(x, c_x) = \int_{D^2} c_x^* \omega + \int_{S^1} H(t, x(t))dt. \tag{1}$$

我们可以利用*Conley-Zehnder* 指标为一对 (x, c_x) 关联一个整数，记为 $\mu_{\mathrm{CZ}}(x, c_x)$。在由可缩1-周期轨道及其封帽组成的配对集合上定义等价关系如下：

$$(x, c_x) \sim (y, c_y) \text{ if and only if } x = y,\ \mathcal{A}_H(x, c_x) = \mathcal{A}_H(y, c_y) \text{ and } \mu_{\mathrm{CZ}}(x, c_x) = \mu_{\mathrm{CZ}}(y, c_y)$$

我们将 (x, c_x) 的等价类记为 $[x, c_x]$，并将所有等价类组成的集合记为 $\widetilde{\mathcal{P}}(H)$。$H$ 的 **Floer复形**定义为

$$CF(H) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i [x_i, c_{x_i}] \,\middle|\, a_i \in \mathbb{Q}, [x_i, c_{x_i}] \in \widetilde{\mathcal{P}}(H) \text{ and } \lim_{i\to\infty} \mathcal{A}_H([x_i, c_{x_i}]) = \infty \right\}.$$

$CF(H)$ 的分次由*Conley-Zehnder* 指标给出（见 [20]），即

$$|[x, c_x]| = \mu_{\mathrm{CZ}}([x, c_x]).$$

特别地，H 的第 k 个 Floer复形 $CF^k(H)$ 为

$$CF^k(H) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i [x_i, c_{x_i}] \in CF(H) \,\middle|\, \mu_{\mathrm{CZ}}([x, c_x]) = k \right\}.$$

在切丛 TM 上固定一个一般的几乎复结构 J，其中 M。对于 x、$y \in \mathcal{P}(H)$，令 $\pi_2(M, x, y)$ 表示从 $\mathbb{R} \times S^1$ 到 $\widetilde{M}$ 的光滑映射的同伦类集合，这些映射在 $-\infty$ 和 ∞ 处分别渐近于 x 和 y。对于 $[x, c_x]$、$[y, c_y] \in \widetilde{\mathcal{P}}(H)$ 以及 $A \in \pi_2(M, x, y)$，模空间 $\mathcal{M}(H, J; [x, c_x], [y, c_y]; A)$ 是满足以下条件的光滑映射$u : \mathbb{R} \times S^1 \longrightarrow M$ 的集合。

- u 的同伦类表示 $A \in \pi_2(M, x, y)$。
- $\dfrac{\partial u}{\partial s} + J(u)\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)\right) = 0.$

- $\lim_{s\to-\infty} {}^{u}(s,\ t) = x(t)$ 和 $\lim_{s\to\infty} {}^{u}(s,\ t) = y(t)$。
- $[y, c_y] = [y, c_x \# (-u)] = [y, c_x \# (-A)]$ 其中 # 表示连通和。

注意，如果 $u \in \mathcal{M}(H,\ J;\ [x, c_x],\ [y, c_y];\ A)$，那么 $\mathcal{A}_H([x, c_x]) \leq \mathcal{A}_H([y, c_y])$ 且 $\mu_{\mathrm{CZ}}([x, c_x]) \leq \mu_{\mathrm{CZ}}([y, c_y])$。Floer复形$CF(H)$的**Floer 微分** d：$CF^*(H) \longrightarrow CF^{*+1}(H)$ 定义如下：

$$d[x, c_x] = \sum_{\substack{[y,c_y]\in\widetilde{\mathcal{P}}(H)\\ A\in\pi_2(M,x,y)}} \#\mathcal{M}(H, J; [x, c_x], [y, c_y]; A) T^{E_{\mathrm{top}}(u)} [y, c_y]$$

其中 $\#\mathcal{M}(H;\ [x, c_x],\ [y, c_y];\ A)$ 是模空间 $\mathcal{M}(H;\ [x, c_x],\ [y, c_y];\ A)$ 的虚拟计数（见 [17]），而 Floer 轨线 u 的**拓扑能量** $E_{\mathrm{top}}(u)$ 定义如下：

$$E_{\mathrm{top}}(u) = \int_{S^1} H_t(y(t))dt - \int_{S^1} H_t(x(t))dt + \omega(A).$$

容易证明，拓扑能量等于由一条 Floer 轨线连接的两个带帽轨道的作用量之差：

$$E_{\mathrm{top}}(u) = \mathcal{A}_H([y, c_y]) - \mathcal{A}_H([x, c_x]).$$

由于 Floer 微分 d 满足 $d \circ d = 0$，H 的 **Floer 上同调** $HF(H)$ 定义为

$$HF^*(H) = H^*\left(CF(H), d\right).$$

Floer 上链复形具有由作用量泛函给出的滤过。对每个 $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，定义

$$CF^{>L}(H) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i [x_i, c_{x_i}] \in CF(H) \,\middle|\, \mathcal{A}_H([x_i, c_{x_i}]) > L \text{ for all } i \right\}.$$

这个子集 $CF^{>L}(H)$ 属于 $CF(H)$，实际上是 $CF(H)$ 的一个子复形，因为 Floer 微分会增大作用量。因此，我们可以定义

$$HF^{>L,*}(H) = H^*(CF^{>L}(H), d).$$

对于 $L < L'$，我们进一步定义截断 Floer 上同调

$$HF^{(L,L'],*}(H) = H^*\left(CF^{>L}(H)/CF^{>L'}(H), \overline{d}\right)$$

其中，$\overline{d}$ 是由 d 在商复形上诱导的 $CF^{>L}(H)/CF^{>L'}(H)$ 的微分。。

对于两个哈密顿函数 H_1 和 H_2，满足 $H_1 \leq H_2$，取一个从 H_1 到 H_2 的哈密顿函数的单调同伦 H_s。那么存在一个**延拓映射**

$$c^{H_1,H_2} : CF(H_1) \longrightarrow CF(H_2)$$

由连接 H_1 和 H_2 轨道的 H_s Floer 轨线的适当计数定义。此映射也以 $T^{E_{\mathrm{top}(u)}}$ 加权，方式与上文定义 Floer 微分类似。每个延拓映射都会诱导一个映射 $HF(H_1) \longrightarrow HF(H_2)$。注意，延拓映射会增大作用量并保持分次，因此该映射

$$c^{H_1,H_2} : CF^{>L}(H_1) \longrightarrow CF^{>L}(H_2)$$

是有意义的，并且这也会诱导一个映射 $HF^{>L}(H_1) \longrightarrow HF^{>L}(H_2)$。当然，延拓映射会诱导一个映射 $HF^{(L,L']}(H_1) \longrightarrow HF_{(L,L']}(H_2)$。

H取系数于 Λ的 Floer 上同调 $HF(H;\Lambda)$ 定义为

$$HF^*(H;\Lambda) = H^*\left(CF(H)\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda\right) = HF^*(H)\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda.$$

2.2.2. 相对辛上同调。 我们简要回顾 Varolgunes 在 [24]中引入的相对辛上同调。详细说明及其应用也可见 [1, 2, 8, 16, 21]。

相对辛上同调的一个重要组成部分是对 Floer复形进行完备化，下面我们将对此作出解释。对于任意的 $\Lambda_{\geq 0}$-模 A，我们可以如下定义其完备化：对于 $r' > r$，存在一个映射

$$\Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r'} \longrightarrow \Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r}$$

而这个映射诱导出一个映射

$$A\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r'} \longrightarrow A\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r}. \tag{2}$$

那么，$\left\{A\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r}\right\}_{r>0}$ 便是一个逆系统，其映射由式 (2) 给出。A 的**完备化** A定义为

$$\widehat{A} = \varprojlim_{r\to 0} A\otimes\Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r}.$$

设 (M,ω) 是一个闭辛流形，并设 $K\subset M$ 是一个紧子集。若非退化哈密顿函数 H 在 $S^1\times K$ 上为负，则称其为 **K- 可容许的** 。我们用 $\mathcal{H}_K$ 表示所有 K- 可容许哈密顿函数的集合。我们可以将 K 在 M 中的**相对辛上同调** $SH_M(K)$定义为

$$SH_M^*(K) = H^*\left(\widehat{\varinjlim_{H\in\mathcal{H}_K} CF(H)}\right) \tag{3}$$

其中 $\widehat{\varinjlim_{H\in\mathcal{H}_K}} CF(H)$ 表示 $\varinjlim_{H\in\mathcal{H}_K} CF(H)$ 的完备化。此外，定义

$$SH_M^*(K;\Lambda) = SH_M^*(K)\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda.$$

2.3. 来自动力系统理论。 本小节总结本文中将用到的动力系统理论的一些事实。有关全面的阐述，请参见 [14, 22]。

设 (X,d) 是一个紧致度量空间，并设 $f\colon X\longrightarrow X$ 是一个连续映射。定义一个递增的度量序列 $\{d_\ell^f\}$，其中 $\ell = 1,2,3,\cdots$，如下所示：

$$d_\ell^f(x,y) = \max_{1\leq i\leq \ell-1} d(f^i(x), f^i(y)) \tag{4}$$

其中，f^i 表示将 f 与自身复合 i 次。令

$$B_f(x,\epsilon,\ell) = \left\{ y\in X \;\middle|\; d_\ell^f(x,y) < \epsilon \right\}.$$

