arXiv:2601.15692v1 [math.AC] 22 Jan 2026

次数 5 的空间单项式素理想的符号 Rees 代数

KAZUHIKO KURANO

明治大学

Abstract. 设 K 是一个特征为 0 的域。令 $\mathfrak{p}_K(5, 103, 169)$ 为由空间单项式曲线 $\{(t^5, t^{103}, t^{169}) \mid t \in K\}$所定义的理想。本文将证明，符号 Rees 代数 $R_s(\mathfrak{p}_K(5, 103, 169))$ 不是诺特的，即不是有限生成的 K代数。

1. Introduction

对于交换环 A的素理想 Q ， Q 的第 n符号幂定义为 $Q^nA_Q \cap A$，记作 $Q^{(n)}$。我们将子环称为

$$A[Qt, Q^{(2)}t^2, Q^{(3)}t^3, \ldots]$$

多项式环 $A[t]$ 中， Q的符号 Rees 代数记作 $R_s(Q)$。它不一定是一个有限生成的 A代数。当 A 是诺特环时， $R_s(Q)$是诺特环，当且仅当 $R_s(Q)$作为一个环在 A 上有限生成。

在交换代数中，对符号 Rees 代数在基环上的有限生成性的研究始于 Cowsik 问题 [1]。Cowsik 问题询问：域上多项式环中的素理想的符号 Rees 代数是否有限生成。Cowsik 似乎是在研究仿射曲线的集合论完全交性质时考虑了这个问题。符号 Rees 代数的有限生成性也与数学中的其他问题密切相关。

例如，符号 Rees 代数常常作为代数簇的 Cox 环或其子环出现。代数簇的 Cox 环及其子环的有限生成性，是双有理几何核心中的一个基础问题。

1956 年，Nagata [15] 为 Hilbert 第十四问题给出了一个反例，并在那篇论文中提出了以下猜想，即如今所称的 Nagata 猜想：“设 n是一个满足 $n \geq 10$的自然数。如果复射影平面上存在一条次数为d 的平面曲线，经过 n 个一般点，且每个点的重数至少为 r，那么 $d > \sqrt{n}r$。”Nagata 证明了当n 是完全平方数时，这一猜想成立，从而为 Hilbert 第十四问题给出了一个反例。下文定义的空间单项式素理想的符号 Rees 代数

本研究获得了 JSPS KAKENHI 资助编号 22K03256 的支持。

与 Nagata 猜想密切相关（[3]中的命题 5.2）。

设 K 是一个域。设 a、 b、 c 是两两互素正整数。设 $S = K[x, y, z]$ 是 K 上的多项式环。设 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ 是 K代数同态 $S \xrightarrow{\varphi} K[T]$ 的核，该同态由 $\varphi(x) = T^a$、 $\varphi(y) = T^b$和 $\varphi(z) = T^c$定义。这种形式的理想称为空间单项式素理想。我们有时将$\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ 简记为 $\mathfrak{p}$。

如果素理想 Q 由正则序列生成，那么Q 的符号幂与其普通幂相同。因此，在这种情况下， Q 的符号 Rees 代数与 Q的普通 Rees 代数相同，故符号 Rees 代数是有限生成的。根据 Herzog 的一项结果 [9]，空间单项式素理想的极小生成集所含元素的个数为 2 或 3。当极小生成元的个数为 3 时，空间单项式素理想可视为域上的多项式环中不由正则序列生成的素理想的最简单例子。基于这个原因，空间单项式素理想的符号 Rees 代数已得到广泛研究。

Huneke [10] 给出了一个简单的充要条件，用以判定空间单项式素理想的符号 Rees 代数是否有限生成。Cutkosky [2]证明，空间单项式素理想的符号 Rees 代数是某个代数曲面的 Cox 环，从而为 Huneke 判据提供了几何解释。此外，他运用代数几何和奇点理论中的技巧，给出了空间单项式素理想的符号 Rees 代数有限生成的一个充分条件。最早的非有限生成符号 Rees 代数实例由 Goto–Nishida–Watanabe [8]给出。例如，当基域的特征为零时，与 (25, 29, 72) 对应的符号 Rees 代数不是有限生成的。Gonzales–Gonzales–Karu [5], [6] 引入了托里克几何中的技巧，使得构造大量实例成为可能。

下文中，我们将 a、 b、 c 的最小值称为空间单项式素理想 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ 的次数。根据 Cutkosky [2], 的一个定理，当空间单项式素理想的次数不超过 4 或等于 6 时，其符号 Rees 代数是有限生成的。次数为 5 的空间单项式素理想的符号 Rees 代数是否有限生成一直是个未知问题，也是该领域研究者关注的一个引人入胜的开放问题。本文的主要定理解决了这一问题。

定理 1.1. 设 K 是一个特征为 0 的域。那么，空间单项式素理想 $R_s(\mathfrak{p}_K(5, 103, 169))$ 的符号 Rees 代数不是诺特的，也就是说，它不是有限生成于 S 上。

作者不知道任何次数 8 的空间单项式素理想的符号 Rees 代数不是诺特的例子。在次数为 5 或 8 的情形下，如果 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ 的某个极小生成元给出一条负曲线（见下文定义 2.3），那么符号 Rees 代数 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ 是诺特的 [4], [13], [16]。在 $(a, b, c) = (7, 15, 26), (9, 13, 29), (10, 11, 27), (11, 21, 25), (12, 13, 17), (13, 18, 25)$ ... 的情形下，其中一个极小生成元

of $\mathfrak{p}_K(a,b,c)$ 给出一条负曲线；如果 K 的特征为 0，则符号 Rees 代数 $R_s(\mathfrak{p}_K(a,b,c))$ 不是诺特的。

最后，我们介绍本文的结构。第 2 节中，我们引入托里克几何中的技术，并发展负曲线的一般理论。利用这些工具，我们证明，在 (5, 103, 169) 的情形下，存在一个次数为 2065 的元素 f，它属于第 7 个符号幂并定义一条负曲线。第 3 节中，我们证明，如果域上特征为零的空间单项式素理想 (5, 103, 169) 的符号 Rees 代数有限生成，那么存在一个次数为 17407 的元素 g，它属于第 59 个符号幂，并且 f 和 g 满足 Huneke 判据。第 4 节中，我们将问题归结为特征 2 的情形，并证明第 59 个符号幂的次数为 17407 的齐次分量为零，从而完成定理的证明。第 4 节中的计算使用计算机完成，但结果也经过了手工验证，未使用计算机。

2. Negative curve

设 a、b、c 是两两互素正整数。我们认为 $S=K[x,y,z]$ 是一个分次环，其中 $\deg(x)$ 为 $=a$，$\deg(y)$ 为 $=b$，且 $\deg(z)$ 为 $=c$。那么 $\mathfrak{p}_K(a,b,c)$ 是 S 的齐次理想。

不妨设

$$\mathfrak{p}_K(a,b,c)=(x^s-y^{t_1}z^{u_1},y^t-z^{u_2}x^{s_2},z^u-x^{s_3}y^{t_3})=I_2\begin{pmatrix}x^{s_2}&y^{t_3}&z^{u_1}\\y^{t_1}&z^{u_2}&x^{s_3}\end{pmatrix},$$

其中 $s=s_2+s_3$、$t=t_1+t_3$ 和 $u=u_1+u_2$ 由 Herzog [9] 给出。设 a'、b'、c' 是满足 $a'a+b'b+c'c=1$ 的整数，并令

$$T=x^{a'}y^{b'}z^{c'}. \tag{2.1}$$

于是我们有

$$S[x^{-1},y^{-1},z^{-1}]=\left(S[x^{-1},y^{-1},z^{-1}]_0\right)[T^{\pm1}].$$

令

$$v=\frac{z^{u_2}x^{s_2}}{y^t},\quad w=\frac{z^u}{x^{s_3}y^{t_3}},$$

我们有

$$S[x^{-1},y^{-1},z^{-1}]_0=K[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}]_0=K[v^{\pm1},w^{\pm1}]$$

与 [12] 中引理 3.2 的证明类似。容易看出，$v^\alpha w^\beta T^n\in S$ 当且仅当

$$\begin{cases}s_2\alpha-s_3\beta+a'n\geq0\\-t\alpha-t_3\beta+b'n\geq0\\u_2\alpha+u\beta+c'n\geq0.\end{cases}$$

设 Δ 是由下式定义的三角形

$$\begin{cases}s_2x-s_3y+a'\ \geq0\\-tx-t_3y+b'\geq0\\u_2x+uy+c'\geq0\end{cases} \tag{2.2}$$

位于一个 x-y 平面上。我们将 Δ 的埃尔哈特环定义为

$$K[\Delta] := \bigoplus_{n\geq 0} \left(\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in n\Delta\cap\mathbb{Z}^2} Kv^\alpha w^\beta \right) T^n. \tag{2.3}$$

