arXiv:2601.15832v1 [math.CT] 22 Jan 2026

重新审视量子相干空间：冯·诺依曼（余）代数方法

Thea Li 和 Vladimir Zamdzhiev

巴黎-萨克雷大学、法国国家科学研究中心、巴黎-萨克雷高等师范学院、法国国家信息与自动化研究院、形式方法实验室，91190，法国吉夫－叙尔－伊韦特 thea.li@inria.fr, vladimir.zamdzhiev@inria.fr

摘要。 我们描述了一个 MALL（乘法加法线性逻辑）的范畴模型，该模型受有限维量子理论中的海森堡-薛定谔对偶性启发。在我们的模型中，具有正逻辑极性的公式的证明对应于 CPTP（完全正且保迹）映射，即薛定谔绘景中的量子操作；而具有负逻辑极性的公式的证明则对应于 CPU（完全正且保单位元）映射，即海森堡绘景中的量子操作。其数学构造建立在非交换几何以及有限维冯·诺依曼（余）代数之上，后者可以定义为有限维算子空间范畴内部的特殊类型的（余）幺半群对象。

关键词： 量子理论、线性逻辑、范畴语义

1 引言

线性逻辑 [20] 是 Girard 在研究 相干空间 [19,20]的数学模型时发现的。“相干空间在发现线性逻辑的过程中发挥了至关重要的作用” [12, 第 967] 页，而且显然，它们对线性逻辑（LL）的研究（语义）产生了重大影响。后来，人们提出了 概率相干空间 （概率相干空间） [12]，它们为 LL 提供了一个适用于离散概率建模的模型。对概率相干空间的研究取得了令人瞩目的成果，例如概率 PCF 的完全抽象性 [16] ，以及带有递归类型的更复杂概率编程语言的完全抽象性 [17]。

在这些模型的发展过程中，一个自然的下一步是考察量子相干空间 （QCS），以期将 LL 的语义研究拓展至量子理论。Girard 已提出量子相干空间的模型 [21,22,23] ，随后这些模型在 [3]，中得到了研究，但 Selinger [34] 已批评这一方法不适用于量子理论。这一提案的主要问题之一是，量子相干空间之间的态射似乎无法对应于相关同态集上的完全正映射 （另见 [3,第 2]页）。从量子理论的角度看，这一点令人担忧，因为量子操作 （也称为量子信道）在数学上是用特定类型的完全正映射建模的。

受到（概率）相干空间所取得成功的启发，本文旨在重新描绘量子相干空间应有的面貌。我们考察有限维量子理论，并基于以下自然想法描述一个 MALL 模型：（1）具有正逻辑极性的公式的证明 $P \vdash R$ 应可解释为完全正且保迹（CPTP）映射，即量子理论薛定谔绘景 中的量子操作；（2）具有 $M \vdash N$ 负逻辑极性的公式的证明应可解释为完全正且保单位元（CPU）映射，即量子理论海森堡绘景 中的量子操作；（3）在线性逻辑对偶公式上，LL 对偶应与量子理论的海森堡-薛定谔对偶一致。这些要求自然引出算子空间理论 [15,7,33]，该理论具有优良的范畴性质 [31]，并可用于构造一个（完整）LL 模型，使其对偶在对象／公式层面上与海森堡-薛定谔对偶相容[32]。然而，在 [32], 态射／证明并不对应于任一绘景中的量子操作。我们针对有限维（f.d.）量子理论和 MALL 来解决这一问题（该问题已在 [32]中被建议留待未来研究）。

在第2节中，我们介绍算子空间的相关背景。第3节开始介绍我们的贡献：我们证明 **FdOS**（有限维算子空间范畴）是 MALL 的一个模型，并证明其他相关的范畴性质。该范

范畴具有非常重要的幺结构（**FdOS** $\mathbb{C}$, $\otimes$），这超出了 LL 的范畴——它由 Haagerup 张量积给出 [15, §9], [7,页 30 – 34], [33,§5]。这是算子空间理论的亮点之一。这种幺结构使我们能够在第4节中给出有限维冯·诺依曼代数</style的一种新颖但等价的定义

（vN-代数）作为（**FdOS** $\mathbb{C}$, $\otimes$）中的一种内部幺半群对象。众所周知，冯诺依曼代数上可以定义完全正幺映射，这使我们能够识别出**FdOS** 中对应于负逻辑极性和海森堡绘景的子范畴。有限维冯诺依曼代数的新颖范畴定义，以及 Haagerup 张量积的自对偶性，使我们能够轻松地对该定义取对偶，并引入有限维冯·诺依曼余代数（vN-余代数）

在第5节中，作为（**FdOS** $\mathbb{C}$, $\otimes$）中的某类内部余幺半对象。我们证明，完全正保迹映射是冯诺依曼余代数之间一种自然的态射概念，因此确定了与正逻辑极性和薛定谔绘景相对应的 **FdOS** 子范畴。在第6节中，我们证明这些子范畴之间存在范畴对偶性，从而给出了海森堡-薛定谔对偶的范畴表述。最后，在第7节中，我们将 Hyland 和 Schalk 的粘合与正交性语义技术应用于 **FdOS**，得到一个满足期望（1）—（3）的 MALL 模型，见图1。

2 算子空间和巴拿赫空间背景

算子空间通常被视为巴拿赫空间的“非交换”或“量子化”推广。本节回顾一些关于这些主题的基础背景知识，内容取自若干相关著作 [15], [7], [33]。

2.1 赋范空间与巴拿赫空间

赋范空间是一个二元组 $(X, \|\cdot\|_X)$，其中 X 是复向量空间，$\|\cdot\|_X$ 是其上的一个范数。巴拿赫空间是关于诱导范数拓扑完备的赋范空间。本文研究有限维赋范空间，而这类空间必然都是巴拿赫空间。我们通常简写为 X 来表示一个巴拿赫空间，并简写为 $\|\cdot\|$ 表示其范数，具体含义可由上下文判断。回忆一下，若 X 和 Y 是两个巴拿赫空间，且 $\varphi\colon X \to Y$ 是它们之间的线性映射，则其算子范数定义为 $\|\varphi\| \triangleq \sup\{\|\varphi(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$. 那么，$\varphi$连续当且仅当 φ 有界，当且仅当 $\|\varphi\| < \infty$. 。两个巴拿赫空间之间的线性映射 $f\colon X \to Y$ 称为等距映射，如果对每个 $x \in X$ 都有 $\|f(x)\| = \|x\|$；若 $\|f\| \leq 1$, 则称其为压缩映射，等价地，对每个 $x \in X$. 都有 $\|f(x)\| \leq \|x\|$。我们将 FdBan 记作这样一个范畴：其对象是有限维巴拿赫空间，态射是它们之间的线性压缩映射。为加深对下文构造的直观理解，回顾 FdBan 的一些范畴性质很有帮助。它有一个零对象，即零维巴拿赫空间 0。X和 Y的二元范畴积是巴拿赫空间 $X \overset{\infty}{\oplus} Y \triangleq (X \oplus Y, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$，其中$\|(x,y)\|_{\ell^\infty} \triangleq \max(\|x\|, \|y\|)$就是 ℓ^∞-范数，而 $X \oplus Y$ 是向量空间的通常直和。X 和 Y 的二元范畴余积是巴拿赫空间 $X \overset{1}{\oplus} Y \triangleq (X \oplus Y, \|\cdot\|_{\ell^1})$，其中 $\|(x,y)\|_{\ell^1} \triangleq \|x\| + \|y\|$ 就是 ℓ^1-范数。对于射影张量积 $\overset{\gamma}{\otimes}$（细节略），范畴 FdBan 是一个对称幺半闭范畴，其内同态为$B(X,Y)$, 即 X 与 Y之间有界线性映射所成的空间。事实上，FdBan 是 MALL [6, 第2节.6]的一个模型：加法合取（析取）由范畴（余）积刻画；乘法合取（析取）对应于 $\overset{\gamma}{\otimes}$ ($\overset{\epsilon}{\otimes}$)，其中 $\overset{\epsilon}{\otimes}$ 表示内射张量积；否定对应于对偶巴拿赫空间 $X^* \triangleq B(X, \mathbb{C})$。

2.2 算子空间及其态射

（抽象）算子空间可视为一个向量空间 X，其上还配备了矩阵范数，这些矩阵的元素属于 X，并满足某些条件。

定义 1（矩阵空间）。给定一个复向量空间 X，我们将$\mathbb{M}_{n,\,m}(X)$ 记作由元素属于X的 $n \times m$ 矩阵构成的向量空间。其向量空间结构按显然的方式定义，即逐分量定义。我们还使用简写记号 $\mathbb{M}_n(X) \triangleq \mathbb{M}_{n,\,n}(X)$ 和 $\mathbb{M}_n \triangleq \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。

定义 2（矩阵范数 [15, p. 20]）。向量空间X 上的矩阵范数 是指为每个 $n \in \mathbb{N}$ 在 $\mathbb{M}_n(X)$ 上指定一个范数 $\|\cdot\|_n$。给定这样的范数，我们将赋范空间 $(\mathbb{M}_n(X), \|\cdot\|_n)$ 记作 $M_n(X)$。

例*3.* 我们将 $M_{n,m}$ 记作赋范空间 $(\mathbb{M}_{n,m}, \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$，其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 是 $\mathbb{M}_{n,m}$上的通常算子范数。赋范空间 $M_n \triangleq M_{n,n}$ $(n \in \mathbb{N})$ 确定了 $\mathbb{C}$ 上的一个矩阵范数，本文将始终使用该范数。

定义4（算子空间 [33, 第34–35]页）。一个（抽象）算子空间是一个复向量空间 X，配备满足以下条件的矩阵范数：

(B) 这一对$(\mathbb{M}_1(X)\ \|\cdot\|_1)$ 是巴拿赫空间；*(M1)*
$\|x \oplus y\|_{m+n} =$ 最大值$\{\|x\|_m, \|y\|_n\}$*(M2)*
$\|\alpha x \beta\|_m \leq \|\alpha\|\|x\|_m\|\beta\|$
对于 n、$m \in \mathbb{N}$、$x \in M_m(X)$、$y \in M_n(X)$、α、$\beta \in M_m$。我们用 $x \oplus y \triangleq \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in M_{m+n}(X)$ 表示所指的矩阵，用 $\alpha x \beta \in M_m(X)$ 表示由矩阵乘法的显然推广得到的矩阵。

注意，在上述定义中，α, β 是标量（即复数）矩阵，但 x不一定是。满足上述条件的矩阵范数称为 X 上的算子空间结构 （o.s.s.）。显然的同构 $M_1(X) \cong X$确定了 X 上的一个范数，后文中记作 $\|\cdot\|_X$，或简记为 $\|\cdot\|$。如果 $x \in M_n(X)$，我们通常简记 $\|x\|_n$. 为 $\|x\|$。标准教材中的结果表明，对于每个算子空间 X，$M_n(X)$ 和 X 都是巴拿赫空间。本文研究有限维算子空间，即底层向量空间为有限维的算子空间。此时条件 (B) 自动成立。

例*5.* 复数 $\mathbb{C}$ 配备例3中的矩阵范数后，构成一个算子空间。更一般地，每个向量空间 $\mathbb{M}_{n,m}$ 都可以通过线性同构 $\mathbb{M}_k(\mathbb{M}_{n,m}) \cong M_{nk,mk}$ 以及后一个空间上的范数（见例3），在 $\mathbb{M}_k(\mathbb{M}_{n,m})$上定义范数，从而赋予其一种算子空间结构。我们将这个算子空间记作 $M_{n,m}$。注意，这种记法与例3兼容，即 $M_{n,m}$ 上的范数 $\|\cdot\|_{M_{n,m}}$ 恰好就是算子范数。算子空间 $M_n \triangleq M_{n,n}$ 对于算子空间理论以及本文所呈现的结果都至关重要。

例*6.* 对于算子空间 X，每个空间 $M_n(X)$ 都具有一种由线性同构 $\mathbb{M}_m(M_n(X)) \cong M_{mn}(X)$ 以及后一个空间上已给定的范数所确定的典范算子空间结构。更一般地，每个矩阵空间$\mathbb{M}_{m,n}(X)$ 也具有一种典范算子空间结构，可通过线性嵌入 $\mathbb{M}_{m,n}(X) \hookrightarrow M_p(X)$ 来定义，其中 $p = \max(m, n)$，并采用后一个空间 [15, §2.1] 的算子空间结构。我们将这个算子空间记作 $M_{m,n}(X)$。

接下来，我们介绍算子空间之间几类重要的态射。

定义 7（[15, 第2节.2]）。设 X 和 Y 是两个向量空间，$\varphi\colon\ X \to Y$是它们之间的线性映射。φ 的第 n次放大 是线性函数φ_n：$\mathbb{M}_n(X) \to \mathbb{M}_n(Y)$ :: $[x_{ij}] \mapsto [\varphi(x_{ij})]$, , 即将$\varphi$ 逐分量应用于矩阵 $[x_{ij}]$。

定义 8（[15, 第2节。2]）。设 X 和 Y 为算子空间，且 $\varphi\colon\ X \to Y$ 是一个线性映射。考虑映射 $\|\varphi\|_{cb} \triangleq \sup\{\|\varphi_n\|\colon\ n \in \mathbb{N}\}$，其中 $\|\varphi_n\|$是 $\varphi_n\colon\ M_n(X) \to M_n(Y)$的算子范数。我们称 φ 为

– 完全有界映射（*c.b*），如果 $\|\varphi\|_{cb} < \infty$；– 完全压缩映射（*c.c*），如果 $\|\varphi\|_{cb} \leq 1$，即每个 φ_n 都是压缩映射；– 完全等距映射（*c.i*），如果每个 φ_n 都是等距映射；– 完全商映射（*c.q*），如果每个 φ_n 都是商映射，即 φ_n 将 $M_n(X)$ 的开单位球映到 $M_n(Y)$的开单位球上。– 完全等距同构（*c.i.i*），如果 φ 是满射的完全等距映射。

任意两个有限维算子空间之间的线性映射 $\varphi\colon\ X \to Y$ 都是（完全）有界的 [15, 推论 2.2。4] 因此 φ 及其所有放大映射 φ_n 都是连续的（且有界）。我们研究中起核心作用的态射是完全压缩。我们将(**Fd**)**OS** 记为这样一个范畴：其对象是（有限维）算子空间，态射是它们之间的完全压缩。我们将**FdVect** 记为有限维复向量空间范畴，其态射为线性映射；并将$U\colon$ **FdOS** $\to$ **FdBan** 和 $V\colon$ **FdOS** $\to$ **FdVect** 记为遗忘函子。

