arXiv:2601.15651v1 [math.DS] 22 Jan 2026

横截轨迹的指标理论

NELSON SCHUBACK

摘要。 本文提出了 Le Roux 指标的一种替代性定义 [LR17]„ 将非奇异平面流的庞加莱–霍普指标推广到了布劳威尔同胚这一更广泛的框架中。这一新方法回答了 Le Roux 提出的问题，按照 Le Calvez 的观点，在布劳威尔同胚的指标与其横截叶状结构之间建立了联系 [LC04]。

关键词： 平面同胚、庞加莱–霍普指标、同伦布劳威尔理论、横截叶状结构、横截轨迹。

2020年数学主题分类： 37E30（主要）；37B30（次要）

目录

1. 引言 1 2. 背景与符号 4 2.1. Whitney 参数化 C^0-叶状结构 4 2.2. Serre纤维化 6 2.3. 叶状布劳威尔理论 7 2.4. 同伦布劳威尔理论 8 2.5. 布劳威尔同胚的 Le Roux 指标 9 3. 拓扑角函数 9 3.1. 重述 Le Roux 指标 10 4. 两条横截拓扑线之间的叶层指标 13 4.1. 构形空间中的可达点 15 5. 定理 A 的证明 20 参考文献 22

1. 引言

设 X 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个（光滑）无奇点向量场。存在唯一的平面叶状结构 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{F}$ 的叶是 X 的积分曲线。也就是说， $\mathcal{F}$ 的每个叶都是一条拓扑直线，对应于流 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的一条轨迹，该流由下式的解给出

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Phi_t(x) = X(x), \\ \Phi_0(x) = x. \end{cases}$$

叶 ϕ_1 与 ϕ_2 之间的庞加莱-霍普夫指数（记作 $\mathrm{Ind}(\mathcal{F},\phi_1,\phi_2)$）可定义如下。我们指出，对于任意两个不同的叶 $\phi_1,\phi_2\in\mathcal{F}$，存在一个保向微分同胚 $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$，满足对每个 $i\in\{1,2\}$， $h(\phi_i) = \mathbb{R}_i$，其中 $\mathbb{R}_i$ 表示水平 $\mathbb{R}\times\{i\}$。注意，推前向量场 h_*X 在直线 $h(\phi_1)$ 和 $h(\phi_2)$ 上是水平的。这意味着，对于任意一条将 $h(\phi_1)$ 与 $h(\phi_2)$ 连接起来的路径 $\alpha\colon [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$， h_*X 沿 α 的绕数是 $1/2$的整数倍。回顾一下，

本项目获得了欧盟地平线 2020 研究与创新计划的资助，资助依据为玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号 945332）。

这个绕数可由下式给出

$$\mathrm{Wnd}(h_*X, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\big(\widetilde{s}\,(1) - \widetilde{s}\,(0)\big),$$

其中 $\widetilde{s}\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是函数 $s\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 的模$_{2\pi}$提升，该函数为每个参数 $t \in [0,1]$ 指定向量 $h_*X(\alpha(t))$ 相对于水平正方向的角度。通过两种不同的连通性论证，可以证明 $\mathrm{Wnd}(h_*X, \alpha)$ 与 h 和 α的选取无关。总之，这个绕数定义了叶状结构 $\mathcal{F}$中叶 ϕ_1和 ϕ_2之间的指标概念，记作 $\mathrm{Ind}(\mathcal{F}, \phi_1, \phi_2)$。对于任意 $x_1 \in \phi_1$和 $x_2 \in \phi_2$，此指标都能明确地与时间一映射 Φ_1及其两条轨道 $O_1 = O(\Phi_1, x_1)$ 和$O_2 = O(\Phi_1, x_2)$ 相对应，从而定义 $\mathrm{Ind}(\Phi_1, O_1, O_2) := \mathrm{Ind}(\mathcal{F}, \phi_1, \phi_2)$。

布劳威尔同胚，即平面上无不动点且保定向的同胚，严格推广了无奇点流的时间一映射 [And65]。令人惊讶的是，尽管缺少流结构，无奇点流的许多动力学性质仍可推广到布劳威尔同胚这一更一般的情形。例如，布劳威尔平面平移定理 [Bro12] 表明，布劳威尔同胚的每条轨道都是从整数集到平面的真嵌入，因而推广了庞加莱–本迪克松定理。在此背景下，一个自然的问题随之产生：

是否有办法将庞加莱-霍普夫指数推广到布劳威尔同胚？

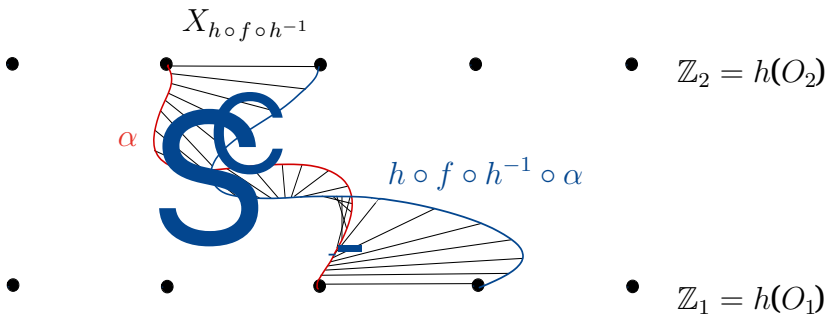
Le Roux 最早探讨了这个问题 [LR17]。在此，Le Roux 借鉴 Handel 同伦布劳威尔理论 [Han99], ，引入了一种针对两条轨道的布劳威尔同胚指标，本文将其称为*Le Roux* 指标。

设 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个布劳威尔同胚， O_1 和 O_2 是 f 的两个轨道。 f 关于 O_1 和 O_2的布劳威尔映射类记作 $\big[f, \{O_1, O_2\}\big]$，是 f 关于 $O_1 \cup O_2$的同伦类。根据 Handel 在 [Han99], 中的结果，我们知道存在一个保向同胚 $h\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$，满足对每个 $i \in \{1,2\}$，均有 $h(O_i) = \mathbb{Z} \times \{i\}$，并且将 $\big[f, \{O_1, O_2\}\big]$ 共轭到以下某个类：

$$\big[T, \mathbb{Z}_{1,2}\big], \quad \big[T^{-1}, \mathbb{Z}_{1,2}\big], \quad \big[R, \mathbb{Z}_{1,2}\big], \quad \big[R^{-1}, \mathbb{Z}_{1,2}\big],$$

其中 $\mathbb{Z}_{1,\ 2}$是集合 $\mathbb{Z}\times\{1,2\}$，映射 T是平面上的酉水平平移，而R 是平面上标准 Reeb 流的时间一映射（更多细节请参见第 2.4 节）。所有这类同胚 h对于 f， O_1和 O_2记作 Handel$(f,$ $O_1,$ $O_2)$。

令$X_f(x)$ 为平面上由下式定义的向量场 $X_{h\circ f\circ h^{-1}}$在 $\mathbb{Z}_1$和 $\mathbb{Z}_2$上都是水平的。因此，沿连接 $\mathbb{Z}_1$与 $\mathbb{Z}_2$的任意路径 α的绕数 $\mathrm{Wnd}(X_{h\circ f\circ h^{-1}}, \alpha)$ 必须是 $1/2$的整数倍。在 [LR17], 中，Le Roux 证明了该绕数与所选的 $h \in$Handel(f, O_1, O_2) 和 α 无关，因此定义了布劳威尔同胚 f相对于 O_1和 O_2的一个指标概念，记作 $\mathrm{Ind}(f, O_1, O_2)$。



正如预期，Le Roux 指标推广了无奇点流的时间一映射的庞加莱–霍普夫指标。然而，与流的情形不同，它无法自然地诠释为叶状结构指标。此外，由于它依赖于依据同伦布劳威尔理论的准则所选定的特定共轭，而非布劳威尔同胚的内在性质 f，因此难以理解 Le Roux 指标如何反映 f的定性动力学特征。 [LR17], 中强调了这一问题，Le Roux 在文中猜想，或许存在一种更具内在性、也可能更直观的指标定义$\mathrm{Ind}(f,\ O_1,\ O_2)$，其中涉及一种共轭准则，该准则基于 f相对于轨道 O_1和 O_2的定性动力学特征。

本文通过给出一种基于叶状结构的定义来回答 Le Roux 的问题：该定义用于布劳威尔同胚的指标，且与 Le Roux 指标一致。首先，我们引入一个指标$\mathrm{Ind}(\mathcal{F},\ \Gamma_1,\ \Gamma_2)$，用于一对相对于叶状结构 Γ_1和 Γ_2正向横截 $\mathcal{F}$ 的定向拓扑直线（见命题4.1）。下面，我们对这个指标作直观说明。

设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个定向叶状结构，且 Γ_1 和 Γ_2 是相对于 $\mathcal{F}$正向横截的定向拓扑直线。若 Γ_1和 Γ_2相交，我们将定义 $\mathrm{Ind}(\mathcal{F},\ \Gamma_1,\ \Gamma_2) := 0$。因此，我们可以假设 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$。考虑一个保向同胚 $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$，满足$h(\Gamma_i) = \mathbb{R}_i$，其中 $i \in \{1,2\}$，以及两条路径 $\alpha,\ \alpha'\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$，满足 $\alpha(0) \in \Gamma_1$、$\alpha(1) \in \Gamma_2$，并且

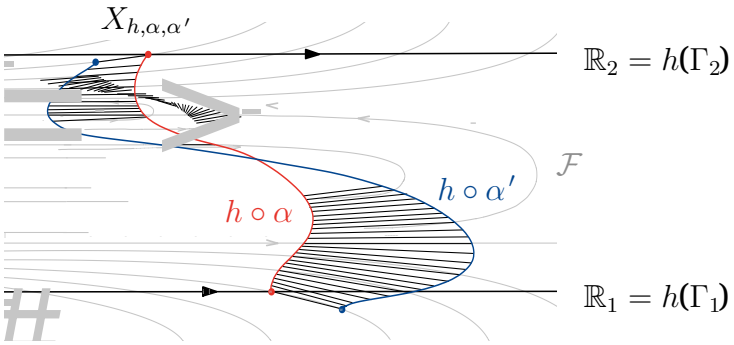
$$\alpha'(t) \in \phi^+_{\alpha(t)} \setminus \{\alpha(t)\}, \quad \forall t \in [0,1],$$

其中，$\phi_{\alpha(t)} \in \mathcal{F}$ 表示经过点 $\alpha(t)$ 的叶，而 $\phi^+_{\alpha\ (t)}$ 表示从点 $\alpha(t)$ 开始的 $\phi_{\alpha(t)}$ 的正半叶。粗略地说，路径 α' 是将路径 α 沿着 $\mathcal{F}$ 的叶的正方向稍稍推移后得到的。

仅为给出这个直观定义，我们假设 $h(\phi_{\alpha(0)})$ 和 $h(\phi_{\alpha(1)})$ 在点 $h(\alpha(0))$ 和 $h(\alpha(1))$ 附近是竖直的，并且 $h(\alpha'(0))$ 和 $h(\alpha'(1))$ 位于这些竖直部分中。在这个附加假设下，我们观察到向量的绕数

$$X_{h,\alpha,\alpha'}(t) = h\circ\alpha'(t) - h\circ\alpha(t),$$

当 t 从 0 到1变化时，等于 $1/2$的一个整数倍。在第4章中，我们基于拓扑角的概念提出一般理论，该理论隐含地表明，这个绕数与 h、α和 α'的选取无关。这个绕数定义了指标 $\mathrm{Ind}(\mathcal{F},\ \Gamma_1,\ \Gamma_2)$。



最后，我们证明，在 [LC04] （参见第2.3节），叶状结构指标推广了布劳威尔叶状理论背景下布劳威尔同胚的 Le Roux 指标。

定理 A。 设 $\mathcal{F}$ 是布劳威尔同胚 f 的横截叶状结构，且 Γ_1 和 Γ_2 分别是 f 的两个轨道 O_1 和 O_2 的适当横截轨迹。则有

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{F},\Gamma_1,\Gamma_2) = \mathrm{Ind}(f,O_1,O_2).$$