于是， $K[\Delta]$ 自然地与 $S = K[x, y, z]$重合。设 $\mathfrak{q}$ 为由 $v - 1$ 和 $w - 1$生成的 $K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ 的理想。则有

$$\mathfrak{p}S[x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}] = \mathfrak{q}S[x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}].$$

对于 $m \geq 0$，我们有

$$\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{p}^m S[x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}] \cap S = \mathfrak{q}^m S[x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}] \cap S$$

$$= \bigoplus_{n\geq 0} \left(\mathfrak{q}^m \cap \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in n\Delta\cap\mathbb{Z}^2} Kv^\alpha w^\beta \right) T^n.$$

下面的命题是众所周知的。为方便读者，我们在此给出证明概要。

命题 2.1. (1) 设 g_1、 g_2 为一个 S-正则序列，且对于某些正整数 r_1、 r_2、 d_1、 d_2，有 $g_1 \in [\mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(r_1)}]_{d_1}$以及 $g_2 \in [\mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(r_2)}]_{d_2}$。则有

$$\frac{d_1}{r_1} \cdot \frac{d_2}{r_2} \geq abc.$$

(2) 符号 Rees 代数 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$是诺特的，当且仅当存在一个 S-正则序列 g_1、 g_2，使得对于某些正整数 d_1、 d_2、 r_1、 r_2，有 $g_1 \in [\mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(r_1)}]_{d_1}$ 以及 $g_2 \in [\mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(r_2)}]_{d_2}$，满足

$$\frac{d_1}{r_1} \cdot \frac{d_2}{r_2} = abc.$$

证明。 (1) 取 h，使得 g_1、 g_2、 h 是 S 的齐次参数系。于是 $S/(g_1, g_2, h)$ 的 Poincar´e 级数为

$$\frac{(1 - t^{d_1})(1 - t^{d_2})(1 - t^{\deg(h)})}{(1 - t^a)(1 - t^b)(1 - t^c)}.$$

将 1 代入 t，得到

$$\frac{d_1 d_2 \deg(h)}{abc} = \ell_S(S/(g_1, g_2, h)) = \mathrm{e}((h), S/(g_1, g_2)) \geq \ell_{S_\mathfrak{p}}(S_\mathfrak{p}/(g_1, g_2)S_\mathfrak{p}) \cdot \mathrm{e}((h), S/\mathfrak{p}) \geq r_1 r_2 \deg(h), \tag{2.4}$$

其中，第一个不等式由重数加法公式推出，第二个不等式由 [12] 中的引理 2.2 推出。

(2) 设 g_1、 g_2 是满足 $g_1 \in [\mathfrak{p}^{(r_1)}]_{d_1}$、 $g_2 \in [\mathfrak{p}^{(r_2)}]_{d_2}$ 以及 $\frac{d_1}{r_1} \cdot \frac{d_2}{r_2} = abc$ 的正则序列。由 (2.4) 可知， $\ell_S(S/(g_1, g_2, h)) = r_1 r_2 \ell_S(S/(h) + \mathfrak{p})$。于是，根据 Huneke 判据 [10]， $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ 是诺特的。

反过来，假设 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ 是诺特的。令 $X = \mathrm{Proj}\ S$。令$\pi\colon Y \to X$为在对应于 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ 的点处的爆破。令 E为

例外曲线。于是，存在 Y 上的曲线 C 和 D，使得 $C \neq E$、$D \neq E$，并且根据 Cutkosky 判据，$C \cap D = \emptyset$ [2]。令 g_1 和 g_2 分别为 $\pi(C)$ 和 $\pi(D)$ 的定义方程。假设 $g_1 \in [\mathfrak{p}^{(r_1)}]_{d_1} \setminus [\mathfrak{p}^{(r_1+1)}]_{d_1}$ 且 $g_2 \in [\mathfrak{p}^{(r_2)}]_{d_2} \setminus [\mathfrak{p}^{(r_2+1)}]_{d_2}$。由于 $\pi(C) \cap \pi(D)$ 非空且 $C \cap D$ ~~$= \emptyset$~~，我们有 $\sqrt{(g_1, g_2)} = \mathfrak{p}$。因此，(2.4) 中第一个 "$\geq$" 是 "$=$"。这里 Spec $K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$是 X的一个仿射开子集。它在 $\mathfrak{q}$ 处的爆破是Y的一个开子概形。$\pi(C)$ 和 $\pi(D)$ 在 Spec $K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ 中的方程分别为 $g_1' := g_1/T^{\deg(g_1)}$ 和$g_2' := g_2/T^{\deg(g_2)}$，其中 T 是 (2.1) 中定义的一个元素。这里令$B = K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]_{\mathfrak{q}}$。由 [12], 中的引理 2.2可得 $\ell_B(B/(g_1', g_2')) = r_1 r_2$，因为$C \cap D = \emptyset$。由于 $\ell_{S_{\mathfrak{p}}}(S_{\mathfrak{p}}/(g_1, g_2)S_{\mathfrak{p}}) = \ell_B(B/(g_1', g_2'))$, (2.4) 中第二个" $\geq$"也为"$=$"。□

定义 2.2. 如果存在一个S-正则序列 g_1, g_2，使得 $g_1 \in [\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_1)}]_{d_1}$ 以及 $g_2 \in [\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_2)}]_{d_2}$ 对某些正整数 d_1, d_2, r_1, r_2 满足 $\frac{d_1}{r_1} \cdot \frac{d_2}{r_2} = abc$，则称 Huneke 条件得到满足。

定义 2.3. 如果非零齐次不可约多项式 f in S 满足：对于某些正整数 r_0, d_0，f 包含于 $[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_0)}]_{d_0}$，且 $d_0/r_0 < \sqrt{abc}$，则称其为负曲线。

当 K 的特征为正时，Cutkosky [2] 证明了：如果存在负曲线，则$R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ 是诺特的。当 K 的特征为 0 时，即使存在负曲线，$R_s(\mathfrak{p}_K(a,b,c))$ 也不一定是诺特的（Goto-Nishida-Watanabe [8]）。

注 2.4. (1) 假设 f 是一条负曲线，即 f 是 $[\mathfrak{p}^{(r_0)}]_{d_0}$ 中的不可约元素，且 $d_0/r_0 < \sqrt{abc}$。假设对于某些满足 $d/r < abc/(d_0/r_0)$ 的正整数 r、d，有 $g \in [\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r)}]_d$。根据命题 2.1 (1)，$f$ 整除 g。

我们知道，如果存在负曲线，则它在乘以 $K^\times$ 中的某个元素的意义下唯一确定。

(2) 假设对于满足 $d/r < \sqrt{abc}$ 的某些正整数 r、d，有 $[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r)}]_d \neq 0$。假设 $0 \neq f \in [\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r)}]_d$。考虑不可约分解 $f = f_1 f_2 \cdots f_n$。由于伴随分次环

$$S/\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{(2)} \oplus \mathfrak{p}^{(2)}/\mathfrak{p}^{(3)} \oplus \cdots \tag{2.5}$$

是一个整环，f_i 中必有一个是负曲线。因此，当且仅当对于某些满足 $d/r < \sqrt{abc}$ 的正整数 r、d，有 $[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r)}]_d \neq 0$ 时，存在负曲线。

(3) 设 L/K 是一个域扩张。容易看出

$$[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r)}]_d \otimes_K L = [\mathfrak{p}_L(a,b,c)^{(r)}]_d$$

对于任意 r、d。

我们知道，$R_s(\mathfrak{p}_K(a,b,c))$ 是诺特的，当且仅当 $R_s(\mathfrak{p}_L(a,b,c))$ 也是诺特的。特别地，$R_s(\mathfrak{p}_K(a,b,c))$ 的有限生成性仅取决于 ch(K),a, b, c。

在 K, a, b, c 的情形下存在负曲线，当且仅当在 L, a, b, c 的情形下也存在负曲线。此外，假设 K 是一个素域。若 f 在 K, a, b, c 的情形下是负曲线，那么 f 在 L, a, b, c 的情形下也为负曲线。若存在负曲线，我们可以假设它是一个系数取自素域的多项式，且是绝对不可约的。

(4) 假设 f 是 $[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_0)}]_{d_0}$ 中的一条负曲线，其中 r_0、 d_0 为满足 $d_0/r_0 < \sqrt{abc}$ 的正整数。那么 r_0 也由下述方式唯一确定：我们可以假设 f 的系数属于素域。假设 $f \in [\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_0+1)}]_{d_0}$ 且 $d_0/r_0 < \sqrt{abc}$。容易看出， $\frac{\partial f}{\partial x}$、 $\frac{\partial f}{\partial y}$、 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 都包含于 $\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_0)}$。若 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 不为 0，则 f 整除它，且 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的次数小于 f 的次数。这就产生矛盾。因此可知 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$。于是我们可以假设 K 的特征为素数 p。由于 f 的系数属于素域，存在一个多项式 f'，使得 $f = f'^p$。这与 f 不可约矛盾。

