arXiv:2601.15648v1 [math.RA] 22 Jan 2026

中心单纯代数上的迭代导数

Manujith K. Michel 和 Varadharaj R. Srinivasan

摘要。我们证明，若域 F 的特征不整除 $F.$ 的布劳尔群中 A 的指数，则域 F 上的迭代导子 δ_F 可扩张为中心单代数 $F-$ 上的迭代导子 δ_A。对于带有迭代导子的中心单代数 $F-$，我们证明存在唯一的（在同构意义下）Picard-Vessiot 分裂域；此外，根据其伽罗瓦群的性质，我们还用其右理想 δ_A- 描述该中心单代数的结构。

1. 引言

含幺环 R 上的迭代导子是一个序列 $\delta_R = (\delta_R^{(n)})^{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，由 R 上的加法映射构成，并满足以下条件：

(R1) $\delta_R^{(0)}$ 是 R 上的恒等映射 (R2) 对所有 $a,\ b \in R$ 以及整数 $n \geq 0.$, $\delta_R^{(n)}(ab) = \sum_{i+j=n} \delta_R^{(i)}(a)\delta_R^{(j)}(b)$ (R3) $\delta_R^{(n)} \circ \delta_R^{(m)} = \binom{m+n}{n}\delta_R^{(m+n)}.$

带有迭代导数 δ_R 的环（分别地，域） R 称为 $\delta-$ 环（分别地，$\delta-$ 域），有时记作 $(R,\ \delta_R)$。$(R,\ \delta_R)$ 的常数有时记作 R^δ，是集合 $\{a \in A :\ \delta_A^{(n)}(a) = 0\text{forall}\, n \geq 1\}$，显然它是 $R.$ 的子环。若 R 是域，则 R^δ 是 $R.$ 的子域。

设 F 是一个 $\delta-$ 域。F 上的 $\delta - F-$ 模 M 是一个 $F-$ 模 M，配有一个序列 $\delta_M{:=}(\delta_M^{(n)})^{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，其中的映射是 M 上的加性映射，并满足以下条件：

(M1) $\delta_M^{(0)}$ 是 M 上的恒等映射。(M2) 对所有 $k \in K$ 和 $v \in M,\ \ \delta_M^{(n)}(kv) = \sum_{i+j=n} \delta_K^{(i)}(k)\delta_M^{(j)}(v)$。(M3) $\delta_M^{(n)} \circ \delta_M^{(m)} = \binom{n+m}{n}\delta_M^{(n+m)}.$

若 $\delta-$环 A 是 $\delta-$环 B 的 $\delta-$扩张，则称之为 $\delta-$扩张，当且仅当 B 是 A的子环，且 $\delta_A^{(n)}$ 在 B 上的限制对所有 $n \geq 0.$ 都是 $\delta_B^{(n)}$。$\delta - F-$上的 A 代数是一个 $F-$代数 A，它同时也是 $F.$ 的 $\delta-$扩张。注意，$\delta - F-$代数也是一个 $\delta - F-$模。

在本文中，对于一个 $\delta-$域 F，其常数域为代数闭域，我们使用 [MvdP03] 中发展的迭代微分模理论，并建立一种关于 $\delta - F-$中心

印度科学教育与研究学院（IISER）莫哈利校区第81区，S.A.S. 纳加尔，知识城，旁遮普邦140306，印度。电子邮件地址：ph20019@iisermohali.ac.in、*ravisri@iisermohali.ac.in*。第一作者谨此感谢印度科学与工业研究理事会提供的资助，项目编号为 09/0947(13514)/2022-EMR-1。第二作者谨此感谢 DST-FIST 项目提供的资助，项目编号为 SR/FST/MS-I/2019/46(C)。

单代数的理论，该理论与 $F.$ 的特征无关。我们建立了挠子的推前与微分伽罗瓦群的射影表示之间的联系，并以此推广并重新证明了 [MS24, 定理 1.2]，使其适用于任意特征的域。若 F 是一个微分域，即带有导子映射的域，且特征任意，则根据 Hochschild 的一条定理（[Hoc55, 定理 5]），已知导子可从 F 延拓到$A.$ 上。此外，近期的一篇文章（[MS25]）表明，F 上的导子可以延拓到 F 上任何一个具有光滑自同构概形的 F^{δ}–代数的形式。遗憾的是，一般而言，这些结果对于迭代导子并不成立（见注 2.3）。然而，当 F 的特征不整除 A 的指数时，我们证明可以将给定的 F 上的迭代导子延拓为 A 上的迭代导子（见定理 2.2）。我们还证明了关于 $\delta - F$–中心单代数结构的若干结果，并在迭代导子的背景下给出了 [MS24, 定理 1.1] 的适当推广。值得注意的是，环 R 上的每个有限秩高阶导子[1] 都可以延拓到任意阿祖马亚代数 R–上（见 [RS68]）。

2. EXTE 将域上的迭代导子扩展到中心单代数上

设 F 是一个 δ–域。除非另有明确说明，所考虑的 F–代数和 F–模都是关于 F有限维的。映射 $\delta_F^{(1)}$ 是 $F.$ 上的一个导子。因此，如果 F 的特征为零，则容易看出

$$\delta_F^{(n)} = \frac{\delta^{(1)^n}}{n!}, \tag{2.0.1}$$

其中 $\delta^{(1)^n}$ 表示将映射 $\delta^{(1)}$ 复合 n 次所得的映射。因此，F 上的每个迭代导数都由 $F.$上的一个导子唯一确定。现在，由 [Hoc55，定理 6], 可知，当 F 具有特征 F 为零时，迭代导子可扩张到中心单代数。