2. 背景与记号

2.1. 叶状结构的 Whitney 参数化。 设 $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个可数稠密子集。对于每个 $i\in\mathbb{N}$, 令 $m_i\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow (0,1]$ 为将 $p\in\mathbb{R}^2$ 映射到该值的函数

$$m_i(p)=\frac{1}{1+d(p,q_i)},$$

其中 d 是 $\mathbb{R}^2$中的欧几里得距离。设 $\mathcal{P}^*(\mathbb{R}^2)$为 $\mathbb{R}^2$的非空子集所构成的集合，并定义函数 $\mu_i\colon \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0,1]$，其表达式为

$$\mu_i(A)=\sup_{x,y\in A}\left|m_i(x)-m_i(y)\right|.$$

最后，我们可以将函数 $\mu\colon \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0,1]$ 定义为

$$\mu(A)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{\mu_i(A)}{2^i}.$$

该函数 μ 称为*Whitney* 函数，可用于衡量 $\mathbb{R}^2$的子集的“大小”。其主要性质总结在以下定理中。

The定理 (Whitney, [Whitney33])。 *Whitney* 函数 μ 满足以下性质 *s:*

(i) $\mu(A)=0$ 当且仅当 A 只有一个元素。*(ii)* $\mu(A)=\mu(A)$。*(iii)* 若 $A\subset A'$，则 $\mu(A)\le\mu(A')$。*(iv)* 若 $A\subset A'$，则 $\mu(A)<\mu(A')$。*(v)* 设$(A_n)_{n\ge0}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个紧子集序列，并且它在 *Hausdorff* 度量下收敛到紧子集 $A\subset\mathbb{R}^2$。那么，我们有收敛关系 $\mu(A_n)\longrightarrow\mu(A)$。

—

关于该定理的证明，请参阅原始论文 [Whi33] 。在该论文中，Whitney 使用函数 μ 来参数化 C^0叶状结构（也称为 $\mathbb{R}^2$）的拓扑叶状结构。在本节中，我们采用不同的方法，使用相同的函数来参数化 $\mathbb{R}^2$上的这些叶状结构。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$上的一个定向拓扑叶状结构。回顾一下，对于任意 $z\in\mathbb{R}^2$，记作:

- ϕ_z 经过 z 的 $\mathcal{F}$ 叶,
- ϕ_z^+从 z 出发并包含 z 的 ϕ_z 子半直线,
- ϕ_z^-以 z 为终点并包含 z 的 ϕ_z 子半直线,
- $\phi_{z,\,z'}$ 连接 z 与点 $z'\in\phi_z^+$ 的 ϕ_z 子弧。

令 $\tau\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow (0,1]$ 为由下列表达式定义的函数

$$\tau(z)=\sup_{z'\in\phi_z^+}\mu\left(\phi_{z,z'}\right)=\mu\left(\phi_z^+\right).$$

引理 2.1。 函数 τ 是下半连续的。

证明。设 $z_n{}_{n\ge0}$ 和 $z'_n{}_{n\ge0}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中满足 $z'_n\in\phi^+_{z_n}$ 的序列，分别收敛到 $\mathbb{R}^2$ 中的点 z 和 z'，并假设它们也满足条件 $z'\in\phi_z^+$。考虑 ϕ_z 的一个邻域 V，其中 z' 在线段 ϕ_z、z' 周围平凡化叶状结构 $\mathcal{F}$。设 $h:V\longrightarrow[0,1]^2$ 为相应的平凡化映射，将 $\mathcal{F}|_V$ 映射到 $[0,1]^2$ 的水平叶状结构。取一个子序列后，不妨设对所有 $n\ge0$，都有 $z_n, z'_n\in V$。在平凡叶状化矩形 $[0,1]^2$，内，$h(\phi_{z_n,z'_n})$ 在 Hausdorff 度量下收敛到 $h(\phi_{z,z'})$。由于 h^{-1} 在正方形 $[0,1]^2$，上一致连续，这意味着 ϕ_{z_n,z'_n} 在 Hausdorff 度量下也收敛到 $\phi_{z,z'}$ 。根据 Whitney 定理的第 (v) 项，我们有

$\mu(\phi_{z_n,z_n'}) \longrightarrow \mu(\phi_{z,z'})$。结合 τ 的定义，可得

$$\liminf_n \tau(z_n) \geq \liminf_n \mu(\phi_{z_n,z_n'}) = \mu(\phi_{z,z'}).$$

接下来，我们注意到，对于任意点 $z'' \in \phi_z^+$，都存在一个序列 $(z_n'')_{n\geq 0}$ 属于 $\mathbb{R}^2$，满足 $z_n'' \in \phi_{z_n}^+$ 和 $z_n'' \longrightarrow z''$。这意味着我们可以将上面的不等式应用于 ϕ_z^+ 中的每个点。换言之，对于每个 $z'' \in \phi_z^+$.，都有 $\liminf_n \tau(z_n) \geq \mu(\phi_{z,\ z''})$。这意味着

$$\tau(z) = \sup_{z'' \in \phi_z^+} \mu(\phi_{z,z''}) \leq \liminf_n \tau(z_n).$$

这证明了 τ 是下半连续的。 □

定义集合

$$W = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1) \mid 0 \leq t < \tau(x)\},$$

并考虑由 $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^2}(x,\ t) = x$ 给出的投影 $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^2}\colon \mathbb{R}^2 \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$。

引理 2.2。 存在一个同胚

$$g : W \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$$

它保持底空间 $\mathbb{R}^2$ 不变，也就是说，它满足 $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^2} \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$。

证明。 对于任意 $k \in \mathbb{N}$，考虑卷积函数

$$\tau_k(x) := (1 - 1/k) \inf_{y \in \mathbb{R}^2} \{\tau(y) + k \cdot d(x,y)\}.$$

注意，每个函数 $\tau_k\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow (0,1]$ 都满足以下性质：

- τ_k 是 k-利普希茨连续的。

对于每个 $x \in \mathbb{R}^2$，• $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x) < \tau(x)$。

对于每个 $x \in \mathbb{R}^2$，• $\lim_{k\to\infty} \tau_k(x) = \tau(x)$。

现在，对每个 $k \in \mathbb{N}$，我们定义集合

$$W_k = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1] \mid 0 \leq t \leq \tau_k(x)\}.$$

由于 τ_k 连续，存在一个同胚

$$g_k : W_k \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times [0,k]$$

它将图像 $_{\tau_k} = \{(x,\ \tau_k(x)) \in \mathbb{R}^2 \times [0,k] \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ 映射到 $\mathbb{R}^2 \times \{k\}$，同时保持底空间 $\mathbb{R}^2$ 不变，也就是说，$\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^2} \circ g_k = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$。此外，我们可以构造这类映射 g_k，使它们彼此兼容，也就是说

$$g_{k+1}|_{W_k} = g_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由于 $W = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k$，我们可以考虑由性质定义的映射 $g\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$

$$g|_{W_k} = g_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

最后，为了完成证明，我们需要证明 g 是一个同胚。事实上，注意到任意一点 $(x,\ t) \in W$ 都有一个邻域 U，使得对于某个 $k \in \mathbb{N}$，有 $U \subset W_k$。由于 g_k 是一个同胚，因此 g 是一个局部同胚。又由于 g 也是一个双射，因此它是一个同胚。此外，由于 g_k 保持底空间 $\mathbb{R}^2$ 不变，我们有 g 也保持底空间 $\mathbb{R}^2$ 不变。证明至此完成。□

最后，我们定义集合

$$\overline{W_{\mathcal{F}}} := \{(z,z') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid z' \in \phi_z^+\}.$$

注意，通过定义对角线 $\Delta = \{(z,\ z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\}$，集合 $W_{\mathcal{F}} := W_{\mathcal{F}} \setminus \Delta$ 对应于集合 $W_{\mathcal{F}}$ 的内部。这些集合将在下面的引理中描述。

引理 2.3. 存在一个同胚

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times [0,\infty) \longrightarrow \overline{W_{\mathcal{F}}}$$

满足 $\varphi(z,0) = (z,z)$ 以及 $\varphi(z,t) \in \phi_z^+$，对每个 $z \in \mathbb{R}^2$ 和 $t \in [0,\infty)$均成立。

证明。 我们定义 φ 为满足以下条件的映射

$$\varphi(z,t) = (z, z'_t),$$

其中， z'_t 是 ϕ_z^+中的点，由方程 $g(z, \mu(\phi_{z,z'_t})) = (z,t)$ 确定。根据 Whitney 定理中所述函数 μ的性质，我们知道 φ是 $\mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$ 与 $W_{\mathcal{F}}$ 之间定义良好的双射。为了证明 φ 是同胚，我们需要证明它是局部同胚。

令 $(z,z') \in \overline{W_{\mathcal{F}}}$，并考虑子弧 $\phi_{z,z'}$ 的一个邻域 $V \subset \mathbb{R}^2$，该邻域使该子弧周围的叶状结构 $\mathcal{F}$ 平凡化。这使我们能够在$W_{\mathcal{F}}$内定义 (z,z') 的一个开邻域，其定义如下：

$$V_{\mathcal{F}} = \{(x,x') \in \overline{W_{\mathcal{F}}} \mid x, x' \in V\}.$$

运用与引理2.1证明中类似的论证，我们可以利用函数 μ 的性质证明 $\varphi^{-1}(V_{\mathcal{F}})$ 是 $\mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$的开子集，并且

$$\varphi^{-1}|_{V_{\mathcal{F}}} : V_{\mathcal{F}} \longrightarrow \varphi^{-1}(V_{\mathcal{F}})$$

是一个同胚。这证明 φ 是一个局部同胚；又由于它也是一个双射，因此它是一个同胚。最后，我们注意到，对于每个 $z \in \mathbb{R}^2$ 和 $t \in [0,\infty)$，$\varphi(z,0) = (z,z)$，且 $\varphi(z,t) \in \phi_z^+$，由此得证。□

T引理 φ 中的映射2.3 称为叶状结构 $\mathcal{F}$的 *Whitney* 参数化 .

2.2. **Serre纤维化**。本节的定义和结果取自 Tammo Tom Dieck 所著的《代数拓扑》一书 [TD08]。

设 E 和 B 为拓扑空间。若（连续）映射 $p\colon E \longrightarrow B$ 满足拓扑空间 X 的同伦提升性质（HLP），则

- 对于任意同伦 $H\colon X \times [0,1] \longrightarrow B$,~
- 以及任意满足条件 $H_0 := H|_{X\times\{0\}} = p \circ H_0$ 的连续映射 $H_0\colon X \longrightarrow E$，

~ ~ 存在一个满足条件 $H = p \circ H$ 的同伦 H:

$X \times [0,1] \longrightarrow E$。

定义 2.4 （Serre纤维化）。若映射 $p : E \longrightarrow B$ 对每个 CW复形 X 都满足同伦提升性质（HLP），则称其为 *Serre*纤维化。

注 2.5。Serre纤维化的定义等价于 [TD08], 中给出的定义，该定义要求 Serre纤维化对每个立方体 $I^n = [0,1]^n$（其中 $n \geq 0$）都满足 HLP。

Serre纤维化的概念是纤维丛的一种推广。事实上，每个纤维丛都是Serre纤维化，但并非每个Serre纤维化都是纤维丛。两者的区别在于，纤维丛的纤维由一个固定的拓扑空间给出，而Serre纤维化的纤维可以随底空间中的点而变化，只要它们彼此同伦等价即可。

在数学文献中，纤维化一词通常指Hurewicz纤维化，即满足对每个拓扑空间 X都具有同伦提升性质（HLP）的映射 $p : E \longrightarrow B$ 。不过，在本文中，我们选择研究Serre纤维化，因为它们更易于处理，也适用于同伦群的研究。

下面的定理说明，成为 Serre纤维化是一个局部性质。

定理 2.6。 [TD08，定理 6.3。3] 设 p： $E \longrightarrow B$ 是一个连续映射，且 $\mathcal{V}$ 是 B的一个开覆盖。如果对于每个 $V \in \mathcal{V}$，映射 $p|_{p^{-1}(V)}$： $p^{-1}(V) \longrightarrow V$都是 *Serre*纤维化，那么$p$本身也是 *Serre*纤维化。

本文将使用的 Serre纤维化的主要性质，是与 Serre纤维化相关的同伦群的长正合列的一个推论，陈述如下。

定理 2.7。 [TD08，定理 6.3。2] 设 $e_0 \in E$ 和 $b_0 = p(e_0) \in B$ 分别是 *Serre*纤维化 p: $E \longrightarrow B$的全空间和底空间中的点。记 $F = p^{-1}(b_0)$ 为 p在点 b_0上的纤维，并记 i： $F \longrightarrow E$ 为包含映射。那么，我们有一个形如以下形式的同伦群长正合列