(5) 假设 f 是 $[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_0)}]_{d_0}$ 中的负曲线，其中 r_0、 d_0 为满足 $d_0/r_0 < \sqrt{abc}$ 的正整数。假设 $r > 0$ 且 $d \geq 0$。若 $d/r < d_0/r_0$，则 $[\mathfrak{p}^{(r)}]_d = 0$ 如下：假设 $0 \neq g \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_d$ 且 $d/r < d_0/r_0$。于是，根据 (1)，f 整除 g。令 $g = fh$ 且 $h \in [\mathfrak{p}^{(r')}]_{d'} \setminus [\mathfrak{p}^{(r'+1)}]_{d'}$。这里注意到，由于 $d \geq d_0$ 且 $d/r < d_0/r_0$， $r > r_0$。于是，由于伴随分次环 (2.5) 是整环，并且根据 (4) 有 $f \notin \mathfrak{p}^{(r_0+1)}$，因此 $g = fh \in [\mathfrak{p}^{(r_0+r')}]_{d_0+d'} \setminus [\mathfrak{p}^{(r_0+r'+1)}]_{d_0+d'}$。于是 $r \leq r_0 + r'$ 且 $d = d_0 + d'$。因此

$$\frac{d'}{r'} \leq \frac{d-d_0}{r-r_0} < \frac{d_0}{r_0}.$$

因此，对于任意 $n > 0$， g 都能被 f^n 整除。这是矛盾的。

(6) 假设 Huneke 条件成立，也就是说，存在一个 S-正则序列 g_1, g_2，其中 $g_1 \in [\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_1)}]_{d_1}$ 且 $g_2 \in [\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_2)}]_{d_2}$（$d_1, d_2, r_1, r_2$ 均为正整数），使得

$$\frac{d_1}{r_1} \cdot \frac{d_2}{r_2} = abc.$$

我们可以假设

$$\frac{d_1}{r_1} \leq \sqrt{abc} \leq \frac{d_2}{r_2}.$$

如果不存在负曲线，那么我们有

$$\frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2} = \sqrt{abc}$$

由 (2) 得。

假设存在一条负曲线 f 属于 $[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_0)}]_{d_0}$，其中 r_0、 d_0 为满足 $d_0/r_0 < \sqrt{abc}$ 的正整数。我们有

$$\frac{d_0}{r_0} \leq \frac{d_1}{r_1}$$

由 (5) 得。若 $\frac{d_0}{r_0} < \frac{d_1}{r_1}$，则 g_1 和 g_2 都能被 f 整除。这就产生了矛盾。因此我们得到

$$\frac{d_0}{r_0} = \frac{d_1}{r_1}.$$

在这种情况下，我们可以证明，对于正整数 n，$g_1 = cf^n$ 和 $c \in K^\times$。

(7) 设 g_1、g_2 是 S的齐次元素。那么，g_1、g_2 满足 Huneke 条件，当且仅当存在正整数 ℓ_1 和 ℓ_2，使得 $g_1^{\ell_1}$、$g_2^{\ell_2}$满足 Huneke 条件。

假设存在一条负曲线 f。若存在满足 Huneke 条件的 g_1、g_2，由 (6) 可设 g_1 是 f 的幂。那么，f、g_2 也满足 Huneke 条件。

(8) 设 L/K 是一个域扩张。假设存在一条负曲线f。对于正整数 r、d，存在 g属于 $[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r)}]_d$，使得 f、g满足 Huneke 条件，当且仅当存在 g' 属于 $[\mathfrak{p}_L(a,b,c)^{(r)}]_d$，使得 f、g' 满足 Huneke 条件。

对于 $\mathbb{Z}^2$ 的子集 Q，记作

$$KQ := \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in Q} Kv^\alpha w^\beta \subset K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}].$$

对于有限集 M，$\#(M)$ 表示 M 中所含元素的个数。

下面的命题实质上已在 [14] 中得到证明。为方便读者，下面给出证明的概要。

命题 2.5. 设 K 是特征为 0 的域。设 Q 是 $\mathbb{Z}^2$ 的子集。设 L 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条直线，使得 L 包含 $\mathbb{Z}^2$ 中无穷多个点。置 $Q' = Q\backslash(L\cap Q)$。那么，对于每个正整数 m，存在一个 K-线性映射

$$\psi_m : KQ \cap \mathfrak{q}^m \longrightarrow KQ' \cap \mathfrak{q}^{m-1}$$

满足以下条件：

（1）当 $\#(L\cap Q) \geq m$ 时，映射 ψ_m 是满射。（2）当 $\#(L\cap Q) \leq m$ 时，映射 ψ_m 是单射。（3）对于 $(\alpha_0,\beta_0) \in Q'$ 和 $\xi \in KQ\cap\mathfrak{q}^m$，$\xi$ 中 $v^{\alpha_0}w^{\beta_0}$ 的系数为 0，当且仅当 $\psi_m(\xi)$ 中的该系数为 0。

证明。首先请记住，对于 $h \in K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$，以下两个条件等价：

- $h \in \mathfrak{q}^m$。
- 对于非负整数 p, q，满足 $p+q<m$,

$$\frac{\partial^{p+q}h}{\partial v^p \partial w^q}\bigg|_{(v,w)=(1,1)} = 0. \tag{2.6}$$

考虑到 $v^{\alpha'}w^{\beta'}$ 的乘法以及 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 的作用，我们可以假设 L 是 y-轴。

只需在 $\#(L\cap Q)=m$ 的情况下构造一个满足上述 (3) 的 K-同构 ψ_m：$KQ\cap\mathfrak{q}^m\longrightarrow KQ'\cap\mathfrak{q}^{m-1}$。

设

$$L\cap Q=\{(0,\beta_1),(0,\beta_2),\dots,(0,\beta_m)\},$$

其中 $\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_m$。注

$$Q'=Q\setminus(L\cap Q)=\{(\alpha,\beta)\in Q\mid\alpha\neq 0\}.$$

若 ξ 属于 $\mathfrak{q}^m$，则 $v\frac{\partial\xi}{\partial v}$ 属于 $\mathfrak{q}^{m-1}$。我们定义一个 K-线性映射 ψ_m：$KQ\cap\mathfrak{q}^m\longrightarrow KQ'\cap\mathfrak{q}^{m-1}$，其定义为 $\psi_m(\xi)=v\frac{\partial\xi}{\partial v}$。容易验证，$\psi$ 满足上述条件 (3)。

我们将证明 ψ_m 是一个同构。

首先证明 ψ_m 是单射。取 $\xi\in$ 核ψ_m。那么 ξ 满足$\dfrac{\partial\xi}{\partial v}=0$。因此我们可以假设

$$\xi=\sum_{j=1}^{m}c_jw^{\beta_j},$$

其中，对每个 j 都有 $c_j\in K$。由于 $\xi\in\mathfrak{q}^m$，我们知道

$$\frac{\partial^u\xi}{\partial w^u}(1,1)=0$$

对于 $u=0$，1，.....，$m-1$。因此我们得到

$$0=\frac{\partial^u\xi}{\partial w^u}(1,1)=\sum_{j=1}^{m}c_j\beta_j(\beta_j-1)\cdots(\beta_j-u+1) \tag{2.7}$$

对于 $u=0$，1，.....，$m-1$。联立方程 (2.7) 对应的矩阵如下：

$$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ \beta_1&\beta_2&\cdots&\beta_m\\ \beta_1(\beta_1-1)&\beta_2(\beta_2-1)&\cdots&\beta_m(\beta_m-1)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \beta_1(\beta_1-1)\cdots(\beta_1-m+2)&\beta_2(\beta_2-1)\cdots(\beta_2-m+2)&\cdots&\beta_m(\beta_m-1)\cdots(\beta_m-m+2)\end{pmatrix}$$

经过若干次初等行变换，我们得到

$$\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \beta_1&\cdots&\beta_m\\ \vdots&&\vdots\\ \beta_1^{m-1}&\cdots&\beta_m^{m-1}\end{pmatrix}.$$

由于该矩阵可逆，(2.7) 蕴含对于 $j=1$，2，.....，m，有 $c_j=0$。

接下来我们将证明 ψ_m 是满射。取

$$\eta=\sum_{(\alpha,\beta)\in Q'}b_{(\alpha,\beta)}v^\alpha w^\beta\in kQ'\cap\mathfrak{q}^{m-1},$$

其中 $b_{(\alpha,\beta)} \in K$。我们定义

$$\tilde{\eta} = \sum_{(\alpha,\beta)\in Q'} \frac{1}{\alpha} b_{(\alpha,\beta)} v^{\alpha} w^{\beta} \in KQ'.$$