下一个命题很有用，因为它简化了一些范数计算。

命题9（[15, 第2.2节，第3节。3]）。设 $\varphi\colon\ X \to Y$ 是一个完全有界映射。若 $X = \mathbb{C}$ 或$Y = \mathbb{C}$，则 $\|\varphi\|_{cb} = \|\varphi\|$，即完全有界范数与算子范数相同。

由 X 到 Y 的完全有界映射所组成的向量空间 $\mathsf{CB}(X, Y)$，赋予完全有界范数 $\|\cdot\|_{cb}$ 后成为巴拿赫空间；赋予由线性同构 $\mathbb{M}_n(\mathsf{CB}(X, Y)) \cong \mathsf{CB}(X, M_n(Y))$ 以及后一个空间的巴拿赫空间结构 [15, §3.2] 给出的矩阵范数后，则成为算子空间。注意，在 **FdOS** 中，$\mathsf{CB}(X, Y)$ 的底层向量空间恰好是 $L(X, Y)$，即 X 与 Y 之间的线性映射所组成的向量空间，也就是说，$V(\mathsf{CB}(X, Y)) = L(X, Y)$。

如果 X 是一个算子空间，那么它的（算子空间）对偶 是算子空间 $X^* \triangleq \mathsf{CB}(X, \mathbb{C})$。这与巴拿赫空间对偶的记号一致，即有巴拿赫空间等式 $U(X^*) = (UX)^*$ [15, §3.2]。对于有限维 空间，这也与向量空间对偶一致。也就是说，对于 $Y \in$ **FdVect**，我们定义 $Y^* \triangleq L(Y, \mathbb{C})$，而对于 $X \in$ **FdOS**，我们同样有$V(X^*) = (VX)^*$。下文将证明，$\mathsf{CB}(X, Y)$ 是**FdOS** 的内同态（正如它对于 **OS** [32] 一样），而 X^* 是 $*$-自对偶意义下的对偶。

例 *10.* 向量空间 $\mathbb{M}_n$ 可通过线性同构 $\mathbb{M}_n \cong M_n^* :: a \mapsto (b \mapsto \mathsf{tr}(ab))$ 以及后一个空间的算子空间结构赋予另一种重要的算子空间结构。我们将所得的算子空间记为 T_n。这里，tr 表示通常的迹泛函，而 ab表示矩阵乘法。在 T_n 上的诱导范数与迹范数一致，并且有一个完全等距同构 $T_n \cong M_n^*$. 这称为迹类算子空间结构 [7, 1. 4.5]。由此可知，$\mathsf{tr}: T_n \to \mathbb{C}$ 是完全压缩映射，但对于 $n > 1.$，$\mathsf{tr}: M_n \to \mathbb{C}$ 不是完全压缩映射

注*11*。完全等距映射与完全商映射是对偶概念。c.b. 映射 $\varphi\colon\ X \to Y$ 是完全等距映射（完全商映射），当且仅当$\varphi^*\colon\ Y^* \to X^*$ 是完全商映射（完全等距映射） [7, 1。第4节3]。完全等距映射与强单态射一致，而完全商映射与**FdOS** [31, 第4节3]中的强满态射一致。

由于 $V(M_n) = \mathbb{M}_n = V(T_n)$，完全正映射的通常定义对于线性映射 $M_n \to M_m$ 和 $T_n \to T_m$. 是有意义的。下一个例子表明，海森堡绘景和薛定谔绘景中的量子操作提供了两类重要的完全压缩映射。

示例 *12*。 每个完全正保迹映射 $\varphi\colon\ T_n \to T_m$ 都是完全压缩，并且每个完全正幺映射 $\psi\colon\ M_m \to M_n$ 也都是完全压缩，其中 $\|\varphi\|_{cb} = 1 = \|\psi\|_{cb}$.

2.3 直和与（余）积

FdOS 范畴具有有限（余）积，这由 [31,第4节2]立即得到。我们回顾这些构造，它们实际上与 FdBan 中的（余）积完全类似且相容。FdOS 范畴具有一个零对象，即零维算子空间 0。若 X、$Y \in$ FdOS，则向量空间 $X \oplus Y$可通过线性同构 $\mathbb{M}_n(X \oplus Y) \cong M_n(X) \overset{\infty}{\oplus} M_n(Y)$ 以及后一个空间的巴拿赫空间结构（见第2.1节）赋予矩阵范数。这就在 $X \oplus Y$上给出了一个算子空间结构，我们将所得算子空间记为 $X \overset{\infty}{\oplus} Y$，它是 X 与 Y.的范畴积。该记号与 FdBan 中的记号一致，即作为巴拿赫空间，$U(X \overset{\infty}{\oplus} Y) = UX \overset{\infty}{\oplus} UY$。FdOS 中 X 与 Y 的范畴余积记作 $1X \oplus Y$，它是向量空间 $X \oplus Y$，并带有通过线性$^{\infty}$同构 $X \oplus Y \cong (X^* \oplus Y^*)^*$ 以及后一个空间的算子空间结构所继承的算子空间结构。这同样与 FdBan 中的记号一致，即作为巴拿赫空间，$U(X \overset{1}{\oplus} Y) = UX \overset{1}{\oplus} UY$。注意，$V(X \overset{1}{\oplus} Y) = VX \oplus VY = V(X \overset{\infty}{\oplus} Y)$，即 V将 FdOS 的（余）积^{1} $^{\infty}$映射为 FdVect 中的双积。$\oplus$ 与 $\oplus$ 的函子作用^{1} $^{\infty}$在态射上与 $\oplus$ 的函子作用一致，即 $f \oplus g = f \oplus g = f \oplus g$.

2.4 算子空间张量积

我们回顾后文将使用的三种算子空间张量积的构造。前两种分别是完全射影张量 $\widehat{\otimes}$和 $\frown$完全内射张量 $\otimes_{\cdot}$，它们类似于其非完全巴拿赫空间对应物 $\overset{\gamma}{\otimes}$ 和 $\overset{\epsilon}{\otimes}$，因为 $\widehat{\otimes}$ ($\widehat{\otimes}$) 是可以赋予向量空间张量积 $X \otimes Y$的最大（最小）算子空间结构，不过我们略去其具体含义的细节。第三种张量积称为 Haagerup 张量，它是算子空间理论所特有的，并使我们能够在后文将冯·诺依曼（余）代数定义为某类内部（余）幺半群对象。为简便起见，我们针对有限维算子空间定义这三种张量积。

注记 *13*。 完全射影张量通常被称为算子空间的“射影张量”，而完全内射张量则被称为算子空间的“最小”或“内射”张量。我们选择了这些替代名称，以避免与其巴拿赫空间对应物混淆。

定义 14（[7, （1.5.1）]）。令 X, $Y \in \mathbf{FdOS}$。完全内射$\frown$张量积，记作 $X \otimes Y$，是向量空间 $X \otimes Y$，其算子空间结构通过线性同构 $X \otimes Y \cong \mathrm{CB}(Y^*, X)$ 以及后一个空间的算子空间结构继承而来。

我们将在下文证明，上述张量积充当乘法析取，而下一个张量积则充当乘法合取。

定义 15. 设 $X, Y \in \mathbf{FdOS}$。完全投射张量积记作 $X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$，是向量空间 $X \otimes Y$，其算子空间结构由线性 $\frown$同构 $X \otimes Y \cong (X^* \otimes Y^*)^*$ 以及后一个空间的算子空间结构所诱导。

上述定义并非文献中的标准定义，但我们在附录 B 中证明，对于有限维算子空间，这两种定义是等价的。在回顾第三种张量积之前，我们需要先给出一个辅助定义。

定义 16（[15, 第9节。1]）。给定 $x \in \mathbb{M}_{n,\ r}(X)$ 和 $y \in \mathbb{M}_{r,\ m}(Y)$，$x$ 和 y 的矩阵内积是矩阵 $x \odot y \in \mathbb{M}_{n,\ m}(X \otimes Y)$，定义如下：

$$(x \odot y)_{i,j} \triangleq \sum_{k=1}^{r} x_{i,k} \otimes y_{k,j}.$$

定义 17（[15, 第9节。2]）。设 $X, Y \in \mathbf{FdOS}$。Haagerup 张量积记作$_{\mathrm{h}}$ $X \otimes Y$，是向量空间 $X \otimes Y$，并配备如下定义的算子空间结构：$v \in \mathbb{M}_n(X \otimes Y)$

$$\|v\|_h \triangleq \inf\{\|x\|\|y\| \colon v = x \odot y, x \in M_{n,r}(X), y \in M_{r,n}(Y), r \in \mathbb{N}\}.$$

Haagerup 张量的一个有趣性质是，它在**FdOS**中是自对偶的。

命题 18（[15, 推论 9.4。8]）。给定 $X, Y \in \mathbf{FdOS}$，线性同构$_{\mathrm{h}}$ θ：$X^* \otimes Y^* \cong (X \otimes Y)^* :: f \otimes g \mapsto (x \otimes y \mapsto f(x)g(y))$ 是一个 *c.i.i.*

另一个使它（再次）区别于另外两种张量积的事实是，Haagerup 张量在 *FdOS* 中并不对称。它们的共同点是，$V(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y) = V(X \mathbin{_{\mathrm{h}}\otimes} Y) = V(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y) = VX \otimes VY$，也就是说，这三种张量积的底层向量空间都与向量空间张量积相同。此外，这三种张量积对态射的函子作用都与 $\otimes$ 相同，即 $(f \mathbin{\widehat{\otimes}} g) = (f \mathbin{_{\mathrm{h}}\otimes} g) = (f \mathbin{\widehat{\otimes}} g) = f \otimes g$。恒等映射（在 $X \otimes Y$ 上）给出完全压缩 $X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y \to X \mathbin{_{\mathrm{h}}\otimes} Y \to X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$，因为这三个空间上的相应范数满足 $\|\cdot\|_\wedge \geq \|\cdot\|_h \geq \|\cdot\|_\vee$。。下一个命题（[13, 定理 6.1] 的特例）将进一步说明这一点。

命题 19。给定算子空间 $A, B, C, D \in \mathbf{FdOS}$，该置换

$$u_{ABCD} \colon (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \to (A \otimes C) \otimes (B \otimes D) :: (a \otimes b) \otimes (c \otimes d) \mapsto (a \otimes c) \otimes (b \otimes d)$$

给出两个完全压缩映射 $v_{ABCD} = u_{ABCD} = w_{ABCD}$，其类型为

$$w_{ABCD} \colon (A \mathbin{\widehat{\otimes}} B) \mathbin{\widehat{\otimes}} (C \mathbin{\widehat{\otimes}} D) \to (A \mathbin{\widehat{\otimes}} C) \mathbin{\widehat{\otimes}} (B \mathbin{\widehat{\otimes}} D)$$
$$v_{ABCD} \colon (A \mathbin{\widehat{\otimes}} B) \mathbin{\widehat{\otimes}} (C \mathbin{\widehat{\otimes}} D) \to (A \mathbin{\widehat{\otimes}} C) \mathbin{\widehat{\otimes}} (B \mathbin{\widehat{\otimes}} D)$$

在算子空间理论中，上述形式的映射称为洗牌映射；而在范畴论中，它们称为交换律。

2.5 共轭算子空间与对偶算子空间

接下来，我们需要进行对矩阵取共轭转置的操作 $(\cdot)^*$。这既不是线性映射，也不是完全压缩 $M_n \to M_n$（当$n > 1$时）。我们通过回顾两种对合构造来处理这个问题。

两个复向量空间之间的反线性映射 $f\colon V \to W$ 可以等价地描述为一个线性映射 $f\colon V_c \to W$，其中 V_c 是 V的共轭向量空间。回顾一下，V_c 是一个复向量空间，其底集与 V 相同，加法结构也与 V 相同，但标量乘法定义为 $\lambda * v \triangleq \lambda v$。这对算子空间同样适用。

定义 20（[33, 第 2 节。9]）。设 X 是一个算子空间。共轭向量空间 X_c 可以赋予由 $\|x\|_{M_n(X_c)} \triangleq \|x\|_{M_n(X)}$ 定义的算子空间结构，其中 $x \in \mathbb{M}_n(X_c)$。我们称 X_c 为 X. 的共轭算子空间

定义 21（[33, 第 2 节。10]）。设 X 为一个算子空间。X的对偶算子空间记作 X_o，它具有相同的底层向量空间，但其算子空间结构由 $\|[x_{ji}]\|_{M_n(X_o)} \triangleq \|[x_{ij}]\|_{M_n(X)}$ 定义，其中 $x \in \mathbb{M}_n(X_o)$。

为方便起见，我们有时也用 X^o 或 X^c 表示对偶空间/共轭空间，例如，我们写作 M_n^o 而不写 $(M_n)_o$.