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots .$$

在上述定理中，映射 p_* 是由映射 $p : E \longrightarrow B$诱导的同态，而 ∂ 是连接同态（更多详情见 [TD08] 中的第6.3节）。

注意，在情形 $\pi_1(B, b_0) = \pi_1(F, e_0) = 0$ 下，我们得到平凡的正合序列

$$0 \longrightarrow \pi_1(E, e_0) \longrightarrow 0,$$

这意味着 $\pi_1(E, e_0) = 0$。由此得到以下推论。

推论2.8。 设 $p : E \longrightarrow B$ 是一个 *Serre*纤维化，并假设 B 和 $F = p^{-1}(b_0)$ 是单连通空间。那么，全空间 E 也是单连通的。

2.3. 叶状布劳威尔理论。 设 f： $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个布劳威尔同胚，即平面上的保向且无不动点的同胚。

点 $x \in \mathbb{R}^2$ 在 f 下的轨道定义为集合

$$\mathcal{O}(f, x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

有时，记 f 的轨道集合为 $\mathrm{Orb}(f)$可能会很有用。正如 [Bro12],所证明的， f 的每个轨道都是游荡的，因此其极限集为空。这意味着， f 的每个轨道都是 $\mathbb{Z}$ 到平面中的一个真嵌入的像。

f 的布劳威尔直线是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的一条定向拓扑直线 λ ，满足

$$f(L(\lambda)) \subset L(\lambda) \quad \text{and} \quad f^{-1}(R(\lambda)) \subset R(\lambda),$$

其中 $L(\lambda)$ 和 $R(\lambda)$ 分别表示 λ的左侧和右侧。经典的 布劳威尔平移定理 [Bro12] 断言，平面上的每一点都有一条经过它的 f布劳威尔直线。

定理(Le Calvez， [LC04])。存在平面上的一个定向拓扑叶状结构 $\mathcal{F}$，其每个叶 $\phi \in \mathcal{F}$ 都是 f 的一条布劳威尔直线。

f 的任何这种由布劳威尔直线构成的平面叶状结构都称为 f的横截叶状结构。值得注意的是，一个布劳威尔同胚可以有多个横截叶状结构，它们可能呈现出显著不同的结构，并具有非同胚的叶空间。

固定布劳威尔同胚 f 的一个横截叶状结构 $\mathcal{F}$ 。在此背景下，可以证明每个点 $x \in \mathbb{R}^2$ 都能通过一条路径 γ_x 与其像 $f(x)$ 相连： $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

该路径相对于叶状结构 $\mathcal{F}$ 是正向横截的，也就是说， γ_x 与 $\phi \in \mathcal{F}$ 的每个叶至多相交一次，且始终从右侧 $R(\phi)$ 到左侧 $L(\phi)$。将所有整数 $n \in \mathbb{Z}$ 对应的路径 $\gamma_{f^n(x)}$ 依次连接起来，我们便得到一条正向横截路径

$$\Gamma := \prod_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_{f^n(x)},$$

连接整个轨道 $O = O(f,\ x)$ 的路径称为相对于 $\mathcal{F}$ 的 O 横截轨迹。值得注意的是，任意轨道 O 都有不可数多个横截轨迹，它们取决于路径 $\{\gamma_{f^n\ (x)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的选择。然而，所有这些横截轨迹都会穿过 $\mathcal{F}$ 的同一组叶。我们称轨道 f 穿过 $\mathcal{F}$ 的一片叶，是指其横截轨迹穿过该叶。

我们注意到，如果路径的选择$\{\gamma_{f^n\ (x)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 在平面上是局部有限的，那么所得到的横截轨迹 Γ 是一条拓扑直线，称为 真横截轨迹 O。在先前的工作 [Sch25b], 中，我们证明了以下结果。

定理 2.9. [Sch25a] 的每个轨道都 f 有一个相对于 $\mathcal{F}$的真横截轨迹 .

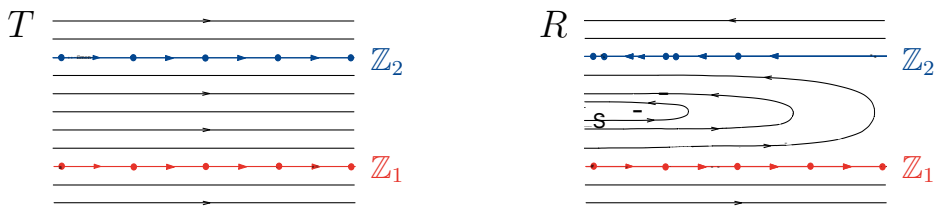
2.4. 同伦布劳威尔理论。设 $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个布劳威尔同胚，且 $\mathcal{O} = \{O_1, \ldots, O_r\}$ 是 f 的有限个特选轨道组成的集合。为方便起见，我们可以记 $\mathcal{O} := \bigcup_{i=1}^{r} O_i \subset \mathbb{R}^2$。相对于集合 $\mathcal{O}$ 的 f 的同伦类，记作 $\big[\, f, \mathcal{O}\,\big]$，称为相对于 r 个轨道的布劳威尔映射类。或者， $\big[\, f, \mathcal{O}\,\big]$ 也可以定义为曲面 $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$ 上映射 $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\mathcal{O}}$ 的同伦类；该曲面与 $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ 同胚，因为 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个无限闭离散子集（见 BCR20，命题 1.5]）。

若存在一个保向同胚 $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 满足以下条件，则两个布劳威尔映射类 $\big[\, f, \mathcal{O}\,\big]$ 和 $\big[\, f', \mathcal{O}'\,\big]$ 共轭，记作 $\big[\, f, \mathcal{O}\,\big] \simeq \big[\, f', \mathcal{O}'\,\big]$:

$$h(\mathcal{O}') = \mathcal{O} \quad \text{and} \quad \big[\, f, \mathcal{O}\,\big] = \big[\, h \circ f' \circ h^{-1}, \mathcal{O}\,\big].$$

我们的共轭概念采用 [Bav17], 中的定义；当将布劳威尔映射类视为 $\mathrm{MCG}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$的元素时，这一定义最为自然。在 [Han99], 中，Handel 将反向定向同胚所给出的共轭也纳入考虑；而在 [LR17], 中，Le Roux 只考虑保向且保持轨道编号的共轭。这些差异并无妨碍，因为结果的表述可以根据具体情形作相应调整。

对于每个 $i,\ j \in \mathbb{Z}$，我们记 $\mathbb{Z}_i := \mathbb{Z} \times \{i\}$和 $\mathbb{Z}_{i,\ j} := \mathbb{Z} \times \{i, j\}$。令 T为水平平移，它将平面上的每个点向右移动一个单位；映射 R 是标准 Reeb 流的时间一映射，它将 $\mathbb{Z}_1$ 向右移动，并将 $\mathbb{Z}_2$ 向左移动。



Handel 关于相对于两个轨道的布劳威尔映射类的分类定理 [Han99]证明存在一个保向同胚 $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 它将 $h(O_i) = \mathbb{Z}_i$，对每个 $i \in \{1, 2\}$，并将 $\big[\, f, \{O_1, O_2\}\,\big]$ 共轭到以下某个映射类:

$$\big[\, T,\, \mathbb{Z}_{1,2}\big],\quad \big[\, T^{-1},\, \mathbb{Z}_{1,2}\,\big],\quad \big[\, R,\, \mathbb{Z}_{1,2}\big],\quad \big[\, R^{-1},\, \mathbb{Z}_{1,2}\,\big].$$

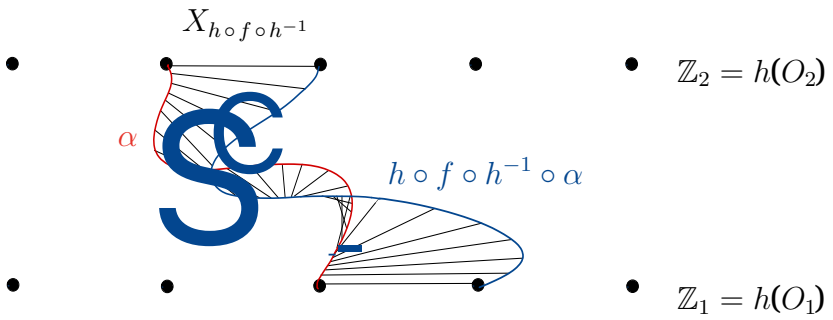
The 所有此类同胚的集合 h对于 f、 O_1和 O_2，记作 Handel($f,\ O_1,\ O_2$).

在先前的一项工作中 [Sch25a], 我们将布劳威尔理论中的叶状结构框架与同伦框架结合起来。这种方法使我们能够通过横截叶状结构研究布劳威尔映射类，并由此获得新的见解和成果。

定理 2.10。 [Sch25a] 设 $\mathcal{F}$ 是 f的一个横截叶状结构。若存在一条叶 $\phi \in \mathcal{F}$ 同时被轨道 O_1和 O_2所横截，则存在一个同伦$(f_t)^{t\in[0,1]}$，相对于 $O_1 \cup O_2$，满足$\mathrm{Fix}(f_t) = \varnothing$ 对每个 $t \in [0,1]$都成立，并将 $f_0 = f$连接到一个与 f_1 共轭的映射 T。

2.5. **布劳威尔同胚的 Le Roux 指标**。为方便读者，我们在此重述 Le Roux 指标的定义；该定义此前已在引言中给出。

设 $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$是一个布劳威尔同胚， O_1和 O_2是 f的两个轨道。设 X_f是平面 $X_f(x)$ 上的 C^0-向量场:$= f(x) - x$，并令 $h \in$Handel(f, O_1, O_2)。注意，向量场 $X_{h\circ f\circ h^{-1}}$ 在 $\mathbb{Z}_1$和 $\mathbb{Z}_2$上是水平的。因此，沿任意连接 $\mathbb{Z}_1$与 $\mathbb{Z}_2$的路径 α的绕数 Wnd$(X_{h\circ f\circ h^{-1}}, \alpha)$ 必为 $1/2$的整数倍。在 [LR17],中，Le Roux 证明了该值与 $h \in$Handel(f, O_1, O_2) 和 α的选择无关，因此定义了一个指标 Ind(f, O_1, O_2)，称为 Le Roux 指标。



该指标将经典的庞加莱-霍普夫指数推广到了布劳威尔同胚的情形。值得一提的是，对于相对于两个轨道的布劳威尔映射类，该指标并非共轭不变量。然而，从其定义可以看出，它在相对于这两个轨道的无不动点同伦下保持不变。

3. 拓扑角函数

Khalimsky 拓扑 $\mathbb{Z}$是 $\mathbb{Z}$ 上使所有形如$\{2k+1\}$ 的单点集以及所有形如 $\{2k-1, 2k, 2k+1\}$ 的三元组成为开集的最粗拓扑，其中 $k \in \mathbb{Z}$。这种拓扑也称为数字拓扑。这种拓扑的主要特征是，奇整数具有一个孤立邻域，而偶整数则没有。在 [LC23], 中，Le Calvez 利用这一拓扑特征，为环带的径向叶状结构定义了拓扑角函数的概念，旨在从抽象的角度研究环带上的扭转映射。本章将利用这一相同的拓扑特征，描述点相对于非奇异平面叶状结构的位置关系。

令 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{-\dot{1}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ 为模 4 整数集合，并赋予由模 $_4$ 商映射诱导的拓扑 $\mathcal{K}$: $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。更准确地说，该拓扑定义如下:

$$\mathcal{K} := \{\varnothing, \{-\dot{1}\}, \{\dot{1}\}, \{-\dot{1}, \dot{1}\}, \{-\dot{1}, \dot{0}, \dot{1}\}, \{\dot{1}, \dot{2}, -\dot{1}\}, \{-\dot{1}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}\}.$$

令 $\mathscr{F}$ 为平面上所有定向拓扑（无奇点）叶状结构的空间。此外，考虑对角线 $\Delta = \{(z,\ z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\}$ 以及构形空间

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta = \{(z, z') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid z \neq z'\}.$$

We i引入拓扑角函数 $\dot\theta:\ (\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\setminus\Delta)\ \times\mathscr{F}\longrightarrow\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，定义为 s

$$\dot\theta(z\,,z'\,,\mathcal{F})=\begin{cases}\dot 0 & \text{if } z'\in\phi_z^+,\\ \dot 1 & \text{if } z'\in L(\phi_z),\\ \dot 2 & \text{if } z'\in\phi_z^-,\\ -\dot 1 & \text{if } z'\in R(\phi_z).\end{cases}$$