Put

$$\xi(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \tilde{\eta} + \sum_{j=1}^{m} c_j w^{\beta_j} \in KQ \tag{2.8}$$

对于 c_1、c_2、……、$c_m \in K$。由于

$$\frac{\partial}{\partial v}\xi(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial v} = v^{-1}\eta \in \mathfrak{q}^{m-1}, \tag{2.9}$$

我们有

$$\eta = v\frac{\partial}{\partial v}\xi(c_1, c_2, \ldots, c_m).$$

为了证明 $\eta \in \mathrm{Im}(\psi_m)$，只需证明对某些 c_1、c_2、……、$c_m \in K$，有 $\xi(c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \mathfrak{q}^m$。

由 (2.9) 及等价关系 (2.6)，我们知道

$$\left.\frac{\partial^{i+j}\xi(c_1, c_2, \ldots, c_m)}{\partial v^i \partial w^j}\right|_{(v,w)=(1,1)} = 0$$

对于满足 $i > 0$、$j \geq 0$ 和 $0 \leq i + j < m$ 的 i 与 j。因此只需证明

$$\frac{\partial^u \xi(c_1, c_2, \ldots, c_m)}{\partial w^u}(1,1) = \frac{\partial^u \widetilde{\eta}}{\partial w^u}(1,1) + \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_j(\beta_j - 1)\cdots(\beta_j - u + 1) = 0$$

对于 $u = 0$、1、……、$m-1$，以及某些 c_1、c_2、……、$c_m \in K$。也就是说，只需 c_1、c_2、……、c_m 满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \\ \beta_1(\beta_1-1) & \beta_2(\beta_2-1) & \cdots & \beta_m(\beta_m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1(\beta_1-1)\cdots(\beta_1-m+2) & \beta_2(\beta_2-1)\cdots(\beta_2-m+2) & \cdots & \beta_m(\beta_m-1)\cdots(\beta_m-m+2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \tilde{\eta}(1,1) \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial w}(1,1) \\ \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial w^2}(1,1) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{m-1} \tilde{\eta}}{\partial w^{m-1}}(1,1) \end{pmatrix}.$$

由于上述 $m \times m$ 矩阵可逆，因此存在满足上述方程的 $c_1, c_2, \ldots, c_m$。□

令 $X = \mathrm{Proj}\ S$。设 Y是对与 $\mathfrak{p}_K(a,b,c)$ 对应的点进行爆破所得的曲面。假设 f是 $[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_0)}]_{d_0}$中的一条负曲线，且满足 $d_0/r_0 < \sqrt{abc}$。设 C是 $V_+(f)$ 的严格变换。那么，C 是 Y上的一条曲线，满足

$$C^2 = \frac{d_0^2}{abc} - r_0^2 < 0.$$

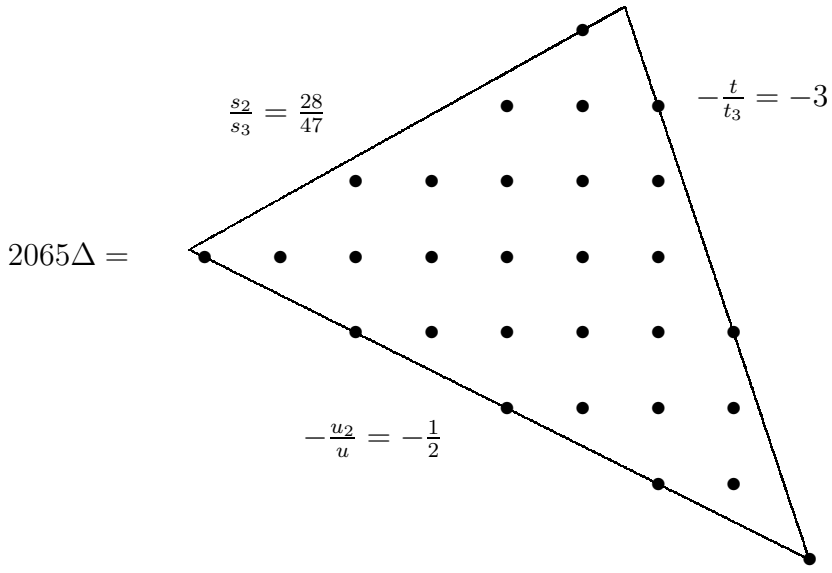
命题 2.6. 设 K 是一个特征为 0 的域。

(1) 存在一条负曲线 $f \in [\mathfrak{p}_K(5,103,169)^{(7)}]_{2065}$，也就是说，存在一个不可约多项式 $f \in [\mathfrak{p}_K(5,103,169)^{(7)}]_{2065}$。（这里的注是 $2065/7 < \sqrt{5\cdot 103\cdot 169}$。）$x^{413}$ 在 f中的系数不为零。(2) 此外，假设 K 是代数闭的。令 C 为 $V_+(f)$ 的严格变换，其中 f 是 (1) 中的负曲线。则 C 与 $\mathbb{P}^1_K$ 同构。

证明。我们将证明 (1)。注意到

$$\mathfrak{p}_K(5,103,169) = I_2\begin{pmatrix} x^{28} & y & z \\ y^2 & z & x^{47} \end{pmatrix},$$

其中 $I_2(\ )$ 表示由给定矩阵的二阶子式生成的理想。考虑三角形 2065Δ，其中 Δ是如 (2.2) 中定义的三角形。



(2.10)

这里回顾

$$S_{2065} = K(2065\Delta \cap \mathbb{Z}^2)T^{2065}$$

如（2.3）所示，其中 $K(2065\Delta\cap\mathbb{Z}^2)$ 是由 $\{v^\alpha w^\beta \mid (\alpha,\beta) \in 2065\Delta\cap\mathbb{Z}^2\}$ 张成的 K 向量空间。底部格点对应于 x^{413}。顶部格点对应于 y^2z^{11}。这里注

$$[\mathfrak{p}_K(5,103,169)^{(7)}]_{2065} = \left(K(2065\Delta\cap\mathbb{Z}^2)\cap\mathfrak{q}^7\right)T^{2065}.$$

从上往下数，每行的格点数依次为 1、3、5、7、6、4、2、1。由命题 2.5 可知，存在一个多项式 f，使得

$$[\mathfrak{p}_K(5,103,169)^{(7)}]_{2065} = Kf,$$

其中 x^{413} 和 y^2z^{11} 在 f 中的系数均非零。（首先，我们令 L 为经过从上往下第四行中 7 个格点的直线，并应用命题 2.5。接着，我们令 L 为经过从上往下第五行中 6 个格点的直线，依此类推。）因此，f 不被 x、y 和 z 整除。令 $\tilde{f} = fT^{2065}$，其中

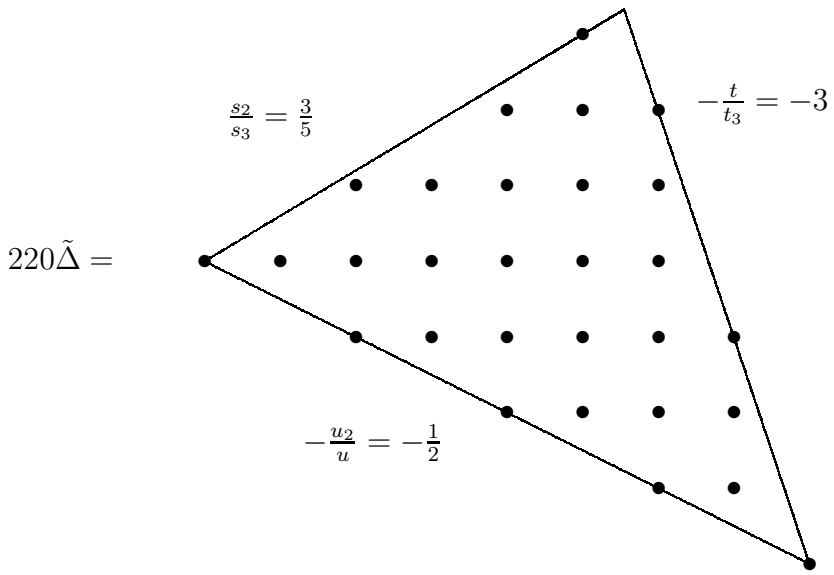
$$\tilde{f} \in K(2065\Delta\cap\mathbb{Z}^2)\cap\mathfrak{q}^7 = \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in 2065\Delta\cap\mathbb{Z}^2} Kv^\alpha w^\beta \cap \mathfrak{q}^7$$

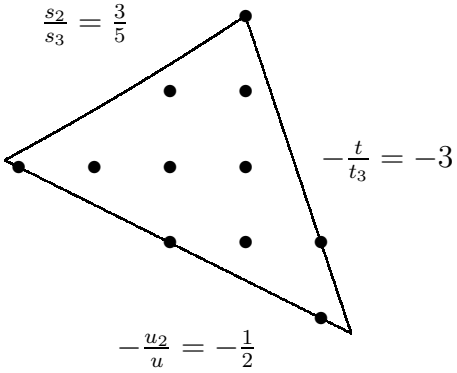
如 (2.3) 所示。只需证明 $\tilde{f}$ 在 $K[v^{\pm1},w^{\pm1}]$ 中不可约。

