arXiv:2601.15701v1 [math.QA] 22 Jan 2026

关于 $\mathbb{Z}$分次顶点代数的模态转移代数及其在玻色鬼中的应用

KATRINA BARRON、JUSTINE FASQUEL、FLORENCIA OROSZ HUNZIKER 和 GAYWALEE YAMSKULNA

Abstract. 我们研究 $\mathbb{Z}$分次顶点代数中的模态转移代数和 Zhu 代数，尤其关注中心荷为 2 的 Weyl 顶点代数$\mathcal{V}$（也称为玻色鬼或 $\beta\gamma$系统）。我们证明，$\mathcal{V}$ 的模态转移代数含有一族单位元，它们构成 Damiolini-Gibney-Krashen 意义下的一族强单位元。$\mathcal{V}$ 的模态转移代数中单位元的存在，使我们能够显式构造 $\mathcal{V}$的所有高阶 Zhu 代数。我们还分析由 Zhu 代数诱导的弱 $\mathcal{V}$模，并证明每个这样的模都已由零级 Zhu 代数诱导。接着，我们证明，由 Zhu 代数诱导的所有不可分解可约权模都不是弱交锁的，因此也不是 Barron-Batistelli-Orosz Hunziker-Yamskulna 意义下的强交锁模。更一般地，我们证明，在可逆的 Li $\mathbf{\Delta}$ 算子作用下，弱交锁这一性质保持不变。作为应用，我们证明，通过 Zhu 诱导模的谱流得到的所有不可分解可约权 $\mathcal{V}$模同样不是弱交锁的。这些结果阐明了弱交锁性质在玻色鬼模的模性中的作用；Ridout-Wood 和 Allen-Wood 此前曾研究这些模的模性。

1. Introduction and preliminaries

顶点代数及其模是共形场论的基本构件。在研究其表示理论的诸多工具中，Zhu 代数凭借著名的 Zhu 对应 [Zhu96, FZ92, DLM98]，为构造和分析某一类模提供了强有力的方法。另一方面，较近提出的模态转换代数 [DGK25], 则为顶点代数的代数和几何方面带来了新的见解。本文在 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的背景下研究这两类结合代数，而这类顶点代数不一定是顶点算子代数。

K.B. 获得了西蒙斯基金会差旅资助金的支持。J.F. 的研究获得了墨尔本大学设立基金和 Andrew Sisson 资助计划 2025 的支持。F.O.H. 获得了美国国家科学基金会 DMS- 2102786 号资助的部分支持。G.Y. 获得了 AMS-Simons PUI 教师资助以及伊利诺伊州立大学文理学院的一项资助。

Zhu 代数最初由 [Zhu96] 在零层定义，随后由 [DLM98] 推广到更高层级 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$。具体而言，它们被定义为顶点算子代数 V的商模。它们包含了关于顶点代数表示理论的重要信息，但显式计算——尤其是在较高层级——向来十分困难。近来，He [He17] 将 Zhu 代数实现为泛包络代数的商模。我们证明，这两种等价构造都能自然地从顶点算子代数推广到 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的背景中。

我们讨论的第二类代数是模态转换代数。它们最初由 [DGK25] 引入，用于所谓“CFT”类型的顶点算子代数；在这一研究中，它们揭示了顶点算子代数 V 的代数性质与标记了某些 V-模的曲线模空间的几何构造之间的深刻联系。在 [DGK25], 的附录中，还介绍了模态转换代数在其他情形下的定义。这里我们证明，这一构造对$\mathbb{Z}$-分次顶点代数（不一定具有共形元）仍然成立；在这一更广泛的情形下，它们也同样与 Zhu 代数密切相关。

作为一项应用，我们计算中心荷 2 时的 Weyl 顶点代数的模态转换代数，记为 $\mathcal{V}$，它也称为玻色鬼或 $\beta\gamma$-系统。这个顶点代数是共形且 $\mathbb{Z}$-分次的，但它不是顶点算子代数。我们证明，这些代数具有单位元，并且这些单位元构成 [DGK25] 意义下的强单位元族。这些代数具有单位元这一事实，使我们能够确定 $\mathcal{V}$的所有高阶 Zhu 代数。这是第二个在所有层级上都已明确描述 Zhu 代数的例子；第一个例子是海森堡顶点算子代数，其所有 Zhu 代数均已在[DGK25] 中利用模态转换代数确定，从而证明了 [AB23a]中的一个猜想。

接下来，我们将注意力转向某些适用于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$分次顶点代数的模范畴及其性质。特别地， [Zhu96]和[DLM98] 中的诱导函子在 V为顶点算子代数时，能够从Zhu代数的一个模产生一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$可分次的 V模；本文将其推广到 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$可分次顶点代数的情形。随后，我们证明关于$\mathbb{Z}_{\geq 0}$分次顶点代数的模结构的两个结果：这些模或者直接由Zhu代数的一个模诱导得到，或者是在前一类模上施加某个可逆算子进行“扭曲”后得到。不可分解可约模的一个重要性质是它们是否弱交锁；这是存在良定义分次伪迹的必要条件，其意义可参见例如 [Miy04] 或 [BBOHY23], ，以及在具有无限维 L_0分次空间、但相对于另一个权重为零的算子具有有限维双分次空间的顶点代数背景下的双分次类比。分次伪迹是与一个模相关联的某类 q级数（在双分次有限维子空间的情形下，则是关于两个形式变量的级数）。

我们证明，对于不满足弱交锁条件的Zhu代数模，在作为顶点代数模经过诱导后，仍然不满足弱交锁条件。

尽管 Zhu 代数可用于诱导 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分级的 V-模，但这些模通常不足以构成一个“良好”的范畴，例如该范畴可能不具有融合下的闭包，和/或在模群 $SL_2(\mathbb{Z})$ 对分次迹与分次伪迹空间的作用下不具备某些数论不变性。因而，通过另一种作用扭曲模的作用，是一种构造新模的有效方法——具体而言，构造无法由 Zhu 代数诱导的模：对由 Zhu 代数诱导的模施加作用。尤其是，可以用 Li 在 [Li97] 中定义的算子 Δ 来扭曲该作用；这个算子满足与所谓“简单流”相关的重要性质。最著名的 Δ-算子是所谓的“谱流”。由于谱流与轨形共形场论之间存在联系，简单流和谱流在共形场论中由来已久，尤其是在超共形情形下，参见 [SS87, DLM96, MO01, LMRS02, Rid09, Bar13, CR13b, ACKR20, ACK25]。

本文证明，在通过可逆的 Li 算子 Δ 扭曲作用时，弱交锁这一性质得以保留。我们将这一结果应用于 Weyl 顶点代数 $\mathcal{V}$ 的某些模。令 $\mathscr{C}_Z$ 表示所有由 Zhu 代数上的权模诱导而来的 $\mathcal{V}$ 代数模，我们证明 $\mathscr{C}_Z$ 中的所有 $\mathcal{V}$ 模都是在零级诱导的。此外，$\mathscr{C}_Z$ 中没有任何不可分解的可约 $\mathcal{V}$ 模是弱交锁的，其谱流像也不例外。这基本上重现了 Ridout-Wood [RW15a] 和 Allen-Wood [AW22], 的研究成果。他们研究了 $\mathscr{C}_Z$ 的子范畴 $\mathscr{R}$，其中的权 $\mathcal{V}$ 模由零级 Zhu 代数诱导而来，但其共形权被限制为实数（着重考虑物理应用）。这些模的谱流以及它们的有限长度扩张在 [RW15a, AW22] 中得到研究，作者将其称为范畴 $\mathscr{F}$。在 [AW22], 中，作者证明 $\mathcal{V}$ 模范畴 $\mathscr{R}$ 对融合并不封闭，但更大的范畴 $\mathscr{F}$ 是封闭的。Weyl 顶点代数中缺乏弱交锁的可约权模，这支持了 Ridout-Wood 研究的模性性质；也就是说，在这一背景下，模性仅依赖于双重分次迹，而不依赖于双重分次伪迹的概念，因为要使后者有明确定义，至少需要弱交锁模。

1.1. **结构与主要结果**。本文组织如下。在介绍基本定义之后，我们在第 2 节讨论 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的高阶 Zhu 代数和模态转换代数，说明 Zhu96、DLM98、He17、DGK25] 中的概念及某些结果，在比顶点算子代数更一般的情形下仍然成立。第 2 节的主要结果包括定理 2.10：对于 $\mathbb{Z}$-分次顶点

代数，当第 d 层模态转移代数具有单位元时，该定理给出了第 25] 层 Zhu 代数关于第 层模态转移代数和第 层 Zhu 代数的结构。这推广了 [DGK25] 的一个结果。我们还遵循 [DGK25]，在 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的框架下，于定理 2.10 中讨论模态转移代数的强单位元族。

在第 3 节中，我们首先回顾中心荷为 2 的 Weyl 顶点代数 $\mathcal{V}$ 的相关数据。随后，我们计算 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的层 d 模态转移代数 $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$（见命题 3.4），并证明对于每个 d， $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 都具有一个单位元。这使我们能够描述 $\mathcal{V}$ 的所有高阶 Zhu 代数（推论 3.6）。我们还证明这些单位元构成一族强单位元（定理 3.5）。

在第 4 节中，我们将注意力转向 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的模。在给出一些基本定义后，我们讨论由 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次顶点代数 V 的层 d Zhu 代数诱导的模（第 4.2 节），以及通过应用 Li 的 $\mathbf{\Delta}$-算子（如谱流）得到的新模（第 4.3 节）。在第 4.4 节中，我们引入结合代数和顶点代数的弱交锁模概念，并得到两个值得注意的结果。首先，我们证明，对于 Zhu 代数的一个非弱交锁模，其 Zhu 归纳产生相应顶点代数的一个非弱交锁 V-模（定理 4.17）。接下来，我们证明，如果 W 是一个弱 V-模且 $\mathbf{\Delta}$ 可逆，那么当且仅当相应的 $\mathbf{\Delta}$-扭曲模是弱交锁的， W 才是弱交锁的（定理 4.19）。

最后，在第5节中，我们将定理4.17和4.19应用于中心荷为 2 的 Weyl 顶点代数$\mathcal{V}$，证明通过某个 $\mathcal{V}$-模的谱流构造的不可分解可约权重 $\mathcal{V}$-模都不是弱交锁的。

1.2. **致谢**。作者谨此感谢西蒙斯基金会差旅资助金、墨尔本大学设立基金、安德鲁·西森支持计划（2025）、美国国家科学基金会资助、AMS–西蒙斯 PUI 教师资助以及伊利诺伊州立大学文理学院提供的支持，并感谢科罗拉多大学博尔德分校和勃艮第数学研究所的热情接待。本项目始于数学物理女性计划，作者衷心感谢 Ana Ros Camacho 为组织该计划所付出的心力。

1.3. **预备知识**。 我们首先回顾顶点代数的一些性质。例如，关于更多细节，读者可参阅 [LL04、LY05] 。

定义 1.1。

(i) 一个 $\mathbb{Z}$分次顶点代数 由一个带有分次的顶点代数 V 构成

$$V = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m$$

满足 $\mathbf{1} \in V_0$ 以及

对于 $u \in V_k$，其中 $Y(u,\ z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n z^{-n-1}$。$u_n V_m \subset V_{k+m-n-1}$,

(ii) 若存在 $M \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 使得 $V_m = 0$ 对 $m < M$成立，则称 V为一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$可分次顶点代数，其中 $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$。

注 1.2。

(i) 任意顶点代数 $V = (V,\ Y,\ \mathbf{1})$ 都带有线性平移算子 $T\colon V \to V$，它由 $T(u) = u_{-2}\mathbf{1}$ 确定。

(ii) 对任意 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数 V，我们可以定义分次算子 Δ，它是由 $\Delta(u) = ku$ 对 $u \in V_k$ 确定的线性映射 $\Delta\colon V \to V$。若元素$u \in V_k$ 是齐次的，则记 $\mathrm{wt}(u) = k$。当使用记号 $\mathrm{wt}(u)$ 时，默认 u 是齐次的。

(iii) 上文使用“$\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次”而非“$\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次”，是为了强调：如果 V 只有有限多个负分次空间，就可以通过平移使 V 具有一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次（其中没有负权空间）。更确切地说，如果$V = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_{\geq M}} V_m$，令 $V(j) := V_{M+j}$，则对于 $j \geq 0$，这就得到 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次

$$V = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V(j).$$

定义 1.3。一个 $\mathbb{Z}$-分次共形顶点代数（$V,\ Y,\ \mathbf{1},\ \omega$）由一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数以及一个特殊向量 $\omega \in V_2$ 组成，其模$Y(\omega,\ z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ 满足以下性质：

(i) Virasoro 关系：对任意 $n,\ m \in \mathbb{Z}$,

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{m+n} + \frac{1}{12}(n^3 - n)\delta_{n,-m}c,$$

其中 $c \in \mathbb{C}$ 是 V的中心荷，

(ii) L_{-1} 导数性质：对于任意 $v \in V$, $Y(L_{-1}v, z) = \dfrac{d}{dz}Y(v, z)$,__

(iii) L_0 分次性质：对于 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $v \in V_m$, $L_0 v = mv = (\mathrm{wt}(v))v$，我们称 $m = \mathrm{wt}(v)$ 为 v 的共形权。

此外，如果 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ 关于 L_0 分次是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 可分次的，我们称 Va$\mathbb{Z}_{\geq 0}$可分次共形顶点代数 （仍允许存在共形权为负的权空间）。

定义 1.4. 一个顶点算子代数 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ 是一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次共形顶点代数

$$V = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V_m$$

使得对于 $m \in \mathbb{Z}.$, $\dim V_m < \infty$

2. Higher level Zhu algebras and mode transition algebras for $\mathbb{Z}$-graded vertex algebras

本节回顾与顶点算子代数相关的各种代数，并回顾（或在必要时定义）它们向 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的扩张。

我们首先回顾 Zhu 代数的概念。对于顶点算子代数，这些概念最初由 [Zhu96] 和 [DLM98] 定义，其实现形式则由 [He17] 给出，即将其表示为某个泛包络代数的商模。我们证明，这些概念可以自然地推广到 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的情形。随后，我们按照 [DGK25], 的做法，回顾 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数背景下模态转移代数的概念，并说明其与高阶 Zhu 代数之间的关系。

在本节中，我们固定 $V = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ 为一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数，其分次空间可能是无限维的。

2.1. 与 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数相关的 Zhu 代数。在本小节中，我们回顾层 n Zhu 代数（$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）的定义，记作 $\mathrm{Zhu}_n(V)$。层 0 Zhu 代数，即通常所称的 Zhu 代数，由 Zhu 在 [Zhu96] 中针对 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次顶点算子代数引入。随后，Dong–Li–Mason 在 [DLM98] 中将该定义推广到任意顶点算子代数的层 n Zhu 代数（其中 $n > 0$ ）。这些工作表明，若 V 是一个顶点算子代数，则 $\mathrm{Zhu}_n(V)$ 可以赋予单位结合代数的结构。尽管在 [Zhu96] 和 [DLM98] 中均假设 V 是顶点算子代数，但 $\mathrm{Zhu}_n(V)$ 的构造可以超出这一情形，相关讨论例如见 [DSK06, vE11, vEH19]。在本小节中，我们考虑一般 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的构造，即不对具有负共形权的分次权空间的数量或其权空间的维数作任何限制。

定义 2.1。 设 $V = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V_m$ 是一个 $\mathbb{Z}$ 分次顶点代数。对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，令 $O_n(V)$ 表示由 V 中形如下式的元素张成的子空间

$$u \circ_n v := \mathrm{Res}_x \frac{(1+x)^{\mathrm{wt}(u)+n} Y(u,x)v}{x^{2n+2}}, \qquad u, v \in V, \tag{1}$$

以及由形如下式的元素张成的子空间

$$(T + \Delta)v, \qquad v \in V, \tag{2}$$

其中，T 和 Δ 分别是 V 上的平移算子和分次算子。向量空间 $\mathrm{Zhu}_n(V)$ 定义为商空间 $V/O_n(V)$。

For $n \geq 0$，考虑 V 上的如下运算 $*_n$，其定义通过线性性给出：

$$u *_n v = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{m+n}{n} \mathrm{Res}_x \frac{(1+x)^{\mathrm{wt}(u)+n} Y(u,x)v}{x^{n+m+1}}, \qquad u, v \in V.$$

命题 2.2 ([Zhu96, DLM98,DSK06])。 若 V 是一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数，则对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，空间 $O_n(V)$ 关于 $*_n$ 是 V 的一个双边理想，并且商 $\mathrm{Zhu}_n(V) = V/O_n(V)$ 关于 $*_n$ 和**1** 是一个带单位元的结合代数，称为层 nZhu代数。

当 $V = (V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ 是一个具有非负权的顶点算子代数时，$\mathrm{Zhu}_0(V)$ 最早由 [Zhu96] 定义；而对于任意顶点算子代数，$\mathrm{Zhu}_n(V)$（其中 $n \geq 0$）则由 [DLM98], 定义，其中 $T = L_{-1} = \omega_0$ 和 $\Delta = L_0 = \omega_1$。在 [DSK06], 中，人们注意到，这一定义可以推广到任何由 Hamilton 算子作 $\mathbb{Z}$-分次的顶点代数，例如在必要时用 Taylor 展开替代有限多项式。事实上， [DLM98] 中给出的顶点算子的 $\mathrm{Zhu}_n(V)$ 定义，对于 V，只要将 L_{-1} 替换为平移算子，并将 L_0 替换为分次算子，就如同 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的定义一样，仍然成立。例如，在 [Lin09], 中，利用 Zhu 代数这一概念对一个并非顶点算子代数的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次共形顶点代数也是定义良好的这一事实，计算了中心荷为 $c = 2$ 的 Weyl 共形顶点代数的（层零）Zhu 代数（见下文第 3.1 节）。对于希望了解采用其他共形元的 Weyl 顶点代数的 Zhu 代数相关结果的读者，我们推荐参阅 [BBOH+22] 。

注 2.3。 当 V 是顶点算子代数时，由于

$$v \circ_0 \mathbf{1} = v_{-2}\mathbf{1} + (\mathrm{wt}(v))v = L_{-1}v + L_0 v,$$

可知 $O_0(V)$ 由形如 (1) 的元素张成，并且 $\mathrm{Zhu}_0(V)$ 与 Zhu代数 $\mathrm{Zhu}(V)$ [Zhu96] 的原始定义一致。对于 $n > 0$，这一结论不再必然成立。特别是，在 [AB23b], 中给出了若干具体情形，其中形如 $L_{-1}v + L_0 v$ 的元素无法写成形如 (1) 的元素的线性组合。这些情形在 $\mathrm{Zhu}_n(V)$ 中导出了新的关系，而这些关系无法由形如 (1) 的元素所张成的空间所产生的关系涵盖。如果 V 是一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数，且形如 (2) 的元素不一定属于形如 (1) 的元素所张成的空间，那么这一注释同样成立。

2.2. **$\mathbb{Z}$分次顶点代数的李代数、滤过、泛包络代数与完备化**。 沿用 [DGK25], 的做法，我们讨论了研究高阶 Zhu 代数时感兴趣的各种滤过。我们将使用以下