对于一个 F–向量空间 V，令 $[V\colon\ F]$ 表示 V关于 $F.$ 的维数。F的布劳尔群记为 $\mathrm{Br}(F)$。对于中心单 F–代数 A，令 $[A] \in \mathrm{Br}(F)$表示 A的布劳尔类；$[A]$ 在 $\mathrm{Br}(F)$中的阶称为 A 的指数，记为 $\exp_F(A)$；$\deg(A) := \sqrt{[A\colon\ F]}$，且 $\mathrm{ind}_F(A) := \deg(D)$，其中 D 是 F上的唯一除代数，使得 $[D] = [A].$。令 $(L|F, G(L|F)\ f)$ 表示 F上的一个交叉积代数，其中 L 是 F 的有限伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 $G(L|F)$，而 f 是第二伽罗瓦上同调群 $\mathrm{H}^2(G(L|F)\ L^*)$中的一个元素。

命题 2.1。设 F是特征为 $p > 0$ 的域，且 $B = (L|F, G(L|F)\ f)$ 是 F 上的交叉积代数，并且 p 不整除$\exp(B)$。那么，F 上的每个迭代导数 δ_F 都可扩张为 B 上的迭代导数 δ_B，使得 δ_B 限制在 L上仍为迭代导数。

证明。令 F_1 为导子映射 $\delta_F^{(1)}$ 在 $F.$ 上的常数域。于是由条件（3），我们得到 $\delta_F^{(p)}$ 将 F_1 映到自身，并且得到 $\delta_F^{(p)}$ 是 $F_1.$ 上的导子。递归地，对于每个$n \geq 1$，我们定义 F_n 为导子映射 $\delta^{(p^n)}{}_F$ 在 $F_{n-1}.$ 上的常数域。因此，我们有以下域的包含关系

$$F = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots .$$

[1]含幺环 R 上的秩为 n 的高阶导子是环 R 上的有限序列加性映射 $\delta^{(0)}{}_R, \delta^{(1)}{}_R, \ldots, \delta^{(n-1)}{}_R$，满足 $\delta_A^{(0)}$ 为恒等映射，且对所有 $a, b \in R$ 和整数 $0 \leq m \leq n.$，有 $\delta_R^{(m)}(ab) = \sum_{i+j=m} \delta_R^{(i)}(a)\delta_R^{(j)}(b)$。

显然，对每个 $n \geq 1$，对于所有 $x \in F_{n-1}$，都有 $x^p \in F_n$，因此 F_n 是 F_{n-1}上的指数一纯不可分扩张。令 $B = (L|F,\ G(L|F)\ f)$。由于 p不整除 exp（B），根据[Hoc55 定理 5], 的证明，我们注意到存在一个 F_1 的伽罗瓦扩张 L_1，包含于L 中，使得 L 是 F 与 L_1 的复合域，并且从 $G(L|F)$ 到 $G(L_1/F_1)$ 的限制映射是一个同构。此外，存在一个元素 $f_1 \in H^2(G(L_1|F_1)\ L_1^{\times})$，使得自然映射从 $(L_1|F_1,\ G(L_1|F_1)\ f_1) \otimes_{F_1} F$到 $(L|F,\ G(L|F)\ f)$ 是 F–代数的同构。类似地，对于每个 $i \geq 0$，我们得到一个定义在 F_i 上的交叉积代数 $B_i := (L_i|F_i,\ G(L_i|F_i)\ f_i)$，使得$B_i \otimes_{F_i} F_{i-1} = B_{i-1}$，其中 $B_0 := B.$。因此，我们有以下滤过

$$B = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \cdots \tag{2.0.2}$$

代数，使得对于每个整数 $i \geq 0.$

现在我们将证明，任何这样的滤过都会导出一个存在于 B 上的迭代导数，并且该导数扩张 δ_F。令 $\delta_B^{(0)}$ 为 $B.$ 上的恒等映射。对于每个正整数 i，利用恒等关系$B_i \otimes_{F_i} F = B$，我们对每个 $p^{i-1} \leq j \leq p^i - 1$，定义

$$\delta_B^{(j)}\left(\sum_{k=1}^{m} x_k \otimes_{F_i} \alpha_k\right) = \sum_{k=1}^{m} x_k \otimes_{F_i} \delta_F^{(j)}(\alpha_k). \tag{2.0.3}$$

由于导子映射的常数 $\delta^{(p^i)}{}_F$ 在 F_{i-1} 上为 F_i，上述映射因而定义良好，并且$\delta_B := (\delta_B^{(j)})_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 显然是 B 上的一个迭代导数（参见 [vdPS03，第 340-341]页）。□

定理 2.2。设 F 的特征为 $p > 0$，且 A 是一个中心单代数 $F-$，满足 p 不整除指数$_F$（A）。那么，F 上的每个迭代导数都可扩张为 $A.$上的迭代导数

证明。设 D 是来自 $A.$ 的布劳尔类的除 $F-$代数。我们首先证明，D 具有一个延拓 $\delta_F.$ 的迭代导数。已知存在一个整数 l，使得 $B := M_l(D)$ 是一个交叉积 $F-$代数。此外，p 不整除 B 的指数。根据 [Hoc55 中定理 5], 的证明，对于每个整数 $i \geq 0$，存在一个如命题 2.1 中所定义的交叉积 F_i-代数 B_i，使得对于每个整数 $i \geq 0.$，$B_i \otimes_{F_i} F = B$

令 exp$_{F_i}(B_i) = n_i m_i$，其中 p 与 n_i 互素，而 m_i 是 p 的幂。令 k_i 和 t_i 为满足 $m_i k_i + t_i$ exp$_F(B) = 1.$ 的整数。对于每个 $i \geq 0$，令 $A_i = B_i^{\otimes_{F_i}^{m_i k_i}}$。我们有如下 $F-$代数同构

$$A_i \otimes_{F_i} F \cong (B_i \otimes_{F_i} F)^{\otimes_F^{m_i k_i}} \cong B^{\otimes_F^{m_i k_i}}.$$