这里考虑

$$\mathfrak{p}_K(5,11,18) = I_2\begin{pmatrix} x^3 & y & z \\ y^2 & z & x^5 \end{pmatrix}.$$

令 Δ 为（2.2）中情形（a, b, c）下的三角形 $=(5,11,18)$。那么 220Δ 和 126Δ 如下：



$126\tilde{\Delta} =$ 

$220\tilde{\Delta}$ 中最下方的格点对应于 x^{44}。$126\tilde{\Delta}$ 中最下方（分别为最上方、最左侧）的格点对应于 xy^{11}（分别为 z^7、$x^{23}y$）。根据命题 2.5，我们知道存在一个多项式 g_1，使得

$$[\mathfrak{p}_K(5,11,18)^{(7)}]_{220} = Kg_1,$$

其中，g_1 中 x^{44} 的系数非零。令 $g_1 = \tilde{g_1}T^{220}$，其中

$$\tilde{g_1} \in \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in 220\tilde{\Delta}\cap\mathbb{Z}^2} Kv^\alpha w^\beta \cap \mathfrak{q}^7$$

如 (2.3) 中所述。则存在 $K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ 中的单位元 ϵ，使得 $\tilde{f} = \epsilon\tilde{g_1}$。根据命题 2.5，存在多项式 g_2，使得

$$[\mathfrak{p}_K(5,11,18)^{(4)}]_{126} = Kg_2,$$

其中 g_2 中 xy^{11}、z^7 和 $x^{23}y$ 的系数均非零。因此，g_2 不被 x、y、z 整除。令 $g_2 = \tilde{g_2}T^{126}$，其中 $\tilde{g_2} \in K(126\Delta \cap \mathbb{Z}^2) \cap \mathfrak{q}^4$。由于最高格点和最左格点的系数不为 0，根据 [7] 中的引理 2.3，$\tilde{g_2}$ 是不可约的。因此，g_2 是不可约的。由于 g_1 中 x^{44} 的系数非零，序列 g_1、g_2 是 S-正则的。由于

$$\frac{220}{7} \cdot \frac{126}{4} = 5 \cdot 11 \cdot 18,$$

g_1，g_2 满足 Huneke 条件。由于

$$\frac{220}{7} < \frac{126}{4},$$

g_1 在情形（a，b，c）$=(5, 11, 18)$ 下，根据注记 2.4 (6)，同余于负曲线的某个幂。由于 220 不是 7 的倍数，不存在满足 $r_0 = 1$ 的负曲线。因此我们知道，在情形（a，b，c）$=(5, 11, 18)$ 下，g_1 本身就是一条负曲线。于是 g_1 和 $\tilde{g_1}$ 不可约。进而 f 不可约。因此，在情形（a，b，c）$=(5, 103, 169)$ 下，f 是一条负曲线。

接下来我们将证明（2）。由于 K 是代数闭的，只需证明H^1（$\mathcal{O}_C$） $=0$。由正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

我们有一个同构

$$H^1(\mathcal{O}_C) \simeq H^2(\mathcal{O}_Y(-C))$$

由 Leray 谱序列可得 $H^1(\mathcal{O}_Y) = H^2(\mathcal{O}_Y) = 0$ 。由 Serre对偶，我们得到

$$H^2(\mathcal{O}_Y(-C)) = H^0(\mathcal{O}_Y(C + K_Y)).$$

令 H 为 $\mathcal{O}_X(1)$ 的拉回。则 H 和 E 是 $\mathrm{Cl}(Y)$ 的极小生成元。于是 C 与 $d_0H - r_0E = 2065H - 7E$线性等价。由于 K_Y 与 $(-5 - 103 - 169)H + E$线性等价，我们有 $\mathcal{O}_Y(C + K_Y) \simeq \mathcal{O}_Y(1788H - 6E)$。因此

$$H^0(\mathcal{O}_Y(1788H - 6E)) = K(1788\Delta \cap \mathbb{Z}^2) \cap \mathfrak{q}^6.$$

这里注意， $1788\Delta \cap \mathbb{Z}^2$ 对应于 (2.10) 中 2065Δ内部的格点。从上往下数， 2065Δ 内部各行的格点数依次为 2、5、6、4、3、1。由命题 2.5，我们得到

$$K(1788\Delta \cap \mathbb{Z}^2) \cap \mathfrak{q}^6 = 0.$$

我们已经完成了命题 2.6 的证明。 □

3. Huneke's condition

设 a、 b、 c 为两两互素正整数。记住， $X = \mathrm{Proj}\, S$ 和 Y 是在 X 处沿 $\mathfrak{p}_K$（a、b、c）的爆破。

在本节中，我们将证明以下定理:

定理 3.1. 设 K 为特征 0 的代数闭域。设 a、 b、c 为两两互素正整数。假设存在一条负曲线$f \in [\mathfrak{p}_K$（a、 b、 c）$^{(r_0)}]_{d_0}$，满足 $d_0/r_0 < \sqrt{abc}$。设 d_2 和 r_2 为满足以下四个条件的正整数

(a) $\frac{d_0}{r_0} \cdot \frac{d_2}{r_2} = abc$。 (b) $f \notin$ （y、 z） S，或 a 整除 d_2。 (c) $f \notin$ （z、 x） S，或 b 整除 d_2。 (d) $f \notin$ （x、 y） S，或 c 整除 d_2。

假设满足以下三个条件:

(1) $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ 是诺特的。(2) 设 C 是 $V_+(f)$ 的严格变换。则 C 与 $\mathbb{P}^1_K$ 同构。(3) 存在正整数 ℓ，使得 $H^1(\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E - \ell C)) = 0$。

那么存在 $g_2 \in [\mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(r_2)}]_{d_2}$，使得 f, g_2满足 Huneke 条件。

注 3.2. 我们可以仅用代数语言来描述定理 3.1。上述条件 (2) 等价于 $[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_0-1)}]_{d_0-a-b-c}=0$，如命题 2.6 (2) 的证明中所述。对于条件 (3)，我们知道如果 $r_2-\ell r_0\leq -2$，则 $H^1(\mathcal{O}_Y(d_2H-r_2E-\ell C))\neq 0$，并且

$$H^1(\mathcal{O}_Y(d_2H-r_2E-\ell C))=\begin{cases} 0 & r_2-\ell r_0=-1,0\\ H^2_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r_2-\ell r_0)})_{d_2-\ell d_0} & r_2-\ell r_0>0,\end{cases}$$

其中，根据 Leray 谱序列，有 $\mathfrak{m}=(x,y,z)S$。

作者对上述定理给出了两种不同的证明。第一种证明采用模 p 约化的技巧，该方法用于 [8] 和 [12]。第二种证明考察线丛的过渡函数；这种方法用于 [11]。下面我们将给出第二种证明。

在开始证明上述定理之前，我们需要证明以下简单的引理：

引理 3.3. 设 K 是一个特征为 0 的域。设 m 是一个正整数。设 A 是一个 K-代数，且 I 是 A 的幂零理想。

令 $\pi: A\to A/I$ 为自然的满环同态。假设 $s\in A$ 和 $r\in(A/I)^\times$ 满足 $r^m=\pi(s)$。

于是唯一存在 $u\in A$ 使得 $\pi(u)=r$ 且 $u^m=s$。

证明。只需证明 $I^2=0$的情形。取 $u'\in A^\times$ 使得$\pi(u')=r$。假设 $\gamma\in I$。则满足 $\pi(u'+\gamma)=r$。我们有

$$\pi((u'+\gamma)^m)=\pi(u'+\gamma)^m=r^m=\pi(s).$$

因此存在 $\delta\in I$ 使得

$$\delta=(u'+\gamma)^m-s=((u')^m-s)+m(u')^{m-1}\gamma.$$

这里，由于 $\pi((u')^m-s)=\pi(u')^m-\pi(s)=0$，我们知道 $(u')^m-s\in I$。如果 $\gamma=-m^{-1}((u')^{-1})^{m-1}((u')^m-s)$，则有 $\delta=0$。因此我们得到

$$\Big(u'-m^{-1}((u')^{-1})^{m-1}((u')^m-s)\Big)^m=s.$$

□

定理 3.1 的证明。如果 g_1和 g_2 满足 Huneke 条件，那么根据注 2.4 (7)，不妨设 g_1 和 g_2 中有一个是 f。假设存在 $g\in[\mathfrak{p}_K(a,b,c)^{(r)}]_d$使得 f和 g 满足 Huneke 条件。那么我们有

$$\frac{d_0}{r_0}\cdot\frac{d}{r}=abc.$$

因此，由 (a) 可得 $d/r=d_2/r_2$。将 r、d 替换为适当的倍数后，我们可以假设存在一个正整数 m，使得 $r=mr_2$ 且 $d=md_2$。