如果集合 $E \subset X$ 满足以下条件，则称其为（ℓ，ϵ）**-张成的**

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \epsilon, \ell).$$

令 $S_d(f, \epsilon, \ell)$ 表示 (ℓ, ϵ)-生成集的最小基数。则 f 的**拓扑熵** $h_{\text{top}}(f)$ 定义为

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{\ell \to \infty} \frac{1}{\ell} \log S_d(f, \epsilon, \ell).$$

显然，恒等映射的拓扑熵为零。流的拓扑熵定义与此完全类似。设 $F = \{f^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 是 X 上的连续流。度量 (4) 的对应形式是如下度量族

$$d_T^F(x, y) = \max_{0 \le t \le T} d(f^t(x), f^t(y))$$

对每个 $T \in \mathbb{R}$。我们可以将流 F 的拓扑熵 $h_{\text{top}}(F) = h_{\text{top}}(f^t)$ 定义为

$$h_{\text{top}}(F) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log S_d(F, \epsilon, T).$$

注意，映射和流的拓扑熵都不依赖于度量 d 的选取。下面列出拓扑熵的一些有用性质。

- $h_{\text{上确界}}(F) = h_{\text{上确界}}(f^1)$。
- 对每个 $t \in \mathbb{R}$, $h_{\text{上确界}}(f^t) = |t| h_{\text{上确界}}(f^1)$。
- 对每个 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $t \in \mathbb{R}$, $h_{\text{上确界}}(f^{mt}) = |m| h_{\text{上确界}}(f^t)$。

这些性质表明，流 $\{f^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 的拓扑熵由其时间-1映射 f^1控制。

事实上，本文不会直接使用拓扑熵的定义；相反，我们将使用体积增长率。设 X 为一个光滑黎曼流形，且$f\colon X \longrightarrow X$ 为一个光滑映射。记 f 的图像为 Γ_f，即

$$\Gamma_f = \left\{ (x, f(x)) \in X \times X \,\middle|\, x \in X \right\}.$$

对于 X中的一个光滑子流形 Y，指数体积增长率 $h_{\text{vol}}(f|_Y)$ 定义为

$$h_{\text{vol}}(f|_Y) = \limsup_{\ell \to \infty} \frac{1}{\ell} \log \text{Vol}\left(\Gamma_{f^\ell|_Y}\right)$$

其中 Vol 表示由给定黎曼度量诱导的体积。与 f 相关的指数增长率有两个：拓扑熵 $h_{\text{top}}(f|_Y)$ 和体积增长率 $h_{\text{vol}}(f|_Y)$。根据 Yomdin 定理，这些量之间存在如下关系。

定理 2.3 (Yomdin)。 设 X 是一个光滑黎曼流形，$f\colon X \longrightarrow X$ 是一个光滑映射。对于 X 的光滑子流形 Y，有

$$h_{vol}(f|_Y) \le h_{top}(f|_Y). \tag{5}$$

证明。 参见 [12] 和 [25]。

□

备注 2.4。 在定理 2.3（以及本文全文）中， f 的光滑性被理解为 C^∞-光滑性。如果假设映射 f 仅对某个$r < \infty$为 C^r-光滑，则必须在不等式 (5) 的右侧添加一个依赖于 r 的额外项。有关更多详细信息，请参见 [12] 和 [25] 。

3. Relative symplectic cohomology of a Liouville domain

本节旨在探讨相对辛上同调的其他性质，重点关注子集 K 为 Liouville 域的情形。

3.1. 定义的重新表述。 若存在定义在紧致辛流形 K 的某个邻域上的外向向量场 X ，满足 $\mathcal{L}_X\omega = \omega$，则称 K 具有**接触型边界**。我们称向量场 X 为**李乌维尔向量场**。接触型边界 ∂K 的一项基本性质是，它具有自然的接触结构，其接触形式 α 由下式给出：

$$\alpha = \iota_X\omega|_{\partial K}.$$

若李乌维尔向量场 X 定义在 K上，则称 K 为**Liouville 域**。记$\widehat{}$的**辛完备化**为 K ，即

$$\widehat{K} = K \cup_{\partial K} (\partial K \times [1, \infty))$$

其在 $\partial K \times [1, \infty$上的辛形式 $\widehat{\omega}$ 由 $\widehat{\omega} = d(r\alpha)$给出，其中 α 是 ∂K 上的接触形式， r 是 $[1, \infty$上的坐标。我们分别用 R_α 和 φ_α^t表示接触流形（∂K， α）上的 Reeb 向量场和 Reeb 流。

设 (M, ω) 是一个闭辛流形，且 $K \subset M$ 是一个带有接触型边界的紧区域[1)] $\widehat{}$。尽管 K 的辛完备化无法嵌入 M 内部，我们仍可在某个 $r_1 > 0$ 下，考虑 M 中 ∂K 的一个小领圈邻域 $\partial K \times [1, 1 + 3r_1]$。如果一个哈密顿函数 $H\colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，我们称其为**接触型K-容许的**。

(A1) H 在 $S^1 \times K$ 上为负。

(A2) 在 $S^1 \times (\partial K \times [1, 1 + 3r_1])$ 上， $H(t, p, r) = h(r)$，其中

对于某个严格凸且递增的函数 h_1，在 $S^1 \times (\partial K \times [1, 1 + r_1])$ 上，• $h(r) = h_1(r)$，

• $h(r) = s_H r - i_H$在 $S^1 \times (\partial K \times [1 + r_1, 1 + 2r_1])$ 上，其中 H 的斜率 s_H 满足 $s_H \notin \mathrm{Spec}(\partial K, \alpha)$ 和 $i_H \in \mathbb{R}$。这里，$\mathrm{Spec}(\partial K, \alpha)$ 表示 $(\partial K, \alpha)$ 上所有可缩 Reeb 轨道的周期集合，并且

• $h(r) = h_2(r)$ 在 $S^1 \times (\partial K \times [1 + 2r_1, 1 + 3r_1])$ 上，对某个严格凹且递增的函数 h_2 而言。

(A3) 对于某个常数 $H = c_H$，在 $S^1 \times (M - (K \cup (\partial K \times [1, 1 + 3r_1])))$ 上成立。

1)区域是指具有光滑边界的零余维子流形。

我们记 将所有接触型 K-可容许哈密顿函数组成的集合记为 $\mathcal{H}_K^{\mathrm{Cont}}$.

由于 K 具有接触型边界，我们可以在 M上围绕 ∂K 选取一个**柱状**几乎复结构 J，它与 ω 相容，并满足

$$dr \circ J = -r\alpha.$$

利用上述所有 Floer 数据，我们可以将定义 (3) 改写为

$$SH_M^*(K) = H^*\left(\widehat{\varinjlim_{H \in \mathcal{H}_K^{\mathrm{Cont}}}} CF(H)\right) \tag{6}$$

其中 $CF(H) = \quad \sim \quad \sim CF(H)$，且 H是 H的一个小的非退化扰动，并满足 $s_H = s_{\tilde{H}}$.

我们再引入一个对我们有用的术语。若哈密顿函数 $H\colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$ 满足 $(A1 - A3)$，但将 $(A1)$ 替换为**接触型 K-半可容许**条件，则称其为**接触型 K-半可容许**的。

$(\mathrm{A1}')$ $H = 0$ on $S^1 \times K$.

注意， K-可容许哈密顿函数并非 K-半可容许。 K-半可容许哈密顿函数的斜率 s_H、 y-截距 i_H 以及常数 c_H K满足以下关系。我们可以证明

$$s_H \leq i_H$$

因为

$$\begin{aligned}
-i_H &= -(1+r_1)h_1'(1+r_1) + h_1(1+r_1) && y\text{-intercept} \\
&= -(1+r_1)s_H + \int_1^{1+r_1} h_1'(r)dr && h(1) = 0 \\
&\leq -(1+r_1)s_H + \int_1^{1+r_1} s_H\, dr && h_1 \text{ is convex on } [1, 1+r_1] \\
&= -s_H.
\end{aligned}$$

此外，我们还可以用 s_H 给出 c_H 的估计：

$$c_H \leq 3r_1 s_H. \tag{7}$$

事实上，

$$\begin{aligned}
c_H &= h(1+3r_1) - h(1) \\
&= \int_1^{1+3r_1} h'(r)dr \\
&= \int_1^{1+r_1} h_1'(r)dr + \int_{1+r_1}^{1+2r_1} s_H\, dr + \int_{1+2r_1}^{1+3r_1} h_2'(r)dr \\
&\leq 3r_1 s_H
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由以下事实得出： $h_1'(r) \leq s_H$ 且 $h_2'(r) \leq s_H$。

对于任意 K（半）可容许哈密顿函数 H，扰动后有 4 种哈密顿轨道：

- 包含在 K 中的临界点,
- 来自 h_1 的非恒定哈密顿轨道,
- 来自 h_2 的非恒定哈密顿轨道，以及
- 位于 K 之外的临界点。

我们将前两类轨道称为下轨道，将后两类轨道称为上轨道。

定义 (6) 还可以通过以下定理改写为关于 K-半可容许哈密顿函数的表述。

命题 3.1。 设(M,ω) 是一个闭辛流形，且 $K \subset M$ 是一个具有接触型边界的紧域。对于任意接触型 K-半可容许哈密顿函数 H，我们有

$$SH_M(K) = H\left(\widehat{\varinjlim_{\sigma\to\infty}} CF(\sigma H)\right)$$

证明。设 $\{\sigma_i\}$ 是一个正数递增序列， $\{\epsilon_i\}$ 是一个正数递减序列，并满足

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_i = \infty \text{ and } \lim_{i\to\infty} \epsilon_i = 0.$$