记号:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[[t,t^{-1}]] &= \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \mid a_n\in\mathbb{C}\right\},\\ \mathbb{C}((t)) &= \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \,|\, a_n=0 \text{ for all but a finite number of } n<0\right\}\\ \mathbb{C}[t,t^{-1}] &= \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \,|\, a_n=0 \text{ for all but a finite number of } n\right\}.\end{aligned}$$

我们将第一个环称为 t 和 t^{-1}中的形式级数，第二个环称为 t中的形式洛朗级数，最后一个集合称为 t中的形式洛朗多项式。

首先注意，洛朗多项式空间 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ 是按 $\mathbb{C}[t,t^{-1}]_n$ =$\mathbb{C}t^{-n-1}$分次的 $\mathbb{Z}$。因此，洛朗级数空间 $\mathbb{C}((t))$相对于此分次带有一个左（即递增）滤过，由 $\mathbb{C}((t))_{\leq n} = t^{-n-1}\mathbb{C}[[t]]$给出。这个滤过是穷尽的，并且是 DGK25 附录 A]意义下的分裂滤过 [。类似地， $\mathbb{C}((t^{-1}))$上存在一个由 $\mathbb{C}((t^{-1}))_{\geq n} = t^{-n-1}\mathbb{C}[[t^{-1}]]$给出的右（即递减）穷尽分裂滤过。当然，作为上述 $\mathbb{C}((t))$和 $\mathbb{C}((t^{-1}))$上左、右滤过的子环， $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ 同时具有左、右穷尽滤过。不过，我们注意到， $\mathbb{C}[[t,t^{-1}]]$ 不存在穷尽的左滤过或右滤过，能分别限制为上述任一滤过。

设 V是一个 $\mathbb{Z}$分次顶点代数。则 V分别具有由 $V_{\leq n} = \coprod_{k\leq n} V_k$ 和 $V_{\geq n} = \coprod_{k\geq n} V_k$给出的左完备滤过和右完备滤过。此外，空间$V\otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$关于张量因子的左滤过具有一个左滤过。特别地，关于 $v\otimes t^n$ 的$degree$ 分次，该滤过赋予代数一个分次代数结构，其定义为

$$\deg(v\otimes t^n) = \mathrm{wt}(v) - n - 1. \tag{3}$$

更确切地说，伴随分次空间定义为

$$\mathrm{gr}\,(V\otimes\mathbb{C}((t))) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (V\otimes\mathbb{C}((t))_{\leq n})/(V\otimes\mathbb{C}((t))_{\leq n-1})$$

于是我们得到分次子空间

$$(V\otimes\mathbb{C}((t)))_n = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v\otimes t^{\mathrm{wt}(v)-n-1} \mid v\in V \text{ homogeneous}\} \subset V\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}].$$

这意味着， $V\otimes\mathbb{C}((t))$ 上的左滤过相对于分次子空间 $V\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$，是[DGK25] 意义下的分裂滤过。类似地，我们可以定义 $V\otimes\mathbb{C}((t^{-1}))$ 上的分次结构，它同样是一个分裂右滤过，且仍然相对于分次子空间 $V\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$。

定义次数为一的线性自同态

$$D = T \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \frac{d}{dt}$$

分别在 $V \otimes \mathbb{C}((t))$、$V \otimes \mathbb{C}((t^{-1}))$ 和 $V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 上，并考虑这三个商空间

$$\mathfrak{L}(V)^L = \frac{V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))}{\mathrm{Im}(D)}, \quad \mathfrak{L}(V)^R = \frac{V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t^{-1}))}{\mathrm{Im}(D)}, \quad \mathfrak{L}(V)^f = \frac{V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]}{\mathrm{Im}(D)}.$$

它们分别是左分裂滤过、右分裂滤过和分次的。此外，相对于李括号，它们具有滤过李代数结构和分次李代数结构

$$[u \otimes f(t), v \otimes g(t)] = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} (u_j v) \otimes g(t) \frac{d^j}{dt^j} f(t), \tag{4}$$

对于所有 $u,\ v \in V$，以及 $f(t)\ g(t) \in \mathbb{C}((t))$ 或 $\mathbb{C}((t^{-1}))$。注意，空间 $\mathfrak{L}(V)^f$ 在顶点算子代数的语境中通常记作 V（例如 [DLM98, He17]）。

对于 $v \in V$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，用 $v(m)$ 表示 $v \otimes t^m$ 在 $\mathfrak{L}(V)^f$ 中的像，即

$$v(m) = v \otimes t^m + D(V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]).$$

将李括号 (4) 限制在 $\mathfrak{L}(V)^f$ 上后，可简化为

$$[u(m), v(n)] = \sum_{j \geq 0} \binom{m}{j} (u_j v)(m + n - j), \qquad u, v \in V,\ m, n \in \mathbb{Z}.$$

继续沿用 [DGK25, 附录 A] 并将其扩展到 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的情形，我们令 U^L、U^R，U 分别表示 $\mathfrak{L}(V)^L$、$\mathfrak{L}(V)^R$、$\mathfrak{L}(V)^f$ 的泛包络代数。由于这些包络代数分别是左滤过、右滤过和分次的，$(U^L,\ U^R,\ U)$ 构成一个结合代数的良三元组，因此我们可以自然地定义与邻域系相关的良半范数

$$\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^n U^L = U^L U^L_{\leq -n}, \qquad \mathrm{N}_{\mathrm{R}}^n U^R = U^R_{\geq n} U^R, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

也就是说，N_{L}和 N_{R}分别在 U^L和 U^R上定义了几乎典范的分裂滤过半范数，使得 $\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^n U_p = \mathrm{N}^{n+p}{}_{\mathrm{R}}\, U_p$。作为 U [DGK25 中的左理想，引理 2.4.2],

$$\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^n U^L = U^L \mathfrak{L}(V)^L_{\leq -n}, \qquad \mathrm{N}_{\mathrm{L}}^n U := U U_{\leq -n} = U \mathfrak{L}(V)^f_{\leq -n},$$

而作为右理想

$$\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^n U^R = \mathfrak{L}(V)^R_{\geq n} U^R, \qquad \mathrm{N}_{\mathrm{R}}^n U := U_{\geq n} U = \mathfrak{L}(V)^f_{\geq n} U,$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}$。关于此邻域系取完备化后，分别得到完备化 $\hat{U}^L$、$\hat{U}^R$ 和 $\hat{U}$，并且 ($\hat{U}^L$、$\hat{U}$、$\hat{U}^R$) 又是

一个带有良半范数的结合代数良三元组（参见 [DGK25，推论 A.9.10]）。

泛包络代数 $U = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} U_n$ 从李代数 $\mathfrak{L}(V)^f$ 继承了自然的 $\mathbb{Z}$分次，其分次由式 (3) 中定义的次数给出。零分量U_0包含李子代数 $\mathfrak{L}(V)^f(0)$ 的泛包络代数 $U(0)$，该李子代数是由$\mathfrak{L}(V)^f$ 中次数为零的齐次向量张成的。对于 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$，令

$$U_n^k := \mathrm{N}_{\mathrm{L}}^{-k} U_n = \sum_{i\leq k} U_{n-i}U_i \quad \text{and} \quad U(0)^k := U(0) \cap U_0^k, \tag{5}$$

它们分别在 U_n 和 $U(0)$ 上定义递增滤子（相对于 k）。

2.3. 左、右和有限泛包络代数 $\mathbb{Z}$分次顶点代数。 设 V是一个 $\mathbb{Z}$分次顶点代数，并设 $(\hat{U}^L, \hat{U}, \hat{U}^R)$ 为第 2.2 节中构造的李代数$\mathfrak{L}(V)^L, \mathfrak{L}(V)^f, \mathfrak{L}(V)^R$的泛包络代数的良三元组完备化，并配有良半范数。

继续遵循并拓展 [DGK25, Appendix A], 以及 [He17], 的做法，我们令 $\mathscr{J}^L$, $\mathscr{J}$和 $\mathscr{J}^R$分别为由以下元素生成的 $\hat{U}^L$，$\hat{U}$和 $\hat{U}^R$的双边分次理想

$$\mathbf{1}(-1) = 1_{\hat{U}} \tag{6}$$

and

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i \binom{\ell}{i} \big(u(m+\ell-i)v(n+i) - (-1)^\ell v(n+\ell-i)u(m+i)\big) = \sum_{i\geq 0} \binom{m}{i} (u_{\ell+i}v)(m+n-i), \tag{7}$$

对所有 $u,\ v \in V$、 $m,\ n,\ \ell \in \mathbb{Z}$均成立。根据[DGK25, Lemma A.9.5], $(\mathscr{J}^L,\ \mathscr{J},\ \mathscr{J}^R)$ 是一个良三元组理想。此外，由于它源自典范半范数，良三元组 $(\hat{U}^L,\ \hat{U},\ \hat{U}^R)$ 上的半范数是紧的 [DGK25, Remark A.6.11]因此，相对于该紧半范数， $\mathscr{J}^L$， $\mathscr{J}$， $\mathscr{J}^R$各自的闭包构成一个良三元组理想，记作 $(\overline{\mathscr{J}^L},\ \overline{\mathscr{J}},\ \overline{\mathscr{J}^R})$ [DGK25, Lemma A.9.6]。

根据 [DGK25，推论 A.9。9], 这些商模空间

$$\mathscr{U}^L = \hat{U}^L/\overline{\mathscr{J}^L}, \quad \mathscr{U} = \hat{U}/\overline{\mathscr{J}}, \quad \mathscr{U}^R = \hat{U}^R/\overline{\mathscr{J}^R}$$

构成一个带有良好半范数的结合代数良三元组。我们分别将这些结合代数称为 V的左、有限和右泛包络代数。

注记 2.4. 对于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 分次顶点算子代数， $\mathscr{U}$ 与 Frenkel 和 Zhu [FZ92] – 引入的 V 的普适包络代数一致，并记为

$U(V)$，见 [He17], ; 而正如 [DGK25], 中所指出的，我们可以将 $\mathscr{U}^L$ 识别为 Nagatomo 和 Tsuchiya [NT05] 引入的流代数，或者稍作修改后，识别为 [Fre07] 中引入的普适包络$\widetilde{\ }$代数 $\mathscr{U}(V)$。

将以下映射可视化会很有帮助，其中第二个和第三个映射分别是嵌入和投影，

$$\begin{array}{lllll} V & \longrightarrow & \mathfrak{L}(V)^f & \hookrightarrow \hat{U} & \twoheadrightarrow \mathscr{U} \\ v & \longmapsto & v(\mathrm{wt}(v)-1) & \longmapsto (v(\mathrm{wt}(v)-1)).1 & \longmapsto (v(\mathrm{wt}(v)-1)).1+\overline{\mathscr{J}} \\ \mathbf{1} & \longmapsto & \mathbf{1}(-1) & \longmapsto \mathbf{1}(-1) & \longmapsto 1+\overline{\mathscr{J}} \\ & & \mathbf{1}(j)=\delta_{j,-1}\mathbf{1}(-1) & \longmapsto \delta_{j,-1}\mathbf{1}(-1) & \longmapsto \delta_{j,-1}+\overline{\mathscr{J}}. \end{array}$$

注 2.5. 在 [He17]（在顶点算子代数的语境中）以及文献中的其他地方，通常用三组关系来定义 $\mathscr{J}$。然而，关系 (6) 和 (7) 已经足够。特别是经常给出的那个关系

$$\mathbf{1}(j)=\mathbf{1}\otimes t^j+D(V\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}])=0, \qquad j\neq -1, \tag{8}$$

$\hat{}$ 已经是 U 中的一个关系，因为

$$D(\mathbf{1}(j+1))=T(\mathbf{1})\otimes t^{j+1}+\mathbf{1}\otimes\frac{d}{dt}t^{j+1}=(j+1)\mathbf{1}\otimes t^j\equiv 0.$$

文献中还常常指定另一组关系，即当 V 具有共形结构时的 Virasoro 关系。但同样，如果这些关系出现在 V中，那么它们已经包含在 $\mathfrak{L}(V)^f$中，因而也包含在 $\hat{U}$和 $\mathscr{U}$中。回想一下（例如参见[LL04]），Virasoro 关系等价于

$$\begin{aligned} \omega_0\omega &= L_{-1}\omega, \\ \omega_1\omega &= 2L_{-2}\mathbf{1}=2\omega, \\ \omega_2\omega &= 0, \\ \omega_3\omega &= \frac{1}{2}c\mathbf{1}, \\ \omega_n\omega &= 0 \quad \text{for } n\geq 4. \end{aligned}$$

那么在 $\mathfrak{L}(V)^f$ 和 $\hat{U}$ 中，我们有

$$\begin{aligned} [\omega(m+1),\omega(n+1)] &= \sum_{i\geq 0}\binom{m+1}{i}(\omega_i\omega)(m+n+2-i) \\ &= (L_{-1}\omega)(m+n+2)+\binom{m+1}{1}2\omega(m+n+1)+\binom{m+1}{3}\frac{1}{2}c\ \mathbf{1}(m+n-1) \\ &= -(m+n+2)\omega(m+n+1)+(m+1)2\omega(m+n+1)+\binom{m+1}{3}\frac{1}{2}c\delta_{m,-n}\ \mathbf{1}(-1) \end{aligned}$$

$$= \quad (m-n)\omega(m+n+1) + \frac{(m+1)m(m-1)}{12} c\delta_{m,-n}\ \mathbf{1}(-1).$$

因此，利用关系 $\mathbf{1}(-1) + \mathscr{J} = 1$，我们也在 $\mathscr{U}$ 中重新得到 Virasoro 关系。

2.4. Zhu代数作为泛包络代数的商代数。在 [He17],中，He证明，当 V 是顶点算子代数时，$\mathrm{Zhu}_n(V)$同构于 V的泛包络代数的一个商代数。

在 [He17], 中，顶点算子代数 V 的泛包络代数 $\mathscr{U}$ 记作 $U(V)$。此外，He证明，若 V 是顶点算子代数，则

$$\mathrm{A}_n(V) := U(V)_0 / U(V)_0^{-n-1} \cong \mathrm{Zhu}_n(V), \tag{9}$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$都成立，即商代数$\mathrm{A}_n(V)$与层 n 的Zhu代数$\mathrm{Zhu}_n(V)$[1]典范同构。采用我们的记号（以及 [DGK25]的记号），公式（9）写作

$$\mathrm{A}_n(V) := \mathscr{U}_0 / \mathrm{N}^{n+1}\mathscr{U}_0 \cong \mathrm{Zhu}_n(V) \tag{10}$$

其中$\mathrm{N}^{n+1}\mathscr{U}_0 := \mathrm{N}^{n+1}{}_{\mathrm{L}}\,\mathscr{U}_0 = \mathrm{N}^{n+1}{}_{\mathrm{R}}\,\mathscr{U}_0$。

这一事实在 [DGK25] 中针对 V 顶点算子代数进行了阐述，其中还将Zhu代数的概念推广到了 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$分次半范数幺代数。层 n 的Zhu代数$\mathrm{Zhu}_n(V)$与零模代数$\mathrm{A}_n(V)$之间的显式同构由映射给出

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Zhu}_n(V) \quad &\longrightarrow \quad \mathscr{U}_0 / \mathrm{N}^{n+1}\mathscr{U}_0 \\ v + O_n(V) \quad &\longmapsto \quad v(\mathrm{wt}(v) - 1) + \mathrm{N}^{n+1}\mathscr{U}_0. \end{aligned} \tag{11}$$

特别地，可以将 $\mathrm{Zhu}_0(V)$ 与 $\mathrm{A}_0(V) = \mathscr{U}_0/\mathrm{N}^1\mathscr{U}_0$ 识别为同一对象。

注 2.6。 将（层为零的）Zhu代数实现为 V的零模代数，是其定义背后的主要动机 [Zhu96、FZ92]。在 He 的工作之前，文献中已有 $\mathrm{Zhu}_0(V) \cong \mathrm{A}_0(V)$ 的识别结果 [EG97]（另见 [RW15b、附录 B]）。

如注 2.3 所述，$\mathrm{Zhu}_n(V)$ 对于 $n > 0$ 的原始定义，要求在顶点算子代数中模掉关系 $(L_{-1} + L_0)v = 0$，或者等价地，在 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数中模掉 $(T + \Delta)v = 0$。因此，人们可能会担心，由泛

[1]在 [He17、推论 A.2], 的模索引中存在笔误，既出现在推论 A.2 证明中方程的最后三行，也出现在给出结果的方程的第二行。推论 A.2 用于引理 3.1 的证明中；尽管存在这些索引笔误，该引理仍然成立，因此此处以公式（9）给出的结果对于顶点算子代数仍然成立

包络代数构造的高层 Zhu代数 A() 的商模是否包含类似的关系。它确实包含，我们通过计算 $(T+\Delta)v$ 在显式同构 (11) 下的像来验证这一点：

$$\begin{aligned}(Tv)(\mathrm{wt}(Tv)-1)+(\Delta v)(\mathrm{wt}(\Delta v)-1) &= (Tv)(\mathrm{wt}(v))+(\Delta v)(\mathrm{wt}(v)-1)\\ &= (Tv)\otimes t^{\mathrm{wt}(v)}+\mathrm{wt}(v)\,v\otimes t^{\mathrm{wt}(v)-1}\\ &= -\mathrm{wt}(v)\,v\otimes t^{\mathrm{wt}(v)-1}+\mathrm{wt}(v)\,v\otimes t^{\mathrm{wt}(v)-1}\\ &= 0\in\mathscr{U}\end{aligned}$$

因为我们有 $Tv\otimes t^{\mathrm{wt}(v)}+v\otimes\frac{d}{dt}t^{\mathrm{wt}(v)}=0$ 在 $\mathscr{U}$中。更重要的是，这自然引出了对同构式（9）右端的考虑，将其推广到不带共形元的顶点代数上。例如， [DGK25],中就采用了这一框架；他们在一般的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次代数背景下发展了 Zhu 代数和模态转换代数的概念，其中 Zhu 代数沿用了 He 的研究方法，即通过 V 的泛包络代数中 V 的模所生成的代数来研究，而不是像 [Zhu96, DLM98]那样，将其视为 V 的商空间。

在下面的命题中，我们注意到，通过 V 的泛包络代数中 V 的模来实现层 n Zhu 代数的方法，可以推广到 V 为 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的情形。

命题 2.7。 设 V 为一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数。则本节中关于 $\mathscr{U}$ 的构造，以及分次和滤过，都是良定义的。此外，对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，商空间 $\mathrm{A}_n(V):=\mathscr{U}_0/\mathrm{N}^{n+1}\mathscr{U}_0$ 是一个良定义的结合代数，并且同构于层 n *Zhu* 代数 $\mathrm{Zhu}_n(V)=V/O_n(V)$。也就是说

$$\mathrm{A}_n(V)=\mathscr{U}_0/\mathrm{N}^{n+1}\mathscr{U}_0\cong\mathrm{Zhu}_n(V)=V/O_n(V).$$