例 *22*。共轭转置是一个完全等距同构 $(\cdot)^*\colon M_n^c \cong M_n^o$.这只是 C*-代数的一个结果的特例 [33,第 65] 页。

3 FdOS 的范畴性质

我们首先通过证明 FdOS 的相关范畴性质来介绍我们的贡献。**FdOS**。我们的第一个命题很容易由已有结果推出（见附录 B）。紧接着给出的第一个定理则表明**FdOS**与线性逻辑的相关性。

命题 23. 当将任意一种张量积 $\widehat{\otimes}/\widehat{\otimes}/{}_{\mathrm{h}}\otimes$ 作为幺半积，并将 $\mathbb{C}$ 作为幺半单位时，范畴 $\mathbf{FdOS}$ 是一个幺半范畴。前两种幺半结构是对称的，且在所有情形下，（对称）幺半自然同构都与 $\mathbf{FdVect}$ 中的相同；也就是说，遗忘函子 $V\colon \mathbf{FdOS} \to \mathbf{FdVect}$ 是一个严格（对称）幺半函子。

定理 24. 范畴 $\mathbf{FdOS}$ 具有有限（余）积，是 $*$-自对偶的，其相关数据见表 *1*，因此是 *MALL* 的一个模型。

Haagerup 张量积不在线性逻辑的讨论范围内，但**FdOS** 连同这一张量积以及命题 19 中的映射，构成了一个带否定的 *BV*-范畴，其意义见 [8]（参见附录 B）。二元联结词 $\triangleleft$ 来自

MALL /BV	**FdOS**	**FdBan**	**FdVect**
$X \multimap Y$	完全有界映射(X,Y)	$B(X,Y)$	$L(X,Y)$
$X \,\&\, Y$	$X \overset{\infty}{\oplus} Y$	$X \overset{\infty}{\oplus} Y$	$X \oplus Y$
$X \oplus Y$	$X \overset{1}{\oplus} Y$	$X \overset{1}{\oplus} Y$	$X \oplus Y$
$X \otimes Y$	$X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$	$X \overset{\gamma}{\otimes} Y$	$X \otimes Y$
$X \parr Y$	$X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$	$X \overset{\epsilon}{\otimes} Y$	$X \otimes Y$
$X \triangleleft Y$	$X \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y$		$X \otimes Y$

表 1。MALL 和 BV 的范畴结构。

$_{\mathrm{h}}$表 1表示 BV-范畴的“seq”张量积，它对应于$_{\mathrm{h}}$**FdOS**中的 。接下来，我们将证明 $\otimes$ 还具有更多范畴性质。

接下来，我们考察取共轭/对偶算子空间的赋值 $(\cdot)_c$和 $(\cdot)_o$ 的若干范畴性质。下一个命题中的第二个等式由 [10, 引理 2。1]得出，其中证明了恒等映射是一个 c.i.i（因此两者相等）。第一个等式很容易证明。

命题 25。 给定算子空间 X 和 Y，我们有如下算子空间等式：完全有界映射$(X,Y)_c =$完全有界映射(X_c, Y_c) 以及 完全有界映射$(X,Y)_o =$完全有界映射(X_o, Y_o)。

由于 $\mathbb{C} = \mathbb{C}_o$ 和 $\mathbb{C}_c \cong \mathbb{C}$，且共轭充当完全等距同构，因此作为特例，我们有 $(X_c)^* \cong (X^*)_c$ 和 $(X_o)^* = (X^*)_o$。此外，只需定义 $f_o \triangleq f$ 和$f_c \triangleq f.$，便可看出映射 $(\cdot)_c$: **FdOS** $\to$ **FdOS**和 $(\cdot)_o$: **FdOS** $\to$ **FdOS** 是（协变）函子。容易看出 $(\cdot)_c \circ (\cdot)_c = \mathrm{Id} = (\cdot)_o \circ (\cdot)_o$ 以及 $(\cdot)_c \circ (\cdot)_o = (\cdot)_o \circ (\cdot)_c$，因此我们在 **FdOS** 上有一对彼此可交换的函子对合，它们在态射上是（集合论意义下的）恒等映射，但在对象上并非如此。更进一步，这些函子与我们见过的其他函子性构造相容。

命题26. 给定算子空间 $X, Y \in$ **FdOS**，我们有：

- $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_c = X_c \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_c$
- $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_c = X_c \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_c$
- $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_o = X_o \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_o$
- $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_o = X_o \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_o$
- $(X \overset{1}{\oplus} Y)_c = X_c \overset{1}{\oplus} Y_c$
- $(X \overset{\infty}{\oplus} Y)_c = X_c \overset{\infty}{\oplus} Y_c$
- $(X \overset{1}{\oplus} Y)_o = X_o \overset{1}{\oplus} Y_o$
- $(X \overset{\infty}{\oplus} Y)_o = X_o \overset{\infty}{\oplus} Y_o$
- $(X \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y)_c = X_c \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y_c$
- *a c.i.i., called* γ, $(X \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y)_o \cong Y_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} X_o$ $\gamma(x \otimes y) \triangleq (y \otimes x)$.

证明. 其中一些事实已广为人知，其余内容见附录 B。

因此，尽管 Haagerup 张量在不 具有**FdOS**中的对称性，我们仍然可以讨论通常的对称性 γ，前提是使用对合 $(\cdot)_o \cdot_{\mathrm{h}}$ $_{\mathrm{h}}$我们还用 γ 表示它自身的逆，即 $\gamma : Y_o \otimes X_o \cong (X \otimes Y)_o$，因为$\gamma$ 和 γ^{-1} 都是以相同的方式定义的，也就是通过交换。

我们还会简要使用范畴$\mathbf{FdOS}_{\mathrm{cb}}$，它以有限维算子空间为对象，而以它们之间的完全有界映射为态射。本节中的所有范畴性质对于$\mathbf{FdOS}_{\mathrm{cb}}$也同样成立，而子范畴的包含$\mathbf{FdOS} \hookrightarrow \mathbf{FdOS}_{\mathrm{cb}}$保留了这些数据。然而，正如我们已经解释过的，对于有限维算子空间，线性映射与完全有界映射相同，因此遗忘函子$V\colon \mathbf{FdOS}_{\mathrm{cb}} \to \mathbf{FdVect}$给出了范畴$\mathbf{FdOS}_{\mathrm{cb}} \simeq \mathbf{FdVect}$之间的等价。因此，与$\mathbf{FdOS}$相比，$\mathbf{FdOS}_{\mathrm{cb}}$是一个不那么有趣、也更加退化的范畴（从 MALL 的角度来看），例如，

在$\mathbf{FdOS}_{\mathrm{cb}}$中，这三个张量$\widehat{\otimes}$、$_{\mathrm{h}}\otimes$、$\widehat{\otimes}$通过恒等映射彼此自然同构，并且每一个都在$\mathbf{FdOS}_{\mathrm{cb}}$.上给出一种紧闭结构。当然，这在$\mathbf{FdOS}$，中并不成立，而该范畴正是我们主要感兴趣的范畴。

4 冯诺依曼代数的新颖范畴论方法

单靠算子空间不足以为量子计算提供所需的结构。在海森堡绘景中，我们可以使用冯·诺依曼代数（*vN*-代数）来定义相关的量子操作。每个这样的代数都可以配备典范算子空间结构，因此我们可以将它们视为具有附加结构的算子空间。在本节中，我们考察有限维冯诺依曼代数，并证明它们等价地可以定义为$_{\mathrm{h}}(\mathbf{FdOS}\ \mathbb{C},\ \otimes)$。中的某类带对合的幺半群对象。这有两个目的：（1）帮助熟悉范畴论的读者；（2）便于对定义取对偶，并表述冯·诺依曼余代数（第5节），以供薛定谔绘景使用。

我们只关注有限维vN-代数。它们与有限维 C*-代数一致，而我们的下一个定义是标准的 [36,5]。

定义27。有限维冯诺依曼代数是一个有限维复向量空间A，并配备：

1. 一个双线性二元运算，称为乘法，并以并置方式表示；它满足结合律，即$a(bc) = (ab)c$；*2.* 一个称为单位的元素$1 \in A$，满足$1a = a = a1$；*3.* 一个反线性一元运算$(\cdot)^*$，称为对合，满足$(a^*)^* = a$且$(ab)^* = b^*a^*$；*4.* 一个（必然完备的）范数，它满足次乘性，即$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$，并且满足C*-恒等式，即$\|a^*a\| = \|a\|^2$.

如果A是有限维冯诺依曼代数，那么$\mathbb{M}_n(A)$也是——乘法、单位和对合均按显然的方式定义，随后便可以用一种唯一的方式在$\mathbb{M}_n(A)$上定义范数，使其成为冯诺依曼代数 [7, 1.2.3]。这些范数赋予A[7, 1.2.3] 典范的算子空间结构，此后我们将冯诺依曼代数视为具有附加结构的算子空间。

例 *28*。算子空间M_n是一个冯诺依曼代数，其单位为恒等矩阵，乘法为矩阵乘法，对合由$(\cdot)^{*^\infty}$给出。算子空间$\oplus_{1\leq i\leq n} M_{k_i}$也是一个冯诺依曼代数，其单位、乘法和对合均按点定义。事实上，除去一个冯诺依曼代数同构（将在下文定义）后，每个有限维冯诺依曼代数都具有这种形式 [36,p. 50]。

对于有限维冯诺依曼代数的范畴化定义，我们从反转带对合幺半群 [26]和星代数 在 bar 范畴中的情形 [4]汲取灵感。更重要的是，有限维保单位元算子代数已被刻画为相对于 Haagerup 张量积的幺半群对象（$\mathbf{Fd}$）$\mathbf{OS}$ [33, 定理 6.1], [9]。由于有限维冯诺依曼代数是特殊的保单位元算子代数，自然地可以将它们视为（$\mathbf{FdOS}$ $\mathbb{C}$, $\otimes$）中的特殊幺半群对象。我们将在后续定义中这样做。

定义 29。 有限维冯诺依曼代数 是一个有限维算子空间 A，并且具有

1. 一个完全压缩 $\mu\colon\ A\otimes A\to A$，称为乘法；*2.* 一个完全压缩 $\eta\colon\ \mathbb{C}\to A$，称为单位；*3.* 一个完全压缩 $i\colon\ A_c\to A_o$，称为对合，

使得（A、η、μ） 是（$\mathbf{FdOS}$ $\mathbb{C}$、$\otimes$）中的一个幺半群对象，以下图表

$$\begin{array}{ccccc} A & = & A & & \\ \| & & \| & & \\ A_{cc} & \xrightarrow[i_c]{} & A_{oc}=A_{co} & \xrightarrow[i_o]{} & A_{oo} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} A_c\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A_c & = & (A\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A)_c & \xrightarrow{\mu} & A_c \\ {\scriptstyle i\otimes i}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ A_o\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A_o & \xrightarrow[\gamma]{} & (A\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A)_o & \xrightarrow[\mu]{} & A_o \end{array} \tag{1}$$

交换，并且对于每个完全等距映射（即强单态） $a\colon\ \mathbb{C}\to A$，在$\mathbf{FdOS}$中的以下复合映射也是一个完全等距映射（即强单态）

$$\mathbb{C}\cong\mathbb{C}_o\overset{\mathrm{h}}{\otimes}\mathbb{C}_c\xrightarrow{a\otimes a}A_o\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A_c\xrightarrow{A_o\otimes i}A_o\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A_o\xrightarrow{\gamma}(A\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A)_o\xrightarrow{\mu}A_o. \tag{2}$$

定理 30。 定义 *27* 和 *29* 是等价的，即一个定义中的数据唯一确定另一个定义中的数据。

我们的定理在附录 C 中得到证明，其证明表明这两个（等价的）概念可以互换使用。我们在下文中也将如此处理。

定义 31。 令$\mathbf{vNAlg_{fd}}$ 表示$\mathbf{FdOS}$ 的子范畴，其对象是有限维冯诺依曼代数，态射 $\varphi\colon\ A\to B$ 则为乘法保持、保单位元，且对合保持的态射，即 $\mathbf{FdOS}$ 中的下列图表可交换[1]。

$$\begin{array}{ccc} A\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A & \xrightarrow{\varphi\otimes\varphi} & B\otimes B \\ {\scriptstyle\mu_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu_B} \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ {\scriptstyle\eta_A}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\eta_B} \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A_c & \xrightarrow{\varphi_c} & B_c \\ {\scriptstyle i_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_B} \\ A_o & \xrightarrow[\varphi_o]{} & B_o \end{array}$$

在文献中，这些态射称为“保单位元 $*$-同态”，但我们只称其为冯·诺依曼代数态射。人们早已知道，（可能是无限维的）vN-代数构成一个具有小积的对称幺半范畴 [30], ，因此接下来的命题很容易得出。不过，我们仍采用范畴论的表述方式来陈述它们，因为这有助于第5节内容的展开。

[1] 只需假设 φ 是线性的，而这三个图表表明它也是完全收缩的。

命题 32. 若 $A, B \in \mathbf{vNAlg_{fd}}$，则算子空间 $A \otimes B$ 具有

- *unit* $\eta \triangleq \left(\mathbb{C} \cong \mathbb{C} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{C} \xrightarrow{\eta_A \otimes \eta_B} A \mathbin{\widehat{\otimes}} B\right)$
- *involution* $i \triangleq \left((A \mathbin{\widehat{\otimes}} B)_c = A_c \mathbin{\widehat{\otimes}} B_c \xrightarrow{i_A \otimes i_B} A_o \mathbin{\widehat{\otimes}} B_o = (A \mathbin{\widehat{\otimes}} B)_o\right)$
- *mult.* $\mu \triangleq \left((A \mathbin{\widehat{\otimes}} B) \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} (A \mathbin{\widehat{\otimes}} B) \xrightarrow{v} (A \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} A) \mathbin{\widehat{\otimes}} (B \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} B) \xrightarrow{\mu_A \otimes \mu_B} A \mathbin{\widehat{\otimes}} B\right)$

$\overset{\infty}{\oplus}$也是一个冯诺依曼代数。此外，算子空间 $A \oplus B$ 是一个冯诺依曼代数，且

- *unit* $\eta \triangleq \left(\mathbb{C} \xrightarrow{\langle id, id\rangle} \mathbb{C} \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} \mathbb{C} \xrightarrow{\eta_A \oplus \eta_B} A \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} B\right)$
- *involution* $i \triangleq \left((A \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} B)_c = A_c \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} B_c \xrightarrow{i_A \oplus i_B} A_o \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} B_o = (A \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} B)_o\right)$
- *mult.* $\mu \triangleq \left((A \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} B) \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} (A \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} B) \xrightarrow{v'} (A \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} A) \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} (B \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} B) \xrightarrow{\mu_A \oplus \mu_B} A \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} B\right)$

where $v' \triangleq \left((A \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} B) \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} (A \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} B) \xrightarrow{\langle (\pi_A \otimes \pi_A), (\pi_B \otimes \pi_B)\rangle} (A \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} A) \mathbin{\overset{\infty}{\oplus}} (B \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} B)\right)$

命题 33. 范畴 $\mathbf{vNAlg_{fd}}$ 是对称幺半的，并且具有有限 $\widehat{\ }$ $\overset{\infty}{\ }$积，其中 $\otimes$ 和 $\oplus$ 的作用扩展方式如命题 *32* 所述。

量子操作。 有限维量子理论的海森堡图景中的量子操作由完全正保单位元（CPU）映射给出。我们已经定义了保单位映射，现在来回顾完全正映射。给定$A \in \mathbf{vNAlg_{fd}}$，若存在 $a \in A$ 使得 $p = a^* a$，则称 $p \in A$ 为一个正元素 。另一种等价的说法是，$\mathbf{FdOS}_{\mathrm{cb}}$中的图表

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}_o \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} \mathbb{C}_c & \xrightarrow{a \otimes a} & A_o \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} A_c & \xrightarrow{A_o \otimes i} & A_o \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} A_o & \xrightarrow{\gamma} & (A \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} A)_o \\ \| & & & & & & & & \downarrow \mu \\ \mathbb{C}_o & & & & & \xrightarrow[p]{} & & & A_o \end{array} \tag{3}$$

可交换，其中我们已将 A 中的元素显然地视为$\mathbf{FdOS}_{\mathrm{cb}}$. 中的态射。两个有限维冯诺依曼代数之间的线性映射 $\varphi\colon A \to B$ 若保持正元素，则称为正 映射；若 $M_n \otimes \varphi\colon M_n \otimes A \to M_n \otimes B$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$. 都是正映射，则称其为完全正（ *c.p.* ） $\frown$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$