粗略地说，值 $\dot\theta(z,\ z',\ \mathcal{F})$ 计算点 z' 相对于基点 z 和叶状结构 $\mathcal{F}$的位置。正如我们将在本文中看到的，这个函数对于提取叶状结构 $\mathcal{F}$的拓扑信息非常有用。

引理 3.1. 以下性质成立：

(i) 对于任意保向同胚 $h:\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$，有

$$\dot\theta(z\,,z'\,,h\mathcal{F})=\dot\theta(h^{-1}(z)\,,h^{-1}(z')\,,\mathcal{F}),$$

其中 $h\mathcal{F}$ 是将 h 作用于 $\mathcal{F}$的每个叶后得到的叶状结构。

(ii) 函数 $\dot\theta(\ \cdot,\ \cdot,\ \mathcal{F})$ 在整个构形空间 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ 上连续，当且仅当叶状结构 $\mathcal{F}$ 是平凡的。

证明。 第一项直接由 θ 的定义得到。为证明第 (ii) 项的一部分，我们可以利用第 (i) 项将问题归结为 $\mathbb{R}^2$ 的水平叶状结构这一情形。

设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的水平叶状结构，其中每个叶都沿 x 方向正向定向。考虑由下式定义的函数 $\sigma:\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\sigma(t)=\begin{cases}\dot 0 & \text{if } t=0,\\ \dot 1 & \text{if } t\in(0,\pi),\\ \dot 2 & \text{if } t=\pi,\\ -\dot 1 & \text{if } t\in(\pi,2\pi).\end{cases}$$

注意到 σ 关于 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上的拓扑 $\mathcal{K}$ 是连续的。

为证明第 (ii) 项中的“若”蕴含，只需注意到

$$\dot\theta(z\,,z'\,,\mathcal{H})=\sigma(\,\mathrm{Angle}\,(z'-z)\,),$$

其中，Angle$(z'-z)$ 是向量 $z'-z$ 与正 x 轴之间的角度，按逆时针方向测量。由于 Angle $(z'-z)$ 关于变量 z 和 z' 都是连续的，映射 $\dot\theta(z\,,z'\,,\mathcal{H})$ 关于 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上的拓扑 $\mathcal{K}$ 在 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ 上是连续的。

为证明“仅当”这一蕴含关系，只需注意到，若叶状结构 $\mathcal{F}$ 并非平凡，则它必定含有一个 Reeb 分支。因此，我们可以考虑两列点 $(z_n)_{n\geq0}$ 和 $(z'_n)_{n\geq0}$，它们属于 $\mathbb{R}^2$，满足 $z'_n\in\phi^+_{z_n}$，并且

$$z_n\longrightarrow z\in\mathbb{R}^2\quad\text{ and }\quad z'_n\longrightarrow z'\in\mathbb{R}^2,$$

其中 z 和 z' 位于 $\mathcal{F}$ 的不同叶上。换言之，我们有 $\dot\theta(\ z,\ z',\ \mathcal{F})\in\{-\dot 1,\dot 1\}$，而对所有 $n\geq0,\ \dot\theta(\ z_n,\ z'_n,\ \mathcal{F})=\dot 0$。由于 $\{-\dot 1\}$ 和 $\{\dot 1\}$ 是 $\mathcal{K}$ 中的开集，这意味着函数 $\theta(\ \cdot,\ \cdot,\ \mathcal{F})$ 在点 $(z,\ z')$ 处不连续。证明至此完成。 □

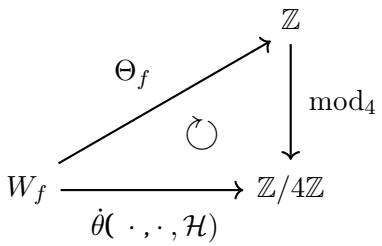
3.1. **改写 Le Roux 指标**。 拓扑角函数为定义布劳威尔同胚在两个轨道之间的指标提供了另一种方式；该指标最初由 Le Roux 在 [LR17]中引入。这一定义尤其值得关注，因为它为描述布劳威尔同胚的指标及其横截叶状结构提供了共同的语言。

设 $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 为一个布劳威尔同胚，并定义集合

$$W_f = \{(z, f(z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{R}^2\}.$$

由于 f 没有不动点， W_f 是 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$的子集。此外，注意到集合 W_f通过映射 $\mathrm{graph} f$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow W_f$ 与 $\mathbb{R}^2$同胚，该映射由 $\mathrm{graph} f(z) = (z,\ f(z))$ 给出。特别地，这表明 W_f 是 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$的单连通子集。

令 $\mathcal{H}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的水平叶状结构，其中每条叶沿 x方向正向定向。由于 W_f是单连通的，且 $\dot{\theta}(\,\cdot\,,\cdot\,,\mathcal{H})$ 在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ 上连续（引理 3.1），提升定理（参见 [TD08]中的定理 3.5.2）告诉我们，函数 $\theta(\,\cdot\,,\cdot\,,\mathcal{H})|_{W_f}$存在一个提升 $\Theta_f : \mathcal{W}_f \longrightarrow \mathbb{Z}$，该提升在相差 4 的整数倍的意义下唯一。以下图示表示了这一设定。



回顾一下，根据 Handel 对相对于两个轨道的布劳威尔映射类的分类（见 [Han99]），对于任意两个轨道 O_1 和 O_2，在 f中存在一个保向同胚 $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$，使得 $h(O_i) = \mathbb{Z}_i$对于 $i \in \{1,2\}$和

$$\left[\, h \circ f \circ h^{-1}, \mathbb{Z}_{1,2} \,\right] \in \left\{ \begin{bmatrix} T\,,\ \mathbb{Z}_{1,2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T^{-1}, \mathbb{Z}_{1,2} \end{bmatrix}, \atop \begin{bmatrix} R\,,\ \mathbb{Z}_{1,2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R^{-1}, \mathbb{Z}_{1,2} \end{bmatrix}. \right\}$$

所有满足条件的同胚 h 对于 f, O_1 和 O_2，记作 $\mathrm{Handel}(f,\ O_1,\ O_2)$。

命题 3.2. 设 $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个布劳威尔同胚，且 O_1 和 O_2 是 f的两个轨道。那么，对于任意 $h \in \mathrm{Handel}(f, O_1, O_2)$、 $x_1 \in \mathbb{Z}_1$ 和 $x_2 \in \mathbb{Z}_2$，有

$$\mathrm{Ind}(f, O_1, O_2) = \frac{1}{4}\Big(\Theta_F(x_2, F(x_2)) - \Theta_F(x_1, F(x_1))\Big),$$

其中我们记 $F := h \circ f \circ h^{-1}$。

证明。 回顾一下，正如引言中所述，指标 $\mathrm{Ind}(f, O_1, O_2)$ 定义为向量场的绕数

$$X_{h\circ f\circ h^{-1}}(x) = h \circ f \circ h^{-1}(x) - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

沿路径 $\alpha:\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$，满足 $\alpha(0) \in \mathbb{Z}_1$ 且 $\alpha(1) \in \mathbb{Z}_2$，对于任意 $h \in \mathrm{Handel}(f, O_1, O_2)$。更精确地，考虑由下式给出的映射 $s:\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$s(t) = \mathrm{Angle}\Big(h \circ f \circ h^{-1}(\alpha(t)) - \alpha(t)\Big),$$

并固定 s 经商映射 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 的一个提升 $\widetilde{s}:\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$，我们有

$$\mathrm{Ind}(f, O_1, O_2) = \frac{1}{2\pi}\big(\widetilde{s}\,(1) - \widetilde{s}\,(0)\big).$$

该值始终是 $1/2$ 的整数倍，因为 $s(0)$ 和 $s(1)$ 始终为 0 或 π，并且完全不依赖于 α 和 h的选择，如 [LR17] 中所证明。

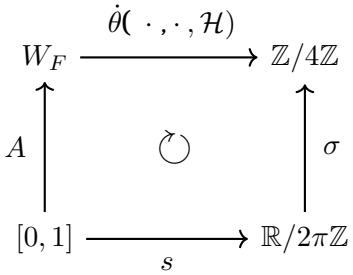
考虑由下式给出的路径 $A:\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$

$$A(t) = \big(h \circ \alpha(t),\, h \circ f \circ \alpha(t)\big).$$

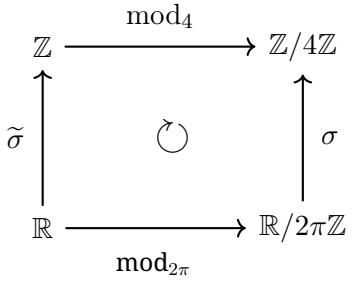
记作 $F = h \circ f \circ h^{-1}$，我们注意到 A 的像包含于 W_F，因为

$$W_F = \{(h(z), h \circ f(z)) \mid z \in \mathbb{R}^2\}.$$

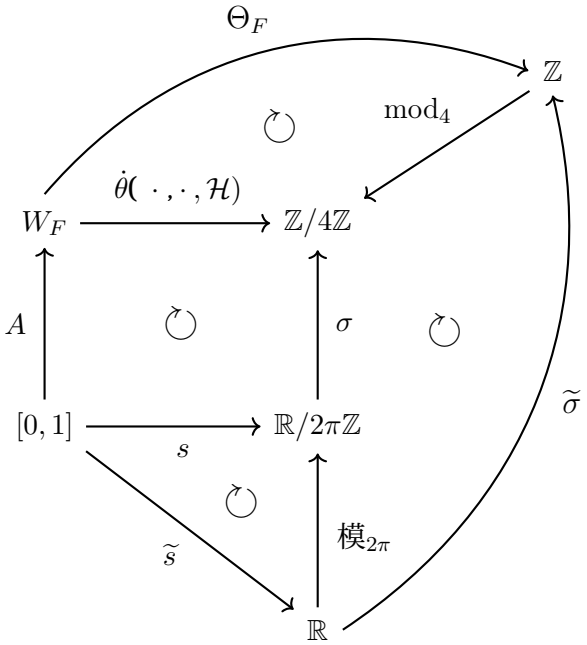
重新考察证明引理3.1中定义的映射 $\theta(\,\cdot\,,\ \cdot\,,\ \mathcal{H})$ 与函数 $\sigma\colon\ \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$之间的关系，我们得到以下交换图。



考虑由取整函数 $\widetilde{\sigma}(t) = \left\lfloor \frac{2t}{\pi} \right\rfloor$ 定义的函数 $\widetilde{\sigma}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$。注意，该函数 $\widetilde{\sigma}$ 满足 $\widetilde{\sigma}(k\pi) = 2k$，对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 都成立；此外，$\mathrm{mod}_4 \circ \widetilde{\sigma} = \sigma \circ \mathrm{mod}_{2\pi}$，如下面的交换图所示。



将这两个图与提升 Θ_F 和 $\widetilde{s}$ 相关的图结合起来，我们可以通过下图表示这一情形。



Fr根据上图，我们可以推导出任何提升 Θ_F 都满足以下等式 ity

$$\mathrm{mod}_4 \circ \Theta_F \circ A \ = \ \mathrm{mod}_4 \circ \widetilde{\sigma} \circ \widetilde{s}.$$

这意味着，存在一个函数 $Q\colon [0,1] \longrightarrow 4\mathbb{Z}$ 使得 $\Theta_F \circ A + Q = \widetilde{\sigma} \circ \widetilde{s}$。由于$\widetilde{\sigma}\circ\widetilde{s}$和 $\Theta_F \circ A$在 $\mathbb{Z}$上的 Khalimsky 拓扑下都是连续的，因此函数Q 也必定连续。不过，注意到 $4\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ 是 Khalimsky

拓扑中的一个离散子集。这意味着 Q 必定是常数，因此我们可以写作

$$\Theta_F \circ A + 4M = \widetilde{\sigma} \circ \widetilde{s}$$

对于某个整数 $M \in \mathbb{Z}$。因此，我们可以选取一个合适的提升 Θ_F，使其满足

$$\Theta_F \circ A = \widetilde{\sigma} \circ \widetilde{s}.$$

A最后，回想一下，$\widetilde{s}(0)$ 和 $\widetilde{s}(1)$ 都是 π 的倍数，因此我们有

$$\widetilde{\sigma} \circ \widetilde{s}(0) = 2\,\widetilde{s}(0)/\pi \quad \text{and} \quad \widetilde{\sigma} \circ \widetilde{s}(1) = 2\,\widetilde{s}(1)/\pi.$$