因此，在布劳尔群 Br(F)中，我们有

$$[A_i \otimes_{F_i} F] = [B]^{m_i k_i} = [B]^{1 - t_i \exp(B)} = [B]. \tag{2.0.4}$$

由于 $[A_i]^{n_i}$ 是 $Br(F_i)$中的单位元，且 p 不整除 n_i，我们得到 p 不整除 A_i 在 Br(F_i)中的指数。

设 D_i 为除代数，使得 $[D_i] = [A_i]$ 属于 Br(F_i)。设 K_i 为包含于 $F.$ 中的 F_i的有限扩张。于是 K_i 是纯不可分的，且 $[K_i : F_i]$ 是 $p.$ 的幂。因此 ind$_{F_i}(D_i)$与 $[K_i : F_i]$ 互素，并且已知

$$\mathrm{ind}_{K_i}(D_i \otimes_{F_i} K_i) = \mathrm{ind}_{F_i}(D_i)$$

并且 $D_i \otimes_{F_i} K_i$ 是一个除法 K_i–代数（[GS17，推论 4.5。11]）。允许 K_i 在包含于 F_i 中的所有有限扩张中变化 F，我们得到 $D_i \otimes_{F_i} F$ 也是一个除法 F–代数。

由于 $D_i \otimes_{F_i} F$ 属于 $A_i \otimes_{F_i} F$的布劳尔类，根据（2.0.4），它也属于 $B.$ 的布劳尔类。因此，$D_i \otimes_{F_i} F = D$ 对于所有 $i \geq 0.$ 由于 $B \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$，我们得到一个滤过$D \supseteq D_1 \supseteq D_2 \cdots$，如（2.0.2）所示。因此， D允许一个迭代导数，它扩展了 $F.$上的导子

令 A为任意中心单纯 $F-$代数，且 p不整除 $\exp_F(A)$。由于除 $F-$代数 D满足 $A = M_n(D)$，其中 $[D] = [A]$属于 $\mathrm{Br}(F)$，且 D具有一个滤过

$$D \supseteq D_1 \supseteq D_2$$

且 $D_i \otimes_{F_i} F = D$，我们得到

$$M_n(D) \supseteq M_n(D_1) \supseteq M_n(D_2) \supseteq \cdots$$

并且 $M_n(D_i) \otimes_{F_i} F \cong M_n(D_i \otimes_{F_i} F) \cong M_n(D)$ 对每个 $i \geq 0.$ 现在由（2.0.3）可得一个定义在 A 上并扩张 $\delta_F.$ □的迭代导数

注 2.3。设 $F = F_p(t)$ 是含有 p 个元素的有限域上的有理函数域。对每个 $i \geq 0,$ 令 $F_i = F^{p^i}$，并注意到

$$F_0 = F \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$$

并且 $[F^{p^i} : F^{p^{i-1}}] = p.$于是，存在一个定义在 F [上的迭代导数 δ_FMvdP03，命题 2.2]。设 A 是 F 上次数为 $p^n.$ 的除代数。现在我们将证明 A 不存在扩张 $\delta_F.$ 的迭代导数。反设 (A, δ_A) 是 (F, δ_F) 的一个环扩张。令 $A_0 = A$，并对每个 $i \geq 1,$

$$A_i := \{x \in A_{i-1} \mid \delta_A^{p^{i-1}}(x) = 0\}.$$

那么，每个 A_i 都是除代数，并且自然乘法映射给出了 $A_i \otimes_{F_i} F \cong A$ 上的代数同构。已知任意 F_i 上的除代数 A_i 都是循环的（见[Alb37，定理 3]）：$A = (L|F, G(L|F)\ f)$，其中 $G(L|F)$ 是循环群，且 $L = F(y)$，其中$y^{p^i} = f \in F_i.$ 根据 F_i的定义，存在 $x \in F$，使得 $x^{p^n} = f.$ 于是 $y \otimes_{F_i} 1 - 1 \otimes_{F_i} x$ 在 $A_i \otimes_{F_i} F.$ 中是幂零的。现在，由于 $A_i \otimes_{F_i} F \cong A$，我们得到 A 不是除代数，这与假设矛盾。

3. $\delta-$中心单代数的分裂

在本节中， F是一个 $\delta-$域，其常数域 $F^\delta.$是代数闭域。若（A， δ_A）和（B， δ_B）是 $\delta - F-$ 代数（分别为 $\delta - F-$ 模），则张量积 $A \otimes B$具有迭代导子（$\delta_A \otimes \delta_B$）$^{(n)}$（$a \otimes b$）$= \sum_{i+j=n} \delta_A^{(i)}$（$a$）$\otimes \delta_B^{(j)}$（$b$），从而使（$A \otimes B$， $\delta_{A\otimes B}$）成为 $\delta - F-$代数（分别为 $\delta - F-$模）。态射 ϕ： $A \to B$中的 $\delta - F-$代数（分别为$\delta - F-$模）之间的态射，若是 $F-$态射且对所有 $a \in A$和 $n \geq 0.$都有 ϕ（$\delta_A^{(n)}$（a））$= \delta_B^{(n)}$（ϕ（a））， 则称为.....。设（K， δ_K）是（F， δ_F）的一个扩域。若 $\delta-$域 K将 A这个 $\delta - F-$代数（分别为 $\delta - F-$模）分裂，或者等价地，（$A \otimes_F K$， $\delta_A \otimes \delta_K$）是一个分裂的 $\delta - K-$代数（分别为 $\delta - K-$模），则自然映射 μ_K：（$A \otimes_F K$）$^\delta \otimes_{F^\delta} K \to A \otimes_F K$ 是一个 $\delta - K-$同构。若 A 是一个由 $\delta-$域 K 分裂的 $\delta - F-$中心单代数，那么，由于 $A \otimes_F K$ 是一个中心单$K-$代数，（$A \otimes_F K$）$^\delta$是代数闭域 F^δ上的中心单代数。因此， $\delta - F-$代数（$A \otimes_F K$）$^\delta \otimes_{F^\delta} K$同构于 $\delta - F-$代数 M_n（F^δ）$\otimes_{F^\delta}$（K），它