2.5. **分次顶点代数的模态转移代数**。 模态转移代数是结合代数，由 [DGK25] 为某些顶点算子代数引入 V，它们蕴含有关这些代数的高阶 Zhu 代数，以及曲线族上 V-模层的变形之几何性质的信息。在 [DGK25], 中，大部分工作针对的是共形场论型顶点算子代数，即具有非负权空间且零权空间为一维的顶点算子代数。

重要的是，正如 [DGK25，附录 B]所指出的，模态转移代数的定义适用范围更广，也可定义于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次代数。本文主要通过指出 [DGK25]的工作在这一情形下同样适用，将这一概念拓展至 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数。事实上，这项工作的主体已在第 2.2 节中完成。

固定一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数 V，并定义向量空间

$$\mathfrak{A}=\mathscr{U}/\mathrm{N}^1_{\mathrm{L}}\mathscr{U}\otimes_{\mathscr{U}_0}\mathrm{A}_0\otimes_{\mathscr{U}_0}\mathscr{U}/\mathrm{N}^1_{\mathrm{R}}\mathscr{U},$$

其中，$\mathrm{A}_0 := \mathrm{A}_0(V)$，而 $\mathscr{U}$ 是在第 2.3 节中构造的 V 的（有限）泛包络代数。这个 $\mathfrak{A}$ 是 模态转移代数的底层向量空间，它自然具有如下双重 $\mathbb{Z}$分次。$\mathscr{U}$ 的商模继承了来自 $\mathscr{U}$ 的$\mathbb{Z}$分次（该分次源自度分次 $\deg v(m) = \mathrm{wt}(v) - m - 1$，定义在与 V 相关联的李代数 $\mathfrak{L}(V)^f$ 上；见第 2.2 节）。

令 $(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U})_d$,$(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U})_d$ 分别表示 $\mathscr{U}$中次数为 d 的元素的等价类空间。具体而言，我们有

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U}\right)_d &:= \mathscr{U}_d/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U}_d = \mathscr{U}_d/\left(\sum_{j\le -1}\mathscr{U}_{d-j}\mathscr{U}_j\right),\\ \left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U}\right)_d &:= \mathscr{U}_d/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U}_d = \mathscr{U}_d/\left(\sum_{j\ge 1}\mathscr{U}_j\mathscr{U}_{d-j}\right).\end{aligned} \tag{12}$$

对于 $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$，我们将 $\mathfrak{A}_{d_1,d_2}$ 定义为向量空间

$$\mathfrak{A}_{d_1,d_2} = \left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U}\right)_{d_1} \otimes_{\mathscr{U}_0} \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathscr{U}_0} \left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U}\right)_{d_2}. \tag{13}$$

于是我们得到如下分次

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\substack{d_1\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\\ d_2\in\mathbb{Z}_{\le 0}}} \mathfrak{A}_{d_1,d_2},$$

其中 $\mathfrak{A}_{0,0} = (\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U})_0 \otimes_{\mathscr{U}_0} \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathscr{U}_0} (\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U})_0 \cong \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A}_0 \cong \mathrm{A}_0$。

我们通过回顾 [DGK25] 中描述的乘法结构，在 $\mathfrak{A}$ 上定义代数结构，并指出它可以推广到 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的情形。对于 $\mathfrak{A}$中的两个向量 $\mathfrak{a} = u \otimes a \otimes u'$ 和 $\mathfrak{b} = v \otimes b \otimes v'$，设

$$\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} = u \otimes a(u' \circledast v)b \otimes v' \in \mathfrak{A} \tag{14}$$

其中 $\circledast : (\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U}) \otimes_{\mathscr{U}} (\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U}) \to \mathrm{A}_0$ 定义在具有齐次次数的元素上，具体如下：

$$a \circledast b := \begin{cases} 0 & \text{if } \deg(a) + \deg(b) \neq 0,\\ [ab]_0 & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{15}$$

并通过线性延拓。其中 $[a]_0$ 表示 a 在 A_0中的像。

在 CFT 型顶点算子代数的背景下，[DGK25] 证明映射 $\circledast$ 实际上是一个同构，并且这一结论可推广到 $\mathbb{Z}_{\ge 0}$-分次顶点代数。这里我们仅指出，若 V是一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数，那么 $\circledast$ 仍然是一个同构，而 $\mathfrak{A}$ 上的乘积 $\star$ 定义了一个结合代数结构。因此我们有

定义 2.8（模态转移代数）。设 V 为一个 $\mathbb{Z}$分次顶点代数。则乘积 $\star : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{A}$ 上定义了一种代数结构，而 $(\mathfrak{A}, \star)$称为 V的模态转移代数 。此外，对于 $d \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，子空间

$\mathfrak{A}_d := \mathfrak{A}_{d,-d}$ 在乘法下封闭。因此，它定义了 $\mathfrak{A}$ 的一个子代数，称为 V的 d阶模态转移代数 。

注意， $\star$的定义可以推广，从而在其上定义左、右 $\mathfrak{A}$-模结构

$$\Phi^L(W) = \left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U}\right) \otimes_{\mathscr{U}_0} W, \qquad \Phi^R(M) = M \otimes_{\mathscr{U}_0} \left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U}\right) \tag{16}$$

对所有左、右 A_0-模 W 和 M 分别如此。我们将在下一节使用这一事实。

2.6. **带单位元的模态转移代数与 Zhu 代数的分裂定理**。 模态转移代数这一概念的一大优势在于，可以利用它们确定 Zhu 代数各层之间的关系；例如， [DGK25],中对海森堡顶点算子代数的情形所作的说明，便取决于这些代数是否具有单位元 [DGK25，定理 6.0.1]。在本小节中，我们将在 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的框架下推广这些关系。

设 V 为一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数。为简便起见，记 $\mathrm{A}_d := \mathrm{A}_d(V)$，其中$d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，并考虑映射

$$\begin{array}{rcl} \mu_d : \mathfrak{A}_d & \longrightarrow & \mathrm{A}_d \\ \bar{\alpha} \otimes u \otimes \bar{\beta} & \mapsto & [\alpha u \beta]_d, \end{array} \tag{17}$$

其中 $\bar{\alpha} = \alpha + \mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U} \in (\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U})_d$, $u \in \mathrm{A}_0$, 且 $\bar{\beta} = \beta + \mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U} \in (\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U})_{-d}$, 而 $[\alpha u \beta]_d$ 表示 $\alpha u \beta$ 在 A_d中的等价类。根据 [DGK25，引理 B.3.1]推广到 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的情形可知，该映射定义良好，并且存在一个正合列

$$\mathfrak{A}_d \xrightarrow{\mu_d} \mathrm{A}_d \xrightarrow{\pi_d} \mathrm{A}_{d-1} \longrightarrow 0 \tag{18}$$

其中 $\pi_d : \mathrm{A}_d \,!\, \mathrm{A}_{d-1}$ 是典范投影。

接下来我们指出， [DGK25，定理 B.3.3] 在$\mathbb{Z}$-分次顶点代数的情形下也成立，我们将在下文以引理 2.9 和分裂定理 2.10 的形式给出。

引理 2.9。 设 V 是一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数，并假设对于 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，环 $\mathfrak{A}_d$ 具有单位元 $\mathscr{I}_d$。那么由公式 (17) 给出的映射 $\mu_d : \mathfrak{A}_d \text{ –! } \mathrm{A}_d$ 是单射，即正合列 (18) 是一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A}_d \xrightarrow{\mu_d} \mathrm{A}_d \xrightarrow{\pi_d} \mathrm{A}_{d-1} \longrightarrow 0. \tag{19}$$

证明。 与 [DGK25] 中一样，对于任意左 A_0-模 W，我们可以构造由式 (16) 定义的 $\mathfrak{A}$-模 $\Phi^L(W)$，其中 $\mathfrak{A}_d$ 的作用通过以下对象分解:

A_d 的作用。令 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_d$ 满足 $\mu_d(\mathfrak{a}) = 0$。那么 $\mathfrak{a}$ 在 $\Phi^L(W)_d$ 上的作用是平凡的。特别地，当 W 是由以下给出的 A_0-模时

$$W = \Phi^R(\mathrm{A}_0) = \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathscr{U}_0} \mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U},$$

这意味着 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{A}_d \subset (\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U} \otimes_{\mathscr{U}_0} \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathscr{U}_0} \mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U})_d = \Phi^L(W)_d$上的作用是平凡的。根据定义，这一作用不过是 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{A}_d$上通过代数左乘所产生的作用。由于 $\mathfrak{A}_d$ 有单位元 $\mathscr{I}_d$，我们可知 $\mathfrak{a} \star \mathscr{I}_d = \mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{A}_d$中为零。因此， μ_d 的核是平凡的。□

我们有如下定理，它将 DGK25 的命题 6.0.1(a) 或定理 B.33] 从共形场论型顶点算子代数的情形推广到 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的情形。

定理 2.10。 设 V 是一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数，且设 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若 V 的 d 阶模态转移代数 $\mathfrak{A}_d$ 存在单位元（即一个幺元），则有环同构

$$\mathrm{A}_d(V) \cong \mathfrak{A}_d \times \mathrm{A}_{d-1}(V).$$

特别地，如果对所有 $0 \leq j \leq d$， $\mathfrak{A}_j$ 都有一个单位元，那么

$$\mathrm{A}_d(V) \cong \bigoplus_{j=0}^{d} \mathfrak{A}_j.$$

证明。 由于 μ_d 是单射， $\mu_d(\mathscr{I}_d) \in \mathrm{A}_d$ 非零且是一个非平凡幂等元。因此

$$\mathrm{A}_d(V) \cong \mu_d(\mathscr{I}_d)\mathrm{A}_d(V) \times (\mathbf{1}(-1) - \mu_d(\mathscr{I}_d))\mathrm{A}_d(V) \cong \mathfrak{A}_d \times \mathrm{A}_{d-1}(V). \tag{20}$$

其余部分由此得出。 □

2.7. **模态转移代数的强单位元族**。 在 [DGK25], 中，已有研究表明，在 CFT 型顶点算子代数的情形下，如果模态转移代数具有一个强单位元族，那么便可确定与“可容许” V-模相关的曲线模空间几何构造的某些性质。在此，我们将 [DGK25] 中引入的强单位元族 概念推广到 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的情形。我们还证明，某些性质等价于存在一个强单位元族，该族类似于 [DGK25], 中给出的族，不过我们的等价概念与 [DGK25] 中的概念相比略有修改。

定义 2.11。 设 V 是一个 $\mathbb{Z}$ 分次顶点代数，并假设对每个 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，与 V 相关联的环 $\mathfrak{A}_d$ 都是含单位元的，其单位元为 $\mathscr{I}_d \in \mathfrak{A}_d$。我们称

单位元族 $\{\mathscr{I}_d\}_{d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的强单位元族，如果对每个 $m,\ n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，且对每个 $\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}_{n,\ -m}$，

$$\mathscr{I}_n\star\mathfrak{a}=\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\star\mathscr{I}_m. \tag{21}$$

当 V 是共形场论类型的顶点算子代数 [2], [DGK25，定义/引理 3.3.1] 既定义了强单位元，也探讨了使单位元 $\mathscr{I}_d\in\mathfrak{A}_d$ 成为强单位元的其他条件。在此，我们将强单位元族的定义扩展到 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的情形，首先考虑我们认为最自然、可作为强单位元族定义的条件。

回顾一下，对于左 A_0-模 W 和右 A_0-模 M，$\Phi^L(W)=\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U}\otimes_{\mathscr{U}_0}W$ 和 $\Phi^R(M)=M\otimes_{\mathscr{U}_0}\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U}$（定义见公式 (16)）分别是左、右$\mathfrak{A}$-模。我们回顾以下结合性结果，它的一个版本曾出现在 [DGK25，命题 B.2.5], ，我们将其应用于一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数。

引理 2.12. 设 V 是一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数，并设 $d,m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。那么对所有 $u\in\mathfrak{L}(V)_d^f$，$\mathfrak{b}\in\mathfrak{A}_n$，$\mathfrak{c}\in\mathfrak{A}_m$ 和 $\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}_{n,-m}$，

$$(u\cdot\mathfrak{b})\star\mathfrak{a}=u\cdot(\mathfrak{b}\star\mathfrak{a})\quad and\quad \mathfrak{a}\star(\mathfrak{c}\cdot u)=(\mathfrak{a}\star\mathfrak{c})\cdot u,$$

其中，u 与其在 $\mathscr{U}$（及其商模）中的像等同，$\cdot$ 表示在 $\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U}$ 上的左（分别为右）$\mathscr{U}$-模作用（分别地，在 $\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U}$ 上）。

证明。设 $\mathfrak{b}=w_L\otimes b\otimes w_R\in\mathfrak{A}_n$ 和 $\mathfrak{a}=v_L\otimes a\otimes v_R$ 满足 $w_L,v_L\in(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U})_n$,$w_R\in(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U})_{-n}$, $v_R\in(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U})_{-m}$ 和 $b,a\in\mathsf{A}_0$。那么，根据 $\star$ 乘积的定义 (14)，我们有

$$\begin{aligned}(u\cdot\mathfrak{b})\star\mathfrak{a} &= ((u\ w_L)\otimes b\otimes w_R)\star\mathfrak{a}\\ &= (u\ w_L)\otimes b(w_R\circledast v_L)a\otimes v_R\\ &= u\cdot(w_L\otimes b(w_R\circledast v_L)a\otimes v_R)=u\cdot(\mathfrak{b}\star\mathfrak{a}).\end{aligned}$$

由线性性可知，对任意$\mathfrak{b}\in\mathfrak{A}_n$，结合律 $(u\cdot\mathfrak{b})\star\mathfrak{a}=u\cdot(\mathfrak{b}\star\mathfrak{a})$ 成立。另一个等式的证明完全类似。□

接下来，我们证明模态转移代数 $\mathfrak{A}$ 的一些性质，这些性质等价于 $\mathfrak{A}$ 具有一族强单位元。DGK25]定义/引理 3.3.1 中给出了类似的结果，但其中假设左单位元也是右单位元。这里我们不作此假设，因此下面的性质 $(iii)-(v)$ 与 DGK25] 中给出的性质相比多了一些条件。

命题 2.13. 设 V 是一个 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数，并假设对每个$d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，与 V 相关联的环 $\mathfrak{A}_d$ 都是含单位元的，其单位元为 $\mathscr{I}_d\in\mathfrak{A}_d$。那么，以下条件等价：

(i) 单位元族 $\{\mathscr{I}_d\}_{d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 是强单位元族。

[2]若顶点算子代数 V是共形场论类型，则称其为 $V=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}V_n$ 和 $V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$，参见 [DLMM98]。

(*ii*) 对于每个 d、m、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，对于所有 $u \in \mathfrak{L}(V)^{f}_{d}$ 以及 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_{n,-m}$

$$(u \cdot \mathscr{I}_n) \star \mathfrak{a} = u \cdot \mathfrak{a} \quad and \quad \mathfrak{a} \star (\mathscr{I}_m \cdot u) = \mathfrak{a} \cdot u.$$

(iii) 对于每个 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，同态 $\mathfrak{A}_d$ *! End(*$\Phi^L(A_0)_d$*)* 和 $\mathfrak{A}_d$ *! End(*$\Phi^R(A_0)_{-d}$*)* 都是保单位元的。*(iv)* 对于每个 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，同态 $\mathfrak{A}_d$ *! End(*$\Phi^L(A_0)_d$*)* 和 $\mathfrak{A}_d$ *! End(*$\Phi^R(A_0)_{-d}$*)* 都是保单位元的且为单射。*(v)* 对于每个 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 A_0-模 W，同态 $\mathfrak{A}_d$ *! End(*$\Phi^L(W)_d$*)* 和 $\mathfrak{A}_d$ *! End(*$\Phi^R(W)_{-d}$*)* 都是保单位元的。

证明。证明过程中，我们遵循 [DGK25], 的方法，并注意到这些性质在 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数的情形下成立。

我们首先注意到，条件 (iv) 蕴含 (iii)，而 (v) 蕴含 (iii)。因此，只需证明以下蕴含关系：

$$(ii) \iff (i) \iff (iii) \quad \text{and} \quad (iii) \implies (v) \quad \text{and} \quad (iii) \implies (iv).$$

(*ii*) $\implies$ (*i*)： 可由取 $d = 0$ 和 $u = \mathbf{1}(-1) \in \mathfrak{L}(V)$ 得出 $^{f}_{0}$.