对于每个 $i = 1$，2，3，$\cdots$，定义函数 H_i如下

$$H_i = s_i H - \epsilon_i.$$

于是，每个 H_i 都是接触型 K-可容许哈密顿函数，且序列 $\{H_i\}_{i=1,\ 2,\ \cdots}$是 $\mathcal{H}_K^{\mathrm{Cont}}$的余终序列，也就是说,

$$H_1 \le H_2 \le H_3 \le \cdots \text{ and } \lim_{i\to\infty} H_i(t,p) = \begin{cases} 0 & \text{if } p \in K \\ \infty & \text{if } p \notin K. \end{cases}$$

由于 H_i 和 $s_i H$ 相差一个常数 ϵ_i，我们有

$$CF(H_i) = CF(\sigma_i H)$$

作为上链复形，因此,

$$\widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF(H_i) = \widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF(\sigma_i H) \tag{8}$$

也成立为复形的等式。于是

$$\begin{aligned} SH_M(K) &= H\left(\widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF(H_i)\right) && \text{定义} \\ &= H\left(\widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF(\sigma_i H)\right) && \text{by (8).} \end{aligned}$$

由于 $\{\sigma_i\}$可以取为任意满足 $\lim_{i\to\infty} \sigma_i = \infty$ 的单调递增序列，因此证明得证。

□

3.2. 滤过相对辛上同调。 对于相对辛上同调，我们同样有作用量滤过，并且可以用自然的方式定义。更确切地说，对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$,

$$SH_M^{>-\tau}(K) = H\left(\widehat{\varinjlim_{H\in\mathcal{H}_K}} CF^{>-\tau}(H)\right). \tag{9}$$

显然，若 K 具有接触型边界，我们可将（9）改写为

$$SH_M^{>-\tau}(K) = H\left(\widehat{\varinjlim_{H\in\mathcal{H}_K^{\mathrm{Cont}}}} CF^{>-\tau}(H)\right).$$

在本小节余下部分中，假设 (M,ω) 满足 $\omega|_{\pi_2(M)}=0$，因此由（1）给出的作用量仅依赖于哈密顿轨道，而不依赖于其圆盘封盖。令 $K \subset M$ 为具有接触型边界的紧域。若在 $S^1 \times (\partial K \times [1, 1+3r_1])$ 上给定的可容许哈密顿函数 H 在 $h(r)$ 上为 K(-半)形式，则哈密顿向量场为

$$X_H(p,r) = -h'(r)R_\alpha(p)$$

在 $\partial K \times [1, 1+3r_1]$ 上，其中 R_α 是 $(\partial K, \alpha)$ 的 Reeb 向量场。因此，$(\partial K, \alpha)$ 的每条 T-周期 Reeb轨道 γ，都对应于 H 的一条 1-周期哈密顿轨道 $x=(\gamma, r_*)$，其满足$h'(r_*) = T$，但运动方向相反。与这一对应关系相关联的是两个 Conley–Zehnder指标：一个将 x 作为哈密顿轨道计算，另一个将 γ 作为 Reeb轨道计算。将前者记为 $\mu_{\mathrm{CZ}}^{\mathrm{Ham}}$，后者记为 $\mu_{\mathrm{CZ}}^{\mathrm{Reeb}}$，二者之间的关系为

$$\mu_{\mathrm{CZ}}^{\mathrm{Ham}}(x) = n - \mu_{\mathrm{CZ}}^{\mathrm{Reeb}}(\gamma) \tag{10}$$

其中 $n=\frac{1}{2}$维数 M。

若 K 是一个 Liouville 域，并且给定一个 K（半）可容许哈密顿函数 H，其在 $S^1 \times (\partial K \times [1, 1+3r_1])$ 上的表达式为 $h(r)$，那么非恒定哈密顿轨道$x=(\gamma, r_*)$的作用量可按如下方式计算

$$\mathcal{A}_H(x) = -r_* h'(r_*) + h(r_*). \tag{11}$$

注意，(11) 只依赖于 r_*。利用这一观察，我们可以看出，K-半可容许哈密顿函数的下轨道的作用量为负。事实上，对于 K-半可容许哈密顿函数 H 的 $r_* \in (1, 1+r_1)$ 的下轨道 $x=(\gamma, r_*)$，我们有

$$h(r_*) \le (r_*-1)h'(r_*) \tag{12}$$

因为

$$\begin{aligned} h(r_*) &= h(r_*) - h(1) && h(1)=0 \\ &= \int_1^{r_*} h'(r)dr \\ &\le \int_1^{r_*} h'(r_*)dr && h \text{ 在 } (1, 1+r_1) \text{ 上是凸的} \\ &= (r_*-1)h'(r_*). \end{aligned}$$

由此可知， x 的作用量为负：

$$\mathcal{A}_H(x) = -r_* h'(r_*) + h(r_*) \leq -r_* h'(r_*) + (r_* - 1)h'(r_*) = -h'(r_*) < 0$$

其中，最后一个不等式是由 h 递增这一事实得出的。我们可以对上轨道的作用量得到类似的估计。设 $x = (\gamma,\ r_*)$ 是 H 的一个上轨道，满足 $r_* \in (1 + 2r_1,\ 1 + 3r_1)$，且 $h'(r_*)$ 是 γ 的周期。注意，

$$\begin{aligned} c_H - h(r_*) &= h(1 + 3r_1) - h(r_*) && c_H = h(1 + 3r_1) \\ &= \int_{r_*}^{1+3r_1} h'(r)dr \\ &\leq \int_{r_*}^{1+3r_1} h'(r_*)dr && h \text{ is concave on } (1 + 2r_1, 1 + 3r_1) \\ &\leq (1 + 3r_1 - r_*)h'(r_*) \end{aligned}$$

利用这一估计，我们得到

$$\mathcal{A}_H(x) \geq c_H - (1 + 3r_1)\mathcal{A}(\gamma). \tag{13}$$

其中， $\mathcal{A}(\gamma)$ 表示 γ 的周期。事实上，

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(x) &= -r_* h'(r_*) + h(r_*) \\ &\geq -r_* h'(r_*) - (1 + 3r_1 - r_*)h'(r_*) + c_H \\ &= c_H - (1 + 3r_1)h'(r_*) \\ &= c_H - (1 + 3r_1)\mathcal{A}(\gamma). \end{aligned}$$

定义函数 $A_h\colon [1, 1 + r_1] \cup [1 + 2r_1, 1 + 3r_1] \to \mathbb{R}$，使得

$$A_h(r) = \begin{cases} A_{h_1}(r) = -rh_1'(r) + h_1(r) & \text{if } r \in [1, 1 + r_1] \\ A_{h_2}(r) = -rh_2'(r) + h_2(r) & \text{if } r \in [1 + 2r_1, 1 + 3r_1]. \end{cases}$$

Then 对于任意非恒定轨道 $x = (\gamma,\ r_*)$，作用量 (11) 可表示为 s

$$\mathcal{A}_H(x) = A_h(r_*).$$

注意到

$$\frac{d}{dr}A_h(r) = -h'(r) - rh''(r) + h'(r) = -rh''(r). \tag{14}$$

在 $[1, 1 + r_1]$ 上，由于 h_1 的凸性，函数 A_h 递减，因此

$$\max_{r\in[1,1+r_1]} A_h(r) = A_{h_1}(1) = 0 \text{ and } \min_{r\in[1,1+r_1]} A_h(r) = A_{h_1}(1 + r_1) = -i_H.$$

类似地，由于 h_2 的凹性，函数 A_h 在 $[1 + 2r_1, 1 + 3r_1]$ 上递增，并且

$$\max_{r\in[1+2r_1,1+3r_1]} A_h(r) = A_{h_2}(1 + 3r_1) = c_H \text{ and } \min_{r\in[1+2r_1,1+3r_1]} A_h(r) = A_{h_2}(1 + 2r_1) = -i_H.$$

我们引入作用量泛函的另一种变体，它用 $(\partial K, \alpha)$ 的 Reeb轨道周期来表示作用量。定义 $a_H\colon\ [0, 2s_H] \to \mathbb{R}$ 为

$$a_H(\tau) = \begin{cases} a_{h_1}(\tau) = (A_{h_1} \circ (h_1')^{-1})(\tau) & \text{if } 0 \leq \tau \leq s_H \\ a_{h_2}(\tau) = (A_{h_2} \circ (h_2')^{-1})(\tau - s_H) & \text{if } s_H < \tau \leq 2s_H \end{cases}$$

我们首先计算 a_{h_1} 的导数。根据链式法则，有

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}a_{h_1}(\tau) &= \frac{d}{d\tau}A_{h_1}\left((h_1')^{-1}(\tau)\right)\\ &= \frac{dA_{h_1}}{dr}\left((h_1')^{-1}(\tau)\right)\frac{d(h_1')^{-1}}{d\tau}(\tau)\\ &= -(h_1')^{-1}(\tau)\,h_1''\left((h_1')^{-1}(\tau)\right)\frac{d(h_1')^{-1}}{d\tau}(\tau) \qquad \text{by (14).}\end{aligned}$$