进而同构于 $\delta-F$–代数（$\mathbf{M}_n（K）$ Δ_K），其中，对任意矩阵（a_{ij}） $\in M_n（K）$ 以及$l \geq 0$,

$$\Delta_K^{(l)}((a_{ij})) = (\delta_K^{(l)}(a_{ij})).$$

δ–域扩张 K 称为 F 的 Picard-Vessiot 扩张，对一个 $\delta-F$–模 M，如果

(i) $K^\delta = F^\delta$(ii) $(M \otimes K,\ \delta_M \otimes \delta_K)$ 是一个分裂的 $\delta-K$–模。(iii) 若 e_1，……， e_n 是 M的一个 F–基，则 K 作为域在 F上的生成元为所有$v \in (M \otimes K)^{\delta_M \otimes \delta_K}$ 相对于基 $K-e_1 \otimes 1$，……，$e_n \otimes 1$.的系数

现在我们回顾迭代微分模的皮卡-维essi奥理论中的若干事实（[MvdP03，vdPS03]）。对于给定的 $\delta-F$–模 M，Picard-Vessiot 扩张存在，且在 $\delta-F$–同构意义下唯一。映射 $\delta_F^{(1)}$ 是 $F.$ 上的一个导子。如果 F的特征为0，则已知 K 是微分域 F（其导子为 D）的 Picard-Vessiot 扩张，当且仅当域 K 是 δ–域 F的 *Picard-Vessiot* 扩张，其中 δ_F 定义为

$$\delta_F^{(n)} = \frac{D^n}{n!}, \tag{3.0.1}$$

其中 D^n 表示将映射 D 复合 n 次。这里的关键在于，微分域 $(F,\ D)$ 与 δ–域 F 具有相同的常数域。

设 K是 F的一个 Picard-Vessiot 扩张，对应于一个 $\delta-F$–模 $M.$。K的所有 $\delta-F$–自同构构成的群 $\mathbf{G}(K|F)$ 称为 $K.$的伽罗瓦群 。$\mathbf{G}(K|F)$ 在 $M \otimes_F K$上的作用由下式给出

$$\sigma \cdot (v \otimes x) = v \otimes \sigma(x), \quad \sigma \in G(K|F), \quad v \in M, \quad x \in K \tag{3.0.2}$$

该作用限制为在 $(M \otimes K)^\delta$ 上的作用，并给出一个忠实表示 ϕ_M：$G \to \mathbf{GL}_n(M \otimes K)^\delta$，其定义在 $F^\delta.$ 上。 ϕ_M 在此表示下的像是既约的，因此是 $\mathbf{GL}((M \otimes K)^\delta)$ 的一个光滑闭代数组。 K中最大的 F^δ–向量子空间记为 $\mathbf{T}(K|F)$，$\mathbf{G}(K|F)$ 在其上有理作用；该子空间构成一个 $\delta-F$–代数，称为 M的皮卡-维西奥代数或皮卡-维西奥环。此作用在 $X = \mathbf{maxspec}(T)$ 上诱导出 G的作用，后者是定义在 $K.$ 上的一个仿射代数概形。已知 X 是 $K.$上的一个 G–主齐性空间。

3.1. 挠子的推前。这里陈述一些关于挠子推前的事实。我们先回顾挠子的坦纳卡形式主义。设 G 是一个 F^δ–群。G–上的F 挠子与纤维函子 $\mathscr{F}: \mathbf{Rep}(G) \to \mathbf{Vect}_F$ 存在双射对应；该函子从 G 上的有限维表示范畴（底域为 F^δ）到 F上的有限维向量空间范畴。此函子由 $Y \mapsto \mathscr{F}_Y$ 给出，其中 $\mathscr{F}_Y(V) = (V \otimes F[Y])^G.$众所周知，$\dim_{F^\delta}(V) = \dim_F(\mathscr{F}_Y(V))$. 此外， $\mathscr{F}_Y$被 $F[Y]$中性化，具体来说，复合函子 $V \mapsto \mathscr{F}_Y(V) \otimes F[Y]$ 从 $Rep(G)$ 到 $F[Y]$ 上的有限生成投射模范畴，与函子 $V \mapsto \mathbf{F}(V) \otimes F[Y]$ 等价；后者从 $\mathbf{Rep}(G)$ 到 $F[Y]$上的有限生成投射模范畴，其中 F 是从 $\mathbf{Rep}(G)$ 到 F^δ–向量空间范畴的遗忘函子。也就是说，我们有如下的 $F[Y]$–模同构

$$\mathscr{F}_Y(V) \otimes_F F[Y] \cong \mathbf{F}(V) \otimes_{F^\delta} F[Y].$$

设 $\phi: G \to H$ 是群 F^δ–之间的同态，且 Y是 $F.$ 上的 G–挠子。将 Y沿 ϕ 推前，得到与纤维函子 $\mathscr{F}_Y \circ \phi^*: Rep(H) \to Rep(G)$ →对应的 H–挠子