设 $x_1 \in \mathbb{Z}_1$ 和 $x_2 \in \mathbb{Z}_2$ 是满足 $A(0) = (x_1,\ F(x_1))$ 和 $A(1) = (x_2,\ F(x_2))$ 的点。这意味着 $\Theta_F(x_1,\ F(x_1)) = 2\,\widetilde{s}(0)/\pi$，且 $\Theta_F(x_2,\ F(x_2)) = 2\,\widetilde{s}(1)/\pi$，由此可得

$$\mathrm{Ind}(f, O_1, O_2) = \frac{1}{2\pi}\Big(\widetilde{s}\,(1) - \widetilde{s}\,(0)\Big) = \frac{1}{4}\Big(\Theta_F(x_2, F(x_2)) - \Theta_F(x_1, F(x_1))\Big).$$

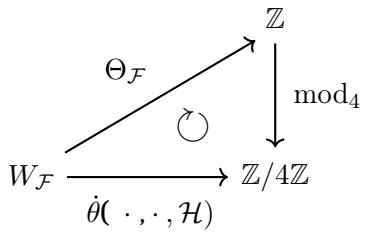
注意，上述差值与提升 Θ_F 的选择无关，因为它们相差一个整数常数的 4 倍。至此，证明完毕。□

4. 两条横截拓扑线之间的叶层指标

设 $\mathcal{F}$ 是平面上的定向拓扑叶状结构。如引理 2.3所示，集合

$$W_{\mathcal{F}} = \dot{\theta}(\,\cdot\,, \cdot\,, \mathcal{F})^{-1}(\dot{0})$$

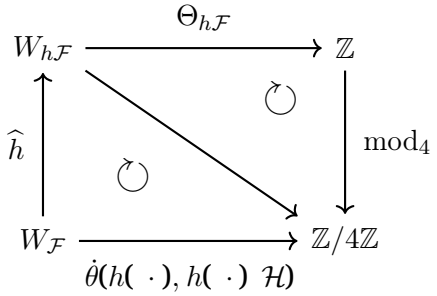
同胚于 $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$，因此它是单连通的。因此，提升定理保证 $\theta(\,\cdot\,, \cdot\,, \mathcal{H})|_{W_{\mathcal{F}}}$ 存在一个提升 $\Theta_{\mathcal{F}}\colon W_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{Z}$，且在相差 4 的整数倍的意义下唯一。下图对此作了表示。



设 $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个保向同胚。我们将通过对 $\mathcal{F}$的叶应用 h 得到的叶状结构记为 $h\mathcal{F}$，并将 $\widehat{h}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 记为同胚 $h(z, z') = (h(z)\ h(z'))$。首先，注意以下集合相同

$$W_{h\mathcal{F}} = \{(h(z), h(z')) \mid z' \in \phi_z^+, z \neq z'\} = \widehat{h}\,(W_{\mathcal{F}}).$$

此外，注意任意提升 $\Theta_{h\mathcal{F}}$ 都满足以下交换图。



上图表明，映射 $\Theta_{h\mathcal{F}} \circ h$ 是函数 $\theta(h(\,\cdot\,)\ h(\,\cdot\,)\ \mathcal{H})|_{W_{\mathcal{F}}}$ 的提升。

设 Γ_1 和 Γ_2 是 $\mathbb{R}^2$ 上两条不相交的定向拓扑直线，并且它们与叶状结构 $\mathcal{F}$ 正向横截。我们将以下集合与有序对（Γ_1, Γ_2）相关联

$$\mathrm{Str}(\Gamma_1, \Gamma_2) := \{h \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R}^2) \mid h(\Gamma_1) = \mathbb{R}_1,\ h(\Gamma_2) = \mathbb{R}_2\},$$

其中， $\mathbb{R}_i$ 表示水平线 $\mathbb{R}\times\{i\}$，对于 $i\in\{1,2\}$。注意，集合 $\mathsf{Str}(\Gamma_1,\Gamma_2)$ 非空（根据 Homma-Schoenflies 定理），并且它是路径连通的，即对于任意 $h,h'\in\mathsf{Str}(\Gamma_1,\Gamma_2)$，存在一个同伦 $(h_t)_{t\in[0,1]}$，使得 $h_0=h$、 $h_1=h'$ 以及

$$h_t\in\mathrm{Str}(\Gamma_1,\Gamma_2),\quad \forall t\in[0,1].$$

命题 4.1. 对于任意 $h\in\mathrm{Str}(\Gamma_1,\Gamma_2)$、任意提升 $\Theta_{h\mathcal{F}}$，以及任意满足 $x_i\in\Gamma_i$ 和 $x_i'\in\phi_{x_i}^+\setminus\{x_i\}$ 的两点 $x_i,x_i'\in\mathbb{R}^2$，对于所有 $i\in\{1,2\}$，其值

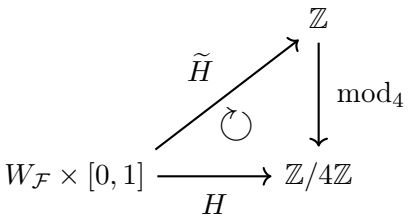
$$\Theta_{h\mathcal{F}}(h(x_2),\,h(x_2'))-\Theta_{h\mathcal{F}}(h(x_1),\,h(x_1'))$$

与所有这类选择无关。

证明。 提升 $\Theta_{h\mathcal{F}}$ 的选择无关性显然，因为任意两个提升之差都是 4 的整数倍。因此，我们首先证明映射 $h\in\mathsf{Str}(\Gamma_1,\Gamma_2)$的选择无关性。令 $h_0,h_1\in\mathsf{Str}(\Gamma_1,\Gamma_2)$，并设 $(h_t)_{t\in[0,1]}$ 是映射h_0 与 h_1 之间的同伦，且对所有 $t\in[0,1]$都满足 $h_t\in\mathsf{Str}(\Gamma_1,\Gamma_2)$。该同伦诱导出一个连续映射$H\colon W_{\mathcal{F}}\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，其定义如下：

$$H(t,z,z')=\dot\theta(h_t(z),\,h_t(z'),\mathcal{H}).$$

由于 $W_{\mathcal{F}}\times[0,1]$ 是单连通的，提升定理保证函数 H 存在一个提升 $\widetilde{H}\colon W_{\mathcal{F}}\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{Z}$，如下面的交换图所示。



注意，对于任意 $t\in[0,1]$，映射 $H(\,\cdot\,,t)$ 是函数 $\theta(h_t(\,\cdot\,),h_t(\,\cdot\,),\mathcal{H})|_{W_{\mathcal{F}}}$ 的一个提升。换言之，存在一组适当的提升 $\{\Theta_{h_t\mathcal{F}}\}_{t\in[0,1]}$，使其满足

$$\widetilde{H}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,t)=\Theta_{h_t\mathcal{F}}\circ\widehat{h_t},\quad\forall t\in[0,1].$$

特别地，对于这组提升，对每个 $i\in\{1,2\}$，我们有如下取值

$$\Theta_{h_t\mathcal{F}}(h_t(x_i),\,h_t(x_i'))\in\mathbb{Z}$$

关于 $t\in[0,1]$ 连续变化。

现在注意到，由于 $h_t\in\mathsf{Str}(\Gamma_1,\Gamma_2)$，且直线 Γ_1 和 Γ_2 与叶状结构 $\mathcal{F}$ 正向横截，对于任意 $i\in\{1,2\}$ 和 $t\in[0,1]$，我们有

$$\dot\theta(h_t(x_i),\,h_t(x_i'),\mathcal{H})\in\{-\dot1,\,\dot1\}.$$

因此，对于任意 $i\in\{1,2\}$ 和 $t\in[0,1]$，提升 $\Theta_{h_t\mathcal{F}}$ 满足

$$\Theta_{h_t\mathcal{F}}(h_t(x_i),\,h_t(x_i'))\in\{2k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

最后，由于 $\{2k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 是带有 Khalimsky 拓扑的 $\mathbb{Z}$ 的离散子集，并且值 $\Theta_{h_t\mathcal{F}}(h_t(x_i)$ $h_t(x_i'))$ 随着 $t\in[0,1]$连续变化，我们得出

$$\Theta_{h_1\mathcal{F}}(h_1(x_i),\,h_1(x_i'))=\Theta_{h_0\mathcal{F}}(h_0(x_i),\,h_0(x_i')),\quad\forall i\in\{1,2\}.$$

这证明了映射 $h\in\mathsf{Str}(\Gamma_1,\ \Gamma_2)$ 的选择的独立性。

最后，我们证明点 x_1 和 x_1' 的选择的独立性。关于 x_2 和 x_2' 的情形完全类似。考虑点 $x_1,y_1\in\Gamma_1$，并令 $x_1'\in\phi_{x_1}^+\setminus\{x_1\}$ 和 $y_1'\in\phi_{y_1}^+\setminus\{y_1\}$。

令 $\alpha\colon [0,1]\longrightarrow \mathbb{R}^2$ 为连接 x_1 和 y_1 的 Γ_1 的单射子路径。注意， α 有一个邻域 $V\subset\mathbb{R}^2$，它使叶状结构 $\mathcal{F}$ 平凡化，并包含点 x_1' 和 y_1'。利用这个平凡化邻域，我们可以构造一条路径 $\alpha'\colon [0,1]\longrightarrow V$，它与直线 Γ_1 不相交，连接点 x_1' 和 y_1'，并满足对每个 $t\in[0,1]$， $\alpha'(t)\in\phi^+_{\alpha(t)}$。由于 α' 与 Γ_1 不相交，我们知道路径 $A\colon t\longmapsto(\alpha(t)\ \alpha'(t))$ 包含于 $W_{\mathcal{F}}$ 中。此外，由于 α 包含于 Γ_1 中且 $h(\Gamma_1)=\mathbb{R}_1$，我们知道该值

$$\dot{\theta}(h(\alpha(t)),h(\alpha'(t)),\mathcal{H})$$

在所有 $t\in[0,1]$上均为常数，且等于 $-\mathrm{i}$ 或 i。同样，由于 $\{2k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 是带有 Khalimsky 拓扑的 $\mathbb{Z}$的离散子集，并且 $\Theta_{h\mathcal{F}}(h(\alpha(t))\ \ h(\alpha'(t)))$随 t连续变化，我们得出 $\Theta_{h\mathcal{F}}(\ h(\alpha(t))\ \ h(\alpha'(t))\ )$沿 $t\in[0,1]$为常数。通过在 $t=0$ 和 $t=1$处计算该值，我们得出

$$\Theta_{h\mathcal{F}}(h(x_1),\,h(x_1'))=\Theta_{h\mathcal{F}}(h(y_1),\,h(y_1')).$$

T这证明了对点 x_1 和 x_1'的选择具有独立性，并完成了证明。 □

有了命题 4.1，我们终于可以定义指标 $\mathrm{Ind}(\mathcal{F},\Gamma_1,\Gamma_2)$。

定义4.2。叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 Γ_1 和 Γ_2 之间的指标定义为

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{F},\Gamma_1,\Gamma_2):=\frac{1}{4}\Big(\Theta_{h\mathcal{F}}(h(x_2),\,h(x_2'))-\Theta_{h\mathcal{F}}(h(x_1),\,h(x_1'))\Big),$$

对于任意 $h\in\mathrm{Str}(\Gamma_1,\ \Gamma_2)$ 和 $x_i,\ x_i'\in\mathbb{R}^2$，使得 $x_i\in\Gamma_i$ 且 $x_i'\in\phi^+_{x_i}\setminus\{x_i\}$，对于所有 $i\in\{1,2\}$。

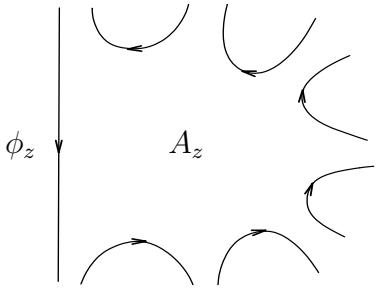
为了考虑所有情形，当 Γ_1 和 Γ_2 不互不相交时，我们定义 $\mathrm{Ind}(\mathcal{F},\ \Gamma_1,\ \Gamma_2):=0$。