由于 $h_1'\left((h_1')^{-1}(\tau)\right) = \tau$，我们得到

$$h_1''\left((h_1')^{-1}(\tau)\right)\frac{d(h_1')^{-1}}{d\tau}(\tau) = 1$$

再次应用链式法则，因此

$$\frac{d}{d\tau}a_{h_1}(\tau) = -(h_1')^{-1}(\tau).$$

因此，我们得到 a_{h_1} 的导数满足以下界：

$$-1 - r_1 \leq \frac{d}{d\tau}a_{h_1}(\tau) \leq -1. \tag{15}$$

此外，a_{h_1} 的像为 $[-i_H, 0]$。对 a_{h_2} 进行完全类似的计算可得

$$-1 - 3r_1 \leq \frac{d}{d\tau}a_{h_2}(\tau) \leq -1 - 2r_1$$

且 a_{h_2} 的像为 $[-i_H, c_H]$

下面的命题是命题 3.1 针对作用量滤过的版本。

命题 3.2. 设 H 是一个 K-半可容许哈密顿量。那么对于 $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$SH_M^{>-\tau}(K) \cong H\left(\widehat{\varinjlim_{\sigma\to\infty}} CF^{>-\tau}(\sigma H)\right)$$

证明。 证明与命题 3.1 的证明类似。设 $\{\sigma_i\}$ 是一个正数递增序列， $\{\epsilon_i\}$ 是一个正数递减序列，使得

$$\lim_{i\to\infty}\sigma_i = \infty \text{ and } \lim_{i\to\infty}\epsilon_i = 0.$$

那么，对于每个 i 和$\{H_i\}_{i=1}$， $H_i = \sigma_i H - \epsilon_i$ 都是一个接触型 K-可容许哈密顿函数，, 2, ⋯ 是一个 $\mathcal{H}_K^{\mathrm{Cont}}$的余终序列，因此

$$SH_M^{>-\tau}(K) = H\left(\widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF^{-\tau}(H_i)\right).$$

由于 H_i 和 $\sigma_i H$ 相差一个常数 ϵ_i，它们的 Floer 复形相同。对于每个生成元 $x \in CF(H_i) = CF(\sigma_i H)$，作用量泛函满足

$$\mathcal{A}_{H_i}(x) = \mathcal{A}_{\sigma_i H}(x) - \epsilon_i.$$

因此，作用量滤过仅相差一个平移，我们得到过滤链复形相等。

$$CF^{>-\tau}(H_i) = CF^{>-\tau+\epsilon_i}(\sigma_i H).$$

若 $\tau \notin$ 谱$(\partial K, \alpha)$，则我们可以假设 $\tau - \epsilon_i \notin$ 谱$(\partial K, \alpha)$，因为 $\lim_{i\to\infty} \epsilon_i = 0$。此外，我们得到

$$CF^{>-\tau}(\sigma_i H) = CF^{>-\tau+\epsilon_i}(\sigma_i H).$$

在 $\tau \in$ Spec$(\partial K, \alpha)$ 的情形下，选取一个序列 $\{\sigma_i\}$，使得 τ 不与 $\sigma_i H$ 的任何 1-周期轨道的作用量重合。假设对于每个$i = 1$，2、3、$\cdots$，$\epsilon_i > 0$ 足够小，则有

$$CF^{>-\tau}(\sigma_i H) = CF^{>-\tau+\epsilon_i}(\sigma_i H).$$

在这两种情形下，我们都有

$$CF^{>-\tau}(H_i) = CF^{>-\tau}(\sigma_i H).$$

因此，

$$\widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF^{>-\tau}(H_i) = \widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF^{>-\tau}(\sigma_i H)$$

作为链复形。这就完成了证明。

□

为进一步讨论，我们假设 $c_1(TM)|_{\pi_2(M)} = 0$，其中 $c_1(TM)$ 是 M 的切丛 TM 的第一陈类。于是，每个哈密顿轨道都有整数值的 Conley-Zehnder 指标，因此我们可以对 ∂K 施加**指标有界性** 假设。对于具有接触型边界的紧域 $K \subset M$，如果对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，在 M 中可缩且其 Conley-Zehnder 指标为 k 的、位于 $(\partial K, \alpha)$ 上的 Reeb 轨道的周期集合是有界的，则称 $(\partial K, \alpha)$ 是**指标有界的**。

在本文余下部分，我们假设 (M, ω) 是一个辛非球面的闭 $2n$ 维辛流形，也就是说，$\omega|_{\pi_2(M)} = 0$ 且 $c_1(TM)|_{\pi_2(M)} = 0$，$K \subset M$ 是一个 Liouville 域，并且 $(\partial K, \alpha)$ 指标有界。

在这些假设下，相对辛上同调 $SH_M(K)$ 可以用下轨道来表示。我们已经看到，这些下轨道具有负作用量。此外，如果 x 是一个对应于 Reeb轨道 γ 的上轨道，那么由（13）可知，x 的作用量满足

$$\mathcal{A}_H(x) \geq c_H - (1 + 3r_1)\mathcal{A}(\gamma).$$

由于 ∂K 指标有界，对每个 $k \in \mathbb{Z}$，都存在 $b(k) > 0$，使得对于 $(\partial K, \alpha)$ 上任意 Conley-Zehnder 指标为 k 的 Reeb轨道 γ，都有 $0 < \mathcal{A}(\gamma) \leq b(k)$。根据（10），若一个哈密顿轨道$x$的 Conley-Zehnder 指标为 k，则有

$$\mathcal{A}_H(x) \geq c_H - (1 + 3r_1)b(n - k).$$

令 $\{H_i\}$ 为 $\mathcal{H}_K^{\mathrm{Cont}}$ 的余终序列，即 $H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \cdots$ 且

$$\lim_{i\to\infty} H_i(t, p) = \begin{cases} 0 & \text{if } p \in K \\ \infty & \text{if } p \in M \setminus K. \end{cases}$$

由于 $\lim_{i\to\infty} c_{H_i} = \infty$，我们可以假设 c_{H_i} 足够大，从而

$$c_{H_i} - (1 + 3r_1)b(n - k) > 0$$

对于固定的 k。将 H_i 中 Conley-Zehnder 指标为 k 的上轨道集合记为 $CF_U^k(H_i)$。那么 $CF_U^k(H_i)$ 是 $CF^k(H_i)$ 的子复形，因为 Floer 微分会增大作用量，且每个下轨道的作用量都为负。定义

$$CF_L^k(H_i) = CF^k(H_i)/CF_U^k(H_i).$$

不失一般性，我们可以选取 $c_{H_i} > 0$ 使得

$$c_{H_i} - (1+3r_1)b\,(n-(k-1)) > 0 \text{ and } c_{H_i} - (1+3r_1)b(n-(k+1)) > 0$$

因此，对于 $j = k-1, k, k+1$， $CF_U^j(H_i)$ 和 $CF_L^j(H_i)$ 都有意义。

对于任意一个 $\mathbb{Z}$-分次上链复形 (C, d) 和 $k \in \mathbb{Z}$，定义上链复形 $(C^{\sim k}, d)$ 如下：

$$\left(C^{\sim k}\right)^i = \begin{cases} C^k & \text{for } i = k-1, k, k+1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，$(C^{\sim k}, d)$ 的 k 阶上同调为 $H^k(C, d)$，也就是说，

$$H^k(C, d) = H^k(C^{\sim k}, d). \tag{16}$$

命题 3.3。对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，令 $\{H_i\}$ 为上文所述的 $\mathcal{H}_K^{Cont}$ 的一个余终序列。那么，对于任意 $\tau \in \mathbb{R}$，我们有一个同构

$$SH_M^{>-\tau,k}(K) \cong H^k\left(\varinjlim_{i\to\infty} CF_L^{>-\tau}(H_i)\right).$$

证明。考虑以下短正合列：

$$0 \longrightarrow CF_U^{>-\tau,\sim k}(H_i) \longrightarrow CF^{>-\tau,\sim k}(H_i) \longrightarrow CF^{>-\tau,\sim k}(H_i)/CF_U^{>-\tau,\sim k}(H_i) = CF_L^{>-\tau,\sim k}(H_i) \longrightarrow 0.$$

由于 $\varinjlim$ 直极限是正合函子，我们仍得到如下正合列：

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i\to\infty} CF_U^{>-\tau,\sim k}(H_i) \longrightarrow \varinjlim_{i\to\infty} CF^{>-\tau,\sim k}(H_i) \longrightarrow \varinjlim_{i\to\infty} CF_L^{>-\tau,\sim k}(H_i) \longrightarrow 0.$$

注意，每个 $CF^{>-\tau,\sim k}(H_i)$ 都是 $\Lambda_{\geq 0}$ 上由 H_i 的作用量大于 $-\tau$、Conley-Zehnder 指标为 $k-1, k$ 的下轨道生成的自由模，$k+1$ 因此它是 $\Lambda_{\geq 0}$ 上的平坦模。已知平坦模的直极限仍是平坦模，因此我们有

$$\mathrm{Tor}_1^{\Lambda_{\geq 0}}\left(\varinjlim_{i\to\infty} CF_L^{>-\tau,\sim k}(H_i), \Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r}\right) = 0$$

对每个 $r \geq 0$，因此，

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i\to\infty} CF_U^{>-\tau,\sim k}(H_i) \otimes \Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r} \longrightarrow \varinjlim_{i\to\infty} CF^{>-\tau,\sim k}(H_i) \otimes \Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r} \longrightarrow \varinjlim_{i\to\infty} CF_L^{>-\tau,\sim k}(H_i) \otimes \Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r} \longrightarrow 0$$