$Vect_F$ 其中 ϕ^* 是由 ϕ. 诱导的显然函子。或者，推前也可以定义如下。$(F[Y]\otimes F^\delta[H])^G$ 的点函子由 G–轨道的预层$\frac{Y\times H}{G}$层化得到，其中 G 在 $Y\times H$ 上作对角作用。由此得到的概形称为 Y 与 H 在 G上的缩并积，记作 $Y\times^G H$. 。 $Y\times^G H$ 上的 H 作用由 H 对右因子 H 的作用给出。在此作用下， $Y\times^G H$ 是一个 H–挠子，称为 Y沿 ϕ的推前。（参见 [BHHW18，附录]）。

给定同态 ψ： $G\to PGL_n=$ Aut(M_n)，沿 ψ 对 Y 的推前给出一个 $\mathrm{PGL_n}-$ 主丛 $Y\times^G \mathrm{PGL_n}$，它对应于 F 上的中心单代数 $(F[Y]\otimes M_n(F^\delta))^G$。注意，这个 $\mathrm{PGL_n}$ 主丛的坐标环为 $(F^\delta[\mathrm{PGL_n}]\otimes_{F^\delta} F[Y])^G$，其中群 G 在 $F^\delta[\mathrm{PGL_n}]\otimes_{F^\delta} F[Y]$ 上作对角作用。

令 $G:=G(K|F)$ $\{\{M\}\}$ 为由 M 生成的 $\delta-F$–模的刚性幺半范畴，并令 Rep(G) 为 F^δ. 上 G 的所有表示所构成的范畴。那么，对于任意 $N\in\{\{M\}\}$，由 $\mathscr{S}(N)=(N\otimes_F K)^\delta$ 给出的 $\mathscr{S}$: $\{\{M\}\}\to$Rep(G) 建立了一个范畴等价，其拟逆为 $V\mapsto(V\otimes_{F^\delta} K)^G$.。值得注意的是，对于 $X=$maxspec($T(K|F)$)，我们有 $F[X]=T(K|F)$；利用维数计数可得 $\mathscr{F}_X(V)=(V\otimes_{F^\delta} K)^G$。因此，若将拟逆 $V\mapsto(V\otimes_{F^\delta} K)^G$ 与从 $\{\{A\}\}$ 到 Vect_F 的遗忘函子复合，我们便得到 $\mathscr{F}_X$.

3.2. **分裂** $\delta-F$–**代数**。设 A 是一个 $\delta-F$–代数，且 K 是 $\delta-F$–模 A. 的 Picard-Vessiot 扩张。那么，根据定义，我们有自然的 $\delta-K$–模同构

$$\mu_K:(A\otimes_F K)^\delta\otimes_{F^\delta} K\to A\otimes_F K. \tag{3.2.1}$$

容易看出，这个同构是一个 $\delta-K$–代数同构。因此，Picard-Vessiot 扩张 K 也将 $\delta-F$–代数 A. 分裂。由于 $A\otimes_F K$ 是一个中心单 K–代数，因此可知 $(A\otimes_F K)^\delta$ 是一个中心单 F^δ–代数。因此，在 3.0.2 中定义的同态$G\to GL((A\otimes K)^\delta)$的像包含于 Aut($(A\otimes K)^\delta$) $=M_n(F^\delta)$ 中，其中 $n=$dim$_{F^\delta}((A\otimes_F K)^\delta)=$deg($A$)。于是，我们得到代数群 G($K|F$) $\to PGL_n(F^\delta)$ 的一个同态，有时称其为次数为 n.的射影表示。回顾一下，G($K|F$) 对 Picard-Vessiot 环 T($K|F$) 的作用在 $X=$maxspec($T(K|F)$) 上诱导出 G的作用，使得 X 成为 F.上的一个 G–托orsor

定理 3.1. δ –F–被 K 分裂且在 F 上次数为 n 的所有中心单代数的同构类，与所有次数为 n. 的、两两不等价的 $\mathrm{G}(K|F)$ 射影表示构成的集合之间存在双射对应。在此双射下，由 $\mathrm{G}(K|F)$ 的射影表示 ϕ 构造出的中心单 F–代数，对应于沿着 ϕ. 对 $X=maxspec(T(K/F))$ 进行推前所得到的 PGL_n–挠子。

证明。设 A 是一个被 K. 分裂、次数为 n 的 $\delta-F$–中心单代数。那么，

$$(A\otimes K)^\delta=(A\otimes F[X])^\delta\cong M_n(F^\delta).$$

因此，G($K|F$) 既有理作用，也作为 $M_n(F^\delta)$ 的 $F-$ 自同构群作用，从而给出一个次数为 n. 的射影表示。反过来，设 ϕ: $G\to\mathrm{PGL_n}(F^\delta)=$Aut($M_n(F^\delta)$) 是代数群之间的映射。那么 $(M_n(F^\delta)\otimes_{F^\delta} F[X])^{G(K|F)}$ 是一个 $F-$ 代数。由于

$$(M_n(F^\delta)\otimes_{F^\delta} F[X])^{G(K|F)}\otimes_F F[X]\cong M_n(F^\delta)\otimes_{F^\delta} F[X]\cong M_n(F[X]),$$

我们得到 $(M_n(F^\delta) \otimes_{F^\delta} F[X])^{G(K|F)}$ 是一个中心单纯 $F-$ 代数。正如前面所述，PGL_n 托尔索 $X \times^{G(K|F)} \mathrm{PGL}_n$ 对应于中心单纯 $F-$ 代数 $(M_n(F^\delta) \otimes_\delta F[X])^{G(K|F)}$. □

沿同态 $H \to G$对 $H-$扭子 X 作推前，可将其实现为映射 $H^1(F,H) \to H^1(F,G)$ 下 X 的像，其中已将 F 上扭子的同构类与第一伽罗瓦上同调对应。利用这一事实，我们作如下评述。