(*i*) $\implies$ (*ii*)： 由结合性引理 2.12，取 $\mathfrak{b} = \mathscr{I}_n$、$\mathfrak{c} = \mathscr{I}_m$，并利用 $\mathscr{I}_n$ 和 $\mathscr{I}_m$ 是强单位元这一事实即可得出。

(*i*) $\implies$ (*iii*)： 注意

$$\begin{aligned}\Phi^L(\mathrm{A}_0)_d &= \left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U} \otimes_{\mathscr{U}_0} \mathrm{A}_0\right)_d = \left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U}\right)_d \otimes_{\mathscr{U}_0} \mathrm{A}_0 \\ &\cong \left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U}\right)_d \otimes_{\mathscr{U}_0} \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A}_0 \\ &\cong \left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U}\right)_d \otimes_{\mathscr{U}_0} \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathscr{U}_0} \left(\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U}\right)_0 = \mathfrak{A}_{d,0}.\end{aligned}$$

因此，将 $\Phi^L(\mathrm{A}_0)_d \cong \mathfrak{A}_{d,\,0}$ 映射为 $\mathscr{I}_d \in \mathfrak{A}_d$ 在 $\mathfrak{A}_d$上的平凡自同态$_{.\,0}$。类似地，可以将 $\Phi^R(\mathrm{A}_0)_{-d} \cong \mathfrak{A}_{0,\,-d}$对应起来，从而说明第二个同态也是含单位元的。

(*iii*) $\implies$ (*i*)： 利用引理 2.12 的第二个等式，我们证明：若 $\mathfrak{a} = v_L \otimes a \otimes v_R$，其中 $v_L \in (\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U})_n$、$v_R \in (\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U})_{-m}$ 且 $a \in \mathrm{A}_0$,，则

$$\mathscr{I}_n \star (v_L \otimes a \otimes v_R) = (\mathscr{I}_n \star (v_L \otimes a \otimes 1)) \cdot v_R.$$

由于根据前面的对应关系，$\mathscr{I}_n$ 在$v_L \otimes a \otimes 1 \in \mathfrak{A}_{n,\,0} \cong \Phi^L(\mathrm{A}_0)_n$ 上平凡作用，我们推得

$$\mathscr{I}_n \star \mathfrak{a} = (v_L \otimes a \otimes 1) \cdot v_R = \mathfrak{a},$$

这对任意 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_{n,-m}$ 都由线性性成立。我们使用类似的论证证明第二个单位关系 $\mathfrak{a} \star \mathscr{I}_m = \mathfrak{a}$：令 $\mathscr{I}_m$ 作用于 $\mathfrak{A}_{0,-m} \cong \Phi^R(\mathrm{A}_0)_{-m}$中的一个元素。

$(iii) \implies (v)$: 令 $u \otimes w \in \Phi^L(W)_d$，其中 $u \in (\mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{L}}^1\mathscr{U})_d$，并注意到 $u \otimes w = (u \otimes 1_{\mathrm{A}_0}) \cdot (1_{\mathscr{U}} \otimes w)$，其中 $\cdot$ 是 $\Phi^L(\mathrm{A}_0)_d$ 到 $\Phi^L(W)_d$上的自然作用。模态转移代数 $\mathfrak{A}_d$ 的作用通过左乘法作用于$\Phi^L(W)_d$，并以下述意义与作用 $\cdot$ 相容:

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_d \star (u \otimes w) &= \iota_L \otimes \iota_0(\iota_R \circledast u)w \\ &= (\iota_L \otimes \iota_0(\iota_R \circledast u)1_{\mathrm{A}_0}) \cdot (1_{\mathscr{U}} \otimes w) \\ &= (\mathscr{I}_d \star (u \otimes 1_{\mathrm{A}_0})) \cdot (1_{\mathscr{U}} \otimes w). \end{aligned}$$

由于 $\mathscr{I}_d$在 $\Phi^L(\mathrm{A}_0)_d$上的作用是平凡的，第一个因子可化为 $\mathscr{I}_d \star (u \otimes 1_{\mathrm{A}_0}) = (u \otimes 1_{\mathrm{A}_0})$，因此同态 $\mathfrak{A}_d \to \mathrm{End}(\Phi^L(W)_d)$ 是保单位元的。利用 $\Phi^R(\mathrm{A}_0)_{-d}$ 通过右乘法作用于 $\Phi^R(M)_{-d}$ 的类似论证，可以证明第二个同态也是保单位元的。

$(iii) \implies (iv)$：我们需要证明这两个同态是单射的。$\star$ 对 $\mathfrak{A}_d$ 在 $\mathfrak{A} \simeq \Phi^L(\mathrm{A}_0) \otimes \mathscr{U}/\mathrm{N}_{\mathrm{R}}^1\mathscr{U}$ 上的左乘法作用，仅由 $\star$ 在 $\Phi^L(\mathrm{A}_0)$上的左乘法决定。此外，我们在引理 2.9 的证明中表明，当 $\mathfrak{A}_d$ 具有单位元时，$\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_d$ 的作用是平凡的，当且仅当 $\mathfrak{a} = 0$ 具有

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \star \mathscr{I}_d = 0.$$

因此，前一个作用是单射，后一个作用也是如此。同样，可以调整这一论证，以证明第二个同态也是单射。

□

在下一节中，我们为一个并非顶点算子代数、而是具有无限维权空间的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 分次共形顶点代数的 d阶模态转移代数构造 d阶模态转移代数，即中心荷为 2 的 Weyl 顶点代数。此外，我们证明这些代数是幺性的，且这些单位元构成一族强单位元。

3. The mode transition algebra and higher level Zhu algebras for the Weyl vertex algebra at central charge 2.

本节介绍 Weyl 顶点代数 $\mathcal{V}$，它也称为 $\beta\gamma$-系统或玻色鬼。这个顶点代数有一参数族共形向量，但这里我们将重点讨论其中共形荷为 $c = 2$ 的那个。采用这一共形元后，Weyl 顶点代数 $\mathcal{V}$ 是一个具有无限维分次空间的共形$\mathbb{Z}$分次顶点代数，事实上也是一个共形 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$分次顶点代数。

我们给出了 Weyl 顶点代数 $\mathcal{V}$ 在所有层上的模态转换代数的结构。我们证明了这些代数具有单位元，并且这些单位元构成了

一族强单位元（见第 2.7 节）。利用定理 2.10，我们描述了 $\mathcal{V}$ 的所有 Zhu 代数。

Addabbo 和 Barron [AB23a], 针对海森堡顶点算子代数提出的一个类似猜想，已由 [DGK25] 利用模态转移代数证明。该结果在代数几何背景中有应用。中心荷 2 的 Weyl 顶点代数 $\mathcal{V}$ 并非 C_1-余有限（因为 $\mathcal{V}_0$ 是无限维的），尽管如下文所示，其模态转移代数存在一族强单位元。目前尚不清楚这会带来哪些代数几何方面的影响。

3.1. Weyl 顶点代数。 *Weyl* 李代数记作 $\mathscr{W}_{Lie}$，是一个由生成元 $\{a, a^*, 1\}$ 构成的 3 维李代数，其唯一的非平凡关系为

$$[a, a^*] = 1. \tag{22}$$

秩一 *Weyl* 代数记作 $\mathscr{W}$，是 $\mathscr{W}_{Lie}$ 的泛包络代数 $\mathcal{U}$。具体而言，它对应于由两个生成元 a 和 a^* 生成的自由含幺结合代数对关系 $aa^* - a^*a - 1$取商所得的代数：

$$\mathscr{W} \cong \mathbb{C}\langle a, a^*\rangle / \langle aa^* - a^*a - 1\rangle.$$

注意，$\mathscr{W}$ 与由乘以 x 的算子和微分算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ 生成的自同态结合代数 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$同构，对应关系为

$$\mathscr{W} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x, x^{-1}], \qquad a \mapsto \frac{\partial}{\partial x}, \qquad a^* \mapsto x.$$

$\mathscr{W}$ 的自同构群含有无穷多个元素，正如 Dixmier [Dix68]所证明的那样。其中，以下这族 $\mathscr{W}$的自同构将会很有用。对任意 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$，考虑自同构

$$\varphi_\lambda : \mathscr{W} \longrightarrow \mathscr{W}, \qquad a \mapsto \lambda a^*, \qquad a^* \mapsto -\lambda^{-1} a. \tag{23}$$

这将特别值得关注。这些自同构 φ_λ 的阶均为四，其中 $\varphi_\lambda^2 = -\mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$和 $\varphi_\lambda^3 = \varphi_{\lambda^{-1}}$。

玻色幽灵李代数 $\mathcal{L}$是无限维李代数

$$\mathcal{L} = \mathscr{W}_{Lie} \otimes \mathbb{C}[s, s^{-1}] \oplus \mathbb{C}K,$$

它由一个中心元 K 以及元素 $a_m := a \otimes s^m$和 $a_n^* := a^* \otimes s^n$生成，其中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 满足

$$[a_m, a_n^*] = \delta_{m+n,0} K.$$

$\mathscr{W}_{Lie}$ 的自同构可以提升为 $\mathcal{L}$-自同构。此外，$\mathcal{L}$具有谱流自同构

$$\sigma^\ell : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \qquad a_n \mapsto a_{n+\ell} \qquad a_n^* \mapsto a_{n-\ell}^*, \qquad K \mapsto K, \tag{24}$$

对于 $\ell \in \mathbb{Z}$。

沿用 [RW15a], 中的设定，我们固定三角分解

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^- \oplus \mathcal{L}^0 \oplus \mathcal{L}^+$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^- &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a_{-m}, a^*_{-n} \,|\, m \geq 1, n \geq 0\},\\ \mathcal{L}^0 &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{K\},\\ \mathcal{L}^+ &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a_m, a^*_n \,|\, m \geq 0, n \geq 1\}.\end{aligned}$$

秩一韦尔顶点代数，记作 $\mathcal{V}$，是诱导的 $\mathcal{L}$-模

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}(\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathcal{L}^0 \oplus \mathcal{L}^+)} \mathbb{C}\mathbf{1},$$

其中 $\mathbb{C}\mathbf{1}$ 是一个一维的 $\mathcal{L}^0 \oplus \mathcal{L}^+$-模， $\mathcal{L}^+$ 在其上平凡作用，而 K的作用是乘以标量 1:

$$\begin{aligned}a_m\mathbf{1} &= 0 \text{ for } m \geq 0,\\ a^*_n\mathbf{1} &= 0 \text{ for } n \geq 1,\\ K\mathbf{1} &= \mathbf{1}.\end{aligned}$$

于是，作为向量空间， $\mathcal{V} \cong U(\mathcal{L}^-)$，并且 $\mathcal{V}$ 具有由以下单项式组成的 PBW 基

$$a_{-m_1-1}a_{-m_2-1}\dots a_{-m_k-1}a^*_{-n_1}\dots a^*_{-n_l}\mathbf{1}, \tag{25}$$

其中 m_i， $n_j \in \mathbb{Z}$ 满足 $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_k \geq 0$、 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_l \geq 0$，并且滥用记号，$\mathbf{1}$ 表示 $1 \otimes \mathbf{1}$ 在 $\mathcal{V}$中的像。 $\mathcal{V}$ 上存在唯一的顶点代数结构（例如参见 [LL04]中的定理 5.7.1，或[FBZ04]中的引理 11.3.8），其由 ($\mathcal{V}$， Y，$\mathbf{1}$) 给出，其顶点算子映射为

$$Y : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{V})[[z, z^{-1}]]$$

使得

$$Y(a_{-1}\mathbf{1}, z) = a(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}, \qquad Y(a^*_0\mathbf{1}, z) = a^*(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^*_n z^{-n}. \tag{26}$$

场 $a(z)$、 $a^*(z)$ 满足以下算子乘积展开

$$\begin{aligned}a(z)a^*(w) &= \frac{1}{z-w} + :a(z)a^*(w):\\ a(z)a(w) = :a(z)a(w):, &\qquad a^*(z)a^*(w) = :a^*(z)a^*(w):.\end{aligned} \tag{27}$$

其中 $:x(z)y(z):$ 表示场 $x(z)$ 和 $y(z)$ 的有序乘积，由 b y

$$:x(z)y(z): \stackrel{\text{def}}{=} x(z)^+y(z) + y(z)x(z)^-,$$

其中 $x(z)^+ = \sum_{n\le -1} x_n z^{-n-1}$ 和 $x(z)^- = \sum_{n\ge 0} x_n z^{-n-1}$。此外，映射$Y$：$\mathcal{V}$! End($\mathcal{V}$)$[[z, z^{-1}]]$ 通过线性性定义在基 (25) 的元素上，定义如下：

$$Y(a_{-m_1-1}a_{-m_2-1}\dots a_{-m_k-1}a^*_{-n_1}\dots a^*_{-n_l}\mathbf{1}, z) = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i!}\prod_{j=1}^{\ell}\frac{1}{n_j!}{:}\partial^{m_1}a(z)\dots\partial^{m_k}a(z)\partial^{n_1}a^*(z)\dots\partial^{n_l}a^*(z){:}.$$

注3.1。

(i) 式 (26) 中定义的场 $a(z)$ 和 $a^*(z)$ 在物理学文献中通常记作 $\beta(z)$ 和 $\gamma(z)$（符号的选择可能不同），其中顶点代数 $\mathcal{V}$ 被称为 $\beta\gamma$ 顶点代数、 $\beta\gamma$ 系统或玻色鬼。

(ii) 由于对所有 $n \in \mathbb{Z}$，场 $Y(a_{-1}\mathbf{1}, z) = a(z)$、 $Y(a^*_0\mathbf{1}, z) = a^*(z)$ 的 n 模满足

$$(a_{-1}\mathbf{1})_n = a_n, \qquad (a^*_0\mathbf{1})_n = a^*_{n+1},$$

我们得到， $G = \{a_{-1}\mathbf{1}, a^*_0\mathbf{1}\}$ 是顶点代数 $\mathcal{V}$ 的一组强生成元。也就是说， $\mathcal{V}$ 由正规序单项式构成的集合张成

$$\{{:}(\partial^{k_1}\alpha^{i_1})\dots(\partial^{k_l}\alpha^{i_l}){:} \mid\ k_1,\dots,k_l \ge 0,\ \alpha^{i_j} \in G\}.$$

因此， $\mathcal{V}$ 作为顶点代数是强有限生成的。

该仿射化的一阶魏尔代数 $\mathscr{W}$ 是代数

$$\widehat{\mathscr{W}} = \frac{\mathcal{U}(\mathcal{L})}{\langle K-1\rangle}, \tag{28}$$

其中， $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ 表示 $\mathcal{L}$ 的泛包络代数，而 $\langle K-1\rangle$ 是由 $K-1$生成的双边理想。代数 $\mathscr{W}$ 对应于$\mathcal{V}$的模代数。它是一个结合代数，其生成元为 a_m、 a^*_n，其中 m， $n \in \mathbb{Z}$，并满足以下关系

$$[a_m, a^*_n] = \delta_{m+n,0}, \qquad [a_m, a_n] = [a^*_m, a^*_n] = 0. \tag{29}$$

李代数 $\mathcal{L}$ 的谱流自同构 (24) 通过庞加莱-比尔霍夫-维特定理提升为$\mathcal{U}(\mathcal{L})$ 的自同构（从而也是 $\mathscr{W}$ 的自同构）。

由强生成元 $a_{-1}\mathbf{1}$ 和 $a^*_0\mathbf{1}$ 的模之间由 (29) 给出的简单关系，结合注3.1，可知 $\mathcal{V}$ 是一个单顶点代数。

令 $J = a_{-1}a^*_0\mathbf{1}$。相应的场 $J(z) = Y(J, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n z^{-n-1}$是 $\mathcal{V}$ 中的一个层为 -1的海森堡向量（即， J 生成一个中心荷为 -1的海森堡李代数）。对于 n, $m \in \mathbb{Z}$，我们有

$$[J_m, J_n] = -m\delta_{m+n,0} \tag{30}$$

作为作用在 $\mathcal{V}$上的算子，因此

$$J(z)J(w) = -\frac{1}{(z-w)^2} + :J(z)J(w):. \tag{31}$$

此外，对于所有 $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$[J_m, a_n] = -a_{m+n}, \quad \text{and} \quad [J_m, a_n^*] = a_{m+n}^*. \tag{32}$$

顶点代数 $\mathcal{V}$ 具有一族由一个参数刻画的 Virasoro 向量

$$\omega_\mu = a_{-1}a_{-1}^*\mathbf{1} - \mu J_{-2}\mathbf{1}, \qquad (\mu \in \mathbb{C}) \tag{33}$$

其中心荷为

$$c_\mu = 2(6\mu(\mu-1)+1). \tag{34}$$

按照 [BBOH$^+$22] 的记法，由 ω_μ 所给出的共形向量确定的共形顶点代数 $\mathcal{V}$ correspondingto 记作 ${}_\mu\mathcal{V}$。

注 3.2。在 [BBOH$^+$22] 中，仿射化的一阶魏尔代数 $\mathscr{W}$ 在第三节中记作 $\mathcal{A}_1$。而在 [BBOH$^+$22] 第六节中有一处笔误，其中的 $\mathcal{A}_1$ 应为 $\mathscr{W}$。此外，在 [BBOH$^+$22] 中，Weyl 顶点代数 ${}_\mu\mathcal{V}$ 记作 ${}_\mu M$。

在 [BBOH$^+$22] 中，本文的三位作者与 Batistelli 和 Pedi´c Tomi´c 一起，根据参数 μ 对 Weyl 顶点代数 ${}_\mu\mathcal{V}$ 上得到的不同 $\mathbb{C}$-分次共形顶点代数结构进行了分类。正如 [BBOH$^+$22] 所示，只有当 μ 位于复平面中的某个有界凸区域内时，${}_\mu\mathcal{V}$ 才具有所谓的可容许Ω-生成的 $\mathbb{C}$-分次顶点算子代数结构，这一概念与 $\mathbb{C}$-分次情形下的顶点算子代数概念类似。此外，当 μ 位于该有界凸区域内时，${}_\mu\mathcal{V}$ 是有理的，并具有唯一的不可约普通模 [BBOH$^+$22]。另一方面，在此特定区域之外，${}_\mu\mathcal{V}$ 只是有限强生成的 $\mathbb{C}$-分次共形顶点代数，而不是顶点算子代数的 $\mathbb{C}$-分次类比。

下文中，我们将重点考察参数 $\mu = 0$ 的取值，使得 ${}_0\mathcal{V}$ 属于后一类 Weyl 顶点代数。特别地，它具有无限维的共形权空间。因此，它具有 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 分次顶点代数的结构，但不具有顶点算子 代数的结构。为简便起见，在本文其余部分，我们用 $\mathcal{V}$ 表示 ${}_0\mathcal{V}$。然后，我们固定 $\omega = \omega_0 = a_{-1}a_{-1}^*\mathbf{1}$，使得 $\mathcal{V}$ 的中心荷为 $c = c_0 = 2$。相应的 Virasoro 场 $L(z) = Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ 为

$$L(z) = :a(z)\partial a^*(z):$$

并满足

$$L(z)L(w) = \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w L(w)}{z-w} + :L(z)L(w):.$$

顶点代数 $\mathcal{V}$ 按 L_0 分次为 $\mathbb{Z}$，对所有 $m,\ n\in\mathbb{Z}$,

$$[L_m,a_n]=-na_{m+n},\qquad [L_m,a_n^*]=-(m+n)a_{m+n}^*.$$

特别地，L_0 以半单方式作用，且

$$[L_0,a_n]\ =\ -na_n,\qquad \text{and}\qquad [L_0,a_n^*]\ =\ -na_n^*.$$

注意，对于整数 $m_1\geq\cdots\geq m_k\geq 1$、$n_1\geq\cdots\geq n_\ell\geq 0$ 和 $k,\ \ell\in\mathbb{Z}_{>0}$，有

$$L_0a_{-m_1}\dots a_{-m_k}\mathbf{1}=(m_1+\cdots+m_k)a_{-m_1}\dots a_{-m_k}\mathbf{1},$$
$$L_0a^*_{-n_1}\dots a^*_{-n_\ell}\mathbf{1}=(n_1+\cdots+n_\ell)a^*_{-n_1}\dots a^*_{-n_\ell}\mathbf{1},$$

因此

$$L_0a_{-m_1}\dots a_{-m_k}a^*_{-n_1}\dots a^*_{-n_\ell}\mathbf{1}=\Big(\sum_{j=1}^{k}m_j+\sum_{j=1}^{\ell}n_j\Big)a_{-m_1}\dots a_{-m_k}a^*_{-n_1}\dots a^*_{-n_\ell}\mathbf{1}.\ (35)$$

$\mathcal{V}$ 相对于 L_0-分次的权重零子空间为

$$\mathcal{V}_0=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{(a_0^*)^r\mathbf{1}\mid r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

由于该空间 $\mathcal{V}_0$ 是无限维的，因此 $(\mathcal{V}_0+C_1(\mathcal{V}))/C_1(\mathcal{V})\ \subset\mathcal{V}/C_1(\mathcal{V})$ 是无限维的，其中

$$C_1(\mathcal{V})=\mathrm{span}\{u_{-1}v\in\mathcal{V}\mid u,v\in\mathcal{V},\mathrm{wt}(u)>0\}.$$