仍是一个正合列。对于 $0 \leq r \leq r'$，投影

$$\Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r'} \to \Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r} \tag{17}$$

是满射。对于任意 $\Lambda_{\geq 0}$-模 A，由 (17) 诱导的映射

$$A \otimes_{\Lambda_{\geq 0}} \Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r'} \to A \otimes_{\Lambda_{\geq 0}} \Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r}$$

由于张量积的右正合性，由 (17) 诱导的映射也是满射。然后根据逆极限的 Mittag-Leffler定理，得到以下序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \varprojlim_{r\to 0}\varinjlim_{i\to\infty} CF_U^{>-\tau,\sim k}(H_i)\otimes\Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r} &\longrightarrow \varprojlim_{r\to 0}\varinjlim_{i\to\infty} CF^{>-\tau,\sim k}(H_i)\otimes\Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r} \\ &\longrightarrow \varprojlim_{r\to 0}\varinjlim_{i\to\infty} CF_L^{>-\tau,\sim k}(H_i)\otimes\Lambda_{\geq 0}/\Lambda_{\geq r} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

也是正合的。根据完备化的定义（见第 2.2 节），我们得到如下复形正合列

$$0 \longrightarrow \widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF_U^{>-\tau,\sim k}(H_i) \longrightarrow \widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF^{>-\tau,\sim k}(H_i) \longrightarrow \widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF_L^{>-\tau,\sim k}(H_i) \longrightarrow 0. \tag{18}$$

由于 [8] 中已经证明

- (Lemma 5.3 of [8]) $\widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF_U^{>-\tau,\sim k}(H_i) = 0$, and
- (Lemma 5.4 of [8]) $\widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF_L^{>-\tau,\sim k}(H_i) \cong \varinjlim_{i\to\infty} CF_L^{>-\tau,\sim k}(H_i)$,

短正合列（18）归结为复形的同构

$$\widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF^{>-\tau,\sim k}(H_i) \cong \varinjlim_{i\to\infty} CF_L^{>-\tau,\sim k}(H_i). \tag{19}$$

Then

$$\begin{aligned} SH_M^{>-\tau,k}(K) &= H^k\left(\widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF^{>-\tau}(H_i)\right) && \text{Definition} \\ &= H^k\left(\widehat{\varinjlim_{i\to\infty}} CF^{>-\tau,\sim k}(H_i)\right) && \text{by (16)} \\ &\cong H^k\left(\varinjlim_{i\to\infty} CF_L^{>-\tau,\sim k}(H_i)\right) && \text{by (19)} \\ &= H^k\left(\varinjlim_{i\to\infty} CF_L^{>-\tau}(H_i)\right) && \text{by (16).} \end{aligned}$$

证明完毕。

□

推论 3.4。设 H 是一个 K-半可容许哈密顿函数，且 $\tau\in\mathbb{R}$。那么对于每个 $k\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\begin{aligned} SH_M^{>-\tau,k}(K) &\cong H^k\left(\varinjlim_{\sigma\to\infty} CF_L^{>-\tau}(\sigma H)\right) \\ &\cong H^k\left(\varinjlim_{\sigma\to\infty} CF^{(-\tau,0]}(\sigma H)\right) \\ &\cong \varinjlim_{\sigma\to\infty} HF^{(-\tau,0],k}(\sigma H). \end{aligned}$$

证明。 根据命题 3.3 的证明，只需验证每个 Conley-Zehnder 指标为 $k-1, k$ 且 $k+1$ 的上轨道都具有正作用量。设 x 是这样的轨道。那么由 (13)，我们有

$$\mathcal{A}_{\sigma H}(x) \geq c_{\sigma H} - (1+3r_1)\max\{b(n-k+1), b(n-k), b(n-k-1)\}.$$

由于 $c_{\sigma H} = \sigma c_H$，可得

$$\mathcal{A}_{\sigma H}(x) \geq \sigma c_H - (1+3r_1)\max\{b(n-k+1), b(n-k), b(n-k-1)\} > 0$$

当 $\sigma > 0$ 足够大时。论证的其余部分与命题 3.3 的证明完全相同，因此我们省略细节。第二个同构源于所有下轨道的作用量均为负，而最后一个同构则利用了取直接极限与取同调可交换这一事实。

□

命题 3.3 和推论 3.4 使我们可以令

$$SH_M^{>-\tau}(K) \text{ if } \tau \leq 0.$$

此外，若 $x = (\gamma, r_*)$ 是 H 的一个下轨道，且其作用量大于 $-\tau$，则

$$\begin{aligned} -\tau &< -r_* h'(r_*) + h(r_*) \\ &\leq -r_* h'(r_*) + (r_* - 1)h'(r_*) \qquad \text{by (12)} \\ &= -\mathcal{A}(\gamma) \end{aligned}$$

因此，$SH_M^{>-\tau}(K)$ 由 $(\partial K, \alpha)$ 的周期小于 τ 的 Reeb 轨道生成。

此外，在作用量窗口能够得到有效控制的情形下，取直极限这一步便不再必要，因为相应的 Floer 复形已经包含了所需的信息。

定理 3.5. 对于每个整数 $k \in \mathbb{Z}$，存在一个接触型 K-半可容许哈密顿函数 H，使得

$$SH_M^{>-\tau,k}(K) \cong HF^{(a_H(\tau),0],k}(H)$$

对于 $0 \leq \tau \leq s_H$。

证明. 令 H 为一个接触型 K-半可容许哈密顿函数，满足以下条件：选取一个充分大的常数 $c_H > 0$，使得 H 中 Conley-Zehnder 指标为 $k-1, k$ 和 $k+1$ 的上轨道具有正作用量。如上所示，由于 $(\partial K, \alpha)$ 的指标有界性以及上轨道的作用量估计 (13)，这样的选取是可行的。对于 $\sigma > 1$，我们将证明

$$HF^{(a_H(\tau),0],k}(H) \cong HF^{(a_{\sigma H}(\tau),0],k}(\sigma H) \tag{20}$$

对于 $0 \leq \tau \leq s_H$。固定 $\tau \in [0, s_H]$。那么存在唯一的 $r_0 \in [1, 1+r_1]$，使得$A_H(r_0) = a_H(\tau)$，也就是说，$h'(r_0) = \tau$。考虑一个 K-半可容许哈密顿函数 G，使得

- $H \leq G \leq \sigma H$,
- $G = H$ 关于 $[1, r_0]$，以及
- $s_G = s_{\sigma H} = \sigma s_H$。

注意， $a_H(\tau) = a_G(\tau)$ 和 $g'(r_0) = \tau$。从 H到 G的单调同伦诱导出一个同构

$$HF^{(a_H(\tau),0],k}(H) \cong HF^{(a_H(\tau),0],k}(G) \tag{21}$$

事实上，这两个复形的生成元相同，并且根据最大值原理，连接包含在 $K_{1+r_1} = K \cup (\partial K \times [1, 1 + r_1])$ 中的 1-周期轨道的每条 Floer 轨线，其像都完全位于 K_{1+r_1} 中。

Let

$$F_{\sigma,t} = (1-t)G + t(\sigma H)\ ,\ 0 \le t \le 1$$

是从 G 到 σH 的递增线性同伦。注意， $F_{\sigma,t}$ 的斜率与 t 无关；事实上， $s_{F_{\sigma,t}} = \sigma s_H$

我们首先考虑 $a_H(\tau) \notin \mathrm{Spec}(H)$ 的情形。由于 $H = G$ 在 $K \cup (\partial K \times [1, r_0])$ 上，且 $h'(r_0) = \tau = g'(r_0)$，因此有 $a_H(\tau) = a_G(\tau) \notin \mathrm{Spec}(G)$。考虑一个函数

$$\phi_{\sigma,t} = a_{F_{\sigma,t}} \circ a_G^{-1} : [-i_G, 0] \longrightarrow [0, s_G] = [0, s_{F_{\sigma,t}}] \longrightarrow [-i_{F_{\sigma,t}}, 0].$$

根据 [5], ，这个映射 $\phi_{\sigma,t}$ 将 G 的谱映到 $F_{s,t}$ 的谱。更准确地说，

$$\phi_{\sigma,t}(\mathrm{Spec}(G)) = [-i_{F_{\sigma,t}}, 0] \cap \mathrm{Spec}(F_{\sigma,t}).$$

因此，我们得到

$$a_{F_{\sigma,t}}(\tau) = \phi_{\sigma,t}(a_H(\tau)) \notin \mathrm{Spec}(F_{\sigma,t}) \tag{22}$$

对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。由于 $a_{F_{\sigma,t}}(\tau)$ 关于 t 连续，对于每个 $t \in [0,1]$，我们都可以选择 $\delta(t) > 0$ ，使得

$$HF^{(a_{F_{\sigma,t}}(\tau),0],k}(F_{\sigma,t}) \cong HF^{(a_{F_{\sigma,t'}}(\tau),0],k}(F_{\sigma,t}) \text{ for } |t - t'| < \delta(t).$$

We 可以选取有限多个点 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = 1$，使得 t

- $HF^{(a_{F_{\sigma,t_i}}(\tau)\ 0],k}(F_{\sigma,t_i}) \cong HF^{(a_{F_{\sigma,t'}}(\tau)\ 0],k}(F_{\sigma,t_i})$ 对于 $|t_i - t'| < \delta(t_i) := \delta_i$，并且
- $t_{i+1} - \delta_{i+1} < t_i + \delta_i$ 因此，对于每个 $i = 0, 1, 2, \cdots, N-1$，存在 $\eta_i \in (t_{i+1} - \delta_{i+1}, t_i + \delta_i)$。