注 3.2。

(1) 设 A 是一个由 Picard–Vessiot 扩张 $K.$ 分裂的 $\delta - F-$中心单代数。若 G$(K|F)-$ 扭子 maxspec$(T(K/F))$ 是平凡的，则沿射影表示对该扭子作推前所得的扭子也平凡，因此，与这个平凡的 G$(K|F)-$ 扭子对应的中心单代数 $A,$ 必为矩阵 $F-$代数。

(2) 一般而言，(1) 的逆命题未必成立。但是，如果 G$(K|F)$ 的相关射影表示嵌入为 $\mathrm{PGL}_n(F^\delta)$ 的一个抛物子群，那么逆命题确实成立。为此，设 A 是一个矩阵 $F-$代数。根据定义， A 必须对应于沿射影表示对扭子 maxspec$(T(K|F))$ 作推前所得的扭子，因此该推前必为平凡扭子。但在这种情况下，由射影表示诱导的映射 $H^1(F,G) \to H^1(F,PGL_n)$ 是单射（Ser94, § 2, 习题 1]）。因此，maxspec$(T(K|F))$ 必须是 $F.$上 G$(K|F)$ 的平凡扭子。

(3) 注意，一般线性群的扭子是平凡的。因此，如果微分伽罗瓦群的射影表示 ϕ 可以提升为线性表示 $\phi,$ 也就是说，存在代数群的交换图

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{GL}_n(F^\delta) \\ & \overset{\tilde{\phi}}{\nearrow} & \downarrow \pi \\ G(K|F) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{PGL}_n(F^\delta) \end{array}$$

那么，沿 ϕ 推前扭子 maxspec$(T(K|F))$ 后得到的扭子是平凡的，因此我们可得 A 是一个矩阵 $F-$ 代数。

(4) [JL], 作者有一个 F 特征零域和一个 Picard–Vessiot 扩张 K，其微分伽罗瓦群为$\mathrm{G}(K|F) = \mathrm{PGL}_2$，并且$\mathrm{maxspec}(T(K/F))$是一个非平凡的$PGL_2$ 扭子。如果我们取恒等映射作为 PGL_2 的射影表示，那么$\delta-F-$被 K 分裂的中心单代数必定是一个四元数除 $F-$代数。

(5) 若 A 是中心单纯 $F-$ 代数，且 F 的特征不整除 exp(A)，则存在一个中心单纯 $F-$ 代数 B，它与 A Brauer等价，并且具有迭代导数 δ_B，使得 (B,δ_B) 可被 F 的有限伽罗瓦扩张分裂。证明如下。由于 F^δ 包含所有单位根，因此存在一个交叉积 $F-$ 代数 B，它与 A Brauer等价，且满足 $B = (K|F, G(K|F)\ f)$，其中 f 是一个取值于 F^δ [的余循环。见 Mei12，引理 5.3]。若 $\{u_\sigma \mid \sigma \in G(K|F)\}$ 是 B 的 $F-$基，使得 $u_\sigma u_\tau = f(\sigma,\tau)u_{\sigma\tau}$，那么，将 K 上唯一的、延拓 F 上迭代导数的迭代导数，通过对所有

$j \geq 0$,

$$\delta_B^{(j)}\left(k_0+\sum_{\substack{\sigma\in G(K|F)\\ \sigma\neq 1}} k_\sigma u_\sigma\right)=\delta_K^{(j)}(k_0)+\sum_{\substack{\sigma\in G(K|F)\\ \sigma\neq 1}}\delta^{(j)}(k_\sigma)u_\sigma$$

注意，条件（1）显然成立，并且 $\mathrm{G}(K|F)$ 中的元素与δ_K可交换。现在，对于 σ， $\tau\in G($ $K|F)$ 以及 k_σ， $k_\tau\in K$对于非负整数 i， j， n，我们有

$$\delta_B^{(n)}\left(k_\sigma u_\sigma k_\tau u_\tau\right)=\delta_B^{(n)}\left(k_\sigma\sigma(k_\tau)u_\sigma u_\tau\right)=\delta_K^{(n)}\left(k_\sigma\sigma(k_\tau)f(\sigma,\tau)\right)u_{\sigma\tau}=\delta_K^{(n)}\left(k_\sigma\sigma(k_\tau)\right)f(\sigma,\tau)u_{\sigma\tau}$$

$$\delta_B^{(i)}\left(k_\sigma u_\sigma\right)\delta_B^{(j)}\left(k_\tau u_\tau\right)=\delta_K^{(i)}\left(k_\sigma\right)u_\sigma\delta_K^{(j)}\left(k_\tau\right)u_\tau=\delta_K^{(i)}(k_\sigma)\delta_K^{(j)}(\sigma(k_\tau))f(\sigma,\tau)u_{\sigma\tau}.$$

由这些等式可得，映射 $\delta_B^{(j)}$ 满足条件（2）和（3）。令$\{v_1,\ldots,v_n\}$为 F–的一组基。 K. 那么，对于每个 $1\leq i\leq n$，元素

$$\sum_{j=1}^{n} v_j\otimes_F v_i^{(j-1)}$$

显然都是常数。由于对每个 $\sigma\in\mathrm{G}(K|F)$ u_σ 也为常数，我们得到自然映射

$$(B\otimes_F K)^\delta\otimes_{F^\delta}K\mapsto B\otimes_F K$$

是一个 $\delta-F$–同构。因此， K 分裂 $\delta-F$–代数 B.