因此，按照顶点代数理论中的术语（例如参见 [Miy14]），$\mathcal{V}$ 不是 C_1-余有限的。此外，$\mathcal{V}$ 的权重 d 子空间为

$$\mathcal{V}_d=\mathcal{V}_d^{\mathrm{res}}\ltimes\mathcal{V}_0,\qquad (36)$$

其中

$$\mathcal{V}_d^{\mathrm{res}}=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a_{-m_1}\dots a_{-m_k}a^*_{-n_1}\dots a^*_{-n_\ell}\mathbf{1}\mid \sum_{j=1}^{k}m_j+\sum_{j=1}^{\ell}n_j=d,$$
$$k,\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ m_j,n_j\in\mathbb{Z}_{>0},\ m_1\geq\cdots\geq m_k,\ n_1\geq\cdots\geq n_\ell\}.$$

子空间 $\mathcal{V}_d^{\mathrm{res}}$ 是有限维的，其维数为 $\mathcal{V}_d^{\mathrm{res}}=|P_2(d)|$，其中 $P_2(d)$ 表示 d 的二分量多重分拆集合。也就是说，集合 $P_2(d)$ 由分拆的有序对 $(\mathbf{\Lambda}^1,\ \mathbf{\Lambda}^2)$ 组成，$\mathbf{\Lambda}^i=\{\lambda_1^i\geq\lambda_2^i\geq\dots\}$、$\lambda_j^i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足条件 $|\mathbf{\Lambda}^1|+|\mathbf{\Lambda}^2|=d$。按照约定，零有一个二分量多重分拆，记作 $\emptyset$；而一有两个，分别记作 $\{\emptyset,1\}$ 和 $\{1,\emptyset\}$。例如，$(4+1,\ 2+2+1)\in P_2(10)$。这个维数 $|P_2(d)|$ 将出现在 $\mathcal{V}$ 的第 d 层 Zhu代数中。

此外，除了 L_0-分次外，我们还有一个关于 J_0 的分次，其定义见方程（32）。事实上，对于所有 $m_1 \geq \cdots \geq m_k \geq 1$、 $n_1 \geq \cdots \geq n_\ell \geq 1$ 和 k， $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$、 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们有

$$J_0(a_{-m_1} \dots a_{-m_k} a^*_{-n_1} \dots a^*_{-n_\ell} (a^*_0)^r \mathbf{1}) = (-k + \ell + r) a_{-m_1} \dots a_{-m_k} a^*_{-n_1} \dots a^*_{-n_\ell} (a^*_0)^r \mathbf{1}.$$

因此，我们可以进一步将 $\mathcal{V}_d$ 分解为其 J_0-分次分量

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{V}_d = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_d^j \tag{37}$$

其中 $\mathcal{V}_d^j = \{u \in \mathcal{V} \mid L_0 u = du,\ J_0 u = ju\}$。注意，当 $j < -d$时，$\dim \mathcal{V}_d^j < \infty$ 和 $\mathcal{V}_d^j = 0$。根据方程（37），$\dim\ q_J$， $q_L(\mathcal{V}) := \mathrm{tr}_{\mathcal{V}}\, q_J^{J_0} q_L^{L_0 - c/24}$ 是良定义的。由向量空间的同构可得

$$\mathcal{V} \cong \mathbb{C}[a_{-n-1}, a^*_{-n} \mid n \geq 0]\mathbf{1} \cong \bigotimes_{n \geq 0} \mathbb{C}[a_{-n-1}]\mathbf{1} \otimes \bigotimes_{n \geq 0} \mathbb{C}[a^*_{-n}]\mathbf{1}$$

that

$$\begin{aligned} \dim q_J, q_L(\mathcal{V}) &= q_L^{-1/12} \left(\prod_{n=0}^{\infty} \dim_{q_J, q_L} (\mathbb{C}[a_{-n-1}]\mathbf{1}) \right) \left(\prod_{n=0}^{\infty} \dim_{q_J, q_L} (\mathbb{C}[a^*_{-n}]\mathbf{1}) \right) \\ &= q_L^{-1/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_J q_L^n)^{-1} (1 - q_J^{-1} q_L^{n-1})^{-1}. \end{aligned}$$

注 3.3. 在 [RW15a], 中，证明了这个关于 $\mathcal{V}$ 的双重分次迹，以及某些类 $\mathcal{V}$-模的类似双重分次迹，在模群 $SL_2(\mathbb{Z})$的作用下具有有趣的模不变性性质。本文的一个动机是探究适当类别的 $\mathcal{V}$-模是否存在双重分次伪迹，例如，利用关于L_0 和 J_0的这种双分次，在分次伪迹的框架中定义与双重分次迹类似的概念；分次伪迹的定义可见例如 [BBOHY23]。在第 5 节中，我们证明，最近研究的两类 $\mathcal{V}$-模不存在这种良定义的非平凡双重分次伪迹，因为它们不满足一个关键性质，即不可分解可约模并非弱交锁，见定理 5.3 和推论 5.5。

3.2. **Weyl 顶点代数的模态转移代数与高阶 Zhu 代数**。 本节中，我们描述中心荷 2 的 Weyl 顶点代数的 d阶模态转移代数， $\mathcal{V}$，对所有 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。由于 $\mathfrak{A}_0(\mathcal{V}) = A_0(\mathcal{V})$ 与 $\mathrm{Zhu}_0(\mathcal{V})$ 同构，我们有 $\mathfrak{A}_0(\mathcal{V}) \cong \mathscr{W}$，如 [Lin09] 所示（另见[BBOH$^+$22]）。为描述 $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$（其中 $d \geq 1$），我们证明以下结果。

命题 3.4。 对于 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在一个自然的代数同构

$$\mathfrak{A}_d(\mathcal{V}) \cong \mathrm{Mat}_{|P_2(d)|}(\mathscr{W}) \cong \mathscr{W} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Mat}_{|P_2(d)|}(\mathbb{C}), \tag{38}$$

其中，$|P_2(d)|$ 是第 *3.1* 节中所述的 d 的二分量多重分拆数。特别地，对于每个 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，第 d 个模态转移代数 $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 都有单位元。

证明。 $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 中的元素是如下形式元素的和：

$$\epsilon^{w}_{((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))} = a(-m_1)\dots a(-m_k)a^*(-n_1)\dots a^*(-n_\ell) \otimes w \\ \otimes a^*(q_s)\dots a^*(q_1)a(r_t)\dots a(r_1) \tag{39}$$

其中，$(\mathbf{m}_k, \mathbf{n}_\ell) = ((m_1,\dots,m_k),(n_1,\dots,n_\ell))$ 和 $(\mathbf{q}_s, \mathbf{r}_t) = ((q_1,\dots,q_s),(r_1,\dots,r_t))$ 是 $P_2(d)$ 中的两个元素，$w \in \mathscr{W}$；其中，$a(m)$ 表示 $\mathfrak{L}(V)^f$ 中次数为 $-m$ 的元素 $a_{-1}\mathbf{1} \otimes t^m$ 的等价类，而 $a^*(n)$ 表示 $\mathfrak{L}(V)^f$ 中次数为 $-n$ 的元素 $a^*_{-1}\mathbf{1} \otimes t^n$ 的等价类。我们有：

$$\mathfrak{A}_d(\mathcal{V}) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\epsilon^{w}_{((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))} \mid (\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t) \in P_2(d),\ w \in \mathscr{W}\}. \tag{40}$$

此外，我们可以在 $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 上定义一个 $\mathscr{W}$-模结构：

$$w'.\epsilon^{w}_{((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))} = \epsilon^{w'.w}_{((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))}$$

对于 $(\mathbf{m}_k,\ \mathbf{n}_\ell)$，$(\mathbf{q}_s,\ \mathbf{r}_t) \in P_2(d)$ 以及 $w,\ w' \in \mathscr{W}$，从而使集合

$$\{\epsilon_{((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))} := \epsilon^{1}_{((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))}\}_{(\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t)\in P_2(d)} \tag{41}$$

自由生成作为 $\mathscr{W}$-模的 $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$，即作为 $\mathscr{W}$-模

$$\mathfrak{A}_d(\mathcal{V}) \cong \mathscr{W} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\epsilon_{((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))}\}_{(\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t)\in P_2(d)}.$$

$\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 的代数结构由乘积 $\star$ 给出，该乘积定义于第 2.5 节，取决于 $\mathscr{U}(\mathcal{V})$ 中两个元素的乘积 $\circledast$，其结果是 $A_0(\mathcal{V}) = \mathscr{W}$ 中的一个元素。在我们的设定中，有

$$a^*(q_s)\dots a^*(q_1)a(r_t)\dots a(r_1) \circledast a(-m_1)\dots a(-m_k)a^*(-n_1)\dots a^*(-n_\ell) \\ = \begin{cases} c(\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell) & \text{if } (\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t) = (\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $c(\mathbf{m}_k,\ \mathbf{n}_\ell)$ 是一个只依赖于 $(\mathbf{m}_k,\ \mathbf{n}_\ell)$ 的正整数。因此在 $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 中，

$$\epsilon_{((\mathbf{m}'_{k'},\mathbf{n}'_{\ell'}),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))}\star\epsilon_{((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}'_{s'},\mathbf{r}'_{t'}))} = \begin{cases} c(\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell)\epsilon_{((\mathbf{m}'_{k'},\mathbf{n}'_{\ell'}),(\mathbf{q}'_{s'},\mathbf{r}'_{t'}))} & \text{if } (\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t) = (\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{42}$$

因此，向量 (41) 张成的空间与 Mat 之间存在代数同构$_{|P_2(d)|}(\mathbb{C})$，将 $\epsilon_{((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))}$ 与

$\mathfrak{I}_{((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))}$ 属于 $\mathrm{Mat}_{|P_2(d)|}(\mathbb{C})$，其 $\sqrt{c(\overline{\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell})}\sqrt{c(\mathbf{q}_s,\overline{\mathbf{r}_t})}$ 位于 $((\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell),(\mathbf{q}_s,\mathbf{r}_t))$ 项，其余位置为零。因此，作为代数，$\mathfrak{A}_d(\mathcal{V}) \cong \mathscr{W} \otimes \mathrm{Mat}_{|P_2(d)|}(\mathbb{C})$。

此外，这意味着对于每个 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 都是含单位元的，其单位元可典范地同构于 $1 \otimes I_{|P_2(d)|}$，其中 $1 \in \mathscr{W}$ 和 $I_{|P_2(d)|} \in$ 是矩阵代数 $\mathrm{Mat}_{|P_2(d)|}$ 中的单位矩阵。□

根据命题 3.4，模态转移代数 $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 含有单位元。现在我们证明，对于每个 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 中的单位元构成定义 2.11 意义下的一族强单位元。

定理 3.5。模态转移代数$\mathfrak{A}_d(\mathcal{V}) \cong \mathscr{W} \otimes$矩阵代数$_{|P_2(d)|}(\mathbb{C})$ 的单位元 $\mathscr{I}_d = 1 \otimes I_{|P_2(d)|}$ 构成一族强单位元。

证明。首先，通过为 $P_2(d)$ 选取一组基，记为 $\{(\mathbf{b}^d(j),\mathbf{u}^d(j))\}_{j=1}^{|P_2(d)|}$，$I_{|P_2(d)|}$ 被对应为 $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 中的一个元素，因此每个 $(\mathbf{b}^d(j),\mathbf{u}^d(j)) = (\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell)$ 都对应于某个 $(\mathbf{m}_k,\mathbf{n}_\ell) \in P_2(d)$，其中 $m_1+\cdots+m_k+n_1+\cdots+n_\ell = d$。那么，相对于这组基，$I_{|P_2(d)|}$ 对应于

$$\sum_{j=1}^{|P_2(d)|} \frac{1}{c(\mathbf{b}^d(j),\mathbf{u}^d(j))} \epsilon_{((\mathbf{b}^d(j),\mathbf{u}^d(j)),(\mathbf{b}^d(j),\mathbf{u}^d(j)))}.$$

此外，每个 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_{n,-m}(\mathcal{V})$ 都可以写成如下形式元素的线性组合：$w \otimes \epsilon_{((\mathbf{b}^n(i),\mathbf{u}^n(j)),(\mathbf{b}^m(k),\mathbf{u}^m(\ell)))}$，其中 $w \in \mathscr{W}$。利用公式 (42)，可得

$$\begin{aligned}
&\mathscr{I}_n \star \left(w \otimes \epsilon_{((\mathbf{b}^n(i),\mathbf{u}^n(j)),(\mathbf{b}^m(k),\mathbf{u}^m(\ell)))}\right)\\
&= \left(1 \otimes I_{|P_2(n)|}\right) \star \left(w \otimes \epsilon_{((\mathbf{b}^n(i),\mathbf{u}^n(j)),(\mathbf{b}^m(k),\mathbf{u}^m(\ell)))}\right)\\
&= 1 \cdot w \otimes \left(I_{|P_2(n)|} \star \epsilon_{((\mathbf{b}^n(i),\mathbf{u}^n(j)),(\mathbf{b}^m(k),\mathbf{u}^m(\ell)))}\right)\\
&= w \otimes \Big(\sum_{s=1}^{|P_2(n)|} \frac{1}{c(\mathbf{b}^n(s),\mathbf{u}^n(s))} \epsilon_{((\mathbf{b}^n(s),\mathbf{u}^n(s)),(\mathbf{b}^n(s),\mathbf{u}^n(s)))} \star \epsilon_{((\mathbf{b}^n(i),\mathbf{u}^n(j)),(\mathbf{b}^m(k),\mathbf{u}^m(\ell)))}\Big)\\
&= w \otimes \frac{1}{c(\mathbf{b}^n(i),\mathbf{u}^n(j))} \epsilon_{((\mathbf{b}^n(i),\mathbf{u}^n(j)),(\mathbf{b}^n(i),\mathbf{u}^n(j)))} \star \epsilon_{((\mathbf{b}^n(i),\mathbf{u}^n(j)),(\mathbf{b}^m(k),\mathbf{u}^m(\ell)))}\\
&= w \otimes \epsilon_{((\mathbf{b}^n(i),\mathbf{u}^n(j)),(\mathbf{b}^m(k),\mathbf{u}^m(\ell)))}.
\end{aligned}$$

通过线性扩展到任意 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_{n,-m}(\mathcal{V})$，可得 $\mathscr{I}_n \star \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$。对于所有 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_{n,-m}(\mathcal{V})$，$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \star \mathscr{I}_m$ 这一事实可用类似方法证明。□

在 [Lin09]，中，证明了零级 Zhu 代数 $\mathrm{Zhu}_0(\mathcal{V})$ 是 Weyl 代数$\mathscr{W}$。此外，与 Addabbo 在 [BBOH+22] 中进行的初步计算表明，$\mathrm{A}_1(\mathcal{V}) \cong \mathscr{W} \oplus (\mathscr{W} \otimes$矩阵代数$_2(\mathbb{C}))$。接下来我们注意到，命题 3.4 和定理 2.10 使我们能够描述所有高阶 Zhu 代数，特别是验证了 [BBOH+22] 中关于 $\mathrm{A}_1(\mathcal{V})$ 的猜想。

推论 3.6。 对于 $d \geq 1$，中心荷为 *2* 的 *Weyl* 代数的 d 层 *Zhu* 代数 $\mathcal{V}$ 满足

$$\mathrm{Zhu}_d(\mathcal{V}) \cong \mathrm{A}_d(\mathcal{V}) \cong \bigoplus_{j=0}^{d} (\mathscr{W} \otimes \mathrm{Mat}_{|P_2(j)|}(\mathbb{C})),$$

其中 $|P_2(d)|$ 是 d 的二分量多重分拆的数量。

证明。 由命题 3.4 可知，代数 $\mathfrak{A}_d(\mathcal{V})$ 是含单位元的。随后我们应用定理 2.10。□

4. Modules for $\mathbb{Z}$-graded vertex algebras

在本节中，我们介绍 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数 V 的各种模的概念。不过，在本文余下部分，我们将很快把范围限制在所关注的 V-模类型上，即具有 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次结构的 V-模。然后，我们回顾从 V 的 Zhu代数的模到 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次的 V-模的诱导函子，该函子由 [DLM98] 在顶点算子代数的背景下给出，并将其扩展到 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次顶点代数的情形。接着，我们回顾顶点算子代数背景下的 Li 的**Δ** 算子 [Li97]，并在此将其扩展到顶点代数的情形，同时介绍导致 V-模发生谱流的特定算子。

最后，我们回顾弱交锁的概念（参见 [BBOHY23]），并证明由 Zhu 代数诱导的 V-模何时弱交锁；此外，我们还证明一个结果，用以刻画弱交锁的模在作用 Li 的 **Δ** 算子（包括谱流算子）后是否必然仍为弱交锁。

4.1. 定义。

设 V 是一个 $\mathbb{Z}$分次顶点代数。

定义 4.1。 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次 V-模是一个弱 V-模 W，且它是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$可分次的，$W = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} W(k)$，其中 $v_m W(k) \subset W(k + \mathrm{wt}(v) - m - 1)$，对齐次的$v \in V$、$m \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$成立。不失一般性，除非另有说明，我们可以并且确实假设 $W(0) \neq 0$。我们称 $W(k)$ 的非零元素具有次数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

此外，如果 V 是一个共形的 $\mathbb{Z}$-分次顶点代数，我们回顾如下定义。

定义 4.2. A $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次广义 V-模 是一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次弱 V-模 W，它可以通过 $L_0 = \omega_1$ 的谱分解为广义特征子空间： $W = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} W_\lambda$ 其中，对于某个 $j \in \mathbb{Z}_{>0}\}$，$W_\lambda = \{w \in W \mid (L_0 - \lambda\, id_W)^j w = 0$；此外，对于固定的 λ 以及所有充分小的整数 n，还有 $W_{\lambda+n} = 0$。我们称 W_λ 中的非零元素具有权重 $\lambda \in \mathbb{C}$。

注 4.3. 在上述定义中，我们选择将范围限制为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次（广义） V-模，而非 $\mathbb{Z}$-可分次模，因为前者对应于物理模型意义下的“正能量”模，其中分次 Δ （在共形情形下为 L_0 ）定义了能级。此外，由于我们希望 V 本身是一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次（广义） V-模，因此下文将范围限制为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次顶点代数。

4.2. **$\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次模与 Zhu 对应**。 接下来，我们重新审视函子 Ω_n 和 $\mathscr{L}_n$（其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$），它们最初是在 [DLM98] 中针对顶点算子代数 V 及 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次 V-模的背景下定义和研究的。在本文中，我们将其定义推广到 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次顶点代数的情形。

设 W 为一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次 V-模，并令
$\Omega_n(W) = \{w \in W \mid v_j w = 0$ 当 $\mathrm{wt}(v) - j - 1 < -n$ 对于具有齐次权$\}$.的 $v \in V$
那么，$\Omega_n(W)$ 是一个 $A_n(V)$-模，其作用为 $[a] \circ o(a) = a_{\mathrm{wt}(a)-1}$ 对于 $a \in V$ 和 $[a] = a + O_n(V)$。这一点在 [DLM98] 中针对顶点算子代数 V 得到了证明，但其证明可以直接推广到 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次顶点代数的情形，只需分别将 L_{-1} 和 L_0 替换为平移算子和分次算子。于是，函子 $\Omega_n : W \mapsto \Omega_n(W)$ 是从 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次 V-模范畴到 $\mathrm{Zhu}_n(V)$-模范畴的协变函子。