我们可以取有限个仿射开子集 U_1，...，U_n，使其满足

- $\{C\cap U_i\}_{i=1}^n$ 是 C 的仿射开覆盖，
- $\mathcal{O}_Y(d_2H-r_2E)|_{U_i}\simeq\mathcal{O}_{U_i}$对于 $i=1,2,\dots,n$,

原因如下： Y的奇点来自于 $X = \mathbf{Proj}\, S$的奇点。 X 的奇点包含在 $\{V_+(x,y)\ V_+(y,z)\ V_+(z,x)\}$中。如果 $f \notin (y,z)S$，那么 C不会经过 $V_+(y,z)$。设 $f \in (y,z)S$。由于 a整除 d_2， $\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)$在 $V_+(y,z)$处局部自由。因此， $\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)$在 C附近局部自由。

除子层 $\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)$ 是 $U := \cup_i U_i$ 上的线丛。令

$$\{t_{ij} \in \Gamma(\mathcal{O}_Y(U_i \cap U_j))^\times\}_{i,j}$$

$\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)|_U$ 的过渡函数为。

令 D_2 为 $V_+(g)$ 的严格变换。由于 D_2 是一个有效除子，且 $D_2 \sim md_2H - mr_2E$ 和 $D_2 \cap C = \emptyset$，我们得到：对任意 $\ell > 0$，都有 $\mathcal{O}_Y(md_2H - mr_2E)|_{\ell C} \simeq \mathcal{O}_{\ell C}$。这里， ℓC 是由理想层 $\mathcal{O}_Y(-\ell C)$ 定义的闭子概形。因此，对 $i = 1$， 2， ...， n，存在 $s_i \in \Gamma(\mathcal{O}_Y(U_i \cap \ell C))^\times$，使得

$$s_i = (t_{ij}|_{\ell C})^m s_j$$

对任意 i、 j，在 $\Gamma(\mathcal{O}_Y(U_i \cap U_j \cap \ell C))^\times$ 中。因此我们得到

$$s_i|_C = (t_{ij}|_C)^m s_j|_C$$

对任意 i, j，在 $\Gamma(\mathcal{O}_Y(U_i \cap U_j \cap C))^\times$ 中。

由于 $(d_2H - r_2E).C = 0$ 和 $C \simeq \mathbb{P}^1_K$，我们有 $\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)|_C \simeq \mathcal{O}_C$。因此，存在 $r_i \in \Gamma(\mathcal{O}_Y(U_i \cap C))^\times$，对于 $i = 1, 2, \ldots, n$，使得

$$r_i = (t_{ij}|_C) r_j$$

对任意 i, j，在 $\Gamma(\mathcal{O}_Y(U_i \cap U_j \cap C))^\times$ 中。因此我们得到

$$r_i^m = (t_{ij}|_C)^m r_j^m$$

对任意 i, j，在 $\Gamma(\mathcal{O}_Y(U_i \cap U_j \cap C))^\times$ 中。由于 $\mathcal{O}_Y(md_2H - mr_2E)|_C \simeq \mathcal{O}_C$ 且 $\Gamma(\mathcal{O}_C) = K$，存在 $q \in K^\times$ 使得

$$q r_i^m = s_i|_C$$

对于 $i = 1, 2, \ldots, n$，在 $\Gamma(\mathcal{O}_Y(U_i \cap C))^\times$ 中。将 r_i 替换为 $q^{1/m} r_i$，我们不妨设 $q = 1$。然后，根据引理 3.3，存在 $u_i \in \Gamma(\mathcal{O}_Y(U_i \cap \ell C))^\times$，对于 $i = 1, 2, \ldots, n$，使得$u_i^m = s_i$ 且 $u_i|_C = r_i$。根据引理 3.3 的唯一性，对任意 i, j， $u_i = (t_{ij}|_{\ell C}) u_j$ 成立。因此我们知道

$$\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)|_{\ell C} \simeq \mathcal{O}_{\ell C} \tag{3.1}$$

对于任意 $\ell > 0$。

假设 ℓ 是满足定理 3.1 中条件 (3) 的正整数。考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-\ell C) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{\ell C} \longrightarrow 0.$$

由于 $\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)$ 在 C 附近是一个线丛，我们得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E - \ell C) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)|_{\ell C} \longrightarrow 0.$$

于是我们得到一个正合列

$$H^0(\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)|_{\ell C}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E - \ell C)).$$

根据定理 3.1 中的条件 (3)，我们知道 $H^1(\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E - \ell C)) = 0$。由于

$$H^0(\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E)|_{\ell C}) = H^0(\mathcal{O}_{\ell C}) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_C) = K$$

由 (3.1)，存在一个截面属于 $H^0(\mathcal{O}_Y(d_2H - r_2E))$，且在 C 的每个点都不消失。因此，存在一个有效除子 D，使得 $D \sim d_2H - r_2E$ 且 $C \cap D = \emptyset$。D 的定义方程满足我们的要求。□

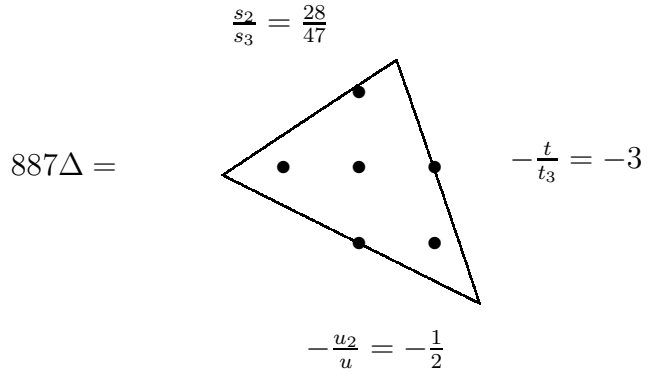
4. The proof of infinite generation

本节将证明定理 1.1。

我们将用反证法证明定理 1.1。假设 $R_s(\mathfrak{p}_K(5, 103, 169))$ 是诺特环，其中 K 是一个特征为 0 的代数闭域。

存在一条负曲线 f，如命题 2.6 (1) 中所述，且 $f \notin (y, z)S$。因此，$d_2 = 103 \cdot 169$ 和 $r_2 = 59$ 满足定理 3.1 中的条件 (a)、(b)、(c)、(d)。定理 3.1 中的条件 (2) 由命题 2.6 (2) 得到满足。我们将证明定理 3.1 中的条件 (3) 在 $\ell = 8$ 的情形下成立。这里有

$$d_2H - r_2E - \ell C = 103 \cdot 169H - 59E - 8(2065H - 7E) = 887H - 3E.$$



由命题 2.5，我们知道 $\dim_K S_{887} = 6$ 和 $\dim_K[\mathfrak{p}_K(5, 103, 169)^{(3)}]_{887} = 0$。因此，我们得到 $H^1(\mathcal{O}_Y(887H - 3E)) = 0$.[1] 因此，如果 K 是特征为 0 的代数闭域时，$R_s(\mathfrak{p}_K(5, 103, 169))$ 是诺特环，那么由定理 3.1 可知，存在 $g_2 \in [\mathfrak{p}_K(5, 103, 169)^{(59)}]_{17407}$，使得 f, g_2 满足 Huneke 条件。

令 $\mathbb{F}_2$ 为特征 2 的素域。不难看出

$$\dim_K[\mathfrak{p}_K(5, 103, 169)^{(59)}]_{17407} = \dim_{\mathbb{Q}}[\mathfrak{p}_{\mathbb{Q}}(5, 103, 169)^{(59)}]_{17407} \leq \dim_{\mathbb{F}_2}[\mathfrak{p}_{\mathbb{F}_2}(5, 103, 169)^{(59)}]_{17407}.$$

那么，$R_s(\mathfrak{p}_K(5, 103, 169))$ 的无限生成性可直接由以下引理得出：

[1] For pairwise coprime positive integers a, b, c, a field K, and positive integers r, d, we have

$$\frac{r(r+1)}{2} = \dim_K S_d - \dim_K H^0(\mathcal{O}_Y(dH - rE)) + \dim_K H^1(\mathcal{O}_Y(dH - rE)).$$