最后，我们将 $\mathbf{H}$ 记作这样一个范畴：其对象是有限维冯诺依曼代数，态射是完全正幺映射。下一个命题是 [15,推论 5.12], 的一个特例，它表明 $\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{FdOS}$ 的子范畴。 该命题之后的摘要概述了$\mathbf{H}$与 MALL 相关的范畴性质。

命题 34。 设 $\varphi\colon A_1 \to A_2$ 是两个冯诺依曼代数之间的保单位元线性映射。则， φ 是完全正的，当且仅当 φ 是完全压缩的。

命题 35。 范畴 $\mathbf{H}$ 是对称幺半范畴（关于 $\otimes$），具有有限积（由 $\oplus$ 给出），且包含映射 $\mathbf{vNAlg_{fd}} \hookrightarrow \mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{FdOS}$ 保留这些数据。

5 冯·诺依曼余代数

在 [13], 中，冯诺依曼余代数结构 被定义 为冯诺依曼代数结构的前对偶。我们不采用这种做法，而是独立于冯诺依曼代数来引入有限维冯诺依曼余代数，并随后推导出 对偶性。得益于我们在第 3–4 节所做的预备性范畴论工作，并且考虑到 Haagerup 张量是自对偶的（命题 18），现在我们可以轻松地对有限维冯诺依曼代数的定义取对偶，从而得到有限维冯诺依曼余代数的定义。

定义 36. 一个有限维冯诺依曼余代数 是一个有限维算子空间 C，并配备

$_{\mathrm{h}}$*1.* 一个完全压缩映射 $\delta\colon C \to C \otimes C$，称为余乘法；*2.* 一个完全压缩映射 $\varepsilon\colon C \to \mathbb{C}$，称为余单位；*3.* 一个完全压缩映射 $j\colon C_o \to C_c$，称为对合，

$_{\mathrm{h}}$使得(C, ε, δ) 是$(\mathbf{FdOS}\ \mathbb{C}, \otimes)$中的一个余幺半群对象，以下图表

$$\begin{array}{ccc} C & = & C \\ \| & & \| \\ C_{oo} & \xrightarrow[j_o]{} & C_{co} = C_{oc} \xrightarrow[j_c]{} C_{cc} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} C_o & \xrightarrow{\ j\ } & C_c & \xrightarrow{\ \delta\ } & (C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C)_c \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & & & \| \\ (C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C)_o & \xrightarrow[\gamma]{} & C_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C_o & \xrightarrow[j\otimes j]{} & C_c \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C_c \end{array} \tag{4}$$

交换；并且对于每个完全商映射（即强满态射） $e\colon C \to \mathbb{C}$，以下**FdOS**中的复合映射是一个完全商映射（即强满态射）

$$C_o \xrightarrow{\delta} (C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C)_o \xrightarrow{\gamma} C_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C_o \xrightarrow{C_o \otimes j} C_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C_c \xrightarrow{e\otimes e} \mathbb{C}_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathbb{C}_c \cong \mathbb{C}. \tag{5}$$

我们对定义 31 取对偶，以得到下一个定义。

定义 37. 令$\mathbf{vNCoalg_{fd}}$ 表示**FdOS**的子范畴，其对象为有限维冯·诺伊曼余代数，态射 $\varphi\colon C \to D$ 为余乘法保持、余单位的，且对合保持，也就是说，以下 **FdOS** 中的图表交换。

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\ \varphi\ } & D \\ {\scriptstyle\delta_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta_D} \\ C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C & \xrightarrow[\varphi\otimes\varphi]{} & D \overset{\mathrm{h}}{\otimes} D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\ \varphi\ } & D \\ & {\scriptstyle\varepsilon_C}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varepsilon_D} & \\ & \mathbb{C} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_o & \xrightarrow{\ \varphi_o\ } & D_o \\ {\scriptstyle j_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_D} \\ C_c & \xrightarrow[\varphi_c]{} & D_c \end{array}$$

我们还对命题 32 中张量积和直和的构造取对偶，并在此使用命题 19 中剩下的洗牌映射。

命题 38. 若 $C, D \in$ **冯诺依曼余代数$_{\mathbf{fd}}$**，则算子空间 $C \mathbin{\widehat{\otimes}} D$ 具有

- *counit* $\varepsilon \triangleq \left(C \mathbin{\widehat{\otimes}} D \xrightarrow{\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D} \mathbb{C} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \right)$
- *involution* $j \triangleq \left((C \mathbin{\widehat{\otimes}} D)_o = C_o \mathbin{\widehat{\otimes}} D_o \xrightarrow{j_C \otimes j_D} C_c \mathbin{\widehat{\otimes}} D_c = (C \mathbin{\widehat{\otimes}} D)_c \right)$
- *comult.* $\delta \triangleq \left(C \mathbin{\widehat{\otimes}} D \xrightarrow{\delta_C \otimes \delta_D} (C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C) \mathbin{\widehat{\otimes}} (D \overset{\mathrm{h}}{\otimes} D) \xrightarrow{w} (C \mathbin{\widehat{\otimes}} D) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (C \mathbin{\widehat{\otimes}} D) \right)$

[1]也是一个冯诺依曼余代数。此外，算子空间 $C \oplus D$ 是一个冯诺依曼余代数，具有

- *counit* $\varepsilon \triangleq \left(C \overset{1}{\oplus} D \xrightarrow{\varepsilon_C \oplus \varepsilon_D} \mathbb{C} \overset{1}{\oplus} \mathbb{C} \xrightarrow{[id,id]} \mathbb{C} \right)$
- *involution* $j \triangleq \left((C \overset{1}{\oplus} D)_o = C_o \overset{1}{\oplus} D_o \xrightarrow{j_C \oplus j_D} C_c \overset{1}{\oplus} D_c = (C \overset{1}{\oplus} D)_c \right)$
- *comult.* $\delta \triangleq \left(C \overset{1}{\oplus} D \xrightarrow{\delta_C \oplus \delta_D} (C \overset{\text{h}}{\otimes} C) \overset{1}{\oplus} (D \overset{\text{h}}{\otimes} D) \xrightarrow{w'} (C \overset{1}{\oplus} D) \overset{\text{h}}{\otimes} (C \overset{1}{\oplus} D) \right)$

where $w' \triangleq \left((C \overset{\text{h}}{\otimes} C) \overset{1}{\oplus} (D \overset{\text{h}}{\otimes} D) \xrightarrow{[(\iota_C \otimes \iota_C),(\iota_D \otimes \iota_D)]} (C \overset{1}{\oplus} D) \overset{\text{h}}{\otimes} (C \overset{1}{\oplus} D) \right)$

命题 39. 范畴 $\mathbf{vNCoalg}_{\mathbf{fd}}$ 是对称幺半的，并且具有有限余积，其中 $\widehat{\otimes}$ 和 $\overset{1}{\oplus}$ 的作用按命题 *38* 中的方式扩展。

例 *40.* 算子空间 T_n 是一个冯诺依曼余代数，其结构如下：(1) 余单位由迹泛函 $\varepsilon \triangleq \mathsf{tr} : T_n \to \mathbb{C} :: t \mapsto \mathsf{tr}(t)$ 给出；(2) 对合由共轭转置 $j \triangleq (\cdot)^* : T_n^o \to T_n^c$ 给出；(3) 余乘法由 $\delta : T_n \to T_n \overset{\text{h}}{\otimes} T_n :: e_{ij} \mapsto \sum_k (e_{kj} \otimes e_{ik})$，给出，其中 $e_{ij} \in T_n$ 是一个在位置 (i, j) 处为 1、其余位置为 0 的矩阵。根据命题 38 可知，$\overset{1}{\oplus}_{1 \leq i \leq n} T_{k_i}$ 也是一个冯诺依曼余代数；再根据定理 44 和例 28 可知，每个有限维冯诺依曼余代数在冯诺依曼余代数同构意义下都具有这种形式。

量子操作。 我们使用有限维冯·诺伊曼余代数来定义薛定谔绘景中的量子操作，即完全正迹保持映射。这可以通过对第4节中的完全正幺映射取对偶来实现。保单位元映射的对偶显然是余单位的。不幸的是，在量子信息论中，“保迹”是标准术语，因此我们简单地称两个冯诺依曼余代数之间的线性映射 $\varphi : C \to D$ 为保迹映射，当且仅当它是余单位的。我们解释这样做的理由。注意，若 $C = T_n$ 和 $D = T_m$，那么根据例 40，我们可以看到，余单位的[1]映射恰好是保迹映射。更一般地，直和 $\oplus_i T_{k_i}$ 可以线性嵌入一个足够大的矩阵空间 $\mathbb{M}_m$ 中，并且相对于这一视角，余单位性等价于迹保持。利用例 40，这涵盖了所有有限维冯诺依曼余代数（相差一个同构）。

我们继续采用两个有限维冯·诺伊曼余代数之间完全正映射的（对偶）定义。我们再次在范畴 $\mathbf{FdOS}_{\text{cb}}$. 中进行讨论。给定一个冯诺依曼余代数 C，若存在一个线性泛函 $a : C \to \mathbb{C}$，使得下图成立，则称线性泛函 $p : C \to \mathbb{C}$ 为正：

$$\begin{array}{ccccccccc} (C \overset{\text{h}}{\otimes} C)_o & \xrightarrow{\gamma} & C_o \overset{\text{h}}{\otimes} C_o & \xrightarrow{C_o \otimes j} & C_o \overset{\text{h}}{\otimes} C_c & \xrightarrow{a \otimes a} & \mathbb{C}_o \overset{\text{h}}{\otimes} \mathbb{C}_c & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle\delta}\uparrow & & & & & & & & \| \\ C_o & & & & & \xrightarrow[p]{} & & & \mathbb{C}_o \end{array} \tag{6}$$

可交换。注意，(6) 是 (3) 的对偶。继续以此类推，我们称 vN-余代数之间的线性映射 $\varphi : C \to D$ 是正的，如果它反映正

线性泛函，即对于每个正线性泛函 $p\colon D\to\mathbb{C}.$，$p\circ\varphi\colon C\to\mathbb{C}$ 都是 C 上的正线性泛函。最后，如果对每个 $n\in\mathbb{N}.$，φ 的 $T_n\mathbin{\widehat{\otimes}}\varphi\colon T_n\mathbin{\widehat{\otimes}}C\to T_n\mathbin{\widehat{\otimes}}D$ 都是正的，我们就称 φ 是完全正的。这种（完全）正性的概念等价于通常的／具体的概念（参见附录 D）。

我们将 **S** 记作这样一个范畴：其对象为有限维冯诺依曼余代数，态射为它们之间的完全正迹保持映射。最后，我们证明 **S**是 **FdOS** 的子范畴，并总结其与 MALL 相关的结构。

命题 41. 设 $\varphi\colon C_1\to C_2$ 是有限维冯诺依曼余代数之间的线性迹保持映射。那么，φ完全正，当且仅当 φ 完全压缩。

命题 42. 范畴 **S** 关于 $\mathbin{\widehat{\otimes}}$构成对称幺半范畴，具有有限余积（由 $\overset{1}{\oplus}$给出），且包含映射 $\mathbf{vNCoalg_{fd}}\hookrightarrow\mathbf{S}\hookrightarrow\mathbf{FdOS}$ 保留这些结构。

6 海森堡-薛定谔对偶与 vN（余）代数

在有限维量子理论中，海森堡绘景下的量子操作恰好是完全正幺映射，即 **H**的态射；而薛定谔绘景下的量子操作恰好是完全正且保迹的映射，即 **S**。**H** 和 **S** 都是 **FdOS**的子范畴，并且对偶函子 $(\cdot)^*\colon\mathbf{FdOS}\to\mathbf{FdOS}$ 也可以定义在 vN（余）代数上，下面将对此进行说明。

命题 43. 若 $A\in\mathbf{vNAlg_{fd}}$，则算子空间对偶 A^* 是一个冯诺依曼余代数，其余单位为 $\varepsilon\triangleq\left(A^*\xrightarrow{\eta^*}\mathbb{C}^*\cong\mathbb{C}\right)$，对合为 $j\triangleq\left((A^*)_o=(A_o)^*\xrightarrow{i^*}(A_c)^*\cong(A^*)_c\right)$，余乘法为 $\delta\triangleq\left(A^*\xrightarrow{\mu^*}(A\mathbin{\mathrm{h}\otimes}A)^*\cong A^*\mathbin{\mathrm{h}\otimes}A^*\right)$。反之，若 $C\in\mathbf{vNCoalg_{fd}}$，则算子空间对偶 C^* 是一个冯诺依曼代数，其单位为 $\eta\triangleq\left(\mathbb{C}\cong\mathbb{C}^*\xrightarrow{\varepsilon^*}C^*\right)$，对合为 $i\triangleq\left((C^*)_c\cong(C_c)^*\xrightarrow{j^*}(C_o)^*=(C^*)_o\right)$，乘法定义为 $\mu\triangleq\left(C^*\mathbin{\mathrm{h}\otimes}C^*\cong(C\mathbin{\mathrm{h}\otimes}C)^*\xrightarrow{\delta^*}C^*\right)$.