为方便记号，令 $I_t = (a_{F_{\sigma,t}}(\tau), 0]$。那么，根据 η_i 的选取，我们有

$$HF^{I_{t_i},k}(F_{\sigma,t_i}) \cong HF^{I_{\eta_i},k}(F_{\sigma,t_i}). \tag{23}$$

Ther因此，对于每个 $i = 0, 1, 2, \cdots, N-1$，我们得到以下同构

$$HF^{I_{t_i},k}(F_{\sigma,t_i}) \cong HF^{I_{t_{i+1}},k}(F_{\sigma,t_{i+1}}). \tag{24}$$

事实上，对于每个 i,

$$\begin{aligned} HF^{I_{t_i},k}(F_{\sigma,t_i}) &\cong HF^{I_{\eta_i},k}(F_{\sigma,t_i}) && \text{by (23)} \\ &\cong HF^{I_{\eta_i},k}(F_{\sigma,t_{i+1}}) && s_{F_{\sigma,t_i}} = s_{F_{\sigma,t_{i+1}}} \\ &\cong HF^{I_{t_{i+1}},k}(F_{\sigma,t_{i+1}}) && \text{by (23).} \end{aligned}$$

因此，

$$HF^{(a_H(\tau),0],k}(G) = HF^{I_{t_0},k}(F_{s,t_0}) \cong \cdots \cong HF^{I_{t_N},k}(F_{s,t_N}) = HF^{(a_{\sigma H}(\tau),0],k}(\sigma H) \tag{25}$$

其中，中间的同构由 (24) 得出。结合 (21) 和 (25)，我们得到

$$HF^{(a_H(\tau),0],k}(H) \cong HF^{(a_{\sigma H}(\tau),0],k}(\sigma H).$$

现在假设 $a_H(\tau) \in$谱(H)。我们可以选择 $\epsilon_0 > 0$，使得对于 $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$，有 $a_H(\tau+\epsilon) \notin$谱$(H)$。然后根据上述论证，我们得到一个同构

$$HF^{(a_H(\tau+\epsilon),0],k}(H) \cong HF^{(a_{\sigma H}(\tau+\epsilon),0],k}(\sigma H).$$

对于 $0 < \epsilon \leq \epsilon' \leq \epsilon_0$，存在一个映射

$$HF^{(a_H(\tau+\epsilon),0],k}(H) \longrightarrow HF^{(a_H(\tau+\epsilon'),0],k}(H)$$

由包含映射诱导。因此，$\{HF^{(a_{H(\tau+\epsilon)\ 0],}k}(H)\}_{\epsilon\in(0,\epsilon_0]}$ 构成一个正向系统，并且

$$\varinjlim_{\epsilon\to 0} HF^{(a_H(\tau+\epsilon),0],k}(H) = HF^{(a_H(\tau),0],k}(H).$$

同样的推理对 $HF^{(a_{\sigma H_{(\tau+\epsilon)\ 0],}}k}(\sigma H)$ 仍然成立，因此我们有

$$HF^{(a_H(\tau),0],k}(H) \cong HF^{(a_{\sigma H}(\tau),0],k}(\sigma H).$$

总之，在任何情况下，我们都有以下同构：

$$HF^{(a_H(\tau),0],k}(H) \cong HF^{(a_{\sigma H}(\tau),0],k}(\sigma H). \tag{26}$$

此外，同构 (26) 是由一系列中间映射复合而成的，其中每个映射要么是包含映射，要么是延拓映射。

对于 $\sigma_1 \leq \sigma_2$，我们有一个映射

$$HF^{(a_{\sigma_1 H}(\tau),0],k}(\sigma_1 H) \longrightarrow HF^{(a_{\sigma_2 H}(\tau),0],k}(\sigma_1 H) \longrightarrow HF^{(a_{\sigma_2 H}(\tau),0],k}(\sigma_2 H)$$

其中，第一个映射由包含诱导，第二个映射是延拓映射。注意，这些映射与同构 (26) 相容，并且 $\{HF^{(a_{\sigma H_{(\tau)\ 0],}}k}(\sigma H)\}_{\sigma>1}$构成一个正向系统。如 [5], 所示，我们有

$$a_{\sigma H}(\tau) \to -\tau \text{ as } \sigma \to \infty$$

在 $[0,\infty$ 中关于紧集一致收敛）。将此极限与推论 3.4 结合，我们得到

$$\varinjlim_{\sigma\to\infty} HF^{(a_{\sigma H}(\tau),0],k}(\sigma H) = SH_M^{>-\tau,k}(K).$$

最后，取 $\varinjlim_{\sigma\to\infty}$ 在 (26) 两边，即完成证明。

□

推论 3.6。设 H 是一个 K-半可容许哈密顿函数。那么，对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，都存在一个常数 $\sigma > 0$，使得

$$SH_M^{>-\tau,k}(K) \cong HF^{(a_{\sigma H}(\tau),0],k}(\sigma H)$$

对于 $0 \leq \tau \leq s_{\sigma H} = \sigma s_H$。

证明。我们可以选择 $\sigma > 0$，使得 σH 的所有 Conley-Zehnder 指标为$k-1$、k 和 $k+1$ 的上轨道都具有正作用量，具体做法与前文论述相同。作出这一选择后，论证过程与定理 3.5 的证明类似，因此省略细节。

□

注 3.7。定理 3.5 和推论 3.6 的证明还意味着以下结论。

(a) 设 $A \subset \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$的有限子集。

- 存在一个接触型 K-半可容许哈密顿函数 H，使得存在一个同构

$$SH_M^{>-\tau,k}(K) \cong HF^{(a_H(\tau),0],k}(H)$$

对于 $0 \le \tau \le s_H$ 以及对于 $k \in A$。

- 对于任意接触型 K-半可容许哈密顿函数 H，存在常数 $\sigma > 0$ 使得

$$SH_M^{>-\tau,k}(K) \cong HF^{(a_{\sigma H}(\tau),0],k}(\sigma H)$$

对于 $0 \le \tau \le s_{\sigma H}$，以及对于 $k \in A$。

(b) 设 H 是接触型 K-半可容许哈密顿函数，并设

$$I_H = \left\{ k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{the actions of upper orbits of } H \text{ of Conley-Zehnder indices} \\ k-1, k \text{ and } k+1 \text{ are positive} \end{array} \right\}.$$

那么存在一个同构

$$SH_M^{>-\tau,k}(K) \cong HF^{(a_H(\tau),0],k}(H).$$

对于 $0 \le \tau \le s_H$，以及对于 $k \in I_H$。

4. Barcode entropies

4.1. 定义。对于持久模 V，存在唯一的 V 的条形码 $\mathcal{B}(V)$。参见标准形定理（定理 2.2）。对于任意 $\epsilon > 0$，设

$$\mathcal{B}_\epsilon(V) = \{\text{bars in } \mathcal{B}(V) \text{ of length greater than } \epsilon\}$$

且 $b_\epsilon(V)$ 表示 $\mathcal{B}_\epsilon(V)$ 中条的数量，即

$$b_\epsilon(V) = |\mathcal{B}_\epsilon(V)|.$$

定义 4.1。设 V 为一个持久模。对于任意 $\epsilon > 0$，**ϵ-条形码熵**$\hbar_\epsilon(V)$ 的 V 定义为

$$\hbar_\epsilon(V) = \limsup_{\sigma \to \infty} \frac{1}{\sigma} \log^+ b_\epsilon(\mathrm{tru}(V,\sigma)),$$

where $\log^+ a = \max\{\log_2 a, 0\}$。$V$的**条形码熵** $\hbar(V)$定义为

$$\hbar(V) = \lim_{\epsilon \to 0} \hbar_\epsilon(V).$$

由定理 3.5可知，该赋值

$$\tau \mapsto SH_M^{>-\tau,k}(K)$$

定义一个持久模，其结构映射

$$SH_M^{>-\tau_1,k}(K) \longrightarrow SH_M^{>-\tau_2,k}(K)$$

由包含映射诱导。我们将此持久模记为$SH_M^k(K)$，设 $\mathcal{B}(SH_M^k(K))$为持久模 $SH_M^k(K)$的条形码。由于

$$SH_M^{>-\tau}(K) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} SH_M^{>-\tau,k}(K),$$

$SH_M(K)$的条形码 $\mathcal{B}(SH_M(K))$定义为

$$\mathcal{B}(SH_M(K)) = \coprod_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}(SH_M^k(K)).$$

按照定义 4.1，我们将相对辛上同调 $SH_M(K)$ 的 **相对辛上同调条形码熵** $\hbar(SH_M(K))$ 定义为

$$\hbar(SH_M(K)) = \lim_{\epsilon\to 0} \hbar_\epsilon(SH_M(K))$$

其中

$$\hbar_\epsilon(SH_M(K)) = \limsup_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma} \log^+ b_\epsilon(\mathrm{tru}(SH_M(K),\sigma)).$$