引理 4.1. $[\mathfrak{p}_{\mathbb{F}_2}(5,103,169)^{(59)}]_{17407}=0$。

上述引理证明中的计算是借助计算机完成的；不过，作者也未使用计算机，亲手验证了这些计算。

证明。我们假设基域为 $\mathbb{F}_2$。

考虑 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_{\mathbb{F}_2}(5,103,169)$的符号幂中的以下齐次元素：

$$A01=y^3-x^{28}z\in[\mathfrak{p}]_{309}$$

$$B01=z^2-x^{47}y\in[\mathfrak{p}]_{338}$$

$$C01=y^2z-x^{75}\in[\mathfrak{p}]_{375}D02=(yA01B01-C01^2)/x^{28}=yz^3+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(2)}]_{610}D03=(C01D02-A01B01^2)/x^{19}=y^7z+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(3)}]_{890}D04=(B01D03-A01^2D02)/x^9=z^7+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(4)}]_{1183}D07=(D02^2D03-A01^3D04)/x^9$$

$$=y^2z^{11}+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(7)}]_{2065}$$

$$D09=(A01^2D07-D02D03D04)/x$$

$$=y^{26}+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(9)}]_{2678}$$

$$D15=(D03D04^3-A01D07^2)/x^2$$

$$=y^{43}+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(15)}]_{4429}$$

$$D25=(D02D03^3D07^2-D04^4D09)/x^2$$

$$D29=(D02D04^3D15-D03^2D07^2D09)/x^2$$

$$=y^{54}z^2+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(25)}]_{7400}$$

$$=y^{80}z^2+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(29)}]_{8578}$$

$$D32=(D03^3D04^2D15-D07D25)/x$$

$$=y^{82}z^6+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(32)}]_{9460}D37=(D03^5D07D15-D04^2D29)/x=y^{98}z^5+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(37)}]_{10939}D41=(y^2A01^2D04D07^5-zB01D02D03D07^5-x^9yB01^2D04D07^5-x^{10}yB01D04^6D07D09-x^{14}yD02^2D37-x^{15}yA01^2D09D15^2-x^{38}D04^8D09-x^{39}D02D04^6D15-x^{42}D04D37)/x^{43}$$

$$=y^{116}z+x(\cdots)\in[\mathfrak{p}^{(41)}]_{12117}$$

$$D43 = (y^2A01^2D04D07^4D09 - zB01D02D03D07^4D09 - x^9yB01^2D04D07^4D09$$
$$- x^{10}zA01D02D04D07^3D15 - x^{11}yA01B01D02D07^2D25 - x^{12}yA01B01D02D07D32 -$$
$$x^{13}yB01D02D03D37 - x^{14}yA01^4D09D15^2 - x^{22}yD02D04D37 - x^{27}yA01D03D04D07^5$$
$$- x^{29}yD03D04D07^3D15 - x^{39}D02^2D07^2D25 - x^{40}D02^2D07D32 - x^{41}A01^2D04D37$$
$$- x^{42}A01^2D41 - x^{45}D02D04^5D07^3 - x^{46}D02D03^2D07^5 - x^{47}D04^7D15 -$$
$$x^{48}D03^2D04^2D07^2D15) \ /x^{51}{=}y^{115}z^5 + x \ (\cdots) \ \in [\mathfrak{p}^{(43)}]_{12690}D49 = ($$
$$yB01D04^4D07D25 - zD03^2D07^4D15 - xyB01D04^4D32 - x^4yA01^2D03^2D41$$
$$- x^7yA01^3D04D07^6 - x^9yA01^2D04D07^4D15 - x^{13}yD03^2D43 - x^{16}yD07^7$$
$$- x^{18}B01^2D04D07^4D15 - x^{19}B01D02D07^3D25 - x^{20}B01D02D07^2D32$$
$$- x^{21}A01D02^2D07D37 - x^{22}B01D02D03D43 - x^{23}A01^4D15^3 - x^{28}D04^6D25$$
$$- x^{29}D04^5D29 - x^{30}D04^3D37 - x^{31}D02D04D43) \ /x^{32}{=}y^{134}z^4 + x \ (\cdots) \ \in [\mathfrak{p}^{(49)}]_{14478}D53 =$$
$$(yB01D04^5D07D25 - zD03^2D04D07^4D15 - xyB01D04^5D32 - x^4yD02^2D49 -$$
$$x^6yD02D04^{11}D07 - x^7yB01D03D07^7 - x^{10}yD03D04D07^3D25 - x^{13}yD03^2D04D43$$
$$- x^{16}yD04D07^7 - x^{18}B01^2D04^2D07^4D15 - x^{19}B01D02D04D07^3D25$$
$$- x^{20}B01D02D04D07^2D32 - x^{21}A01B01D07^2D37 - x^{25}B01D04^6D07^4$$
$$- x^{28}D04^7D25 - x^{29}D04^6D29 - x^{32}D04D49) \ /x^{33}{=}y^{152} + x \ (\cdots) \ \in [\mathfrak{p}^{(53)}]_{15656}D56 = ($$
$$yB01D04^4D07^2D25 - zD03^2D07^5D15 - xyB01D04^4D07D32 - x^4yA01D02D04D49$$
$$- x^5yA01D02D53 - x^9yA01^2D04D07^5D15 - x^{13}yD03^2D07D43 - x^{16}yD07^8$$
$$- x^{18}B01^2D04D07^5D15 - x^{19}B01D02D07^4D25 - x^{20}B01D02D07^3D32$$
$$- x^{21}A01D02^2D07^2D37 - x^{22}B01D02D03D07D43 - x^{23}A01^3D04D49 - x^{24}A01^3D53$$
$$- x^{28}D04^6D07D25 - x^{29}D04^6D32) \ /x^{33}{=}y^{154}z^4 + x \ (\cdots) \ \in [\mathfrak{p}^{(56)}]_{16538}$$

设 I 是由以下 105 个元素生成的、包含于 $\mathfrak{p}^{(59)}$ 中的齐次理想:

$B01^3D04^{14}$, $B01D02D04^{14}$,$D04^{13}D07$, $B01D04^{11}D07^2$, $B01^2D04^9D07^3$,$D02D04^9D07^3$, $B01D02D04^7D07^4$,$D04^6D07^5$, $B01D04^4D07^6$, $B01^2D04^2D07^7$,$D02D04^2D07^7$,$B01D02D07^8$, $C01D02D07^8$, $A01D02D07^8$, $B01A01^2D07^8$,$D03D07^8$, $A01^3D07^8$, $D02D04^{12}D09$,$D03^2D04D07^7$, $D04^9D07^2D09$,$B01D04^7D07^3D09$, $D03^3D04^2D07^6$, $D02D04^5D07^4D09$, $B01D02D04^3D07^5D09$,$D04^2D07^6D09$,$B01D07^7D09$, $C01D07^7D09$, $D04^{11}D15$, $B01D04^9D07D15$, $B01^2D04^7D07^2D15$,$D02D04^7D07^2D15$, $B01D02D04^5D07^3D15$,$D04^4D07^4D15$, $B01D04^2D07^5D15$, $B01^2D07^6D15$, $D02D07^6D15$, $A01B01D07^6D15$, $A01C01D07^6D15$,$A01^2D07^6D15$, $D02D04^8D25$,$B01D02D04^6D07D25$, $D04^5D07^2D25$, $B01D04^3D07^3D25$, $B01^2D04D07^4D25$, $D02D04D07^4D25$,$A01B01D04D07^4D25$,$D03^3D07^5D15$, $A01^2D04D07^4D25$, $B01D02D03D07^4D25$, $D07^5D09D15$,$D02D04^7D29$, $B01D02D04^6D32$,$D04^5D07D32$, $B01D04^3D07^2D32$, $B01^2D04D07^3D32$,$D02D04D07^3D32$, $A01B01D04D07^3D32$,$D04^2D07^3D15^2$, $A01^2D04D07^3D32$, $B01D02D03D07^3D32$,$A01D07^4D15^2$, $D02D04^5D37$, $B01D02D04^3D07D37$, $D04^2D07^2D37$, $B01D07^3D37$,$C01D07^3D37$, $A01D07^3D37$, $B01D03D04D07^2D37$,$C01D03D04D07^2D37$, $A01D03D04D07^2D37$,$A01^4D04D07^2D37$,$D04^4D43$, $B01D04^2D07D43$, $B01^2D07^2D43$, $D02D07^2D43$, $A01B01D07^2D43$, $A01C01D07^2D43$, $A01^2D07^2D43$, $A01B01D03D04D07D43$,$A01C01D03D04D07D43$, $A01^2D03D04D07D43$,$A01^5D04D07D43$, $D07^2D15^3$, $D02D04^2D49$, $B01D02D07D49$,$D03^3D07D43$, $A01D02D07D49$, $A01^2B01D07D49$,$D03D07D49$, $A01^3D07D49$,$A01^2B01D03D04D49$,$D03^2D04D49$, $A01^3D03D04D49$, $B01^2D04D53$, $D02D04D53$,$B01D02D56$,$C01D02D56$, $A01D02D56$, $A01^2B01D56$, $D03D56$,$A01^3D56$, $A01^2B01D03D53$,$D03^2D53$, $A01^3D03D53$, $A01^6D53$