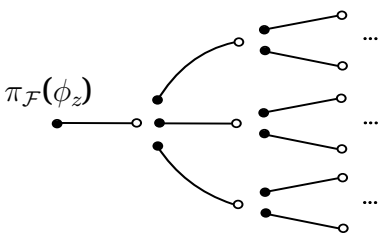
4.1. 构形空间中的可达点。本节首先定义并解释可达点的概念。

如果点 $z'\in\mathbb{R}^2$ 相对于叶状结构 $\mathcal{F}$可从 $z\in\mathbb{R}^2$ 到达，则称其为可达 点；这意味着 $z'\in\phi_z$，或者存在一条路径 $\gamma\colon [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2$，它与叶状结构 $\mathcal{F}$ 正向横截，且端点为 $\gamma(0)=z$ 和 $\gamma(1)=z'$。对于每个点 $z\in\mathbb{R}^2$，我们可以定义集合

$$A_z(\mathcal{F})=A_z:=\{z'\in\mathbb{R}^2\mid z'\text{ is accessible from }z\}.$$

集合 A_z 按叶 $\mathcal{F}$饱和，并与闭半平面 $[0,\infty)\times\mathbb{R}$同胚，其中叶 ϕ_z 映射到向下定向的竖直线 $\{0\}\times\mathbb{R}$。此外，边界 ∂A_z 构成一个局部有限的叶族，且 A_z 位于 ∂A_z中每片叶的左侧。值得注意的是，集合 A_z 不一定由 $\mathcal{F}$平凡地叶状分解。事实上，从 $\mathcal{F}$的叶空间角度来看，集合 $\pi_{\mathcal{F}}(A_z)$通常对应于一个从叶 ϕ_z向外定向的非豪斯多夫单连通一维流形。





$\pi_{\mathcal{F}}(A_z)$

考虑构形空间 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ 的子集 $W_{A(\mathcal{F})}$，其定义如下

$$W_{A(\mathcal{F})}:=\{(z,z')\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\mid z'\in A_z(\mathcal{F}),\,z\neq z'\}.$$

Let $p\colon\ W_{A(\mathcal{F})} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 是由对第一个坐标进行投影所定义的映射 $p(z,\ z') = z$.

本节余下部分将用于证明下面这个技术性引理，它对证明定理 A.

引理 4.3. 映射 $p\colon\ W_{A(\mathcal{F})} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个*Serre*纤维化。

证明。设 $\mathcal{V}$ 是由开集 $V \in \mathcal{V}$ 构成的 $\mathbb{R}^2$ 的一个可数覆盖，这些开集使 $\mathcal{F}$平凡化。更确切地说，对于每个 $V \in \mathcal{V}$，都存在一个同胚 $\varphi\colon\ V \longrightarrow [0,1]^2$ ，便得对于每个叶 $\phi \in \mathcal{F}$，集合 $\varphi(\phi \cap V)$ 是一个向下定向的竖直线段 $\{s\} \times [0,1]$。

根据定理 2.6，要证明 $p\colon\ W_{A(\mathcal{F})} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个Serre纤维化，只需证明对于每个 $V \in \mathcal{V}$，限制映射 $p|_{p^{-1}(V)}\colon\ p^{-1}(V) \longrightarrow V$是一个Serre纤维化。

因此，我们固定 $V \in \mathcal{V}$，以及如上所述的对应映射 $\overline{\varphi}\colon\ V \longrightarrow [0,1]^2$。令$\phi_R \in \mathcal{F}$ 为与集合 V相交的最右侧叶，换言之，$\phi_R := \phi_{\overline{\varphi}^{-1}(0,\ 0)}$；并令$\phi_L \in \mathcal{F}$ 为与 V相交的最左侧叶，即 $\phi_L = \phi_{\overline{\varphi}^{-1}(1,\ 0)}$。注意到

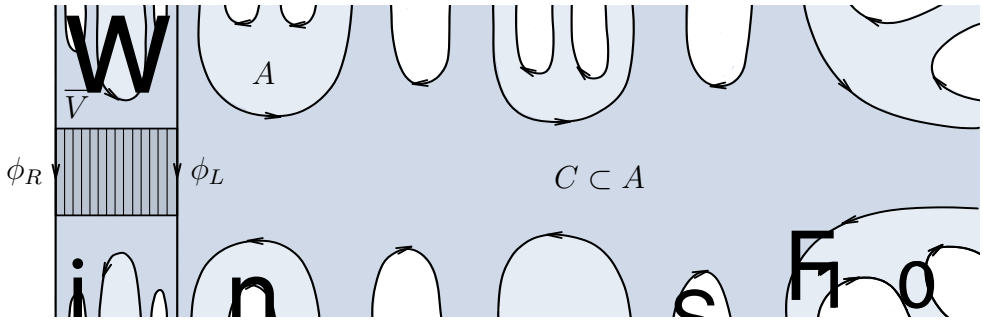
$$A_{\overline{\varphi}^{-1}(s',0)} \subset A_{\overline{\varphi}^{-1}(s,0)}, \quad \forall 0 \leq s < s' \leq 1.$$

这促使我们将 A 记作 $= A_{\overline{\varphi}^{-1}(0,\ 0)}$，因为它对每个点 $z \in V$都满足 $A_z \subset A$。

令 $\Gamma\colon\ [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$为一条真嵌入路径，它与 $\mathcal{F}$正向横截，包含于 A中，并且对所有 $s \in [0,1]$都满足 $\Gamma(s) = \overline{\varphi}^{-1}(s,\ 12)$。此外，定义集合

$$C := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_z \cap \Gamma \neq \varnothing\}.$$

注意，C是 A 的子集，同样按 $\mathcal{F}$的叶饱和，且同胚于 $[0,\infty) \times \mathbb{R}$；然而，与 A不同，集合 C 被 $\mathcal{F}$ 平凡地叶状化。这意味着，从 $\mathcal{F}$ 的叶空间的角度来看，集合 C 对应于一个与正向定向区间 $[0,\infty)$ 同胚的定向一维流形，其中 $\phi_R \in C$ 是点 0。



现在我们已经定义了集合 A 和 C，终于可以开始证明该引理了。考虑 n维立方体 $I^n = [0,1]^n$ 以及以下给定对象：

- 设 $H\colon\ [0,1] \times I^n \longrightarrow V$是一个同伦，并对每个 $t \in [0,1]$记 $H_t := H|_{\{t\} \times I^n}$。
- 设 $\widetilde{H}_0\colon\ I^n \longrightarrow p^{-1}(V)$ 是映射 H_0 经由映射 $p|_{p^{-1}(V)}$ 的一个提升。

注意，这意味着对每个 $x \in I^n$，我们都可以写成

$$\widetilde{H}_0(x) = (H_0(x), H'_0(x)), \quad \forall x \in I^n,$$

其中 $H'_0\colon\ I^n \longrightarrow A$ 是一个连续映射，满足 $H'_0(x) \in A_{H_0(x)} \setminus \{H_0(x)\}$，对任意 $x \in I^n$均成立。

为了证明 $p|_{p^{-1}(V)}\colon\ p^{-1}(V) \longrightarrow V$是一个Serre纤维化，我们需要构造一个连续映射的连续族 $H'_t\colon\ I^n \longrightarrow A$，使其满足可达性条件

$$H'_t(x) \in A_{H_t(x)} \setminus \{H_t(x)\}, \quad \forall x \in I^n, \quad \forall t \in [0,1].$$

这是因为，由 $\widetilde{H}(x,\ t)$ 定义的同伦 $\widetilde{H}\colon\ I^n \times [0,1] \longrightarrow p^{-1}(V) = (H_t(x)\ H'_t(x))\widetilde{}$ 将构成满足 $H|_{\{0\} \times I^n} = H_0$ 的同伦 $H\colon\ I^n \times [0,1] \longrightarrow V$。

在一般情形下构造连续映射族 $\{H'_t\}_{t\in[0,1]}$ 之前，我们先在假设 $H'_0(I^n)$ 包含于 C 中的条件下考察一个简化情形。注意，在此情形下，由于 $H'_0(I^n)$ 是 C 的紧子集，且由于 C 可由 $\mathcal{F}$ 平凡地赋予叶状结构，我们可以考虑另一个将叶状结构 $\mathcal{F}$ 平凡化的开集 $U \subset \mathbb{R}^2$，其满足

$$U \subset C \quad \text{and} \quad \overline{V} \cup H'_0(I^n) \subset U.$$

现在，考虑在 $\mathbb{R}^2$ 上的一个同伦 $(g_t)^{t\in[0,1]}$，其支集位于 $\overline{U}$，从恒等映射开始，并使各点沿正向横截于 $\mathcal{F}$ 的方向移动，直到集合 $g_1(H'_0(I^n))$ 包含于 $L(\phi_L) \cap U$。$(g_t)^{t\in[0,1]}$ 移动各点的速度取决于给定的同伦 $(H_t)^{t\in[0,1]}$，但根据 $H'_0(I^n)$ 的紧致性，我们可以确保同伦 $(g_t)^{t\in[0,1]}$ 能够使各点移动得足够快，从而满足可达性条件

$$g_t(H'_0(x)) \in A_{H_t(x)} \setminus \{H_t(x)\}$$

对所有 $x \in I^n$ 和 $t \in [0,1]$ 都保持成立。我们指出，条件 $g_t(H'_0(x)) \neq H_t(x)$ 得以满足，是因为 $(g_t)^{t\in[0,1]}$ 使各点沿正向横截于 $\mathcal{F}$ 的方向移动。总之，在这个简化情形下，我们通过定义 $H'_t := g_t \circ H'_0$，得到所需的族 $\{H'_t\}_{t\in[0,1]}$。

在一般情形下，$H'_0(I^n)$可能与 $A \setminus C$的区域相交。随着同伦 H_t 推进，这些区域可能变得不可达。为了解决这个问题，我们需要构造一个连续映射族 $\{H'_t\}_{t\in[0,1]}$，将 $H'_0(I^n)$收缩到集合 C 中，并且要赶在它所相交的$A \setminus C$ 区域变得不可达之前完成。然而，若不考虑已位于 C内的点的可达性条件，我们不能简单地将集合 $H'_0(I^n)$从 $A \setminus C$ 的区域中缩回。这是因为，可能存在一些点 $x \in I^n$，使得 $H_0(x)$和 $H'_0(x)$位于 $\mathcal{F}$的同一叶上，因此，如果 $H_t(x)$立即移动到叶$\phi_{H_t}(x)$ 的左侧，那么点 $H'_t(x)$也需要立即跟随点 $H_t(x)$向左移动，以维持可达性条件。考虑到这些细节，并且集合 $H'_t(I^n)$包含于 C中后，我们便回到了上文所述的简化情形。

因此，我们的方法分为三个步骤来构造族 $\{H'_t\}_{t\in[0,1]}$：

(1) 证明存在一个时间范围 $t \in [0,T]$，使集合 $H'_0(I^n)$ 能够缩回到 C 中，同时保持可达性条件。(2) 确定点 $x \in I^n$，使得当 $t \in [0,T]$ 时，$H'_0(x)$ 从 $H_t(x)$ 失去可达性；并初步构造 $\{H'_t\}_{t\in[0,T/2]}$，以确保从 $H_t(x)$ 到 $H'_t(x)$ 的可达性。(3) 构造族 $\{H'_t\}_{t\in[T/2,T]}$，将集合 $H'_t(I^n)$ 缩回到 C。

一旦我们构造出族 $\{H'_t\}_{t\in[0,T]}$，集合 $H'_T(I^n)$ 就会包含在 C 中，这意味着可以像在简化情形中那样构造剩余的族 $\{H'_t\}_{t\in[T,1]}$。

步骤 1 - 找到缩回的时间范围。

令 $\{B_i\}_{i\in J}$ 为与 $A \setminus C$ 相交的 $H'_0(I^n)$的连通分支集合。指标集合 J 是有限的，因为 $H'_0(I^n)$是一个紧集，并且 ∂C 构成了 $\mathcal{F}$ 的局部有限叶族（参见 [Sch25b，引理 2。4]）。对每个 $i \in J$，令 $\phi(B_i) \in \partial C$ 为满足以下条件的叶

$$B_i = A \cap \overline{L(\phi(B_i))} \quad \text{and} \quad C \subset R(\phi(B_i)).$$

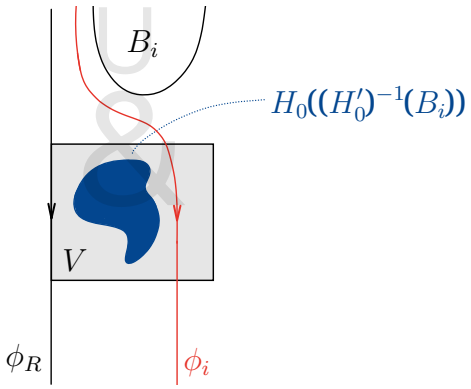
注意，对于每个 $i \in J$，集合 $B_i \cap H'_0(I^n)$ 是紧集。这意味着每个集合

$$(H'_0)^{-1}(B_i) = \{x \in I^n \mid H'_0(x) \in B_i\}$$

是一个 co 的紧子集 I^n，因此，$H_0(H'_0)^{-1}(B_i))$ 是 V 的紧子集 .