我们还可以定义与哈密顿函数相关的条形码熵。对于接触型 K-半可容许哈密顿函数 H，定义

$$\tau \mapsto HF^{>-\tau}(H)$$

其定义了一个持久模，我们将该持久模记为 $HF(H)$。我们将 H 的**哈密顿条形码熵** $\hbar(HF(H))$ 定义为

$$\hbar(HF(H)) = \lim_{\epsilon\to 0} \hbar_\epsilon(HF(H))$$

其中

$$\hbar_\epsilon(HF(H)) = \limsup_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma} \log^+ b_\epsilon\left(\mathrm{tru}(HF(\sigma H), \sigma i_H)\right).$$

根据定理 3.5，我们考虑持久模 $\tau \mapsto HF^{(-\tau,0]}(H)$，将其记为 $HF_{\mathrm{neg}}(H)$。 H的**负哈密顿条形码熵** $\hbar(HF^{\mathrm{neg}}(H))$定义为

$$\hbar(HF^{\mathrm{neg}}(H)) = \lim_{\epsilon\to 0} \hbar_\epsilon(HF^{\mathrm{neg}}(H))$$

其中

$$\hbar_\epsilon(HF^{\mathrm{neg}}(H)) = \limsup_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma} \log^+ b_\epsilon\left(\mathrm{tru}(HF^{\mathrm{neg}}(\sigma H), \sigma i_H)\right).$$

4.2. 条形码熵的比较。本小节将比较上述定义的条形码熵。以下定理阐明了相对辛上同调条形码熵与哈密顿条形码熵之间的相互关系。

定理 4.2. 存在一个接触型 K-半可容许哈密顿函数 H，使得对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\hbar_\epsilon(SH_M(K)) \leq \hbar_\epsilon(HF^{neg}(H))$$

因此，取 $\epsilon \to 0$，我们有

$$\hbar(SH_M(K)) \leq \hbar(HF^{neg}(H)).$$

证明。选择一个满足以下条件的 K-半可容许哈密顿函数 H

$$c_H \geq 1 + 3r_1 \tag{27}$$

注意，条件 (27) 仅取决于 r_1，也就是说，取决于 K 在 M内部的位置，并且它迫使 s_H 大于 1。事实上，若 $s_H \leq 1$，则

$$\begin{aligned} 1 + 3r_1 &\leq c_H && \text{假设} \\ &\leq 3r_1 s_H && \text{by (7)} \\ &\leq 3r_1, \end{aligned}$$

这就导出了矛盾。

对每个 $\sigma > 0$，条的数量 $b_\epsilon(\mathrm{tru}(SH_M(K)\ \sigma))$ 都是有限的，因此只有有限多个分次度对其有非平凡贡献。因此，存在一个有限子集A_σ of $\mathbb{Z}$ 使得

$$b_\epsilon\left(\mathrm{tru}(SH_M(K), \sigma)\right) = b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k \in A_\sigma} SH_M^k(K), \sigma\right)\right) = \sum_{k \in A_\sigma} b_\epsilon\left(\mathrm{tru}(SH_M^k(K), \sigma)\right).$$

为了估计 $b_\epsilon(\mathrm{tru}(SH_M(K)\ \sigma))$，只需考虑周期小于 $\sigma - \epsilon$ 的 $(\partial K,\ \alpha)$ 的 Reeb 轨道。我们断言

$$SH_M^{>-\tau,k}(K) \cong HF^{(a_{\sigma H}(\tau),0],k}(\sigma H) \tag{28}$$

对于 $0 \leq \tau \leq \sigma \leq \sigma s_H$ 和 $k \in A_\sigma$。为证明这一断言，根据定理 3.5、推论 3.6 和注 3.7 的证明，只需证明 σH 的上轨道具有正作用量。令 x 为 σH 的一个上轨道，它对应于一个满足$\mathcal{A}(\gamma) < \sigma - \epsilon$的 Reeb 轨道 γ。那么我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\sigma H}(x) &\geq c_{\sigma H} - (1 + 3r_1)\mathcal{A}(\gamma) && \text{by (13)} \\ &> \sigma c_H - (1 + 3r_1)(\sigma - \epsilon) \\ &> 0 && \text{根据 } H \text{ 的选择,} \end{aligned}$$

这就证明了该断言。

回忆式 (15)，对于 $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \sigma \leq \sigma s_H = s_{\sigma H}$,

$$\tau_2 - \tau_1 \leq a_{\sigma H}(\tau_1) - a_{\sigma H}(\tau_2) \leq (1 + r_1)(\tau_2 - \tau_1),$$

这与同构 (28) 一起意味着

$$b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k\in A_\sigma} SH_M^k(K),\sigma\right)\right) \le b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k\in A_\sigma} HF^{\mathrm{neg},k}(\sigma H), -a_{\sigma H}(\sigma)\right)\right). \tag{29}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\hbar_\epsilon(SH_M(K)) &= \limsup_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma}\log^+ b_\epsilon\left(\mathrm{tru}(SH_M(K),\sigma)\right)\\
&= \limsup_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma}\log^+ b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k\in A_\sigma} SH_M^k(K),\sigma\right)\right)\\
&\le \limsup_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma}\log^+ b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k\in A_\sigma} HF^{\mathrm{neg},k}(\sigma H), -a_{\sigma H}(\sigma)\right)\right) \quad \text{by (29)}\\
&\le \limsup_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma}\log^+ b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k\in A_\sigma} HF^{\mathrm{neg},k}(\sigma H), \sigma i_H\right)\right) \qquad -a_{\sigma H}(\sigma)\le i_{\sigma H}\\
&\le \limsup_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma}\log^+ b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(HF^{\mathrm{neg}}(\sigma H), \sigma i_H\right)\right)\\
&= \hbar_\epsilon(HF^{\mathrm{neg}}(H)).
\end{aligned}$$

证明至此完成。

□

5. Upper bound of the relative symplectic cohomology barcode entropy

5.1. 拉格朗日断层扫描与克罗夫顿不等式。我们简要讨论拉格朗日断层扫描的思想。设 (M',ω') 是一个辛流形，且 $L\subset M'$ 是一个拉格朗日子流形。对于一个可能带有边界的紧流形 B，一个光滑映射

$$\Psi : B\times L \longrightarrow M$$

称为 L 的**拉格朗日断层扫描**，如果

- 它是一个淹没,
- 映射 $\Psi_s\colon L\longrightarrow M$ 由 $\Psi_s(x)=\Psi(s,x)$ 给出，对每个 $s\in B$ 都是一个嵌入,
- 对每个 $s\in B$，像 $L_s=\Psi_s(L)$ 都是 (M',ω') 的一个拉格朗日子流形，且
- 每个 L_s 都与其他对象哈密顿同伦。

我们称拉格朗日子流形 L 为断层扫描 Ψ 的**核心**。此类拉格朗日断层扫描的存在性可见 [3] 中的引理 5.6；当且仅当 L 可以浸入 $\mathbb{R}^d$ 时，存在一个核心为 L 且 $\dim B = d$ 的拉格朗日断层扫描。此外，他们证明了以下版本的克罗夫顿不等式。

定理 5.1 (克罗夫顿不等式)。设(M',ω')为一个辛流形，$L_1,L_2\subset M'$为拉格朗日子流形，且维数 $L_1=$余维 L_2。设 $\Psi\colon B\times L_1\longrightarrow M$为 L_1 的拉格朗日断层扫描，ds 为 B的光滑测度。那么存在一个常数 $D>0$

取决于 在 Ψ 上的 g、在 M' 上的一个固定度量，但不依赖于 L_2，使得

$$\int_B N(s)ds \leq D\ Vol(L_2)$$

其中 $N(s) = |L_s \cap L_2|$，*Vol* 表示体积。

证明。 参见 [3]中的引理 5.3。

□

定理 5.1 中的积分是有意义的，因为对于几乎所有的 $s \in B$， Ψ_s 与 L' 横截，因此 $N(s) = |L_s \cap L'|$ 在除去 B 的一个零测集后是局部常数函数。

5.2. **定理 A 的证明**。 在我们的设定中，我们考虑辛流形 $(M', \omega') = (M \times M, (-\omega) \oplus \omega)$、拉格朗日子流形 $L = \Delta = \{(x, x) \in M \times M \mid x \in M\}$ 中的M'，以及对角线 Δ 的拉格朗日断层扫描 Δ_s。为清晰起见并便于查阅，我们重新陈述定理 A，并给出其证明。

定理 5.2。 存在一个常数 $C = C(M, K) > 0$，其取决于这一对 (M, K)，使得

$$\hbar(SH_M(K)) \leq C\, h_{top}(\varphi_\alpha).$$

证明。 我们使用与定理 4.2 的证明中相同的记号。令 $\epsilon > 0$。对于充分大的 $\sigma > 0$，如定理 4.2 的证明所示，我们可以选取一个 K-半可容许哈密顿函数 H，使得同构

$$\bigoplus_{k \in A_\sigma} SH_M^{>-\tau,k}(K) \cong \bigoplus_{k \in A_\sigma} HF^{(a_{\sigma H}(\tau),0],k}(\sigma H)$$

对 $0 \leq \tau \leq \sigma \leq \sigma s_H$成立。因此，我们得到不等式

$$b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k \in A_\sigma} SH_M^k(K), \sigma\right)\right) \leq b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k \in A_\sigma} HF^{\mathrm{neg},k}(\sigma H), -a_{\sigma H}(\sigma)\right)\right).$$