注 4.4. 这里定义的从 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次的 V-模到 $\mathrm{Zhu}_n(V)$-模的函子 Ω_n ，与 [DLM98] 和 [BVWY19], 中定义的函子相同，但并非 [vE11] 中称为 Ω_n 的函子；在 [vE11] 中，记作 Ω_n 的函子是到 W 的第 n 个分次子空间上的投影函子。将此投影函子记为 Π_n，则对于 W 一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次的 V-模，有 $\Pi_n(W) = W(n)$。

给定一个弱 V-模 W，考虑以下线性映射

$$\begin{aligned} \psi_W : \quad U &\longrightarrow \mathrm{End}(W) \\ v^1(m_1)v^2(m_2)\dots v^k(m_k) &\longmapsto (v^1_W)_{m_1}(v^2_W)_{m_2}\dots(v^k_W)_{m_k}, \end{aligned} \tag{43}$$

其中 $(v_W)_m$ 是顶点算子作用 $Y_W(v, x)$ 在模 W 上的 x^{-m-1} 的系数。我们常将 ψ_W 记作 ψ，将 $(v_W)_m$ 记作 v_m，条件是该模本身为 V，或者 W 的含义显然。

$\mathrm{Zhu}_n(V)$ 上可以通过括号 $[u, v] = u *_n v - v *_n u$ 赋予李代数结构，进而映射 $v(\mathrm{wt}(v) - 1) \circ v + O_n(V)$ 是从 $\mathfrak{L}(V)^f(0)$ 到 $\mathrm{Zhu}_n(V)$ 的良定义李代数满同态。由于 $\mathrm{Zhu}_n(V)$ 自然是 $\mathfrak{L}(V)^f(0)$ 的李代数同态像，$\mathrm{Zhu}_n(V)$-模 Z 可以提升为$\mathfrak{L}(V)^f(0)$-模，继而提升为 $\mathcal{P}_n = \bigoplus_{p<-n} \mathfrak{L}(V)^f(p) \oplus \mathfrak{L}(V)^f(0)$ 的模，其中令 $\mathfrak{L}(V)^f(p)$ 对 $p \neq 0$ 平凡作用。令

$$M_n(Z) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}_n}^{\mathfrak{L}(V)^f}(Z) = U(\mathfrak{L}(V)^f) \otimes_{U(\mathcal{P}_n)} Z.$$

我们通过赋予 Z 次数 n，并令 $k \in \mathbb{Z}$ 时 $M_n(Z)(k)$ 为由 $\mathfrak{L}(V)^f$ 诱导得到的 $M_n(Z)$ 子空间，从而在 $M_n(Z)$上施加分次，即 $M_n(Z)(k) = U(\mathfrak{L}(V)^f)_{k-n}Z$。

对于 $v \in V$，定义 $Y_{M_n(Z)}(v,x) \in \mathrm{End}(M_n(Z))((x))$ 为

$$Y_{M_n(Z)}(v,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} v(m)x^{-m-1} \tag{44}$$

并令 W_Z 为 $M_n(Z)$ 中由以下各项的系数线性张成的子空间

$$(x_0+x_2)^{\mathrm{wt}(v)+n}Y_{M_n(Z)}(v,x_0+x_2)Y_{M_n(Z)}(w,x_2)u \\ -(x_2+x_0)^{\mathrm{wt}(v)+n}Y_{M_n(Z)}(Y(v,x_0)w,x_2)u \tag{45}$$

对于 $v,w \in V$，其中 v 齐次，且 $u \in Z$。DLM98 定理 4.1]证明，若 V 是顶点算子代数，且 Z 是一个不经由 $\mathrm{Zhu}_n(V)$ 分解的 $\mathrm{Zhu}_{n-1}(V)$-模，则

$$\overline{M}_n(Z) := M_n(Z)/U(\mathfrak{L}(V)^f)W_Z$$

是一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次的 V-模，$M_n(Z) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} M_n(Z)(k)$，其中 $M_n(Z)(0) \neq 0$，且 $M_n(Z)(n) \cong Z$ 作为 $\mathrm{Zhu}_n(V)$-模。注意，Z 本身不经由 $\mathrm{Zhu}_{n-1}(V)$ 分解这一条件，确实是使 $M_n(Z)(0) \neq 0$ 成立的充要条件。将 V 换成一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次的顶点代数后，该结果仍然成立。

在顶点算子代数的情形下，[DLM98], 中也指出，$M_n(Z)$满足以下泛性质：对于任意弱 V-模 M 以及任意 $\mathrm{Zhu}_n(V)$-模同态 $\Psi: Z \to \Omega_n(M)$，存在唯一的弱V-模同态 $\Psi: M_n(Z) \to M$，使得 $\Psi \circ \iota = \Psi$其中 ι是将Z 嵌入 $M_n(Z)$的自然单射。这是因为 $M_n(Z)$由 Z 作为弱 V-模生成。同样，即使允许 V 为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次顶点代数，$M_n(Z)$的这一泛性质仍然成立。

令 $Z^* = \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{C})$。与 [DLM98]中的构造一样，$Z^*$ 可以先通过在 $M_n(Z)(n)$ 上诱导，扩展为$M_n(Z)$，然后令 Z^* 湮灭$\bigoplus_{k\neq n} M_n(Z)(k)$。事实上，$M_n(Z)(n) = U(\mathfrak{L}(V)^f)_0 Z$中的元素由以下形式的元素张成

$$o_{p_1}(a^1)\dots o_{p_s}(a^s)Z$$

其中 $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p_1 \geq \cdots \geq p_s \geq -n$, $p_i \neq 0$, $p_1+\cdots+p_s = 0$, $a^i \in V$和$o_{p_i}(a^i) = a^i(\mathrm{wt}(a^i)-1-p_i)$。然后，利用 [DLM98, Remark 3.3]，对 s 进行归纳，将长度为 s 的向量归约为长度为 $s-1$ 的向量，我们得到 Z^* 在 $M_n(Z)(n)$上的良定义作用。

设 $\mathscr{L}_n(Z) = M_n(Z)/\mathcal{J}$，其中

$$\mathcal{J} = \{v \in M_n(Z) \,|\, u'(xv) = 0 \text{ for all } u' \in U^*, x \in U(\hat{V})\}.$$

在 [DLM98] 中证明了，若 V 是一个顶点算子代数，且 $\mathrm{Zhu}_n(V)$-模 Z 不能通过 $\mathrm{Zhu}_{n-1}(V)$ 分解，则 $\mathscr{L}_n(Z)$ 是一个良定义的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次的 V-模，且 $\mathscr{L}_n(Z)(0) \neq 0$；特别地，文中证明了 $U(\mathfrak{L}(V)^f)W_Z \subset \mathcal{J}$，其中 W_Z 是 $M_n(Z)$ 中由 (45) 的系数张成的子空间，即给出了弱顶点算子在 $M_n(Z)$ 上的结合关系。我们有以下在 [BVWY19], 中证明的结果，这是对 [DLM98, 定理 4.2], 中所述内容的必要修正，以及其在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次顶点代数情形下的扩展版本；后者沿用相同的证明（此处再次对 L_{-1} 和 L_0作适当修改即可）。

命题 4.5。
(1) [*BVWY*19] 对于 V 顶点算子代数和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，设 Z 是一个非零的 $Zhu_n(V)$-模，并且若 $n > 0$，则 Z 不能通过 $Zhu_{n-1}(V)$分解。则 $\mathscr{L}_n(Z)$是一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次的 V-模，且 $\mathscr{L}_n(Z)(0) \neq 0$。进一步假设 Z 不存在任何能通过 $Zhu_{n-1}(V)$分解的非零子模，则 $\Omega_n/\Omega_{n-1}(\mathscr{L}_n(Z)) \cong Z$。*(2)* 对于 V 分次顶点代数和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，设 Z 是一个非零的 $Zhu_n(V)$-模，并且若 $n > 0$，则 Z 不能通过 $Zhu_{n-1}(V)$分解。则 $\mathscr{L}_n(Z)$是一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次的广义 V-模，且 $\mathscr{L}_n(Z)(0) \neq 0$。进一步假设 Z 不存在任何能通过 $Zhu_{n-1}(V)$分解的非零子模，则 $\Omega_n/\Omega_{n-1}(\mathscr{L}_n(Z)) \cong Z$。

因此，如果我们限于不可约情形，就得到如下结果，在 V 与 $\mathrm{Zhu}_n(V)$ 的某些不可约模之间建立了对应关系。该定理的初始版本由 Zhu [Zhu96] 证明，其中 $n = 0$ 且 V 是顶点算子代数。随后，在 [DLM98] 中，该结果被推广到所有高阶 Zhu 代数（仍限于顶点算子代数）。与之前类似， [DLM98, Theorem 4.9] 的证明可推广到任意 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次顶点代数。

定理 4.6。 设 V 是一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次顶点代数。那么对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，不能通过 $\mathrm{Zhu}_{n-1}(V)$ 因子化的不可约 $\mathrm{Zhu}_n(V)$-模的同构类，与不可约 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次 V-模之间存在一一对应。

注 4.7。 在一般顶点代数的背景下， $n = 0$ 情形下这一对应关系的证明也已在 [DSK 06] 中建立。

注 4.8. 请注意，从 $\mathrm{Zhu}_0(V)$-模到 V的 $\mathfrak{A}$ 的模以及 $\mathfrak{L}^f(V)$-模的诱导函子 M_0，与 DLM98] 中的函子相同。

注 4.9. 若干论文对高层 Zhu 代数有错误陈述。尽管 He17, 定理 1.10] 是正确的，但前面的陈述——即从 $\mathrm{Zhu}_n(V)$-模范畴到可容许 V-模范畴的诱导函子 $\mathscr{L}_n$ 是反方向限制函子 Ω_n/Ω_{n-1} 的逆——仅对完全可约 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次 V-模成立。一般而言，$\Omega_n/\Omega_{n-1}(\mathscr{L}_n(Z)) \cong Z$ 并不成立，即使 Z 不经过 $\mathrm{Zhu}_{n-1}(V)$ 进行分解。BVWY 19], 中给出的正确陈述要求 Z 不存在经过 $\mathrm{Zhu}_{n-1}(V)$ 的非平凡子模。BVWY19, BVWY20] 中给出了说明这一额外条件必要性的例子。

4.3. **Li 的 $\Delta(x)$ 算子与谱流**。本小节回顾 Li 在 [Li97] 中为顶点算子代数V 引入的算子 $\Delta(x) \in \mathrm{End}(V)[[x, x^{-1}]]$，并将其推广到顶点代数的情形。该算子从形式上同时给出了 V-模的简单流扩张以及谱流模的概念。

请注意，此处我们将 Li 的算子用粗体 $\mathbf{\Delta}$ 表示，因为本文中Δ 表示权算子。Li [在顶点算子代数的背景下证明的该算子的许多性质，自然可以推广到一般的顶点代数情形。例如，我们有以下结果，它们推广了 [Li97, 命题 2.1-2.2]。

命题 4.10。设 $V = (V, Y(\cdot, x))$ 为一个顶点代数，且 $T \in \mathrm{End}(V)$ 为平移算子。

(1) 令 $\mathbf{\Delta}(x) \in \mathrm{End}(V)[[x, x^{-1}]]$ 为任意满足以下条件的算子：

$$\mathbf{\Delta}(x)v \in V[x, x^{-1}], \quad \textit{for all } v \in V. \tag{46}$$

假设 $(V, Y(\cdot, x)) := (V, Y(\mathbf{\Delta}(x)\cdot, x))$ 是一个弱 V-模。则有以下性质成立：

$$\mathbf{\Delta}(x)\mathbf{1} = \mathbf{1}; \tag{47}$$

$$[T, \mathbf{\Delta}(x)] = -\frac{d}{dx}\mathbf{\Delta}(x); \tag{48}$$

$$Y(\mathbf{\Delta}(x_2 + x_0)v, x_0)\mathbf{\Delta}(x_2) = \mathbf{\Delta}(x_2)Y(v, x_0) \textit{ for all } v \in V, \tag{49}$$

其中 x_0 和 x_2 是形式交换变量。反之，若上述三个性质成立，则对于任意弱 V-模 $(M, Y_M(\cdot, x))$，$(M, Y_{\tilde{M}}(\cdot, x)) := (M, Y_M(\mathbf{\Delta}(x)\cdot, x))$ 是一个弱 V-模。

(2) 若 V 是简单的，且 $\mathbf{\Delta}(x) \in \mathrm{End}(V)[[x, x^{-1}]]$ 满足性质 (46)-(49)，则下述结论成立：

$$\mathbf{\Delta}(x)v = 0 \textit{ for } v \in V \textit{ if and only if } v = 0.$$

定义 4.11. 设 V 是一个顶点代数，$\mathscr{U}$ 是其在上文第 2 节中定义的泛包络代数。我们将 $G(V)$ 定义为由满足下述性质的每个 $\mathbf{\Delta}(x) = \sum_{r\in\mathbb{C}} \mathbf{\Delta}_r x^r \in \mathscr{U}\{x\}$ 所组成的集合：对于任意弱V-模 W 及任意 $w \in W$，存在（有限多个）$n_1, ..., n_k \in \mathbb{C}$，使得

$$\mathbf{\Delta}(x)w \in x^{n_1}W[x] + ... + x^{n_k}W[x],$$

并且命题 4.10 的性质 (46)–(49) 成立。

命题 4.12. 设 V 是一个顶点代数，且 $\mathbf{\Delta}(x) \in G(V)$。
(1) 若 M, W 是 *(*弱*)* V-模，且 $\psi\colon M ! W$ 是一个 V-模同态，则 $\psi\colon M ! W$ 也是一个 V-模同态。*(2)* 设 $\mathbf{\Delta}(x) \in G(V)$，使得 $\mathbf{\Delta}(x)$ 有逆 $\mathbf{\Delta}^{-1}(x) \in \mathscr{U}\{x\}$。那么 $\mathbf{\Delta}^{-1}(x) \in G(V)$。

证明.命题 (1) 的证明以及命题 (2) 的证明，分别与 [Li97，命题 2.5]，以及 [Li97，命题 2.7]，完全相同，只是两者都从顶点算子代数的情形推广到了顶点代数的情形。由于 $\mathbf{\Delta}^{-1}(x)$ 的性质 (49) 需要额外几步推导，涉及 δ-函数恒等式，而不仅仅是 [Li97]，中给出的内容，因此我们在此详细写出这部分证明。

设 $\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n$。对于形式交换变量 x_0，x_1，x_2，我们有

$$\begin{aligned}
&x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2}\right)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2)Y(v, x_0)\\
&= x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2}\right)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2)Y(\mathbf{\Delta}(x_1)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_1)v, x_0)\mathbf{\Delta}(x_2)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2)\\
&= x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2 + x_0}{x_1}\right)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2)Y(\mathbf{\Delta}(x_1)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_1)v, x_0)\mathbf{\Delta}(x_2)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2)\\
&= x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2 + x_0}{x_1}\right)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2)Y(\mathbf{\Delta}(x_2 + x_0)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2 + x_0)v, x_0)\mathbf{\Delta}(x_2)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2)\\
&= x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2 + x_0}{x_1}\right)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2)\mathbf{\Delta}(x_2)Y(\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2 + x_0)v, x_0)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2)\\
&= x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2 + x_0}{x_1}\right)Y(\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2 + x_0)v, x_0)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2)\\
&= x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2}\right)Y(\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2 + x_0)v, x_0)\mathbf{\Delta}^{-1}(x_2),
\end{aligned}$$

由此得到该结果，其中我们使用了 δ-函数的性质 [LL04, (2.3.17) 和 (2.3.21)]以及适用于 $\mathbf{\Delta}(x)$ 的性质 (49)。□

我们令 $G^0(V)$ 为 $G(V)$ 中所有可逆元构成的子集。根据命题 4.12(2)， $G^0(V)$ 是一个群。将 [Li97] 扩展到顶点代数的情形，我们有如下结论。

定理 4.13。 设 V 是一个顶点代数，且 $\mathbf{\Delta}(x) \in G^0(V)$。设 W 是一个弱 V-模，并回忆一下，$(W, Y_{\tilde{W}}(\cdot, x)) = (W, Y_W(\mathbf{\Delta}(x)\cdot, x))$ 也是一个弱V-模。那么

(1) (W, Y_W) 是不可约的 V-模，当且仅当 $(W, Y_{\tilde{W}})$ 是不可约的。

(2) (W, Y_W) 是极大的 V-模，当且仅当 $(W, Y_{\tilde{W}})$ 是极大的。

证明。根据定义，由于 $\mathbf{\Delta}(x) \in G^0(V)$， $\mathbf{\Delta}(x)$ 可逆，其逆元记为 $\mathbf{\Delta}^{-1}(x)$，属于 $G^0(V)$。因此，一方面，若 (M, Y_M) 是 (W, Y_W) 的子模，则 $\tilde{}$ 作用 $\mathbf{\Delta}(x)$ 后，可知 $(M, Y_{\tilde{M}})$ 是 $(W, Y_{\tilde{W}})$ 的子模；因此，若 $(W, Y_{\tilde{W}})$ 不可约，则 (W, Y_W) 也不可约。另一方面，若 $(M, Y_{\tilde{M}}(\cdot, x))$ 是 $(W, Y_{\tilde{W}}(\cdot, x))$ 的子模 $\tilde{}$，则 $= (W, Y_W(\mathbf{\Delta}(x)\cdot, x))$，且 $(M, Y_{\tilde{M}}(\cdot, x)) = (M, Y_M(\mathbf{\Delta}(x)\cdot, x))$。因此，作用 $\mathbf{\Delta}^{-1}(x)$ 后，可知 $(M, Y_M(\mathbf{\Delta}^{-1}(x)\mathbf{\Delta}(x)\cdot, x)) = (M, Y_M(\cdot, x))$ 是 $(W, Y_W(\mathbf{\Delta}^{-1}(x)\mathbf{\Delta}(x)\cdot, x)) = (W, Y_W(\cdot, x))$ 的子模；因此，若 (W, Y_W) 不可约 $\tilde{}$，则 $(W, Y_{\tilde{W}})$ 也不可约。这就证明了（1）。类似地可证明（2）。□

接下来，我们引入一个特定的算子 $\mathbf{\Delta}(x) \in G^0(x)$，它实现了谱流。该算子最初由 [Li97] 在顶点算子代数的背景下引入。我们将在此证明， [Li97] 的许多结果（考虑到其中的小笔误后）对于顶点代数仍然成立。

命题 4.14。 设 V 是一个顶点代数，且 $h \in V_1$ 满足条件 $h_n h = \delta_{n,1}\gamma \mathbf{1}$，其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$， $\gamma \in \mathbb{C}$ 固定，且 h_0 在 V 上半单地作用。定义

$$\mathbf{\Delta}(h, x) = x^{h_0} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{-k}(-x)^{-k}\right). \tag{50}$$

于是 $\mathbf{\Delta}(h, x) \in G^0(V)$。此外， $\mathbf{\Delta}(h, x)$ 的逆为 $\mathbf{\Delta}(-h, x)$。