命题 4.4。 对于每个 $i \in J$，都存在一片叶 $\phi_i \in \mathcal{F}$ 与 V 相交，并满足 es

$$H_0((H_0')^{-1}(B_i)) \subset R(\phi_i) \quad and \quad B_i \subset L(\phi_i).$$



命题 *4.4*的证明。 由于 $H_0((H_0')^{-1}(B_i))$ 是 V的紧子集，我们可以将叶$\phi_i^* \in \mathcal{F}$定义为与 $H_0((H_0')^{-1}(B_i))$相交的最左侧叶。令 $q \in I^n$ 满足

$$H_0(q) \in \phi_i^* \quad \text{and} \quad H_0'(q) \in B_i.$$

回想一下， $H_0'(q)$ 可从 $H_0(q)$ 到达；然而，它们不可能位于 $\mathcal{F}$ 的同一叶上，因为 ϕ_i^* 与 B_i 不相交。因此，存在一条路径 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$，它与 $\mathcal{F}$ 正向横截，且 $\gamma(0) = H_0(q)$， $\gamma(1) = H_0'(q)$。注意，存在 $s_i \in [0,1]$ 使得

$$\gamma(s_i) \in \phi(B_i).$$

这意味着，对于任意 $s \in (0, s_i)$，叶 $\phi_{\gamma(s)}$ 满足

$$R(\phi_i^*) \subset R(\phi_{\gamma(s)}) \quad \text{and} \quad B_i \subset L(\phi_{\gamma(s)}).$$

此外，存在一个充分小的 $\varepsilon \in (0, s_i)$，使得叶 $\phi_{\gamma(\varepsilon)}$与 V相交。最后，我们可以直接将叶 ϕ_i 定义为叶 $\phi_{\gamma(\varepsilon)}$。由于 ϕ_i^* 是与$H_0((H_0')^{-1}(B_i))$相交的最左侧叶，因此我们得出， ϕ_i 也满足 $H_0((H_0')^{-1}(B_i)) \subset R(\phi_i)$。至此，命题得证。□

对于每个 $i \in J$，集合 $H_0((H_0')^{-1}(B_i))$ 是包含于 $R(\phi_i)$ 中的紧集，因此，存在某个 $T_i \in (0, 1)$，使得对于所有 $t \in [0, T_i]$， $H_t((H_0')^{-1}(B_i))$ 始终处于 $R(\phi_i)$ 中。最后，我们可以通过定义来确定时间范围

$$T := \min_{i \in J} T_i.$$

在 $J = \varnothing$ 的情形下，我们可以直接取 $T = 1$。

步骤 2 - 确保缩回前的可达性。
令 $D \subset H_0'(I^n)$ 为由 $D := \bigcup_{t \in [0,T]} D_t$ 定义的子集，其中 D_t 定义为

$$D_t := \{H_0'(x) \mid H_0'(x) \text{ is not accessible from } H_t(x),\, x \in I^n\}.$$

粗略地说，集合 D 包含 $H_0'(I^n)$ 中因某个 $t \in [0,T]$ 而无法从 $H_t(x)$ 到达的所有点。为了在将 $H_0'(I^n)$ 缩回到 C 之前确保满足可达性条件，我们需要处理的正是这个点集。

对于 $i \in J$，令 $N_i \subset \mathbb{R}^2$ 为 B_i 的一个邻域，使得 $N_i \subset L(\phi_i)$ 且 $N_i \cap V = \varnothing$。注意，根据 T的定义，对于所有 $t \in [0,T]$，都有 $H_t((H_0')^{-1}(B_i)) \subset R(\phi_i)$。因此，通过令每个邻域 N_i 足够小，我们还可以确保

$$H_t((H_0')^{-1}(N_i)) \subset R(\phi_i), \quad \forall t \in [0,T].$$

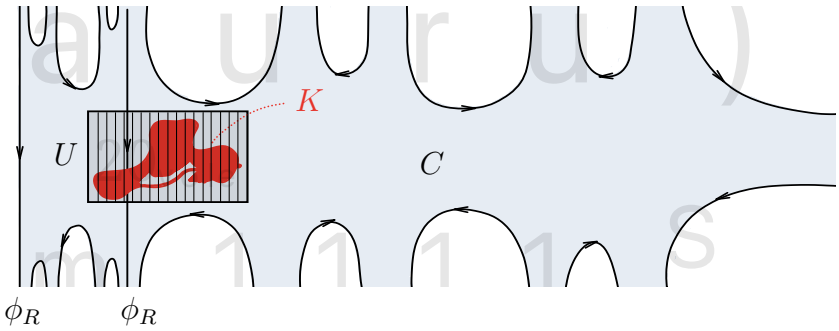
命题 4.5。 存在一个满足 $D \subset K$ 的紧集 $K \subset C \setminus \bigcup_{i\in J} N_i$ 。

命题 4.5 的证明。设 $x \in (H_0')^{-1}(N_i)$。由于点 $H_0'(x)$ 最初可从$H_0(x)$到达，并且对于所有 $t \in [0,T]$， $H_t(x)$ 始终位于 $V \cap R(\phi_i)$ 内，我们可以利用叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 $V \cap R(\phi_i)$ 内的局部平凡结构，证明对于所有 $t \in [0,T]$，点 $H_0'(x)$ 仍可从 $H_t(x)$ 到达。特别地， D 与每个集合 N_i 不相交，这意味着

$$D \subset H_0'(I^n) \setminus \bigcup_{i\in J} N_i \subset A \setminus \bigcup_{i\in J} N_i \subset C \setminus \bigcup_{i\in J} N_i.$$

通过定义紧集 $K := H_0'(I^n) \setminus \bigcup_{i\in J} N_i$，我们完成命题的证明。 □

利用 C 被 $\mathcal{F}$平凡叶状化这一事实，我们可以考虑一个开集 $U \subset \mathbb{R}^2$，它包含于 C 中，使叶状结构 $\mathcal{F}$ 局部平凡化，并满足 $K \subset U$ 和 $\phi_L \cap U \neq \varnothing$。



与简化情形类似，考虑一个定义在 $\mathbb{R}^2$ 上、支撑于 U 的同伦 $(g_t)^{t\in[0,T/2]}$ 。它从恒等映射开始，使点沿正向横截于 $\mathcal{F}$ 的方向移动，直至集合 $g_{T/2}(K)$ 包含于 $L(\phi_L) \cap U$ 中。如前所述，$(g_t)^{t\in[0,T/2]}$ 移动点的速度取决于给定的同伦 $(H_t)^{t\in[0,T/2]}$，但由于 K 的紧致性，我们可以确保同伦 $(g_t)^{t\in[0,T/2]}$ 移动点的速度足够快，从而使可达性条件$g_t(H_0'(x)) \in A_{H_t(x)} \setminus \{H_t(x)\}$ 对所有 $x \in I^n$ 和 $t \in [0,T/2]$ 始终成立。

最后，我们可以将连续映射族 $\{H_t'\}_{t\in[0,T/2]}$ 的第一个片段定义为

$$H_t' := g_t \circ H_0', \quad \forall t \in [0,T/2].$$

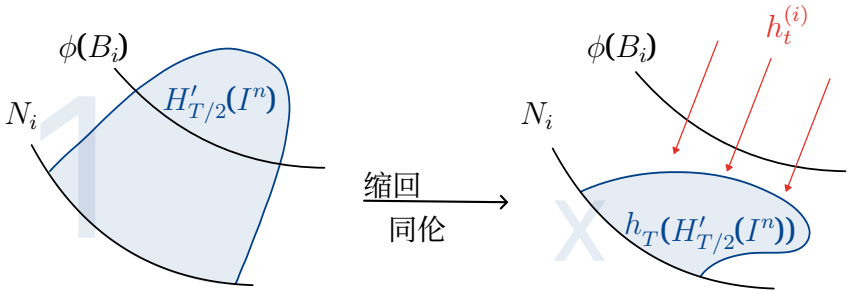
注意， $L(\phi_L) \cap U$ 中的点都自动从 V 可达。由于 K 包含所有可能导致时间 $t \in [0,T]$ 的可达性条件失效的点，因此我们有

$$H_{T/2}'(x) \text{ is accessible from } H_t(x), \quad \forall x \in I^n,\ t \in [T/2,T].$$

有了这一性质，我们终于可以将 $H_{T/2}'(I^n)$ 缩回到 C。

步骤 3 - 缩回同痕。

最后，对于每个 $i \in J$，我们可以考虑从恒等映射开始、支撑在邻域 N_i 上的同伦 $(h_t^{(i)})^{t\in[T/2,T]}$，它作用于 $\mathbb{R}^2$，将集合 $H_{T/2}'(I^n)$ 移到 B_i 之外，直到 $h_T^{(i)}(H_{T/2}'(I^n))$ 完全落在 $R(\phi(B_i))$ 上。下图展示了这一同伦。



由于有限族 $\{N_i\}_{i\in J}$ 中的邻域两两不相交，我们可以对每个 $t\in[T/2,T]$ 定义同胚 h_t，它由映射 $h_t^{(i)}$、 $i\in J$ 的复合给出。这个复合产生了 $\mathbb{R}^2$ 上的同伦 $(h_t)^{t\in[T/2,T]}$，使我们能够构造连续映射族 $\{H'_t\}_{t\in[T/2,T]}$ 的第二个片段，其表达式为

$$H'_t := h_t\circ H'_{T/2},\quad \forall t\in[T/2,T].$$

注意，族 $\{H'_t\}_{t\in[T/2,T]}$ 不会有破坏可达性条件的风险，因为集合 $H_t((H'_{T/2})^{-1}(N_i))$ 对所有 $t\in[T/2,T]$ 都保持在 $R(\phi_i)$ 中。现在，集合 $H'_T(I^n)$ 包含于 C 中，我们终于可以像在简化情形中那样构造连续族 $\{H'_t\}_{t\in[T,1]}$ 的最后一段。这就完成了引理的证明。□

5. 定理A 的证明

定理 *A*的证明。 回忆一下，布劳威尔同胚的两个轨道要么穿过叶状结构 $\mathcal{F}$ 的同一片叶，要么被叶状结构 $\mathcal{F}$ 的一片叶隔开。

首先，假设 O_1 和 O_2 穿过叶状结构 $\mathcal{F}$ 的同一片叶。由定理 2.10 可知，存在一个同伦 $(f_t)^{t\in[0,1]}$，它相对于 $O_1\cup O_2$ 固定，并且每个 f_t 都是布劳威尔同胚， $f_0=f$，而 f_1 与一个平移共轭。特别地，我们有 $\mathsf{Ind}(f_1,O_1,O_2)=0$。回忆一下，$\mathsf{Ind}(f,O_1,O_2)$ 在相对于轨道 O_1 和 O_2 的布劳威尔同胚同伦下保持不变。这意味着 $\mathsf{Ind}(f_t,O_1,O_2)$ 沿着 $t\in[0,1]$ 保持恒定，因此 $\mathsf{Ind}(f,O_1,O_2)=0$。

现在，我们证明在这种情形下，指标 $\mathsf{Ind}(\mathcal{F},\Gamma_1,\Gamma_2)$ 也等于 0。设 $\phi\in\mathcal{F}$ 是同时与 O_1 和 O_2 相交的一条叶。注意，若 Γ_1 与 Γ_2 彼此相交，则我们立即有 $\mathsf{Ind}(\mathcal{F},\Gamma_1,\Gamma_2)=0$。否则，我们可以应用 Homma-Schoenflies 定理，得到一个保向同胚 $h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$，使其满足

$$h(\Gamma_1)=\mathbb{R}_1,\quad h(\Gamma_2)=\mathbb{R}_2,\quad \text{and}\quad h(\phi)=\{0\}\times\mathbb{R}.$$