令 Δ 为 $(M', \omega') = (M \times M, (-\omega) \oplus \omega)$ 的对角线，并令 $\Gamma_\sigma = \Gamma_{\varphi_H^\sigma}$ 为哈密顿微分同胚 $\varphi_{\sigma H} = \varphi_{\sigma H}^1 = \varphi_H^\sigma$ of σH 的图像，即

$$\Gamma_\sigma = \left\{(x, \varphi_{\sigma H}(x)) \in M \times M \,\middle|\, x \in M\right\}.$$

于是， $CF(\sigma H)$中的每个元素都来自对角线 Δ 与图像 Γ_σ的交集 $\Delta \cap \Gamma_\sigma$中的一个交点。回顾定理 4.2 的证明，为了估计

$$b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k \in A_\sigma} HF^{\mathrm{neg},k}(\sigma H), -a_{\sigma H}(\sigma)\right)\right),$$

只需考虑 σH 的下轨道。这意味着

$$b_\epsilon\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k \in A_\sigma} HF^{\mathrm{neg},k}(\sigma H), -a_{\sigma H}(\sigma)\right)\right) \leq |(\Delta \cap \Gamma_\sigma) \cap (K_{1+r_1} \times K_{1+r_1})|.$$

考虑上述关于 Δ 的拉格朗日断层扫描 Δ_s。我们可以假设 Δ 与 Δ_s 之间的 Hofer 距离足够小，从而

$$b_{2\epsilon}\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k\in A_\sigma} HF^{\mathrm{neg},k}(\sigma H), -a_{\sigma H}(\sigma)\right)\right) \leq |(\Delta_s \cap \Gamma_\sigma) \cap (K_{1+r_1} \times K_{1+r_1})|.$$

设 $N_\sigma(s) = |(\Delta_s \cap \Gamma_\sigma) \cap (K_{1+r_1} \times K_{1+r_1})|$。于是由克罗夫顿不等式（定理 5.1），可得

$$\int_B N_\sigma(s)ds \leq D\,\mathrm{Vol}(\Gamma_\sigma \cap (K_{1+r_1} \times K_{1+r_1}))$$

其中常数 $D > 0$ 与 σ 无关。因此，存在常数 D'，也与 σ 无关，使得

$$b_{2\epsilon}\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k\in A_\sigma} HF^{\mathrm{neg},k}(\sigma H), -a_{\sigma H}(\sigma)\right)\right) \leq D'\,\mathrm{Vol}(\Gamma_\sigma \cap (K_{1+r_1} \times K_{1+r_1})) \tag{30}$$

由 Yomdin 定理（定理 2.3），

$$\limsup_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma}\log \mathrm{Vol}\left(\Gamma_\sigma \cap (K_{1+r_1} \times K_{1+r_1})\right) \leq h_{\mathrm{vol}}(\varphi_H|_{K_{1+r_1}}) \leq h_{\mathrm{top}}(\varphi_H|_{K_{1+r_1}}). \tag{31}$$

结合上述讨论中的结果，我们得到

$$\begin{aligned}
\hbar_{2\epsilon}(SH_M(K)) &= \limsup_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma}\log^+ b_{2\epsilon}\left(\mathrm{tru}\left(SH_M(K), \sigma\right)\right) \\
&= \limsup_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma}\log^+ b_{2\epsilon}\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k\in A_\sigma} SH_M^k(K), \sigma\right)\right) \\
&= \limsup_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma}\log^+ b_{2\epsilon}\left(\mathrm{tru}\left(\bigoplus_{k\in A_\sigma} HF^{\mathrm{neg},k}(\sigma_\ell H), -a_{\sigma H}(\sigma)\right)\right) && \text{by (29)} \\
&\leq \limsup_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma}\log \mathrm{Vol}\left(\Gamma_\ell \cap (K_{1+r_1} \times K_{1+r_1})\right) && \text{by (30)} \\
&= h_{\mathrm{top}}(\varphi_H|_{K_{1+r_1}}) && \text{by (31)} \\
&= s_H h_{\mathrm{top}}(\varphi_\alpha)
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 [11] 的引理 5.12 得出。令 $\epsilon \to 0$，可得

$$\hbar(SH_M(K)) \leq s_H h_{\mathrm{top}}(\varphi_\alpha). \tag{32}$$

由于该不等式对满足 (32) 的任意 K-半可容许哈密顿函数 H 都成立，因此我们可以定义

$$C' = \inf\left\{ s_H \,\middle|\, c_H \geq 1 + 3r_1 \right\}.$$

如上所示，$s_H > 1$ 每当 H 满足（27），因此 $C' \geq 1$。一般而言，这个数 C' 取决于 r_1的选择；因此我们将其记作 $C'(r_1)$。为了进一步约束

这个数，考虑

$$r_{\max} = \sup\left\{ r > 0 \,\middle|\, K \cup (\partial K \times [1, 1+3r]) \text{ is symplectically embedded into } M \right\}.$$

由于假设 M 是紧的，因此这个数 $r_{\max}$ 有限。于是我们定义常数

$$C = \inf\left\{ C'(r) \,\middle|\, 0 < r \leq r_{\max} \right\}.$$

根据构造，常数 C 确实取决于这一对 $(M,\ K)$。作此选择后，不等式 (32) 加强为

$$\hbar(SH_M(K)) \leq C h_{\text{top}}(\varphi_\alpha).$$

□

References

[1] J. Ahn, S^1等变相对辛上同调与相对辛容量，预印本，arXiv:2410.01977。[2] J. Ahn，辛容量的比较，预印本，arXiv:2504.10431。[3] E. Cineli、V. Ginzburg 和 B. Gurel，哈密顿微分同胚的拓扑熵：持久同调与弗洛尔理论的视角，《数学杂志》308（2024），第4期，第73号论文，共38页。[4] E. Cineli、V. Ginzburg、B. Gurel 和 M. Mazzucchelli，关于Reeb流的条形码熵，《Selecta Mathematica》新系列，31（2025），第4期，第64号论文，共36页。[5] E. Cineli、V. Ginzburg、B. Gurel 和 M. Mazzucchelli，不变集与双曲闭Reeb轨道，预印本，arXiv:2309.04576[6] K. Cieliebak 和 A. Oancea，辛同调与艾伦伯格–斯廷罗德公理，《代数与几何拓扑》18（2018），第4期，1953–2130。[7] F. Chazal、V. de Silva、M. Glisse 和 S. Oudot，持久模的结构与稳定性，《施普林格数学简明读本》，施普林格，[查姆], 2016。x +120页，ISBN：978-3-319-42543-6，ISBN：978- 3-319-42545-0[8] A. Dickstein、Y. Ganor、L. Polterovich 和 F. Zapolsky，辛拓扑与理想值测度，《Selecta Mathematica》新系列，30（2024），第5期，第88号论文，共92页。[9] R. Fernandes，条形码熵与缠绕弗洛尔同调，预印本，arXiv:2410.05528。[10] R. Fernandes，缠绕弗洛尔同调与双曲集，预印本，arXiv:2501.06654。[11] E. Fender、S. Lee 和 B. Sohn，具有李乌维尔填充的接触流形上Reeb流的条形码熵，预印本，arXiv:2305.04770。[12]M. Gromov，熵、同调与半代数几何，《布尔巴基研讨班》，第1985/86卷，Ast´erisque第145-146号（1987），5，225–240。[13] V. Ginzburg、B. Gurel 和 M. Mazzucchelli，测地流的条形码熵，即将发表于《欧洲数学会杂志》。[14] A. Katok 和 B. Hasselblatt，《现代动力系统理论导论》，《数学及其应用百科全书》第54卷，剑桥大学出版社，剑桥（1995）xviii+802 页，ISBN：0-521-34187-6。[15] M. Meiwes，关于拉格朗日子流形的条形码熵，预印本，arXiv:2401.07034。[16] C.Y. Mak、Y. Sun 和 U. Varolgunes，以相对辛上同调刻画重性，《拓扑学杂志》17（2024），第1期，第e12327号论文，共26页。[17] J. Pardon，接触同调与虚基本循环，《美国数学会杂志》32（2019），第3期，825–919。[18] L. Polterovich、D. Rosen、K. Samvelyan 和 J. Zhang，《几何与分析中的拓扑持久性》，《大学讲座丛书》第74卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛（2020），©2020。xi+128页，ISBN：978-1-4704-5495-1。

[19] L. Polterovich、E. Shelukhin，自治哈密顿流、Hofer几何与持久模，《Selecta Mathematica》新系列，22（2016），第1期，227–296。[20] D. Salamon 和 E. Zehnder，哈密顿系统周期解的莫尔斯理论与Maslov指标，《纯粹与应用数学通讯》45（1992），1303–1360。[21] Y. Sun，指标有界相对辛上同调，《代数与几何拓扑》24（2024），第9期，4799–4836。[22] F. Todd 和 B. Hasselblatt，双曲流，《苏黎世高等数学讲座》，EMS出版部，柏林，[2019], ©2019。xiv+723 页，ISBN：978-3-03719-200-9。[23] M. Usher 和 J. Zhang，持久同调与Floer-Novikov理论，《几何与拓扑》20（2016），第6期，3333–3430。[24] U. Varolgunes，相对辛上同调的Mayer–Vietoris性质，《几何与拓扑》25（2021），547–642。[25] Y. Yomdin，体积增长与熵，《以色列数学杂志》57（1987），285–300。

Institute for Basic Science, Center for Geometry and Physics, Pohang, 37673, SouthKorea电子邮箱地址：jahn@ibs.re.kr