定理 44. 我们有范畴等价 $(\cdot)^*:\mathbf{S}\simeq\mathbf{H}^{\mathrm{op}}\colon(\cdot)^*$，以及$(\cdot)^*:$**冯诺依曼余代数**$_{\mathbf{fd}}\simeq$**冯诺依曼代数**$_{\mathbf{fd}}{}^{\mathrm{op}}\colon(\cdot)^*$；其中，对象上的作用如命题 *43* 中所定义，态射上的作用则按通常方式定义，即如**FdOS**中所示。此外，这些等价是强幺半的（并且保持（余）积）。

例 *45.* 例 10 中的 c.i.i. 是一个冯诺依曼余代数同构 $T_n\cong M_n^*$，它通过对偶性确定了一个 vN-代数同构 $T_n^*\cong M_n$。

定理 44 给出了海森堡-薛定谔对偶的一种范畴论表述，并准确展示了第5节中的 MALL 相关结构 $\mathbf{vNCoalg_{fd}}$ 和**S** 如何与第4节中的结构 $\mathbf{vNAlg_{fd}}$ 和 **H** 互为对偶，反之亦然。对偶性$\mathbf{vNCoalg_{fd}}\simeq\mathbf{vNAlg_{fd}}{}^{\mathrm{op}}$ 表明，vN（余）代数在强意义上互为对偶；而对偶性 $\mathbf{S}\simeq\mathbf{H}^{\mathrm{op}}$ 则与量子计算的关系更为密切，我们将在下一节中使用它。

7 重新审视量子相干空间

第3至第6节的范畴论准备工作表明，（子）范畴 $\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{FdOS} \hookleftarrow \mathbf{H}$ 具有构造 MALL 模型所需的恰当范畴结构，而其对偶性由海森堡-薛定谔对偶诱导。然而，这里存在一个问题：S 和 H 都不是 FdOS 的满子范畴。这意味着，在 FdOS 中，冯诺依曼代数之间存在并非完全正幺映射的态射，冯诺依曼余代数之间也存在并非完全正保迹映射的态射。例如，映射$a \mapsto -a : M_2 \to M_2$ 不是正映射，但它属于 $\mathbf{FdOS}(M_2, M_2)$。幸运的是，有一个简单的解决方案：Hyland 和 Schalk [25],提出的一种基于粘合和正交性的语义技术，可以从 FdOS 中划出一个范畴 Q，使我们得到全忠实嵌入 $\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{Q} \hookleftarrow \mathbf{H}$，从而确保 Q 在相关同态集中恰好包含量子操作，同时保留所有 MALL 结构。简言之，核心思想是确保冯诺依曼余代数（冯诺依曼代数）之间的态射满足迹保持（幺元性），然后由命题 34 和 41 保证满性。这正是我们通过基于文献 [25]中的思想定义适当的正交性/极性概念所要做的。由此得到的模型明显类似于（概率）相干空间。

更具体地说，我们关注这样的对 (X, S)：其中 X 是一个算子空间，$S \subseteq \mathrm{Ball}(X)$ 是 X单位球的子集，并满足一个我们接下来要解释的附加条件。我们的下一个定义与泛函分析和凸分析中的极集 类似，因此得名。

定义 46（极集）。给定一个算子空间 X 和子集 $S \subseteq \mathrm{Ball}(X)$，我们将 S 的极集 定义为 $S^\circ \triangleq \{f \in \mathrm{Ball}(X^*) \mid \forall s \in S.\ f(s) = 1\}$. 若 $S = d^{-1}[S^{\circ\circ}]$，则称 S 为双极，其中 d: $X \cong X^{**}$ 是典范完全等距同构。

为避免引入过多符号，在处理极集构造的多次应用时，我们默认这些极集的像是在 d^{-1}下取得的。按照这一约定，只需说 S 是双极的，当且仅当 $S = S^{\circ\circ}$. 。如预期，极集引出一个伽罗瓦连接 [25,第5节。1] ；并且对于 $R \subseteq S \subseteq \mathrm{Ball}(X)$，可得 $S^\circ \subseteq R^\circ$、 $S \subseteq S^{\circ\circ}$，以及 $S^{\circ\circ\circ} = S^\circ$。现在，我们可以引入在计算上相关的主要范畴。

定义 47. 令**Q** 为一个范畴，其对象是形如(X, S) 的有序对，其中 $X \in$**FdOS**，且 $S \subseteq \mathrm{Ball}(X)$是一个双极集合，即 $S = S^{\circ\circ}$；其态射$f : (X, S) \to (Y, R)$ 是完全压缩 $f : X \to Y$，满足 $f[S] \subseteq R$。

我们的极性概念在 [25]中称为“正交性”，并具有一些有用的性质，例如它是紧的、稳定的、聚焦的、精确的，其含义见 [25]。利用 [25], 中的结果可知，**FdOS** 的 MALL 结构得以保留。

定理 48。范畴 *Q* 是 $*$-自反的，并且具有有限（余）积：对偶由 $(X, S)^* \triangleq (X^*, S^\circ)$ 给出；始对象由 $(0, \varnothing)$ 给出；终对象由 $(0, \{0\})$ 给出；二元积由 $(X, S) \overset{\infty}{\oplus} (Y, R) \triangleq (X \overset{\infty}{\oplus} Y, S \times R)$ 给出；二元余积由 $(X, S) \overset{1}{\oplus} (Y, R) \triangleq (X \overset{1}{\oplus} Y, (S^\circ + R^\circ)^\circ)$ 给出，其中

$$S^\circ + R^\circ \triangleq \{[s', r'] : X \overset{1}{\oplus} Y \to \mathbb{C} \mid s' \in S^\circ, r' \in R^\circ\} \subseteq \mathrm{Ball}((X \overset{1}{\oplus} Y)^*);$$

薛定谔绘景	$\mathbf{S} \overset{\text{full}}{\hookrightarrow} \mathbf{Q}$	LL_+
系统描述	$\mathcal{C}, \mathcal{D}$	P, R
量子复合	$\mathcal{C} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{D}$	$P \otimes R$
经典复合	$\mathcal{C} \overset{1}{\oplus} \mathcal{D}$	$P \oplus R$
量子操作 $\mathcal{C}$	$\xrightarrow{\text{CPTP}} \mathcal{D}$	$P \vdash R$

海森堡绘景	$\mathbf{H} \overset{\text{full}}{\hookrightarrow} \mathbf{Q}$	LL_-
系统描述	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	N, M
量子复合	$\mathcal{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{B}$	$N \parr M$
经典复合	$\mathcal{A} \overset{\infty}{\oplus} \mathcal{B}$	$N \mathbin{\&} M$
量子操作 $\mathcal{B}$	$\xrightarrow{\text{CPU}} \mathcal{A}$	$M \vdash N$

图 1. 薛定谔/海森堡绘景与正/负逻辑极性。

乘法合取由 $(X, S) \mathbin{\widehat{\otimes}} (Y, R) \triangleq (X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y, (S \otimes R)^{\circ\circ})$ 给出，其中 $S \mathbin{\widehat{\otimes}} R \triangleq \{s \otimes r \mid s \in S,\ r \in R\}$；乘法析取由 $(,) \mathbin{(,)} (X \otimes Y, (S^{\circ} \otimes R^{\circ})^{\circ})$; 给出；两种张量积的张量单位均由 $(\mathbb{C}, \{1\})$ 给出。

我们引入的极性与 vN（余）代数的关系非常良好。为此，我们先引入一些记号。对于一个 vN-余代数 C，我们称元素 $p \in C$ 为正，若映射 $1 \mapsto p$: $\mathbb{C} \to C$ 是正的，并用 $p \geq 0$ 表示这一点。C 上的密度算子定义为集合 $P_C \triangleq \{p \in C \mid \varepsilon(p) = 1 \text{ 和 } p \geq 0\}$。注意，若 $C = T_n$，则 P_C 恰好是由迹为 1 的正矩阵构成的密度矩阵集合 D_n，即迹为 1 的正矩阵。

定理 49. 若 $A \in \mathbf{vNAlg}_{\mathbf{fd}}$，则 $(A, \{1_A\}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$。此外，由 $H(A) \triangleq (A, \{1_A\})$ 和 $H(f) \triangleq f$ 定义的函子 $H : \mathbf{H} \to \mathbf{Q}$ 是全忠实的、关于 $\otimes$ 的严格幺半，并且严格保持有限积。

定理50。 若 $C \in \mathbf{vNCoalg}_{\mathbf{fd}}$，则 $(C, P_C) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$。此外，由 $S(C) \triangleq (C, P_C)$ 及 $S(f) \triangleq f$ 定义的函子 $S : \mathbf{S} \to \mathbf{Q}$ 是全忠实的，相对于 $\mathbin{\widehat{\otimes}}$ 为严格幺半的，并且严格保有限余积。

例51。对于酉矩阵 $u \in \mathbb{M}_{2^n}$，c.i.i. $a \mapsto uau^*$: $T_{2^n} \to T_{2^n}$ 描述了相对于薛定谔绘景中的 u 的系统酉演化。它保持密度算子，因此是 $\mathbf{Q}((T_{2^n}, D_{2^n}), (T_{2^n}, D_{2^n}))$ 中的一个映射。相应的海森堡绘景中的 c.i.i. $a \mapsto u^* a u$: $M_{2^n} \to M_{2^n}$ 保持单位，因此是 $\mathbf{Q}((M_{2^n}, \{1_{2^n}\}), (M_{2^n}, \{1_{2^n}\}))$ 中的一个映射。由于 $(T_2, D_2) \mathbin{\widehat{\otimes}} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}} (T_2, D_2) \cong (T_{2^n}, D_{2^n})$，同样地，$(M_2, \{1_2\}) \otimes \cdots \otimes (M_2, \{1_2\}) \cong (M_{2^n}, \{1_{2^n}\})$，$\mathbf{Q}$ 中的这些对象可以理解为表示薛定谔／海森堡绘景中的一组 n 量子比特。

现在，我们有充分理由来介绍图1所给出的总结，并对其加以阐述。在我们的模型$\mathbf{Q}$中，MALL 公式可解释为$\mathbf{Q}$的对象，而证明则解释为$\mathbf{Q}$.的态射。具有正（负）逻辑极性的公式可自然地解释为冯诺依曼余代数$\mathcal{C}, \mathcal{D}$（冯诺依曼代数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$），而这些公式之间的证明恰好对应于完全正且保迹（完全正且保单位）的映射，即薛定谔（海森堡）图景中的量子操作。此外，在两种图景中，这种对应关系在经典复合（系统的逐空间复合，其中经典交互的范围有限）和量子复合（系统的逐空间复合，其中可以进行完整范围的量子交互，例如纠缠）下均得以保持；其解释分别由相应的表格给出。

纯量子计算。我们证明了 Q 在两种图景中都能刻画混合态量子计算。事实上，Q 还具有与纯态量子计算相关的有趣性质，其中酉性至关重要。若 M 是一个有限维冯诺依曼代数，且 $u \in M$ 是酉元，即 $uu^* = 1_M = u^*u$，那么 $(M, \{u\}) \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Q})$，也就是说，集合 $\{u\}$ 在 M 中是双极的。我们可以在 Q 中推理有趣的高阶（纯态）映射，例如纯态量子开关。它是由 $\mathsf{qsw} : M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_n \to M_{2n}$ 定义的线性映射，满足 $\mathsf{qsw}(a \otimes b) \triangleq (|0\rangle\langle 0| \otimes (ab)) + (|1\rangle\langle 1| \otimes (ba))$，并且是一个完全压缩（[32, §IV]的特例）。对于任意酉矩阵 u 和 v，我们有对象等式 $(M_n, \{u\}) \mathbin{\widehat{\otimes}} (M_n, \{v\}) = (M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_n, \{u \otimes v\}^{\circ\circ}) = (M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_n, \{u \otimes v\})$，于是 qsw 成为我们模型 Q 中的一个态射（证明见附录 F.3），其类型为 $\mathsf{qsw} : (M_n, \{u\}) \mathbin{\widehat{\otimes}} (M_n, \{v\}) \to (M_{2n}, \{|0\rangle\langle 0| \otimes (uv) + |1\rangle\langle 1| \otimes (vu)\})$，其中三个双极子集都由酉矩阵构成。因此，$\mathsf{qsw}$ 可被视为 Q 中一个有效的（保持酉性）高阶映射。将 qsw 描述为“高阶”是有道理的，因为在纯态计算中，我们把酉元 u、$v \in M_n$ 视为一阶（可逆）函数。

qsw 有趣的原因之一是，它不允许任何合理的多线性分解；也就是说，不存在完全压缩映射 $\varphi_1 : M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_n \to M_{2n,m}$ 和 $\varphi_2 : M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_n \to M_{m,2n}$，使得 $\mathsf{qsw}(a \otimes b) = \varphi_1(a)\varphi_2(b)$。事实上，只需将 $\mathbin{\widehat{\otimes}}$ 替换为 $\mathbf{h} \otimes$，并检查 qsw 是否仍为完全压缩映射，即可确定这一点（更多细节请参见 [32,§IV] ）。这主要是因为 Haagerup 张量实际上刻画了那些允许类似多线性分解的映射 [15, 第9节.4]。在 Q 中也可以进行类似推理，因为我们有一个合法对象 $(M_n \mathbin{\mathbf{h}\otimes} M_n, \{u \otimes v\}) \in \mathsf{Ob}(\mathbf{Q})$，但 $\mathsf{qsw} : (M_n \mathbin{\mathbf{h}\otimes} M_n, \{u \otimes v\}) \to (M_{2n}, \{|0\rangle\langle 0| \otimes (uv) + |1\rangle\langle 1| \otimes (vu)\})$ 并非完全压缩映射，因此可以沿用 [32,§IV]中的论证得出结论。这表明，我们的模型 Q 可以借助 Haagerup 张量对复杂的高阶行为进行推理，而这超出了线性逻辑的范围，也为未来研究指明了一个新方向。

8 讨论与未来工作

我们提出了一种研究量子相干空间的新方法：正逻辑极性公式的证明与完全正保迹映射一一对应，负逻辑极性公式的证明则与完全正幺映射一一对应，从而解决了 Selinger [34] 在 Girard [21,22,23]提出的方法中指出的问题。其他与量子理论相关的工作包括 [35]，该文描述了 MALL 的一个模型；以及 [37]，该文描述了 LL 的一个模型。这些论文采用基于粘合和正交性的技术，或受其启发。我们的模型有两个主要区别：首先，我们所有的极化公式都有物理解释，并且基于数理物理进行数学表述；其次，我们并未先验地假设完全正性，而只在必要时才将其推导出来，即用于混合态量子计算时。我们在第7节证明，我们的模型还有一个优点：它也可用于推理

纯态 量子计算，在这种情况下，完全正性毫无意义。我们的模型可以使用标准技术来解释量子 λ 演算；而且，由于它能够处理纯态和混合态量子计算，未来的一个研究方向是利用它为类型系统和/或逻辑提取合适的设计，使其能够结合经典与量子控制。

未来工作的另一个方向与一般递归有关——从域理论的角度来看，我们的态射应被视为“全”的，而非“部分”的 [1]。为了获得更有趣的域论性质，应在薛定谔绘景中用迹非增（TNI）映射取代保迹映射，并在海森堡绘景中用次保单位元（SU）映射取代保单位映射。事实上，在有限维情形下，Loewner 序赋予 CPTNI 映射和 CPSU 映射连续域的结构[34,28], ；从域论的角度来看，这是一类非常理想的有向完备偏序集。为此，我们需要相应地修改第7节中的极性/正交性。我们认为，这或许可以通过凸性的非交换推广——称为矩阵凸性 [15,（第5节）5]|[14]来实现。希望这能加强与概率相干空间之间的联系；概率相干空间确实可用于建模一般递归。

我们注意到， [18],提出了一种范畴化方法，将（无限维）前 C^*-代数视为带有对合的幺半范畴中的幺半群对象。不过，这一定义要求使用无界线性映射。相比之下，我们基于 Haagerup 张量积的方法没有同样的问题，即便使用无限维空间也是如此，因为该张量积可用于刻画 单位算子代数 [33,9]。请注意，我们仍然能在（余）交换 vN（余）代数的子范畴中获得一些与范畴概率论相关的结构：$\mathbf{vNAlg_{fd}}^{\mathrm{op}}$（$\simeq \mathbf{vNCoalg_{fd}}$）和 $\mathbf{H}^{\mathrm{op}}$（$\simeq \mathbf{S}$）相对于完全单射（投射）张量积构成 Markov 范畴。