令 L $k[y,z]$ 为如下单项式理想:

$$L := \begin{pmatrix} z^{104}, & yz^{103}, & y^2z^{102}, & y^4z^{101}, & y^6z^{100}, \\ y^7z^{99}, & y^9z^{98}, & y^{10}z^{97} & y^{12}z^{96}, & y^{14}z^{95}, \\ y^{15}z^{94}, & y^{17}z^{93}, & y^{19}z^{92}, & y^{20}z^{91}, & y^{22}z^{90}, \\ y^{23}z^{89}, & y^{25}z^{88}, & y^{27}z^{87}, & y^{28}z^{86}, & y^{30}z^{85}, \\ y^{32}z^{84}, & y^{33}z^{83}, & y^{35}z^{82}, & y^{37}z^{81}, & y^{38}z^{80}, \\ y^{40}z^{79}, & y^{42}z^{78}, & y^{43}z^{77}, & y^{45}z^{76}, & y^{47}z^{75}, \\ y^{48}z^{74}, & y^{50}z^{73}, & y^{51}z^{72}, & y^{53}z^{71}, & y^{55}z^{70}, \\ y^{56}z^{69}, & y^{58}z^{68}, & y^{60}z^{67}, & y^{61}z^{66}, & y^{63}z^{65}, \\ y^{65}z^{64}, & y^{66}z^{63}, & y^{68}z^{62}, & y^{70}z^{61}, & y^{71}z^{60}, \\ y^{73}z^{59}, & y^{74}z^{58}, & y^{76}z^{57}, & y^{78}z^{56}, & y^{79}z^{55}, \\ y^{81}z^{54}, & y^{83}z^{53}, & y^{84}z^{52}, & y^{86}z^{51}, & y^{88}z^{50}, \\ y^{89}z^{49}, & y^{91}z^{48}, & y^{92}z^{47}, & y^{94}z^{46}, & y^{96}z^{45}, \\ y^{97}z^{44}, & y^{99}z^{43}, & y^{101}z^{42}, & y^{102}z^{41}, & y^{104}z^{40}, \\ y^{106}z^{39}, & y^{107}z^{38}, & y^{109}z^{37}, & y^{111}z^{36}, & y^{112}z^{35}, \\ y^{114}z^{34}, & y^{115}z^{33}, & y^{117}z^{32}, & y^{119}z^{31}, & y^{120}z^{30}, \\ y^{122}z^{29}, & y^{124}z^{28}, & y^{125}z^{27}, & y^{127}z^{26}, & y^{129}z^{25}, \\ y^{130}z^{24}, & y^{132}z^{23}, & y^{133}z^{22}, & y^{135}z^{21}, & y^{137}z^{20}, \\ y^{138}z^{19}, & y^{140}z^{18}, & y^{142}z^{17}, & y^{143}z^{16}, & y^{145}z^{15}, \\ y^{147}z^{14}, & y^{148}z^{13}, & y^{150}z^{12}, & y^{152}z^{11}, & y^{153}z^{10}, \\ y^{155}z^9, & y^{157}z^8, & y^{158}z^7, & y^{160}z^6, & y^{161}z^5, \\ y^{163}z^4, & y^{165}z^3, & y^{166}z^2, & y^{168}z, & y^{170} \end{pmatrix}$$

令 D 为 I生成元矩阵中的第 i、j 个元素。若 y^kz^l 是 L生成元矩阵中的第 i、j 个元素，则有

$$D \equiv y^kz^l \mod x.$$

因此，我们有 $(L,x)S = I + xS$。

此外，我们有

$$\ell(S/I+xS)=\ell(k[y,z]/L)=8850=\left(\frac{59\times 60}{2}\right)\times 5=e((x),S/\mathfrak{p}^{(59)})=\ell(S/\mathfrak{p}^{(59)}+xS).$$

上式中第二个等式的证明需要进行一些计算。于是有 $I+xS=\mathfrak{p}^{(59)}+xS$。由于 $xS\cap\mathfrak{p}^{(59)}$ 的 $\mathfrak{p}^{(59)}=I+\ \ =I+x\mathfrak{p}^{(59)}$，根据中山引理，我们得到 $I=\mathfrak{p}^{(59)}$ 。

T生成元的次数作为矩阵条目的矩阵如下，其中 I ：

$$\begin{pmatrix}
17576, & 17510, & 17444, & 17481, & 17518,\\
17452, & 17489, & 17423, & 17460, & 17497,\\
17431, & 17468, & 17505, & 17439, & 17476,\\
17410, & 17447, & 17484, & 17418, & 17455,\\
17492, & 17426, & 17463, & 17500, & 17434,\\
17471, & 17508, & 17442, & 17479, & 17516,\\
17450, & 17487, & 17421, & 17458, & 17495,\\
17429, & 17466, & 17503, & 17437, & 17474,\\
17511, & 17445, & 17482, & 17519, & 17453,\\
17490, & 17424, & 17461, & 17498, & 17432,\\
17469, & 17506, & 17440, & 17477, & 17514,\\
17448, & 17485, & 17419, & 17456, & 17493,\\
17427, & 17464, & 17501, & 17435, & 17472,\\
17509, & 17443, & 17480, & 17517, & 17451,\\
17488, & 17422, & 17459, & 17496, & 17430,\\
17467, & 17504, & 17438, & 17475, & 17512,\\
17446, & 17483, & 17417, & 17454, & 17491,\\
17425, & 17462, & 17499, & 17433, & 17470,\\
17507, & 17441, & 17478, & 17515, & 17449,\\
17486, & 17523, & 17457, & 17494, & 17428,\\
17465, & 17502, & 17436, & 17473, & 17510
\end{pmatrix}.$$

于是我们知道， I 的生成元的最小次数为 **17410**，这就是 $D03D07^8$ 的次数。

因此我们知道

$$[\mathfrak{p}^{(59)}]_{17407}=0.$$

□

注 4.2。考虑子环

$$A:=S[A01t,B01t,C01t,D02t^2,D03t^3,\ldots,D56t^{56}]$$

符号 Rees 代数的

$$R_s(\mathfrak{p}_{\mathbb{F}_2}(5,103,169))=S[\mathfrak{p}t,\mathfrak{p}^{(2)}t^2,\mathfrak{p}^{(3)}t^3,\ldots].$$

若 $n\leq 59$，则有

$$A\cap St^n=\mathfrak{p}_{\mathbb{F}_2}(5,103,169)^{(n)}t^n.$$

本文中不需要这个方程。

Acknowledgement

作者谨向 Goto 研讨班的成员，尤其是 Yasuhiro Shimoda 和 KojiNishida，表达诚挚的谢意。

References

[1] R. C. Cowsik，符号幂与定义方程的数量，Algebra and its applications（新德里，1981年），Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 91，Dekker，纽约，1984年，13–14。
[2] S. D. Cutkosky，单项式素理想的符号代数，J. reine angew. Math. 416（1991年），71–89。[3] S D. Cutkosky and K. Kurano，加权射影平面上点理想幂的渐近正则性，Kyoto J. Math. 51（2011年），25–45。[4] T. Ebina，硕士论文，明治大学，2017年（日文）。
[5] J. L. González and K. Karu，一些非有限生成 Cox 环，Compos. Math. 152（2016年），984–996。[6] J. González-Anaya， J. L. González and K. Karu，由负曲线构造非 Mori 梦空间，J. Algebra 539（2019年），118–137。[7] J. González-Anaya，
J. L. González and K. Karu，加权射影平面爆破中生成极端射线的曲线，J. of London Math. Soc. 104（2021年），1342–1362。[8] S. Goto， K. Nishida and K.-i. Watanabe，空间单项式曲线的非 Cohen–Macaulay 符号爆破及 Cowsik 问题的反例，Proc. Amer. Math. Soc. 120（1994年），383–392。[9] J. Herzog，阿贝尔半群与半群环的生成元和关系，Manuscripta Math. 3（1970年），175–193。[10] C. Huneke，希尔伯特函数与符号幂，Michigan Math. J. 34（1987年），293–318。[11] T. Inagawa and K. Kurano，符号 Rees 环有限生成的某个充要条件，J. Algebra 619（2023年），153–198。
[12] K. Kurano and K. Nishida，具有负曲线的空间单项式曲线的无限生成符号 Rees 环，Michigan Math. J. 68（2019年），405–445。[13] M. Matsuura，硕士论文，明治大学，2019年（日文）。[14] E. Miyahara，硕士论文，明治大学，2024年（日文）。
[15] M. Nagata，关于希尔伯特第14问题，Amer. J. Math. 81（1959年），766—772。
[16] K. Uchisawa，硕士论文，明治大学，2017年（日文）。

KAZUHIKO KURANO 明治大学理工学
部数学系 日本川崎市多摩区東三田
1-1-1，邮编214-8571
kurano@meiji.ac.jp
http://www.isc.meiji.ac.jp/~kurano