(6) 类似于域的绝对伽罗瓦群（它是有限伽罗瓦群上的逆极限），在 δ–域的情形下，我们有一个原代数绝对 δ–伽罗瓦群 G_F，它是所有 δ–伽罗瓦群上的逆极限。所有 $\delta-F$–中心单代数的同构类由 G_F.的射影表示给出。可以定义一个 $\delta-F$–布劳尔幺半群，类似于特征零下的微分布劳尔幺半群（见 [Mag23]），它是由 G 的射影表示构成的直接系统的直极限。$_F$. 此处，直接系统中的序关系由正整数的整除性给出，而箭头则由映射射影表示 ϕ （次数为 n）到复合映射 $\alpha_{n,\ m}\circ\phi$，其中 $\alpha_{n,\ m}$: $\mathrm{PGL_n}\to\mathrm{PGL_{mn}}$ 是由 $X\mapsto\otimes^n X$在矩阵上诱导的自然映射。

(7) 设 V 是一个带有满足以下条件的结构的 F^δ– 向量空间：i) Aut(V)，即 GL(V) 中所有保持结构的自同构所成的子群，是扎里斯基闭的。ii) 每个 V 上的 Aut(V)– 主丛都对应于 F 上的 V 的一个形式。那么，对于任意线性代数群 G 、态射 ϕ： $G\to\to$Aut(V)，以及任意 F 上的 X 主丛，沿 ϕ 对 X 作推前，得到一个 Aut(V)– 主丛，它对应于 V 的一个形式，即 =($V\otimes_{F^\delta}F[X]$)^G： 其结构由 V. 上的结构诱导而来。例如，很容易验证，带有一个 (p,q)– 张量的 F^δ– 向量空间 V 满足条件 i) 和 ii)。现在，若 G 是 Picard-Vessiot 扩张 K 的 F 上的伽罗瓦群，且 $X=$ maxspec($T(K|F)$)，则 A 是一个 $\delta-F$– 模，其中 δ_A 保持 A 上的结构。此外，存在一个 $\delta-K$– 模的同构

$$A\otimes_F K\to V\otimes_{F^\delta}K$$

它也保持 $A \otimes_F K$ 和 $V \otimes_{F^\delta} K$. 上的结构。因此，我们得到了对正特征域上 $\Phi-$ 对象这一概念的自然推广，参见 [TW24, § 3.3] 。反过来，若 A 是一个带有相容结构的 $\delta - F-$ 模，且 K 是 (A, δ_A) 的 Picard-Vessiot 扩张，则存在一个代数群态射 $G(K|F) \to$ →Aut($(A \otimes_F K)^\delta$)，其中 Aut($(A \otimes_F K)^\delta$) 表示保持 $(A \otimes_F K)^\delta$. 上结构的 $F^\delta-$ 自同构

4. $\delta - F-$中心单代数的结构

本节的主要目标是建立 $\delta -F-$中心单代数的性质与其 $\delta-$伽罗瓦群之间的对应关系，这与作者在 [MS24, 定理 1.1] 中建立的对应关系类似。事实上， [MS24 §3 和 §4]中的大多数证明，尤其是 [MS24, 命题 3.1 和 4.1], ，都可以直接推广到迭代导子的背景下，无需任何修改。首先，我们回顾 [BMR05] 和 [BHMR15]中的若干定义。设 H 是连通约化群 $G.$ 的一个闭子群。若每当 H 包含于 G 的一个抛物子群 P 时，它也包含于 $P.$ 的一个 Levi 子群中，则称群 H 为 $G-$ 完全可约。若 H 不包含于 $G.$ 的任何真抛物子群，则称群 H 为 $G-$不可约。若不存在 G 的抛物子群P 使得 H 包含于 $P.$ 的一个 Levi 子群中，则称群 H 为 $G-$不可分解。注意， GL的子群 H （V）是 GL(V)–完全可约（分别地，GL(V)–不可约、GL(V)–不可分解）的，当且仅当 V是完全可约（分别地，不可约、不可分解）的 $H-$模。

引理 4.1。 设 H 是 $\mathrm{PGL_n}(F^\delta)$ 的一个闭子群。

(1) 当且仅当 $M_n(F^\delta)$ 是最小的 $H-$稳定右理想的直和时， H 是 $\mathrm{PGL_n}-$完全可约的。(2) 当且仅当 $\mathrm{M_n}(F^\delta)$ 没有真非平凡的 $H-$稳定右理想时， H 是 $\mathrm{PGL_n}-$不可约的。(3) 当且仅当 $\mathrm{M_n}(F^\delta)$ 不能写成真 $H-$稳定右理想的直和时， H 是 $\mathrm{PGL_n}-$不可分解的。

证明。令 $\pi\colon \mathrm{GL_n}(F^\delta) \to \mathrm{PGL_n}(F^\delta) = \mathrm{Aut}(\mathrm{M_n}(F^\delta))$ 是典范投影。由于 π是非退化的，$\mathrm{PGL_n}(F^\delta)$ 的闭子群 H 是 $\mathrm{PGL_n}(F^\delta)$完全可约的，当且仅当 $\pi^{-1}(H)$ 是 $\mathrm{GL_n}(F^\delta)$完全可约的。此外， $\pi^{-1}(H)$ 是 $\mathrm{GL_n}(F^\delta)$完全可约的，当且仅当 $(F^\delta)^n$ 是一个完全可约的 $\pi^{-1}(H)-$模。现在，我们利用如 MS24，命题 4.1] 所述的 $(F^\delta)^n$ 稳定子空间与 $\mathrm{M_n}(F^\delta)$ 的 $H-$稳定理想之间的对应关系来证明 (1)。断言 (2) 和 (3) 的证明类似。□

设 A 是一个 $\delta - F-$代数，且 K 是 F 的一个 Picard–Vessiot 扩张，它分裂了 $A.$。那么，我们知道 $\mathrm{G}(K|F)$ 在 $(A \otimes K)^\delta \cong M_n(F^\delta)$ 上作用为 $\delta - F-$代数自同构，进而诱导出一个射影表示 $\phi\colon \mathrm{G}(K|F) \to \mathrm{PGL_n}(F^\delta)$。我们将带有这一 $\mathrm{G}(K|F)$ 作用的 $\mathrm{M_n}(F^\delta)$ 记为 $(M_n(F^\delta)\ G_\phi)$。于是，与零特征微分域的情形类似，在迭代微分模的 $\delta-$伽罗瓦理论中，我们有坦纳卡形式主义的一个完全类似版本（参见 [vdPS03, §13], [NS20]）。那么，在迭代导子的背景下， [MS24，命题 3.1],

给出以下集合之间的一个双射：$\mathrm{G}(K|F)$–的稳定右理想 $M_n(F^\delta)$ 与δ–理想[2]的 A.