证明。 首先注意到，根据顶点代数模的交换子公式以及性质 $h_n h = \delta_{n,1}\gamma \mathbf{1}$，我们有

$$\begin{aligned} [h_m, h_n] &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \binom{m}{j} (h_j h)_{m+n-j} = (h_0 h)_{m+n} + m\gamma \mathbf{1}_{m+n-1} \\ &= \lambda h_{m+n} + m\gamma \delta_{m+n,0} \end{aligned} \tag{51}$$

对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}$，根据假设，它是 h 的特征值。事实上，由于以下论证， $h_0 h = 0$，即方程（51）中的$\lambda = 0$：回想一下，对于 u， $v \in V$，我们有 $Y(u, x)v = e^{xT} Y(v, -x)u$。因此， $u_0 v = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{-i-1} \frac{T^i}{i!} v_i u$。特别地，

我们有 $h_0 h = -h_0 h + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{T^i}{i!} h_i h$。由于对于 $n \geq 1$ 和 $T\mathbf{1} = 0$，有 $h_n h = \delta_{n,1} \gamma \mathbf{1}$，因此我们得到 $h_0 h = -h_0 h$。所以，$h_0 h = 0$。因此，特别地，根据方程（51），对于所有 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，都有 $[h_0, h_k] = 0$。接着写作 $\mathbf{\Delta}(h, x) = x^{h_0} \exp(A)$，我们有 $\mathbf{\Delta}(-h, x) = x^{-h_0} \exp(-A)$，并且还有 A，$-A$ 和 h_0 两两可交换。因此

$$\mathbf{\Delta}(h,x)\mathbf{\Delta}(-h,x) = x^{h_0}\exp(A)x^{-h_0}\exp(-A) = x^{h_0}x^{-h_0}\exp(A)\exp(-A) = 1.$$

因此，$\mathbf{\Delta}(h, x)$ 可逆，其逆为 $\mathbf{\Delta}(-h, x)$。我们仍需证明 $\mathbf{\Delta}(h, x)$ 满足性质 (46)–(49)。对所有 V，$\mathbf{\Delta}(h, x)v \in V[x, x^{-1}]$ 这一事实源自 V 的截断性质。$\mathbf{\Delta}(h, x)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ 这一事实源自创生性质，即对 $k \geq 0$，$h_k \mathbf{1} = 0$。为证明 $[T, \mathbf{\Delta}(h, x)] = -\frac{d}{dx}\mathbf{\Delta}(h, x)$，我们首先注意到，根据 T-括号导数性质，有

$$[T, h_k] = -k h_{k-1} \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}.$$

接下来回顾一下，由于 $\mathrm{ad}(T)$ 是一个导子，我们有 $[T, e^A] = [T, A]e^A$，因此

$$\begin{aligned}
[T, \mathbf{\Delta}(h,x)] &= [T, x^{h_0}]e^A + x^{h_0}[T, e^A] \\
&= 0 + x^{h_0}[T, A]e^A \\
&= x^{h_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} h_{k-1}(-x)^{-k}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{-k}(-x)^{-k}\right) \\
&= x^{h_0}\left(-h_0 x^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(-x)^{-k-1}\right)e^A \\
&= -\frac{d}{dx}\mathbf{\Delta}(h,x).
\end{aligned}$$

最后，我们注意到，性质 (49) 由 [Li97，引理 3.3] 给出，其证明与顶点代数情形下的证明完全相同。□

注意，若允许 h_0 在 V 上半单地作用，其特征值属于 $\frac{1}{t}\mathbb{Z}$，且满足 $t \in \mathbb{Z}_{>1}$，那么正如 [Li96], 中所示，若 (W, Y_W) 是一个弱 V-模，则 $(W, Y_{\tilde{W}})$ 是一个弱 σ_h-扭曲 V-模（对于 $\sigma_h = e^{2\pi i h_0}$）。而若只允许整数值，~则称 $(W, Y_{\tilde{W}})$ 为谱流变换弱 V-模。谱流变换后的 V-模也常沿用经典李理论术语称为“扭曲”模，但它们并非顶点代数理论意义上的扭曲 V-模。

在 [Li96 中，Li97] 研究了扭曲和谱流这两种情形，例如与仿射李代数和格相关的顶点算子代数。在第 5.2 节中，我们将研究 Weyl 顶点代数在谱流作用下的某些 $\mathcal{V}$-模，其中心荷为 $c = 2$。

4.4. 弱交锁模。我们在下一节感兴趣的 $\mathcal{V}$ 表示理论的一个方面，是对弱交锁模的研究。这一性质反映了环上一个模 M 内部结构的刚性程度。它涉及 M 的两个特定子模：底和根。回顾一下，模 M 的底记作 Soc(M)，是其所有不可约子模之和；而 M 的根记作 Rad(M)，是其所有极大真子模的交。于是，我们有以下定义。

定义4.15。

(i) 设 A 是一个结合代数，W 是一个 A-模。若 $W/\mathrm{Soc}(W) \cong \mathrm{Rad}(W)$ 且 $W/\mathrm{Rad}(W) \cong \mathrm{Soc}(W)$，则称 W 为弱交锁。(ii) 类似地，对于 V 一个顶点代数和 W 一个弱 V-模，若 $W/\mathrm{Soc}(W) \cong \mathrm{Rad}(W)$ 且 $W/\mathrm{Rad}(W) \cong \mathrm{Soc}(W)$，则称 W 为弱交锁。

注 4.16。弱交锁这一概念比 [Miy04] 中定义的交锁概念（另见 [BBOHY23]）以及 [BBOHY23] 中定义的强交锁概念更弱。在这些情形下，已证明对于某些顶点算子代数及其模，伪迹是良定义的。弱交锁这一概念是所有已知伪迹良定义情形中的最弱条件。

我们有以下关于由 Zhu 代数诱导的 V-模的结果：

定理 4.17. 设 V 是一个顶点代数，Z 是一个不可分解的 $\mathrm{Zhu}_d(V)$-模，且没有非平凡子模可经由 $\mathrm{Zhu}_{d-1}(V)$ 分解。若 Z 不是弱交锁的，则 $\mathscr{L}_d(Z)$ 是一个不可分解的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次 V-模，且不是弱交锁的。

证明. 设 Z 是一个 Zhu$_d(V)$-模，且没有非平凡子模是 Zhu$_{d-1}(V)$ 的模。令 $W = \mathscr{L}_d(Z)$。于是 $W(d) = Z$，并且由定理 4.6，W 的不可约子模与 $Z' \subset Z$ 的子模之间存在双射对应。因此$\mathscr{L}_d$(底部(Z)) $=$ 底部(W)。

设 Z' 是 Z的一个极大子模。则 Z/Z' 是不可约的，且 $\mathscr{L}_d(Z/Z') = \mathscr{L}_d(Z)/\mathscr{L}_d(Z')$ 是一个不可约的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次 V-模，这意味着 $\mathscr{L}_d(Z')$ 是 W的一个极大子模。这意味着 $\mathscr{L}_d$(根(Z)) $=$根(W)，因此根(W)(d) $=$ 根(Z)。

因此，若 W 是弱交锁的，则 $W(d)/\mathrm{Soc}(W)(d) \cong (W/\mathrm{Soc}(W))(d) \cong (\mathrm{Rad}(W))(d)$，这意味着 $Z/\mathrm{Soc}(Z) \cong \mathrm{Rad}(Z)$。类似地，$W(d)/\mathrm{Rad}(W)(d) \cong (W/\mathrm{Rad}(W))(d) \cong \mathrm{Soc}(W)(d)$，这意味着 $Z/\mathrm{Rad}(Z) \cong \mathrm{Soc}(Z)$，因此 Z 是弱交锁的。□

注 4.18. 定理 4.17 的逆命题并不成立，正如 [BBOHY23]中以 V 通用 Virasoro 顶点算子代数以及由零级 Zhu 代数诱导的一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分级 V-模为例所示。若 V 的中心荷为

c且 Z 是零级 Zhu 代数的一个共形权为 h的不可分解可约模，那么 Z 将是弱交锁的，但由此得到的诱导模 $W = \mathscr{L}_0(Z)$不一定是弱交锁的。例如，若$(c,\ h)$位于扩展 Kac 表中，且 $c \neq 1,\ 25$，那么 $W = \mathscr{L}_0(Z)$将不是弱交锁的。

对于由算子 $\mathbf{\Delta}(x) \in G^0(V)$ 扭曲作用所产生的模，我们有以下结果。

定理 4.19。设 V 是一个顶点代数，W 是一个弱 V-模，且 $\mathbf{\Delta}(x) \in G^0(V)$。则

(1) (M, Y_M) *是* (W, Y_W) *的底，当且仅当* $(M, Y_{\tilde{M}})$ *是* $(W, Y_{\tilde{W}})$ *的底。*

(2) (M, Y_M) *是* (W, Y_W) *的根，当且仅当* $(M, Y_{\tilde{M}})$ *是* $(W, Y_{\tilde{W}})$ *的根。*

(3) (W, Y_W) *是弱交锁的，当且仅当* $(W, Y_{\tilde{W}})$ *是弱交锁的。特别地，如果* $\mathbf{\Delta}(x) = \mathbf{\Delta}(h, x)$ *如命题 4.14 中所定义，则 (1)–(3) 成立。*

证明。结论（1）和（2）可由定理 4.13 的（1）和（2）立即推出。下面证明（3）。对于弱 V-模 (W, Y_W) 及其子模 (M, Y_M)，回顾一下，商模 $(W/M, Y_{W/M})$ 仍是弱 V-模，其作用定义为 $Y_{W/M}(v, z)(w + M) = Y_W(v, z)w + M$对 $v \in V,\ w \in W$。因此，$\widetilde{W/M}$ $(W/M, Y_{\widetilde{W/M}})$ 是弱 V-模。我们有 $W/M = W/M$且 $Y_{\widetilde{W/M}}(v, z)(w + M) = Y_{\tilde{W}}(v, z)w + M$对 $v \in V,\ w \in W$。

现在，假设 (W, Y_W) 是一个弱交锁的弱 V-模；也就是说，W满足 $W/\mathrm{Soc}(W) \cong \mathrm{Rad}(W)$，且 $W/\mathrm{Rad}(W) \cong \mathrm{Soc}(W)$，作为 V-模。由命题 4.12，我们有

$$\widetilde{\mathrm{Rad}(W)} \cong W/\widetilde{\mathrm{Soc}(W)} = \tilde{W}/\widetilde{\mathrm{Soc}(W)}$$
$$\widetilde{\mathrm{Soc}(W)} \cong W/\widetilde{\mathrm{Rad}(W)} = \tilde{W}/\widetilde{\mathrm{Rad}(W)}.$$

根据 (1) 和 (2)，由于 $\mathrm{Soc}(W) = \mathrm{Soc}(W)$ 且 $\mathrm{Rad}(W) = \mathrm{Rad}(W)$，我们有

$$\mathrm{Rad}(\tilde{W}) \cong \tilde{W}/\mathrm{Soc}(\tilde{W}) \quad \text{and} \quad \mathrm{Soc}(\tilde{W}) \cong \tilde{W}/\mathrm{Rad}(\tilde{W}).$$

因此，W 是弱交锁的。类似地，利用 $\mathbf{\Delta}(x)$ 可逆这一事实，可得，若 W 是弱交锁的，则 W 是弱交锁的。□

注 4.20。在第 5.2 节中，我们将定理 4.19 应用于中心荷为 2 的 Weyl 顶点代数的模。该定理也适用于例如仿射顶点代数和 $\mathcal{W}$-代数的情形（参见 [CR12, CR13b, CR13a, ACKR20, AKR21, NOHRCW24, CMY24, Cre24, FRR25, ACK25] 等文献），其中模的谱流尤为重要，分次伪迹也值得关注。

5. Weight Modules for the Weyl vertex algebra at $c = 2$

在本节中，我们重点研究 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次的 $\mathcal{V}$-模的分类。这些模相对于式 (30) 中定义的海森堡场 J 具有权空间分解，并且要么由 $\mathcal{V}$的 Zhu 代数诱导而来，要么是由 Zhu 代数诱导的某个模的谱流。这两类模与例如 [RW15a、AW22],中研究的模范畴相关，正如下文所述。

我们证明，由 Zhu 代数诱导或通过谱流实现的所有可约不可分解 $\mathcal{V}$-模，按照定义4.15 的意义均非弱交锁。这证实了在 RW15a、AW22] 中研究的 category $\mathscr{F}$ 及其双重分次迹，正如这些著作所示，是研究 $\mathcal{V}$ 模性问题的正确框架。

5.1. 由 Zhu 代数诱导的 $\mathcal{V}$-模的分类。 我们首先关注由 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 赋分的 $\mathcal{V}$ 权模，它们由 Zhu 代数诱导而来。（注意，一般而言，对于任意 V，由 Zhu 代数诱导的模都是$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 赋分的。）事实上，推论 3.6 保证我们只需考虑 $\mathcal{V}$ 的零级 Zhu 代数。

命题 5.1。 所有由 $\mathrm{Zhu}_n(\mathcal{V})$-代数诱导的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次 $\mathcal{V}$-模（$n \geq 0$）均由零级 *Zhu* 代数诱导，即由 *Weyl* 代数 $\mathscr{W}$ 的模诱导。

证明。令 W 为在层 n 诱导得到的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分级 $\mathcal{V}$-模，则对于某个 $\mathrm{Zhu}_n(\mathcal{V})$-模 Z，有 $W = \mathscr{L}_n(Z)$。

首先假设 Z 的任意非平凡真子模都不经过 $\mathrm{Zhu}_{n-1}(\mathcal{V})$ 因子化，那么由推论 3.6，Z 是 $\mathscr{W} \otimes$矩阵代数$_{|P_2(n)|}(\mathbb{C})$ 的模。于是 Z 与某个 $\mathscr{W}$-模 Morita 等价，并且我们还有 $\mathscr{W} \cong \mathrm{Zhu}_0(\mathcal{V})$。事实上，我们断言，这个 Morita 等价由下式实现：

$$Z = W(n) \longleftrightarrow W(0)$$

其中 $W(0)$ 是模 W 的零层，且

$$Z = W(n) = \mathcal{V}_n.W(0)$$

其中 $\mathcal{V}_n$ 是由 $\mathcal{V}$ 中权为 n 的 PBW 基向量给出的 Mat$_{|P_2(n)|}(\mathbb{C})$-模，具体见式 (36)。这一实现意味着，对 Z 和 $W(0)$ 进行 Zhu 诱导都会得到同一个 $\mathcal{V}$-模：

$$W = \mathscr{L}_n(Z) = \mathscr{L}_0(W(0)).$$

如果 Z 的一个非平凡真子模可通过 $\mathrm{Zhu}_{n-1}(\mathcal{V})$因子化，那么 Z 可分解为 $Z = Z' \oplus Z''$，其中 Z' 是 $\mathrm{Zhu}_{n-1}(\mathcal{V})$-模，而 Z'' 是 $\mathscr{W} \otimes$ 矩阵代数$_{|P_2(n)|}(\mathbb{C})$的一个模。于是，Z' 对应于一个 $\mathcal{V}$-模 $W' = \mathscr{L}_{n-1}(Z')$，根据前面的讨论，该模由零级 Zhu 代数诱导而来，即 $W' = \mathscr{L}_0(W'(0))$。

此外，与前一种情形一样， Z'' 与一个 $\mathscr{W}$-模 $W''(0)$ Morita 等价，并且它们的诱导给出了同一个 $\mathscr{W}$-模

$$W'' = \mathscr{L}_n(Z'') = \mathscr{L}_0(W''(0)).$$

但随后

$$W \cong \mathscr{L}_n(Z) = \mathscr{L}_{n-1}(Z') \oplus \mathscr{L}_n(Z'') = W' \oplus W''$$

由于 W' 和 W'' 是通过诱导得到的，因此在零层诱导： $W = \mathscr{L}_0(W'(0) \oplus W''(0))$。

□

下文将关注权重 $\mathcal{V}$-模，它们定义为（弱） $\mathcal{V}$-模，且海森堡场 $J = a_{-1}a_0^*\mathbf{1}$ （定义见式（30））的零模在其上半单作用。正如前文所述，这类模已得到深入研究，例如见 [RW15a] 和 [AW22], 。

关于 Zhu 对应， $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次权重 $\mathcal{V}$-模是由权重 $\mathscr{W}$-模诱导得到的；这类模是 $\mathscr{W}$-模，且乘积 $aa^* \in \mathscr{W}$ 在其上半单作用。Weyl 代数 $\mathscr{W}$ 的不可约权模由 Block 在 [Blo79]中分类。这里我们按照 [AW22]中的记号给出这一分类。

任意不可约权重 $\mathscr{W}$-模都同构于以下对象中的一个，且仅一个:

(1) $\overline{\mathcal{V}} = \mathbb{C}[x]$，其中 a 的作用为 $-\frac{\partial}{\partial x}$ ，而 a^* 的作用为乘以 x。
(2) $\mathbf{c}\overline{\mathcal{V}} = \mathbb{C}[x]$，其中 a^* 的作用为 $-\frac{\partial}{\partial x}$ ，而 a 的作用为乘以 x。注意， $\mathbf{c}\mathcal{V} = \varphi_1(\mathcal{V})$，其中 φ_1 由式 (23) 定义，因此， $\mathbf{c}\mathcal{V}$ 作为向量空间与 $\mathcal{V}$ 相同，但 $\mathscr{W}$ 的作用由 $\varphi_1(\mathscr{W})$ 给出。注意，通过向量空间同构 $p(x) \mapsto$ ，对于 $t \in \mathbb{C}^\times$ ，有 $\varphi_1(\mathcal{V}) \cong \varphi_t(\mathcal{V})$！对于任意 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ，有 $tp(x)$，这给出了一个 $\mathscr{W}$-模同构。此外，对于所有 $t \in \mathbb{C}^\times$，通过 $\mathscr{W}$-模同构 $p(x) \mapsto -p(x)$，有 $\varphi_t^2(\mathcal{V}) \cong \mathcal{V}$。
(3) $\overline{\mathcal{W}_{\bar{\lambda}}} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]x^\lambda$，对于 $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, $\bar{\lambda} \neq 0$，其中 a 的作用为 $\frac{\partial}{\partial x}$ ，而 a^* 的作用为乘以 x。注意，模 $\mathbf{c}\mathcal{W}_{\bar{\lambda}} = \varphi_1(\mathcal{W}_{\bar{\lambda}}) = \mathbb{C}[x, x^{-1}]x^\lambda$，其中 a^* 的作用为 $-\frac{\partial}{\partial x}$ ，而 a 的作用为乘以 x，通过 $\mathscr{W}$-模同构 $x^{k+\lambda} \mapsto (-1)^k(1+\lambda)(2+\lambda)\ldots\ldots(k+\lambda)x^{-(k+1+\lambda)}$，与 $\mathcal{W}_{-\bar{\lambda}}$ 同构。

此外， $\mathscr{W}$ 还存在以下不可分解可约模:
(4) $\overline{\mathcal{W}_0^+} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 其中 a 的作用为 $\frac{\partial}{\partial x}$ ，而 a^* 的作用为乘以 x。该模由以下非分裂正合列唯一刻画:

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{V}} \longrightarrow \overline{\mathcal{W}_0^+} \longrightarrow \mathbf{c}\overline{\mathcal{V}} \longrightarrow 0.$$

(5) $\overline{\mathcal{W}_0^-} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 其中， a^* 的作用为 $-\frac{\partial}{\partial x}$ ，而 a 的作用为 x的乘法。该模由以下非分裂正合列唯一刻画

$$0 \longrightarrow \mathbf{c}\overline{\mathcal{V}} \longrightarrow \overline{\mathcal{W}_0^-} \longrightarrow \overline{\mathcal{V}} \longrightarrow 0.$$

注意，只有 $\mathcal{V}$ 本身是关于 aa^* 的作用及相应分次的 $\mathscr{W}$ 最低权模，而$\mathbf{c}\mathcal{V}$ 是关于此作用的最高权模。其他模通常被称为 $\mathscr{W}$的“弛豫最高权模”，这一术语取自 [FST98]。

令 $\mathscr{C}_Z$ 为由 $\mathcal{V}$的 Zhu代数诱导而来的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分级权 $\mathcal{V}$-模范畴。由命题 5.1，这些模都是在零层由权 $\mathscr{W}$-模的同构类诱导而来。因此，对上文情形 (1)-(3)中列出的 $\mathscr{W}$-模进行诱导，得到范畴 $\mathscr{C}_Z$中的不可约权 $\mathcal{V}$-模：

(1) $\mathcal{V} = \mathscr{L}_0(\overline{\mathcal{V}})$; (2) $\varphi_1(\mathcal{V}) = \mathbf{c}\mathcal{V} = \mathscr{L}_0(\mathbf{c}\mathcal{V})$;

(3) $\mathcal{W}_{\bar{\lambda}} = \mathscr{L}_0(\overline{\mathcal{W}_\lambda})$，其中 $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, $\lambda \neq 0$。

此外，我们还有两个可约的不可分解 $\mathcal{V}$-模：

(4) $\mathcal{W}_0^+ = \mathscr{L}_0(\overline{\mathcal{W}_0^+})$，它由以下非分裂正合列唯一刻画

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}_0^+ \longrightarrow \mathbf{c}\mathcal{V} \longrightarrow 0.$$

(5) $\mathcal{W}_0^- = \overline{\mathscr{L}_0(\mathcal{W}_0^-)}$，它由以下非分裂正合列唯一刻画

$$0 \longrightarrow \mathbf{c}\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}_0^- \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow 0.$$

引理 5.2. 所有不可分解的可约权 $\mathscr{W}$-模都不是弱交锁的。

证明。 这两个不可分解的可约 $\mathscr{W}$-模 $\mathcal{W}_0^{\pm}$都不是弱交锁的，恰恰是因为 $\mathcal{V} \ncong \mathbf{c}\mathcal{V}$。例如，$\mathrm{Soc}(\mathcal{W}_0^+) = \mathrm{Rad}(\mathcal{W}_0^+) = \mathcal{V}$ 且$\mathcal{W}_0^+/\mathrm{Soc}(\mathcal{W}_0^+) \cong \mathbf{c}\mathcal{V} \ncong \mathcal{V} = \mathrm{Rad}(\mathcal{W}_0^+)$，这证明了 $\mathcal{W}_0^+$不是弱交锁的。类似地，$\mathrm{Soc}(\mathcal{W}_0^-) = \mathrm{Rad}(\mathcal{W}_0^-) = \mathbf{c}\mathcal{V}$，因此$\mathcal{W}_0^-/\mathrm{Soc}(\mathcal{W}_0^-) \cong \mathcal{V} \ncong \mathbf{c}\mathcal{V} = \mathrm{Rad}(\mathcal{W}_0^-)$，这证明了 $\mathcal{W}_0^-$不是弱交锁的。□

根据定理 4.17，Zhu 对应保证不存在由权 $\mathscr{W}$-模诱导的弱交锁权$\mathcal{V}$-模，因此我们有如下结论：

定理 5.3. 范畴 $\mathscr{C}_Z$中所有不可分解的可约权 $\mathcal{V}$-模都不是弱交锁的。也就是说，所有从 $\mathcal{V}$ 的 *Zhu*代数诱导而来的不可分解可约权 $\mathcal{V}$-模都不是弱交锁的。

注 5.4。 在 [RW15a] 和 [AW22], 中，所考察的权 $\mathcal{V}$-模范畴 $\mathscr{R}$ 是此处定义的范畴的一个子范畴，因为它们将权限制为实数，以强调对物理理论建模的需求。因此，定理 5.3 也意味着， $\mathscr{R}$ 中的不可分解可约模均非弱交锁；这一事实在 [RW15a, AW22] 中也基本上已有观察。

5.2. **权的谱流 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$分次 $\mathcal{V}$由 Zhu 代数诱导的模**。本节研究由范畴 $\mathscr{C}_Z$中的模经谱流得到的 $\mathcal{V}$不可分解 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次模。我们将此范畴记为$\mathscr{C}$ 证明范畴 $\mathscr{C}$ 中的不可分解可约 $\mathcal{V}$-模并非弱交锁。这表明，这些模不具有良定义的双分次伪迹（其意义是将已知情形下的分次伪迹推广而来）。

回顾一下，令 $J:=a_{-1}a_0^*\mathbf{1}$，且 $J(z)=Y(J,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}J_nz^{-n-1}$，则 J生成一个海森堡李代数。特别地，$J\in\mathcal{V}_1$，并且根据方程 (30) 以及 $J=J_{-1}\mathbf{1}$ 这一事实，有 $J_nJ=-\delta_{n,\,1}\mathbf{1}$。此外，对于 $m,\ n\in\mathbb{Z}$，我们有 $[J_m,a_n]=-a_{n+m}$ 和 $[J_m,a_n^*]=a_{m+n}^*$。特别地，J_0具有整数特征值且作用半单。因此，由命题 4.14 可知，对于 $\ell\in\mathbb{Z}$，$\mathbf{\Delta}(-\ell J,x)\in G^0(\mathcal{V})$ 定义了 $\mathcal{V}$-模的谱流扭曲。

设 (W,Y_W) 是一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-可分次的权 $\mathcal{V}$-模。对于固定的 $\ell\in\mathbb{Z}$，考虑模

$$(\tilde{W},Y_{\tilde{W}}(\cdot,x))=(W,Y_W(\mathbf{\Delta}(-\ell J,x)\cdot,x)).\tag{52}$$

˜分析 $\mathcal{V}$在（$W,Y_{\tilde{W}}$）上的新作用，我们有

$$\mathbf{\Delta}(-\ell J,x)a_{-1}\mathbf{1}=x^{\ell}\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\ell J_n}{-n}(-x)^{-n})a_{-1}\mathbf{1}=x^{\ell}a_{-1}\mathbf{1},$$

也就是说

$$Y_{\tilde{W}}(a_{-1}\mathbf{1},x)=Y_W(\mathbf{\Delta}(-\ell J,x)a_{-1}\mathbf{1},x)=Y_W(x^{\ell}a_{-1}\mathbf{1},x),$$

and

$$\mathbf{\Delta}(-\ell J,x)a_0^*\mathbf{1}=x^{-\ell}\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\ell J_n}{-n}(-x)^{-n})a_0^*\mathbf{1}=x^{-\ell}a_0^*\mathbf{1},$$

因此

$$Y_{\tilde{W}}(a_0^*\mathbf{1},x)=Y_W(\mathbf{\Delta}(-\ell J,x)a_0^*\mathbf{1},x)=Y_W(x^{-\ell}a_0^*\mathbf{1},x).$$

因此，令 $Y_{\tilde{W}}(v,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_nx^{-n-1}$ 且 $Y_W(v,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_nx^{-n-1}$，其中 $v\in\mathcal{V}$，我们有

$$\widetilde{(a_{-1}\mathbf{1})}_n=(a_{-1}\mathbf{1})^W_{n+\ell}=a^W_{n+\ell},\quad\text{and}\quad\widetilde{(a_0^*\mathbf{1})}_n=(a_0^*\mathbf{1})^W_{n-\ell}=(a^*)^W_{n-\ell}.$$

˜因此，对于每个 $\ell\in\mathbb{Z}$，模 $(W,Y_{\tilde{W}}(\cdot,x))=(W,Y_W(\mathbf{\Delta}(-\ell J,x)\cdot,x))$ 实现了由式（24）给出的谱流 σ^{ℓ}，我们记为

$$(\sigma^{\ell}(W),Y_{\ell}(\cdot,x)):=(W,Y_W(\mathbf{\Delta}(-\ell J,x)\cdot,x)).$$

由定理 4.13 可知，$\mathscr{C}$ 中的任意不可约模都同构于以下互不等价的模之一

$$\sigma^{\ell}(\mathcal{V}),\qquad\sigma^{\ell}(\mathcal{W}_{\bar{\lambda}}),\qquad\text{for }\ell\in\mathbb{Z}\text{ and }\bar{\lambda}\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}\backslash\{\bar{0}\},$$

$\mathscr{C}$ 中的不可分解可约模由下式给出

$$\sigma^{\ell}(\mathcal{W}_0^{\pm}) \quad \text{for } \ell \in \mathbb{Z}.$$

作为定理 4.19 的直接推论，我们得到以下结论。

推论 5.5。 范畴 $\mathscr{C}$ 中所有不可分解的可约权 $\mathcal{V}$-模都不是弱交锁的。

References

[AB23a] D. Addabbo 和 K. Barron。《海森堡顶点算子代数的二级 Zhu 代数》。《Commun. Algebra》，51(8):3405–3463，2023年。[AB23b] D. Addabbo 和 K. Barron。《高阶 Zhu 代数的生成元与关系及其应用》。《J. Algebra》，623:496–540，2023年。[ACK25] T. Arakawa、T. Creutzig 和 K. Kawasetsu。《仿射 Kac-Moody 代数与小量子群的权表示》。《Adv. Math.》，477:论文编号 110365，48 页，2025年。[ACKR20] J. Auger、T. Creutzig、S. Kanade 和 M. Rupert。《与顶点代数相关的编织张量范畴》。《Comm. Math. Phys.》，378:219–260，2020年。[AKR21] D. Adamovi´c、K. Kawasetsu 和 D. Ridout。《Bershadsky–Polyakov 代数及其松弛模的一种实现》。《Lett. Math. Phys》，111(38)，2021年。[AW22] R. Allen 和 S. Wood。《玻色幽灵消除：玻色幽灵顶点代数具有带刚性融合的对数模范畴》。《Commun. Math. Phys.》，390:959–1015，2022年。[Bar13] K. Barron。《关于超对称顶点算子超代数的扭曲模》。载于 V. Dobrev 编，《李理论及其在物理学中的应用》，第 36 卷，第 411–420 页。Springer 数学与统计学论文集，施普林格，东京，2013年。[BBOH+22] K. Barron、K. Batistelli、F. Orosz Hunziker、V. Pedi´c Tomi´c 和 G. Yamskulna。《关于分次顶点代数的有理性及其在共形流下 Weyl 顶点代数中的应用》。《J. Math. Phys.》，63:J. Math. Phys.，2022年。[BBOHY23] K. Barron、K. Batistelli、F. Orosz Hunziker 和 G. Yamskulna。《顶点算子代数强交锁模的分次伪迹及其应用》。arXiv:2311.17257，2023年。[Blo79] R. Block。《Weyl 代数的不可约表示》 A_1。载于 MP. Malliavin 编，《Paul Dubreil 代数讨论班：数学讲义》，第 740 卷，第 69–79 页。施普林格，柏林、海德堡，1979年。[BVWY19] K. Barron、N. Vander Werf 和 J. Yang。《顶点算子代数的高阶 Zhu 代数与模》。《J. Pure Appl. Algebra》，223(8):3295–3317，2019年。[BVWY20] K. Barron、N. Vander Werf 和 J. Yang。《Virasoro 顶点算子代数的一级 Zhu 代数》。《Contemp. Math.》，753:17–43，2020年。[CMY24] T. Creutzig、R. McRae 和 J. Yang。《容许级仿射权模的带状范畴》，2024年。arXiv:2411.11386。[CR12] T. Creutzig 和 D. Ridout。《分数级 WZW 模型的模数据与 Verlinde 公式 I》。《Nucl. Phys. B》，865:83–114，2012年。[CR13a] T. Creutzig 和 D. Ridout。《分数级 WZW 模型的模数据与 Verlinde 公式 II》。《Nucl. Phys. B》，875:423–458，2013年。

↓[CR13b] T. Creutzig 和 D. Ridout。《扩展 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的 W-代数》。载于《李理论及其在物理学中的应用》，Springer 数学与统计学论文集第 36 卷，第 349–367 页。施普林格，东京，2013年。[Cre24] T. Creutzig。《对数共形场论中 Verlinde 公式的解析》，2024年。arXiv:2411.11383v1。[DGK25] C. Damiolini、A. Gibney 和 D. Krashen。《通过模态转移代数研究平滑化上的共形块》。《Commun. Math. Phys.》，406(131)，2025年。[Dix68] J. Dixmier。《关于 Weyl 代数》。《法国数学会通报》，96:209–242，1968年。[DLM96] C. Dong、H. Li 和 G. Mason。《顶点算子代数的简单流与扩张》。《Comm. Math. Phys.》，180(3):671–707，1996年。[DLM98] C. Dong、H. Li 和 G. Mason。《顶点算子代数与结合代数》。《J. Algebra》，206(1):67–96，1998年。[DLMM98] C. Dong、H. Li、G. Mason 和 P.S. Montague。《顶点算子代数的根》。载于《怪兽群与李代数》（俄亥俄州哥伦布，1996），第 7 卷，第 17–25 页。俄亥俄州立大学数学研究所出版物，德格鲁伊特，柏林，1998年。[DSK06] A. De Sole 和 V. Kac。《有限 W-代数与仿射 W-代数》。《日本数学杂志》，1:137–261，2006年。[EG97] W. Eholzer 和 M.R. Gaberdiel。《有理超共形理论的幺正性》。《Commun. Math. Phys.》，186:61–85，1997年。[FBZ04] E. Frenkel 和 D. Ben-Zvi。《顶点代数与代数曲线》。数学调查与专著第 88 号。美国数学会，2004年。[Fre07] E. Frenkel。《环群的朗兰兹对应》，第 103 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007年。[FRR25] J. Fasquel、C. Raymond 和 D. Ridout。《分母为 2 的容许级极小模型的模性》。《Commun. Math. Phys.》，406(279)，2025年。[FST98] B. Feigin、A. Semikhatov 和 I. Tipunin。《仿射 $\mathfrak{sl}(2)$ 与超共形代数表示的链范畴之间的等价》。《J. Math. Phys.》，39:3865–3905，1998年。[FZ92] I.B. Frenkel 和 Y. Zhu。《与仿射代数及 Virasoro 代数表示相关的顶点算子代数》。《杜克数学杂志》，66:123–168，1992年。[He17] X. He。《高阶 Zhu 代数是泛包络代数的子商》。《J. Algebra》，491:265–279，2017年。[Li96] H. Li。《扭曲顶点算子的局部系统、顶点算子超代数与扭曲模》。载于 Chongying Dong 和 Geoffrey Mason 编，《月光、怪兽群及相关主题》，Contemp. Math. 第 193 卷，第 203–236 页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1996年。[Li97] H. Li。《顶点算子代数理论中的物理超选择原理》。《J. Algebra》，196(2):436–457，1997年。[Lin09] A.R. Linshaw。《不变手征微分算子与 W_3 代数》。《J. Pure Appl. Algebra》，213(5):632–648，2009年。[LL04] J. Lepowsky 和 H. Li。《顶点算子代数及其表示入门》，第 227 卷。施普林格，波士顿，马萨诸塞州，2004年。[LMRS02] F. Lesage、P. Mathieu、J. Rasmussen 和 H. Saleur。《$\hat{\mathfrak{su}}(2)_{-1/2}$ WZW 模型与 $\beta\gamma$ 系统》。《核物理 B》，647(3):363–403，2002年。[LY05] H. Li 和 G. Yamskulna。《关于与顶点代数丛相关的某些顶点代数及其模》。《J. Algebra》，283(1):367–398，2005年。

[Miy04] M. Miyamoto. 顶点算子代数的（伪）迹函数与模不变性。Pro. Inst. Mat. NAS Ukr., 50(3):1145–1151, 2004.[Miy14] M. Miyamoto. 顶点算子代数的 C_1-余有限性与融合积。载于 C. Bai、J. Fuchs、YZ. Huang、L. Kong、I. Runkel 和 C. Schweigert 编，Conformal Field Theories and Tensor Categories。北京大学数学讲座，第 271–279 页。施普林格，柏林、海德堡，2014.[MO01] J. Maldacena 和 H. Ooguri。AdS_3 中的弦与 SL(2, R) WZW模型。I：谱。J. Math. Phys., 42(7):2929–2960, 2001.[NOHRCW24] H. Nakano、F. Orosz Hunkizer、A. Ros Camacho 和 S. Wood。2024年，关于简单可容许仿射 $\mathfrak{sl}(2)$及 $\mathcal{N}=2$ 超共形顶点算子超代数上的权模的融合规则与刚性。arxiv:2411.11387.[NT05] K. Nagatomo 和 A. Tsuchiya。与正则手征顶点算子代数相关的共形场论，I：射影直线上的理论。《杜克数学杂志》，128(3):393–471, 2005.⁀[Rid09] D. Ridout。 $\mathfrak{sl}(2)_{-1/2}$：案例研究。《核物理 B》，814(3):485–521, 2009.[RW15a] D. Ridout 和 S. Wood。 $c=2$ 处的玻色鬼作为对数共形场论。Lett. Math. Phys., 105:279–307, 2015.[RW15b] D. Ridout 和 S. Wood。松弛奇异向量、Jack对称函数与$\widehat{\ }$分数层 $\mathfrak{sl}(2)$模型。Nucl. Phys. B., 894:621–664, 2015.[SS87] A. Schwimmer 和 N. Seiberg。关于二维 $N=2$、3、4 超共形代数的评论。Phys. Lett. B, 184(2-3):191–196, 1987.[vE11] J. van Ekeren。高层扭曲 Zhu代数。J. Math. Phys., 52:052302, 2011.[vEH19] J. van Ekeren 和 R. Heluani。Zhu代数的简短构造。J. Algebra, 528:85–95, 2019.[Zhu96] Y. Zhu。顶点算子代数特征标的模不变性。J. Am. Math. Soc., 9(1):237–302, 1996. (K.B.) Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN46556 电子邮箱：kbarron@nd.edu (J.F.) Université Bourgogne Europe, CNRS, IMB UMR 5584, 21000 Dijon, France电子邮箱：justine.fasquel@u-bourgogne.fr (F.O.-H.) Department of Mathematics, University of Colorado Boulder, Boulder,CO 80309电子邮箱：florencia.orosz@colorado.edu (G.Y.) Department of Mathematics, Illinois State University, Normal, IL 61790电子邮箱：gyamsku@ilstu.edu