未来研究的另一个方向是尝试将 vN-代数和 vN-余代数的范畴化定义推广到无限维情形，此时对偶与前对偶并不重合。请注意，这还要求我们调整所用的某些幺半结构的选择，正如 [13], 中那样；因为对于无限维算子空间，Haagerup 张量积通常不具有德摩根意义下的自对偶性。希望发展无限维 vN-余代数理论，能够进一步深化 [32] 中关于极化线性逻辑与海森堡-薛定谔对偶之间联系的观察。最后，可以探究我们关于海森堡-薛定谔对偶的线性逻辑方法是否以及如何关联到状态-效应三角形的范畴逻辑方法 [27], ，鉴于$\mathbf{H}^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{S}$ 确实是一个效应子。

致谢。我们感谢匿名评审提出的意见，这些意见促使论文得到了多处改进。我们还感谢 Benoît Valiron、Bert Lindenhovius、Titouan Carette 和 James Hefford 与我们进行讨论并提供有益反馈。本研究部分由法国国家研究署在“法国2030计划”框架内资助，资助项目包括 EPIQ ANR-22-PETQ-0007、HQI-Acquisition ANR-22-PNCQ- 0001、HQI-R&D ANR-22-PNCQ-0002，以及 CIFRE 2022/0081。

参考文献

1. Abramsky, S., Jung, A.: 域理论（1994） 2. Aguiar, M., Mahajan, S.: 幺半函子、物种与霍普夫代数。AMS and Centre de Recherches Mathématiques（2010）, https://pi.math.cornell. edu/~maguiar/a.pdf 3. Baratella, S.: 量子相干空间与线性逻辑。RAIRO-Theoretical Informatics and Applications **44**(4), 419–441（2010）。https://doi.org/10.1051/ita/ 2010021 4. Beggs, E.J., Majid, S.: Bar 范畴与星运算（2009）。https://doi. org/10.1007/s10468-009-9141-x, https://arxiv.org/abs/math/0701008 5. Blackadar, B.: 算子代数：C*-代数与冯·诺依曼代数理论，第122卷。施普林格，柏林、海德堡（2006）。https://doi.org/10.1007/3-540-28517-2 6. Blanco, N.: 多范畴的双纤维化与经典乘法线性逻辑。CoRR**abs**/**2305**15139 **7151392**023 10 48550 2305。( )。https://doi.org/ . /ARXIV. . . Blecher, D.P., Le Merdy, C.: 算子代数及其模：算子空间方法。牛津大学出版社（2004年10月）。https://doi.org/10.1093/ acprof:oso/9780198526599 0001 8 001. . . Blute, R., Panangaden, P., Slavnov, S.: 深度推理与概率相干空间。Applied Categorical Structures **20**, 209–228（2010）。https://doi.org/ 10.1007/s10485-010-9241-0 9. Chirvasitu, A., Thompson, I.: 算子代数范畴中遗忘函子的局部可表示性与单子性（2025 23152 10 2507 2020）, https://arxiv.org/abs/ . . Choi, Y.: 算子空间张量积之间的一种扭曲嵌入（）, https://arxiv.org/abs/1606 06287 11 . . Conway, J.:《泛函分析教程》。施普林格（2007）。https://doi.org/ 10.1007/978-1-4757-4383-8 12. Danos, V., Ehrhard, T.: 概率相干空间作为高阶概率计算的模型。Inf. Comput. **209**(6), 966–991（2011）。https://doi. org/10.1016/J.IC.2011.02.001 13. Effros, E.G., Ruan, Z.J.: 算子空间张量积与霍普夫卷积代数。Journal of Operator Theory **50**(1), 131–156（2003）, http://www.jstor. org/stable/24718935 14. Effros, E.G., Winkler, S.: 矩阵凸性：双极与哈恩–巴拿赫定理的算子类比。Journal of Functional Analysis **144**(1), 117–152（1997）。https://doi.org/https://doi.org/10 2958 15 1006 1996 . /jfan. . . Effros, E., Ruan, Z.: 算子空间。伦敦数学会专著，Clarendon Press（2000）, https://books.google.fr/books?id=v7mj8Dy84k8C 16. Ehrhard, T., Pagani, M., Tasson, C.: 概率 PCF 的完全抽象。J. ACM **65**3164540 17 4 23 1 23 44 2018 10 1145（）, : – :（）。https://doi.org/ . / . Ehrhard, T., Tasson, C.: 概率推值调用。Log. Methods Comput. Sci. **15**（2019）18 1 2019 10 23638 15 1 3（）。https://doi.org/ . / LMCS-（:）. Fritz, T., Lorenzin, A.: 对合保持的 Markov 范畴与量子德·菲内蒂定理（2025 09666 19 2312）, https://arxiv.org/abs/ . . Girard, J.: 变元类型的 F 系统，十五年后。Theor. Comput. Sci. **457** 20 2 159 192 1986 10 1016 0304 3975 86 9004**50**, 1 101 1987（）, –（）。https://doi.org/ . / - ( ) - . Girard, J.: 线性逻辑。Theor. Comput. Sci. –（）。https://doi.org/ 10.1016/0304-3975(87)90045-4

21. Girard, J.Y.：《逻辑与量子之间：一篇论述》，第 346–381 页。伦敦数学会讲义系列，剑桥大学出版社（2004）22. Girard, J.Y.：《盲点 II：逻辑课程，走向不完美》。科学视野（2007）23. Girard, J.Y.：真理、模态与主体间性。《计算机科学中的数学结构》**17**(6)，1153–1167（2007）。https://doi.org/10.1017/ S0960129507006342 24. Gudder, S., Strawther, D.：严格凸赋范线性空间。《美国数学会会刊》**59**(2)，263–267（1976），http://www.jstor. org/stable/2041481 25. Hyland, M., Schalk：线性逻辑模型的粘合与正交性。《理论计算机科学》**294**(1)，183–231（2003）。https://doi.org/https: //doi.org/10 9 26 1016 0304 3975 01 00241 . /S - ( ) - . Jacobs, B.：对合范畴与幺半群及其 GNS 对应。《物理学基础》**42**(7)，874–895（2011年9月）。https://doi.org/10.1007/ s10701-011-9595-7 27. Jacobs, B.：态与效应三角的构造方法。《计算机科学逻辑方法》**第 13 卷，第 2 期**（2017年5月）。https://doi.org/10.23638/ lmcs-13 2017 28 2 6 2017, 10 23638 13 2 6 (:) http://dx.doi.org/ . /LMCS- (:) . Jia, X., Kornell, A., Lindenhovius, B., Mislove, M.W., Zamdzhiev, V.：变分量子编程的语义。《美国计算机协会编程语言学报》**6**(编程语言原理)，1–31（2022 3498687 29 10 1145 3498687, 10 1145）。https://doi.org/ . / https://doi.org/ . / . Kadison, R., Ringrose, J.：《算子代数基础》。第一卷：基础理论。数学研究生教材，美国数学会（1997 15 30），https://bookstore.ams.org/gsm- 。Kornell, A.：量子集合。《国际数学杂志》**28**(12)，1750085 17500859 31 2017 10 1142 0129167 ( )。https://doi.org/ . / S X . Lindenhovius, B., Zamdzhiev, V.：算子空间范畴与完全压缩映射。CoRR **abs/2412.20999**（2024）。https://doi.org/10.48550/ ARXIV.2412.20999 32. Lindenhovius, B., Zamdzhiev, V.：算子空间、线性逻辑与量子理论的海森堡–薛定谔对偶性。载于：2025年第40届美国计算机协会/电气电子工程师学会计算机科学逻辑研讨会（LICS）。第 870–883 页（2025）。https://doi. org/10 00071 33 1109 65433 2025 . / LICS . . . Pisier, G.：《算子空间理论导论》。伦敦数学会讲义系列，剑桥大学出版社（2003）34. Selinger, P.：迈向高阶量子计算的语义。载于：第二届量子编程语言国际研讨会论文集，TUCS 通用出版物。第 33 卷，第 127–143 页（2004）35. Simmons, W., Kissinger, A.：高阶因果理论是 BV 逻辑的模型。载于：Szeider, S., Ganian, R., Silva, A.（编）《第 47 届计算机科学数学基础国际研讨会，MFCS 2022》，2022年8月22–26日，奥地利维也纳。信息学论文集，第 241 卷，第 80:1–80:14 页。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心（2022 80 36 10 4230 2022）。https://doi.org/ . / LIPICS.MFCS. . . Takesaki, M.：《算子代数理论 I》。施普林格，纽约州纽约市（1979）。https://doi.org/10 9 37 1007 978 1 4612 6188 . / - - - - . Tsukada, T., Asada, K.：量子 FPC 的富化预层模型。《美国计算机协会编程语言学报》**8**(编程语言原理)，362–392（2024）。https://doi.org/10.1145/3632855

关于这些附录的注记

我们打算进一步完善这些附录中呈现的材料，并在未来提交本文的期刊版本。在此期间，我们希望对技术细节感兴趣的读者能从本文所含的信息中获益。

B FdOS 范畴

在本附录中，我们给出一些关于**FdOS**的范畴性质的略去的证明。

B.1 MALL 模型

我们在第3节给出的完全射影张量的定义，并非文献中常见的标准定义。对于有限维算子空间，它与标准定义等价，我们将在此证明这一点。在第3节采用较简单定义的原因在于，它具有更鲜明的逻辑／范畴特征，而且我们认为这能让相关领域的专家更容易理解本文。

我们首先回顾完全射影张量积 $X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$ 的标准定义，并将在本小节末证明，它在 $X \otimes Y$ 上确定的算子空间结构与定义 15 中的相同。

定义 52（完全射影张量 [15, 第7节。1]）。设 X，Y $\in$**FdOS**。完全投射张量积，记作 $X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$，是向量空间 $X \otimes Y$ 连同如下定义的算子空间结构：$v \in \mathbb{M}_n(X \otimes Y)$：

$$\|v\|_{\wedge} \triangleq \inf\{\|\alpha\|\|x\|\|y\|\|\beta\| \ : \ p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, x \in M_p(X), y \in M_q(Y), \\ \alpha \in M_{n,pq}, \beta \in M_{pq,n}, \ and \ v = \alpha(x \otimes y)\beta\}.$$

这里，$x \otimes y \in M_{pq}(X \otimes Y)$ 表示由$x \otimes y \triangleq [x_{ij} \otimes y_{kl}]_{(i,k),\ (j,l)}$给出的“矩阵的张量积”，它是通常的克罗内克积的推广。

命题 53（[15, 第 7 节-9]）。张量积 $\overset{\alpha}{\otimes}$（对于 $\alpha = \widehat{}$、$\widehat{}$、h）具有以下性质：

– 对完全有界映射和完全收缩映射具有函子性– 结合性：$(A \overset{\alpha}{\otimes} B) \overset{\alpha}{\otimes} C \cong A \overset{\alpha}{\otimes} (B \overset{\alpha}{\otimes} C)$：$(a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes (b \otimes c)$ $^{\alpha}$ $^{\alpha}$–具有单位子：$\mathbb{C} \otimes A \cong A \cong A \otimes \mathbb{C}$：$\lambda \otimes a \mapsto \lambda a \leftarrow\!\shortmid a \otimes \lambda$

以及对于 $\alpha = \widehat{},\widehat{}$

– *Symmetric:* $A \overset{\alpha}{\otimes} B \cong B \overset{\alpha}{\otimes} A : a \otimes b \mapsto b \otimes a$

命题 23. 当取任意一种张量积 $\widehat{\otimes}$ / $\widehat{\otimes}$ / $_{\mathrm{h}}\otimes$ 作为幺半积、$\mathbb{C}$ 作为幺半单位时，**FdOS** 是一个幺半范畴。前两种幺半结构是对称的，并且在所有情形下，（对称）幺半自然同构都与 **FdVect** 中的相同，也就是说，遗忘函子 V: **FdOS** $\to$ **FdVect** 是一个严格（对称）幺半函子。

证明。这三个张量积都可以扩展为双函子，结合约束、单位约束和对称同构均为命题 53 中给出的那些。相干图的验证是直接的。为说明函子 V : **FdOS** $\to$ $^{\alpha}$**FdVect** 是严格幺半的，注意到对于任意有限维算子空间 A 和 B，$A \otimes B$（对于 $\alpha = \widehat{}$、$\widehat{}$、h）的底层向量空间为 $A \otimes B$，并且命题 53 中的（对称）幺半自然同构与**FdVect**中的同构一致。□

引理 54。 对称幺半范畴 $(\mathbf{FdOS}\ \mathbb{C}、\ \widehat{\otimes})$ 关于完全有界映射$(–、\ –)\colon\ \mathbf{FdOS}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{FdOS}\ \to \mathbf{FdOS}$是闭的。

证明。 由将 [32, 命题 III.33] 限制到 $\mathbf{FdOS}$可得。 □

命题 55。 范畴 $\mathbf{FdOS}$ 是 $*$-自对偶的，其对偶化对象为 $\mathbb{C}$ 。

证明。 由引理 54，只需证明 $\mathbb{C}$ 是一个全局对偶化对象。令 $A \in \mathbf{FdOS}$，对求值映射 $\mathrm{ev}_{A,\ \mathbb{C}}\colon \mathrm{CB}(A,\ \mathbb{C}) \otimes A \to \mathbb{C}$ 进行柯里化，即得到将 A 嵌入其双对偶的典范嵌入

$$\begin{aligned} d_A : A &\to \mathrm{CB}(\mathrm{CB}(A, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \\ a &\mapsto (f \mapsto f(a)) \end{aligned}$$

根据 [15, 命题 3.1.2] ，该嵌入是一个完全等距包含。由于 A 是有限维的，根据秩-零度定理可知这是一个同构。□

定理 24。 范畴 $\mathbf{FdOS}$ 具有有限（余）积，它是带有表 *1* 中相关数据的 $*$-自对偶范畴，因此是 *MALL* 的一个模型。

证明。 结合命题 55 与第 2.3 节中关于（余）积的结果即可得出。□

现在很容易证明，在有限维算子空间上，完全投射张量的两个定义是等价的，即它们在 $X \otimes Y$. 上定义了相同的算子空间结构。

命题 56。 设 X 和 Y 是两个有限维算子空间。则由定义 *15* 在 $X \otimes Y$ 上给出的算子空间结构与定义 *52* 的算子空间结构一致。