现在我们给出以下定义。如果 A 是极小 δ–右理想的直和，则称A 为 δ–完全可约。如果 A 没有非平凡的 δ–右理想，则称 A 为 δ–不可约。如果 A 不是非平凡 δ–右理想的直和，则称 A 为δ–不可分解。

定理4.2。 设(A,δ) 是一个 $\delta-F$–代数，其中 F^δ 是一个代数闭域。设 K 是 $\delta-F$–模的 *Picard-Vessiot* 扩张，并且 $\phi:\mathrm{G}(K/F)\to\mathrm{PGL_n}(F^\delta)$ 是相应的射影表示。那么， A是 δ–完全可约（分别为不可约、不可分解），当且仅当$\mathrm{G}(K|F)$ 是$\mathrm{PGL_n}(F^\delta)$–完全可约（分别为不可约、不可分解）。

证明。 结合引理 4.1 与 $H=\phi(G(K|F))$ 以及 [MS24，命题3。1]。 □

推论4.2.1。 若 D 是 $\delta-F$–除代数，则 δ–的伽罗瓦群是$\mathrm{PGL_n}$–不可约的，因而它是约化的。

证明。由引理 4.1 (2)，我们知道，δ–的伽罗瓦群的射影表示像是$\mathrm{PGL_n}$–不可约的。由于$\mathrm{PGL_n}$ 是约化的，因此 δ–的伽罗瓦群也是约化的。 □

致谢。 作者谨向加利福尼亚大学洛杉矶分校的A. Merkurjev教授和Technische Universit¨at的D. Hoffmann教授致谢，感谢他们提出的宝贵建议和意见。

参考文献

[Alb37] A. A. Albert。《p域上由一个不定元生成的代数》。《美国数学会通报》，43(10)：733–736，1937。 ↑4[BHHW18] Annette Bachmayr、David Harbater、Julia Hartmann 和 Michael Wibmer。《复函数域上的微分嵌入问题》。Doc. Math.，23：241–291，2018。 ↑6[BHMR15] Michael Bate、Sebastian Herpel、Benjamin Martin 和 Gerhard R¨ohrle。《非连通群中的 G 完全可约性》。Proc. Amer. Math. Soc.，143(3)：1085–1100，2015。 ↑9[BMR05] Michael Bate、Benjamin Martin 和 Gerhard R¨ohrle。《完全可约性的几何方法》。Invent. Math.，161(1)：177–218，2005。 ↑9[GS17] Philippe Gille 和 Tam´as Szamuely。《中心单代数与伽罗瓦上同调》，剑桥高等数学研究丛书第165卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，

2017 ↑3。

[55] p

Hoc G. Hochschild。《受限李代数与 ↑2特征 ↑3下的单结合代数》。Trans. Amer. Math. Soc.，80：135–147，1955。[,] ↑7JL[23] 10 153 165, 2023 ↑8

[12]

Lourdes Juan 和 Arne Ledet。《构造非平凡的 pgl 2-挠子与 Picard-Vessiot 扩张》。 ↑7[Mag Andy R. Magid。《微分布劳尔幺半群》。Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B，：–。 Mei Ehud Meir。《每个中心单代数都 Brauer等价于一个 Hopf-Schur代数》。Illinois J. Math.，56(2)：423–432，2012。 24] ↑2MS ↑9Manujith K. Michel 和 Varadharaj R. Srinivasan。《微分中心单代数的微分伽罗瓦群及其射影表示》，2024。 ↑10，[，25] ↑2MS[Manujith K. Michel 和 Chitrarekha Sahu。《将导子扩展到形式》。J. Algebra，683：232–237，2025。03] ↑1MvdP ↑4B. Heinrich Matzat 和 Marius van der Put。《迭代微分方程与 Abhyankar猜想》。J. Reine Angew. Math.，557：1–52，2003。 ↑5，，

[2] A的一个理想 I 是 δ–理想，若对于每个 $i\geq 0$， $\delta_A^{(i)}$ 都将 I 映射到自身。

[NS20] Levente Nagy 和 Tam´as Szamuely。《Andr´e 的解代数的一般理论》。Ann. Inst. Fourier (Grenoble)，70(5)：2103–2129，2020。 ↑9[RS68] A. Roy 和 R. Sridharan。《高阶导子与中心单代数》。Nagoya Math. J.，32：21–30，1968。↑2[94] 5 1994 ↑7 Ser [24] 658 49 Jean-Pierre Serre。《伽罗瓦上同调》，第 ↑9卷。Springer Science & Business Media，[。TW Man CheungTsui 和 Yidi Wang。《皮卡-维essi奥理论的上同调》。J. Algebra，：–72，2024。 03] [vdPS]Marius van der Put 和 Michael F. Singer。《线性微分方程的伽罗瓦理论》，数学科学基础丛书第328卷 ↑3数学科学基本原理 ↑5。Springer-Verlag，柏林，2003年。 ↑9，，