特别地， $h\in\mathsf{Str}(\Gamma_1,\Gamma_2)$。假设 h 将 ϕ 的定向映射为竖直线 $h(\phi)=\{0\}\times\mathbb{R}$ 的向下定向。需要注意的是，一般情况下无法保证这一点，但另一种情形的证明完全类似。

考虑路径 $\alpha,\alpha':[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2$，其定义为 $\alpha(t)=(0,t+1)$ 和 $\alpha'(t)=(0,t+1-\varepsilon)$，其中 $\varepsilon>0$。注意，路径 $t\longmapsto(\alpha(t)\ \alpha'(t))$ 包含于 $W_{h\mathcal{F}}$ 中，并满足

$$\dot\theta(\alpha(t),\alpha'(t),\mathcal{H})=-\dot\imath,\quad \forall t\in[0,1].$$

这意味着 $\Theta_{h\mathcal{F}}(\alpha(t)\ \alpha'(t))$ 沿着 $t\in[0,1]$ 为常数。特别地，考虑满足 $h(x_1)=\alpha(0)$ 和 $h(x_2)=\alpha(1)$ 的两点 $x_1\in\Gamma_1$ 和 $x_2\in\Gamma_2$，以及满足 $h(x'_1)=\alpha'(0)$ 和 $h(x'_2)=\alpha'(1)$ 的两点$x'_1\in\phi^+_{x_1}$ 和 $x'_2\in\phi^+_{x_2}$，可得

$$\Theta_{h\mathcal{F}}(h(x_2),h(x'_2))=\Theta_{h\mathcal{F}}(h(x_1),h(x'_1)).$$

因此，我们得出，在第一种情形下，指标 $\mathsf{Ind}(\mathcal{F},\Gamma_1,\Gamma_2)=0=\mathsf{Ind}(f,O_1,O_2)$。

现在，考虑 O_1 和 O_2 被叶状结构 $\mathcal{F}$的一片叶分隔的情形。在这种情形下， Γ_1 和 Γ_2 自动不相交，我们可以考虑集合 $\mathsf{Str}^\dagger(\Gamma_1,\Gamma_2)$，它由所有满足附加条件 $h(O_1)=\mathbb{Z}_1$ 且 $h(O_2)=\mathbb{Z}_2$ 的 $h\in\mathsf{Str}(\Gamma_1,\Gamma_2)$ 构成。

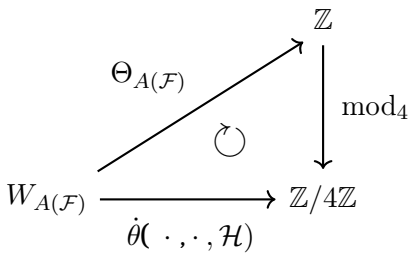
命题 5.1. $\mathrm{Str}^\dagger(\Gamma_1,\Gamma_2)\subset\mathrm{Handel}(\Gamma_1,\Gamma_2)$。

论断的证明*5.1*。 由 [Sch25a的推论 6 可知，2], 存在一个同伦 $(f_t)^{t\in[0,1]}$，相对于 $O_1\cup O_2$ 使得 $f_0=f$ 且 f_1 是具有 Γ_1 和 Γ_2 作为轨道的流的时间一映射。

令 $h \in \mathrm{Str}^{\dagger}(\Gamma_1, \Gamma_2)$。注意，对补集 $\mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ 的每个连通分支应用亚历山大技巧，我们可以构造一个同伦 $(F_t)_{t\in[0,1]}$，相对于$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$使得 $F_0 = h \circ f_1 \circ h^{-1}$，且 F_1为 T、 T^{-1}、 R或 R^{-1}。这意味着映射 $h \circ f_1 \circ h^{-1}$，因此 $h \circ f \circ h^{-1}$ 也相对于 $O_1 \cup O_2$ 同伦于 T、 T^{-1}、 R 或 R^{-1}之一。特别地，这意味着 $h \in \mathrm{Handel}(\Gamma_1, \Gamma_2)$。□

考虑第4.1节中定义的 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ 内的可达点集合 $W_{A(\mathcal{F})}$。如引理 4.3 所示，投影 $p : W_{A(\mathcal{F})} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $p(z, z') = z$ 是一个 Serre纤维化。由于底空间 $\mathbb{R}^2$ 和纤维 $p^{-1}(z) = A_z \setminus \{z\}$ 对于 $z \in \mathbb{R}^2$ 都是单连通的，推论2.8 告诉我们 $W_{A(\mathcal{F})}$ 是单连通的。因此，提升定理保证函数 $\dot{\theta}(\,\cdot\,, \cdot\,, \mathcal{H})|_{W_{A(\mathcal{F})}}$ 存在一个提升 $\Theta_{A(\mathcal{F})} : W_{A(\mathcal{F})} \longrightarrow \mathbb{Z}$，且该提升在相差 4 的整数倍的意义下唯一。

这可由下方的交换图表示。



接下来，注意到 $W_{\mathcal{F}}$ 和 W_f 都是 $W_{A(\mathcal{F})}$的子集。根据定义，包含关系 $W_{\mathcal{F}} \subset W_{A(\mathcal{F})}$ 显然成立。另一方面，包含关系 $W_f \subset W_{A(\mathcal{F})}$ 则由 $\mathcal{F}$ 是 f 的横截叶状结构这一事实推出，因为这意味着对于每个 $z \in \mathbb{R}^2$，都有 $f(z) \in L(\phi_z)$。由这些包含关系，我们可以将提升 $\Theta_{A(\mathcal{F})}$ 限制到集合 $W_{\mathcal{F}}$ 和 W_f上，从而分别得到映射 $\dot{\theta}(\,\cdot\,, \,\cdot\,, \mathcal{F})|_{W_{\mathcal{F}}}$和 $\dot{\theta}(\,\cdot\,, \,\cdot\,, f)|_{W_f}$的个提升。换句话说，

$$\Theta_{A(\mathcal{F})}|_{W_{\mathcal{F}}} = \Theta_{\mathcal{F}} \quad \text{and} \quad \Theta_{A(\mathcal{F})}|_{W_f} = \Theta_f.$$

这意味着，利用断言 5.1，我们可以计算出两个指标:

$$\mathrm{Ind}(f, O_1, O_2) = \frac{1}{4}\Big(\Theta_{A(h\mathcal{F})}(h(x_2), h \circ f(x_2)) - \Theta_{A(h\mathcal{F})}(h(x_1), h \circ f(x_1))\Big),$$

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{F}, \Gamma_1, \Gamma_2) = \frac{1}{4}\Big(\Theta_{A(h\mathcal{F})}(h(x_2), h(x_2')) - \Theta_{A(h\mathcal{F})}(h(x_1), h(x_1'))\Big),$$

对于任意映射 $h \in \mathrm{Str}^{\dagger}(\Gamma_1, \Gamma_2)$，以及任意两个点 $x_i \in O_i$和 $x_i' \in \phi_{x_i}^{+} \setminus \{x_i\}$，其中 $i = \{1, 2\}$。

因此，对每个 $i \in \{1, 2\}$，固定一个点 $x_i \in O_i$，并令 $\gamma_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$为横截轨迹 Γ_i的一条子路径，它连接 x_i 与 $f(x_i)$。令 V_1 和 V_2 分别为 γ_1和 γ_2的不相交邻域，并且这两个邻域使叶状结构 $\mathcal{F}$局部平凡化。对每个 $i \in \{1, 2\}$，我们固定一个包含在邻域 V_i中的点 $x_i' \in \phi_{x_i}^{+} \setminus \{x_i\}$。

根据 Homma-Schoenflies 定理，存在一个 $h \in \mathrm{Str}^{\dagger}(\Gamma_1, \Gamma_2)$，满足

$$h(\overline{V_i}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[i - \frac{1}{4}, i + \frac{1}{4}\right], \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

这使我们可以对每个 $i \in \{1, 2\}$ 考虑一条线段 $\alpha_i' : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 它连接$h(x_i')$ 与 $h \circ f(x_i')$，并且自动与 $h\mathcal{F}$ 正向横截且与 x_i 不相交。这意味着，若我们定义 $\alpha_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 为 $h(x_i)$ 处的常值路径，则路径

$$A_i : t \longmapsto (\alpha_i(t), \alpha_i'(t))$$

是c 包含在 $W_{A(h\mathcal{F})}$ 中，并将 $(h(x_i)\ h(x_i'))$ 与 $(h(x_i)\ h \circ f(x_i))$ 连接起来，对每个 $i \in \{1, 2$都成立$\}$.
o

注意，路径 A_i 的构造保证了

$$\Theta_{A(h\mathcal{F})} \circ A_i(t) = \Theta_{A(h\mathcal{F})}(h(x_i), h(x_i')), \quad \forall t \in [0,1),$$

由于集合 $A_i([0,1))$ 完全位于水平 $h(\Gamma_i) = \mathbb{R}_i$ 的下方或上方，具体取决于点 $h(x_i')$ 相对于 $\mathbb{R}_i$的初始位置。现在注意，当点 $h(x_i')$ 位于水平线 $\mathbb{R}_i$ 下方时，点 $h \circ f(x_i')$ 必须位于水平 $\mathbb{R}_i$ 上，且其第一坐标大于点 $h(x_i')$ 的第一坐标。另一方面，当点 $h(x_i')$ 位于 $\mathbb{R}_i$上方时，点 $h \circ f(x_i')$ 必须位于水平 $\mathbb{R}_i$ 上，且其第一坐标小于点 $h(x_i')$ 的第一坐标。在这两种情形下，我们都有 $\Theta_{A(h\mathcal{F})} \circ A_i(1)$ 的值相对于 $\Theta_{A(h\mathcal{F})} \circ A_i(t)$ 的值增加 1（对于 $t \in [0,1)$）。由此可以得出，对于每个 $i \in \{1,2\}$，均有以下等式

$$\Theta_{A(h\mathcal{F})}(h(x_i), h \circ f(x_i)) = \Theta_{A(h\mathcal{F})}(h(x_i), h(x_i')) + 1.$$

将此等式代入上文给出的指标 $\mathrm{Ind}(f, O_1, O_2)$ 的表达式后，这个 1 的差值便抵消了，最终得到等式

$$\mathrm{Ind}(f, O_1, O_2) = \mathrm{Ind}(\mathcal{F}, \Gamma_1, \Gamma_2).$$

定理 A 的证明至此结束。 □

参考文献

[及65] S. A. Andrea，《平面同胚及其在流中的嵌入》，《美国数学会通报》71 (1965), 381–383（英文）。[Bav17] Juliette Bavard，《布劳威尔映射类的共轭不变量》，《遍历论与动力系统》37 (2017), 第6期，1765–1814。[BCR20] François Béguin、Sylvain Crovisier 和 Frédéric Le Roux，《曲面上同伦的不动点集》，《欧洲数学会杂志》（JEMS）22 (2020), 第6期，1971–2046。[Bro12] L. E. J. Brouwer，《平面平移定理的证明》，《数学年刊》72 (1912/03/01), 第1期，37–54。[Han99] Michael Handel，《平面同胚的不动点定理》，《拓扑学》38 (1999), 第2期，235–264。[LC04] Patrice Le Calvez，《布劳威尔平移定理的叶状版本》，《瑞士数学评论》79 (2004), 第2期，229–259（法文）。[LC23] ，《环带扭转映射：一种抽象观点》，《规则与混沌动力学》28 (2023), 第4期，343–363。[LR17] Frédéric Le Roux，《布劳威尔同胚的指标与同伦布劳威尔理论》，《遍历论与动力系统》37 (2017), 第2期，572–605。[Sch25a] Nelson Schuback，《同伦布劳威尔理论的叶状观点》，arXiv 预印本 arXiv:2512.07510 (2025)，网址：https://arxiv.org/abs/2512.07510。[Sch25b] ，《叶状布劳威尔理论中的精细方法》，arXiv 预印本 arXiv:2510.17616 (2025)。[TD08] Tammo Tom Dieck，《代数拓扑》，欧洲数学会，2008。[Whi33] Hassler Whitney，《正则曲线族》，《数学年刊》34 (1933), 第2期，244–270。

索邦大学和巴黎西岱大学、法国国家科学研究中心、IMJ-PRG、法国巴黎75005邮区、法国电子邮箱地址：nelson.schuback@imj-prg.fr