证明。 由定理 24, $*$ $X \widehat{\otimes} Y \cong$ 可知，当 $\widehat{\otimes}$ 以标准方式定义，即按照定义 52 定义时，$\mathbf{FdOS}$ 是 -自对偶的，并且 $(X^* \otimes Y^*)^*$。但这正是定义 15 中定义 $X \widehat{\otimes} Y$ 的算子空间结构的方式，因此这两个算子空间结构完全相等。□

B.2 BV-范畴结构

定义 57。 设 $\mathbf{C}$ 是一个具有两个幺半结构 $(\mathbf{C}\ I, \otimes)$ 和$(\mathbf{C}\ J, \triangleleft)$的范畴。若存在一个自然变换，则$(J, \triangleleft)$ 相对于$(I, \otimes)$ 是正规的双幺半：

$$w : (A \triangleleft B) \otimes (C \triangleleft D) \to (A \otimes C) \triangleleft (B \otimes D)$$

（态射 w 通常称为弱交换）以及以及态射

$$i : I \cong J \qquad \delta_I : I \to I \triangleleft I \qquad \mu_J : J \otimes J \to J$$

除了结合性的相干条件之外，

$$\begin{array}{ccc}
((A \lhd B) \otimes (C \lhd D)) \otimes (E \lhd F) & \xrightarrow{\alpha} & (A \lhd B) \otimes ((C \lhd D) \otimes (E \lhd F)) \\
\downarrow{\scriptstyle w\otimes \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes w} \\
((A \otimes C) \lhd (B \otimes D)) \otimes (E \lhd F) & & (A \lhd B) \otimes ((C \otimes E) \lhd (D \otimes F)) \\
\downarrow{\scriptstyle w} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
((A \otimes C) \otimes E) \lhd ((B \otimes D) \otimes F) & \xrightarrow[\alpha\lhd\alpha]{} & (A \otimes (C \otimes E)) \lhd (B \otimes (D \otimes F))
\end{array} \tag{7}$$

$$\begin{array}{ccc}
((A \lhd C) \lhd E) \otimes ((B \lhd D) \lhd F) & \xrightarrow{\alpha\otimes\alpha} & (A \lhd (C \lhd E)) \otimes (B \lhd (D \lhd F)) \\
\downarrow{\scriptstyle w} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
((A \lhd C) \otimes (B \lhd D)) \lhd (E \otimes F) & & (A \otimes B) \lhd ((C \lhd E) \otimes (D \lhd F)) \\
\downarrow{\scriptstyle w\lhd \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\lhd w} \\
((A \otimes B) \lhd (C \otimes D)) \lhd (E \otimes F) & \xrightarrow[\alpha]{} & (A \otimes B) \lhd ((C \otimes D) \lhd (E \otimes F))
\end{array} \tag{8}$$

以及幺元性，

$$\begin{array}{ccc}
I \otimes (A \lhd B) & \xrightarrow{\delta_I \otimes id} & (I \lhd I) \otimes (A \lhd B) \\
\uparrow{\scriptstyle \lambda_{A\lhd B}} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
A \lhd B & \xrightarrow[\lambda_A \lhd \lambda_B]{} & (I \otimes A) \lhd (I \otimes B)
\end{array} \qquad
\begin{array}{ccc}
(A \lhd B) \otimes I & \xrightarrow{id\otimes \delta_I} & (A \lhd B) \otimes (I \lhd I) \\
\uparrow{\scriptstyle \rho_{A\lhd B}} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
A \lhd B & \xrightarrow[\rho_A \lhd \rho_B]{} & (A \otimes I) \lhd (B \otimes I)
\end{array} \tag{9}$$

$$\begin{array}{ccc}
J \lhd (A \otimes B) & \xleftarrow{\mu_J \lhd id} & (J \otimes J) \lhd (A \otimes B) \\
\uparrow{\scriptstyle \lambda_{A\otimes B}} & & \uparrow{\scriptstyle w} \\
A \otimes B & \xrightarrow[\lambda_A \otimes \lambda_B]{} & (J \lhd A) \otimes (J \lhd B)
\end{array} \qquad
\begin{array}{ccc}
(A \otimes B) \lhd J & \xleftarrow{id\lhd \mu_J} & (A \otimes B) \lhd (J \otimes J) \\
\uparrow{\scriptstyle \rho_{A\otimes B}} & & \uparrow{\scriptstyle w} \\
A \otimes B & \xrightarrow[\rho_A \otimes \rho_B]{} & (A \lhd J) \otimes (B \lhd J)
\end{array} \tag{10}$$

正如图表所示，$\lhd$ 中有一个余幺半群，且在 $(\mathcal{C}, I, \otimes)$ 中有一个幺半群 J。

定义 58。 *[8, 第 3]* 一个带否定的 BV 范畴是一个 $*$-自主范畴 $(\mathbf{C}\ I, \otimes, \multimap)$，带有额外的幺半结构 $(\mathbf{C}\ J, \lhd)$，且该结构是正规

双幺半 到 $(\mathbf{C}\ I, \otimes)$，使得互换以如下方式与$\otimes$ 的对称性相容：

$$\begin{array}{ccc} (A \lhd B) \otimes (C \lhd D) & \xrightarrow{\cong} & (C \lhd D) \otimes (A \lhd B) \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ (A \otimes C) \lhd (B \otimes D) & \xrightarrow[\cong]{} & (C \otimes A) \lhd (D \otimes B) \end{array} \tag{11}$$

注释 *59.* 注意，在带否定的 BV 范畴中，$(\mathbf{C}\ \bot,\ \parr)$ 和 $(\mathbf{C}\ J,\ \lhd)$ 之间也有双幺半群结构，其中 $(-)\ \parr\ (-) \triangleq (-)^* \multimap (-)$。

命题 60. 范畴 $\mathbf{FdVect}$ 相对于$(\mathbf{FdVect}\ \mathbb{C}, \otimes, L(-,-))$ 和$(\mathbf{FdVect}\ \mathbb{C}, \otimes)$，是一个带否定的 *BV*-范畴。

证明。$\mathbf{FdVect}$ 是紧闭的，因此是 $*$-自对偶的，并且任意对称幺半结构对自身而言都是正规双幺半的（这是 [2, 命题 6.10。]的特例）。

□

命题 61. 范畴 $\mathbf{FdOS}$ 相对于$(\mathbf{FdOS}\ \mathbb{C}, \widehat{\otimes}$, 完全有界映射$(-,-))$ 和$(\mathbf{FdOS}\ \mathbb{C}, {}_{\text{h}}\otimes)$，是一个带否定的 *BV*-范畴。

证明。 由命题 55 可知，$\mathbf{FdOS}$是 $*$-自对偶的。根据命题 19，我们在$\mathbf{FdOS}$中有自然的弱交换映射；又由于所有张量积都有一个公共单位元，因此由命题 23 可得结论，因为相应的态射被映射到$\mathbf{FdVect}$上的 BV 结构。□

B.3 共轭/相反函子对合

以下命题将多次用到，因此为方便起见，我们在此重述。

命题 25。 给定算子空间 X 和 Y，有如下算子空间等式 $\mathrm{CB}(X,Y)_c = \mathrm{CB}(X_c, Y_c)$ 以及 $\mathrm{CB}(X,Y)_o = \mathrm{CB}(X_o, Y_o)$。

特别地，我们利用命题 25 轻松证明以下许多结果。

命题26。 给定算子空间 $X, Y \in \mathbf{FdOS}$，我们有：

- $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_c = X_c \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_c$
- $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_o = X_o \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_o$
- $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_c = X_c \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_c$
- $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_o = X_o \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_o$
- $(X \overset{1}{\oplus} Y)_c = X_c \overset{1}{\oplus} Y_c$
- $(X \overset{1}{\oplus} Y)_o = X_o \overset{1}{\oplus} Y_o$
- $(X \overset{\infty}{\oplus} Y)_c = X_c \overset{\infty}{\oplus} Y_c$
- $(X \overset{\infty}{\oplus} Y)_o = X_o \overset{\infty}{\oplus} Y_o$
- $(X \mathbin{\overset{\text{h}}{\otimes}} Y)_c = X_c \mathbin{\overset{\text{h}}{\otimes}} Y_c$
- *a c.i.i., called* γ, $(X \mathbin{\overset{\text{h}}{\otimes}} Y)_o \cong Y_o \mathbin{\overset{\text{h}}{\otimes}} X_o$ $\gamma(x \otimes y) \triangleq (y \otimes x)$.

证明。 最后两个事实已为人所知，因此我们提供相关参考文献。

h **情形** $(X \otimes Y)_c = X_c \otimes Y_c$。文献 [33, 第 97] 页声称这是一个完全等距同构。在我们的表述中，X_c 与X具有相同的底层集合，因此这实际上是一个等式。

h **情形** $(X \otimes Y)_o \cong Y_o \otimes X_o$。这在 [33, 第 96–97] 页中有所论述。

情形 $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_c = X_c \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_c$. 利用命题 25 很容易证明这一点。令 $\wr_{X,\,Y}\colon X \otimes Y \cong$ 完全有界映射(Y^*, X) 为定义 14 中的典范完全等距同构。更具体地说，$\iota_{X,\,Y}(x \otimes y) \triangleq (\varphi \mapsto \varphi(y)x)$。以下复合映射

$$(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_c \xrightarrow{\iota_c} \mathrm{CB}(Y^*, X)_c = \mathrm{CB}((Y^*)_c, X_c) \cong \mathrm{CB}((Y_c)^*, X_c) \xrightarrow{\iota^{-1}} X_c \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_c$$

由完全等距同构构成。在初等张量上求值

$$\begin{aligned} x \otimes y &\xmapsto{\iota_c} (\varphi \mapsto \varphi(y)x) \\ &= \Big(\varphi \mapsto \overline{\varphi(y)} \star x\Big) \\ &\xmapsto{\cong} (\varphi \mapsto \varphi(y) \star x) \\ &\xmapsto{\iota^{-1}} x \otimes y \end{aligned}$$

这表明上述复合映射是恒等映射。这里我们用 $\star$ 表示 X_c 中的标量乘法，竖直对齐的符号表示同构的作用。由于这个 c.i.i. 是恒等映射，等式得证。

情形 $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_o = X_o \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_o$. 证明与前一种情形类似。下面的复合映射

$$(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_o \xrightarrow{\iota_o} \mathrm{CB}(Y^*, X)_o = \mathrm{CB}((Y^*)_o, X_o) = \mathrm{CB}((Y_o)^*, X_o) \xrightarrow{\iota^{-1}} X_o \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_o$$

由完全等距同构构成。对初等张量求值可知，这个 c.i.i. 是恒等映射，因此等式得证。

情形 $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_c = X_c \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_c$. 这可以利用以下事实证明：$(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_c = X_c \otimes Y_c$并对后一个事实的证明进行调整。设 $\iota_{X,\,Y}\colon X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y \cong (X^* \otimes Y^*)^*$为由 $\iota_{X,\,Y}(x \otimes y) \triangleq (\varphi \otimes \psi) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ 定义的典范完全等距同构。以下复合映射

$$(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_c \xrightarrow{\iota_c} ((X^* \mathbin{\widehat{\otimes}} Y^*)^*)_c \cong ((X^* \mathbin{\widehat{\otimes}} Y^*)_c)^* = ((X^*)_c \mathbin{\widehat{\otimes}} (Y^*)_c)^* \cong ((X_c)^* \mathbin{\widehat{\otimes}} (Y_c)^*)^* \xrightarrow{\iota^{-1}} X_c \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_c$$

由完全等距同构构成。在初等张量上求值

$$\begin{aligned} (x \otimes y) &\xmapsto{\iota_c} ((\varphi \otimes \psi) \mapsto \varphi(x) \cdot \psi(y)) \\ &\xmapsto{\cong} \Big((\varphi \otimes \psi) \mapsto \overline{\varphi(x) \cdot \psi(y)}\Big) \\ &\xmapsto{\cong} \Big((\varphi \otimes \psi) \mapsto \overline{\overline{\varphi(x)} \cdot \overline{\psi(y)}}\Big) \\ &= ((\varphi \otimes \psi) \mapsto \varphi(x) \cdot \psi(y)) \\ &\xmapsto{\iota^{-1}} (x \otimes y) \end{aligned}$$

可知该复合映射就是恒等映射，因此等式成立。

情形 $(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_o = X_o \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_o$. 这可以用与前一种情形类似的方法证明。下列复合映射

$$(X \mathbin{\widehat{\otimes}} Y)_o \xrightarrow{\iota_o} ((X^* \mathbin{\widehat{\otimes}} Y^*)^*)_o = ((X_o)^* \mathbin{\widehat{\otimes}} (Y_o)^*)^* \xrightarrow{\iota^{-1}} X_o \mathbin{\widehat{\otimes}} Y_o$$

由完全等距同构组成。对初等张量求值后，我们看到该复合映射是恒等映射，结论由此得证。

情形 $(X \overset{\infty}{\oplus} Y)_o = X_o \overset{\infty}{\oplus} Y_o$. 显然，恒等函数给出一个线性同构 $\mathrm{id}\colon (X \overset{\infty}{\oplus} Y)_o \cong X_o \overset{\infty}{\oplus} Y_o$. 为证明它是完全等距的，令 $[(x_{ij}, y_{ij})] \in M_n((X \overset{\infty}{\oplus} Y)_o)$。我们验证：

$$\begin{aligned}
\left\|[(x_{ij}, y_{ij})]\right\|_{M_n((X \overset{\infty}{\oplus} Y)_o)} &= \left\|[(x_{ji}, y_{ji})]\right\|_{M_n((X \overset{\infty}{\oplus} Y))} \\
&= \left\|([x_{ji}], [y_{ji}])\right\|_{M_n(X) \overset{\infty}{\oplus} M_n(Y)} \\
&= \max(\left\|[x_{ji}]\right\|_{M_n(X)}, \left\|[y_{ji}]\right\|_{M_n(Y)}) \\
&= \max(\left\|[x_{ij}]\right\|_{M_n(X_o)}, \left\|[y_{ij}]\right\|_{M_n(Y_o)}) \\
&= \left\|([x_{ij}], [y_{ij}])\right\|_{M_n(X_o) \overset{\infty}{\oplus} M_n(Y_o)} \\
&= \left\|[(x_{ij}, y_{ij})]\right\|_{M_n(X_o \overset{\infty}{\oplus} Y_o)},
\end{aligned}$$

其中每个等式都根据相应的（矩阵）范数的定义成立。

情形 $(X \overset{\infty}{\oplus} Y)_c = X_c \overset{\infty}{\oplus} Y_c$. 证明与前一种情形完全类似。恒等函数是一个线性同构 $\mathrm{id}\colon (X \overset{\infty}{\oplus} Y)_c \cong X_c \overset{\infty}{\oplus} Y_c$. 为证明它是完全等距的，只需沿用前一个证明中的相同步骤，并使用共轭空间的算子空间结构。

情形 $(X \overset{1}{\oplus} Y)_c = X_c \overset{1}{\oplus} Y_c$. 令 $\iota_{X,Y}\colon X \overset{1}{\oplus} Y \cong (X^* \overset{\infty}{\oplus} Y^*)^*$ 为定义 $X \oplus Y$ 的算子空间结构的典范完全等距同构。它由下式给出 $\iota_{X,Y}(x, y) = ((\varphi, \psi) \mapsto \varphi(x) + \psi(y))$. 以下复合映射

$$(X \overset{1}{\oplus} Y)_c \xrightarrow{\iota_c} ((X^* \overset{\infty}{\oplus} Y^*)^*)_c \cong ((X^* \overset{\infty}{\oplus} Y^*)_c)^* \cong ((X_c)^* \overset{\infty}{\oplus} (Y_c)^*)^* \xrightarrow{\iota^{-1}} X_c \overset{1}{\oplus} Y_c$$

由完全等距同构组成。对元素求值

$$\begin{aligned}
(x, y) &\xmapsto{\iota_c} ((\varphi, \psi) \mapsto \varphi(x) + \psi(y)) \\
&\xmapsto{\cong} \left((\varphi, \psi) \mapsto \overline{\varphi(x) + \psi(y)}\right) \\
&\xmapsto{\cong} \left((\varphi, \psi) \mapsto \overline{\overline{\varphi(x)} + \overline{\psi(y)}}\right) \\
&= ((\varphi, \psi) \mapsto \varphi(x) + \psi(y)) \\
&\xmapsto{\iota^{-1}} (x, y)
\end{aligned}$$

表明这个复合映射是恒等映射，由此可得该等式。

情形 $(X \overset{1}{\oplus} Y)_o = X_o \overset{1}{\oplus} Y_o$. 这与前一种情形类似。下面的复合映射

$$(X \overset{1}{\oplus} Y)_o \xrightarrow{\iota_o} ((X^* \overset{\infty}{\oplus} Y^*)^*)_o = ((X^* \overset{\infty}{\oplus} Y^*)_o)^* = ((X_o)^* \overset{\infty}{\oplus} (Y_o)^*)^* \xrightarrow{\iota^{-1}} X_o \overset{1}{\oplus} Y_o$$

由完全等距同构组成。对如前一情形中的元素进行求值可知，这是恒等映射，等式随之成立。□

引理 62。 存在一个自然同构 $((-)_c)^* \cong ((-)^*)_c : \mathbf{FdOS} \to \mathbf{FdOS}^{\mathrm{op}}$

证明。 该自然同构由与同构 $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}_c$ 后复合给出。为说明这一点，令 $X \in \mathbf{FdOS}$，展开对偶的定义，可得到如下同构链

$$\begin{aligned} ((X)_c)^* &\triangleq \mathrm{CB}(X_c, \mathbb{C}) \\ &\cong \mathrm{CB}(X_c, \mathbb{C}_c) \qquad (\text{postcomposing with } \mathbb{C} \cong \mathbb{C}_c) \\ &= (\mathrm{CB}(X, \mathbb{C}))_c \\ &\triangleq (X^*)_c \end{aligned}$$

所有这些都是自然的，因此证明完毕。 □

引理 63。 给定算子空间 X、$Y \in \mathbf{FdOS}$，我们有共轭/相反对合与 *Haagerup* 张量的自对偶性之间的如下交换性质：

$$\begin{array}{ccc} (X^* \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y^*)_c & \xrightarrow{\cong} & ((X \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y)^*)_c \\ \| & & \downarrow \cong \\ (X^*)_c \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (Y^*)_c & & ((X \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y)_c)^* \\ \cong \downarrow & & \| \\ (X_c)^* \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (Y_c)^* & \xrightarrow[\cong]{} & (X_c \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y_c)^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (X^* \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y^*)_o & \xrightarrow{\cong} & ((X \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y)^*)_o \\ \gamma \downarrow & & \| \\ (Y^*)_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (X^*)_o & & ((X \overset{\mathrm{h}}{\otimes} Y)_o)^* \\ \| & & \downarrow \gamma^* \\ (Y_o)^* \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (X_o)^* & \xrightarrow[\cong]{} & (Y_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} X_o)^* \end{array}$$

证明。化简为初等张量后，直接进行图追踪即可。□

C 冯诺依曼（余）代数相关证明

在本附录中，我们给出一些与 vN（余）代数相关的省略证明。

C.1 冯诺伊曼代数

我们回顾一下冯诺依曼代数的定义。

定义 64. 有限维冯诺依曼代数 是一个算子空间 A ，并配备

$_{\text{h}}$*1.* 一个完全压缩映射 $\mu\colon A \otimes A \to A$，称为乘法；*2.* 一个完全压缩映射 $\eta\colon \mathbb{C} \to A$，称为单位；*3.* 一个完全压缩映射 $i\colon A_c \to A_o$，称为对合，

使得

$_{\text{h}}-(A, \eta, \mu)$ 是$(\mathbf{FdOS}\ \mathbb{C}, \otimes)$中的幺半群对象；

- i 是一个对合，也就是说，下图可交换：

$$\begin{array}{ccccc} A & = & & = & A \\ \| & & & & \| \\ A_{cc} & \xrightarrow[i_c]{} & A_{oc} = A_{co} & \xrightarrow[i_o]{} & A_{oo} \end{array} \qquad \text{(involution)}$$

- i 是反乘法的，也就是说，下图可交换：

$$\begin{array}{ccccc} A_c \overset{\text{h}}{\otimes} A_c & = & (A \overset{\text{h}}{\otimes} A)_c & \xrightarrow{\mu} & A_c \\ {\scriptstyle i\otimes i}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ A_o \overset{\text{h}}{\otimes} A_o & \xrightarrow[\gamma]{} & (A \overset{\text{h}}{\otimes} A)_o & \xrightarrow[\mu]{} & A_o \end{array} \qquad \text{（反乘法）}$$

– 对于每个完全等距映射（即强单态） $a : \mathbb{C} \to A$，其在**FdOS** 中的以下复合映射也是完全等距映射（即强单态）

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{C}_o \overset{\text{h}}{\otimes} \mathbb{C}_c \xrightarrow{a\otimes a} A_o \overset{\text{h}}{\otimes} A_c \xrightarrow{A_o \otimes i} A_o \overset{\text{h}}{\otimes} A_o \xrightarrow{\gamma} (A \overset{\text{h}}{\otimes} A)_o \xrightarrow{\mu} A_o. \qquad \text{(C*-id)}$$

注记*65*。 上述定义与第4节中的定义相同，只是略作扩展，为相干条件命名。

定理 30。 定义*27*和*29*等价，也就是说，一个定义中的数据可以唯一确定另一个定义中的数据。

证明。 **(⇒)**。设 A 是满足定义27意义下的有限维冯诺依曼代数。我们已经说明了 A. 的典范算子空间结构。定义 $\eta\colon \mathbb{C} \to A : 1 \mapsto 1_A$，显然这是一个压缩映射，因而也是完全压缩映射。由于 A 的乘法是双线性的，它唯一延拓为一个线性映射

$\mu\colon\ A\otimes A\to A$. 关于 Haagerup 张量积，这个线性映射实际上是一个完全压缩映射，即 $\mu\colon\ A\,\mathrm{h}\otimes A\to A$ 是一个完全压缩映射 [15, 定理17.1的证明。2]。对合 $i\colon\ A_c\to A_o$ 以显然的方式定义为$i(a)\triangleq a^*$，并且这是一个完全等距同构 [33, p。 65]。图表（对合）和（反乘法）的交换性由定义27（3.）容易推出。由定义27（1.）和（2.）可知，(A,η,μ) 是一个幺半群对象。最后，任意（完全）等距映射 $a\colon\ \mathbb{C}\to A$ 都可以与元素 $a\in A$ 相对应，其中 $\|a\|=1$，于是（C*-恒等式）中的复合映射可与元素 $a^*a\in A$ 对应。该复合映射为完全等距映射的要求意味着 $\|a^*a\|=1$，这由 A 的 C*-恒等式，即定义27（4.），可得。

(⇐)。这个方向更简单。如何根据 η、 μ和 i定义单位、乘法和对合显而易见。定义27的条件 (1.)–(3.) 现在很容易得出。 A 的 C*-范数就是 A的底层范数。该范数满足次乘性，可由 [15, 定理17.1的证明2]得出。现在只需证明 C*-恒等式成立。设 $a\in A$。若 $a=0$，则显然有$\|a^*a\|=\|\mu(0\otimes 0)\|=0=\|a\|^2$，因此我们假设 $a\neq 0.$。现在可以用一个简单的重新归一化论证完成证明。设 $b=\frac{a}{\|a\|}$，使得$\|b\|=1.$。现在可以将 b 与一个（完备）等距映射 $b\colon\ \mathbb{C}\to A$ 对应起来，并且我们知道复合映射

$$\mathbb{C}\cong\mathbb{C}_o\overset{\mathrm{h}}{\otimes}\mathbb{C}_c\xrightarrow{b\otimes b^*}A_o\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A_c\xrightarrow{A_o\otimes i}A_o\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A_o\xrightarrow{\gamma}(A\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A)_o\xrightarrow{\mu}A_o$$

也是完全等距映射。但这个复合映射可与元素 b^*b 等同，因此 $\|b^*b\|=1.$ 最后一个等式现在推出 $\|a^*a\|=\|a\|^2$，如所需。□

命题 32。 若 $A,B\in$ **冯诺依曼代数$_{\mathbf{fd}}$**，则算子空间 $A\otimes B$ 满足

- $unit\ \eta\triangleq\left(\mathbb{C}\cong\mathbb{C}\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathbb{C}\xrightarrow{\eta_A\otimes\eta_B}A\mathbin{\widehat{\otimes}}B\right)$
- $involution\ i\triangleq\left((A\mathbin{\widehat{\otimes}}B)_c=A_c\mathbin{\widehat{\otimes}}B_c\xrightarrow{i_A\otimes i_B}A_o\mathbin{\widehat{\otimes}}B_o=(A\mathbin{\widehat{\otimes}}B)_o\right)$
- $mult.\ \mu\triangleq\left((A\mathbin{\widehat{\otimes}}B)\overset{\mathrm{h}}{\otimes}(A\mathbin{\widehat{\otimes}}B)\xrightarrow{v}(A\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A)\mathbin{\widehat{\otimes}}(B\overset{\mathrm{h}}{\otimes}B)\xrightarrow{\mu_A\otimes\mu_B}A\mathbin{\widehat{\otimes}}B\right)$

$^{\infty}$也是冯诺依曼代数。此外，算子空间 $A\oplus B$ 是一个冯诺依曼代数，且

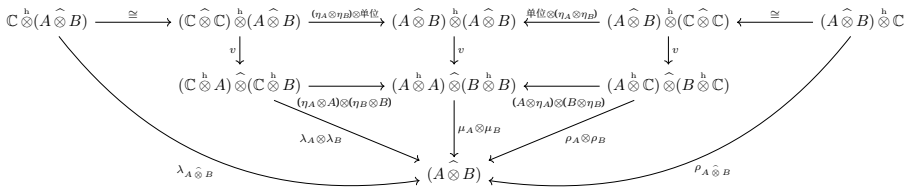
- $unit\ \eta\triangleq\left(\mathbb{C}\xrightarrow{\langle id,id\rangle}\mathbb{C}\overset{\infty}{\oplus}\mathbb{C}\xrightarrow{\eta_A\oplus\eta_B}A\overset{\infty}{\oplus}B\right)$
- $involution\ i\triangleq\left((A\overset{\infty}{\oplus}B)_c=A_c\overset{\infty}{\oplus}B_c\xrightarrow{i_A\oplus i_B}A_o\overset{\infty}{\oplus}B_o=(A\overset{\infty}{\oplus}B)_o\right)$
- $mult.\ \mu\triangleq\left((A\overset{\infty}{\oplus}B)\overset{\mathrm{h}}{\otimes}(A\overset{\infty}{\oplus}B)\xrightarrow{v'}(A\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A)\overset{\infty}{\oplus}(B\overset{\mathrm{h}}{\otimes}B)\xrightarrow{\mu_A\oplus\mu_B}A\overset{\infty}{\oplus}B\right)$

$where\ v'\triangleq\left((A\overset{\infty}{\oplus}B)\overset{\mathrm{h}}{\otimes}(A\overset{\infty}{\oplus}B)\xrightarrow{\langle(\pi_A\otimes\pi_A),(\pi_B\otimes\pi_B)\rangle}(A\overset{\mathrm{h}}{\otimes}A)\overset{\infty}{\oplus}(B\overset{\mathrm{h}}{\otimes}B)\right)$

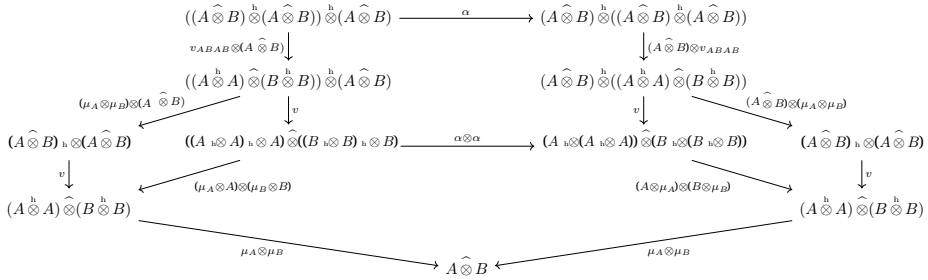
证明。 我们同时证明这两个命题，将 C*-恒等式留到⌢最后。为证明第一个命题，我们首先确认 $(A\otimes B,\eta,\mu)$ 确实是

一个幺半群。为此，我们牢记注释 59。

我们可以验证左、右单位律：

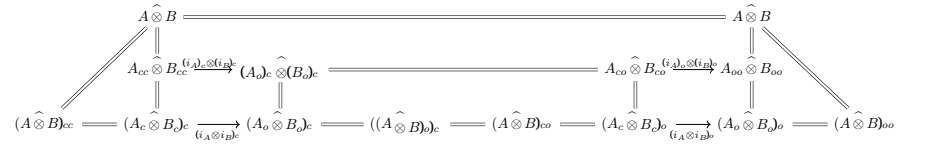


两个内方块由 v的自然性交换，下方三角形由假设交换，外方块则由双幺半公理交换（见（9））。乘法满足结合性：

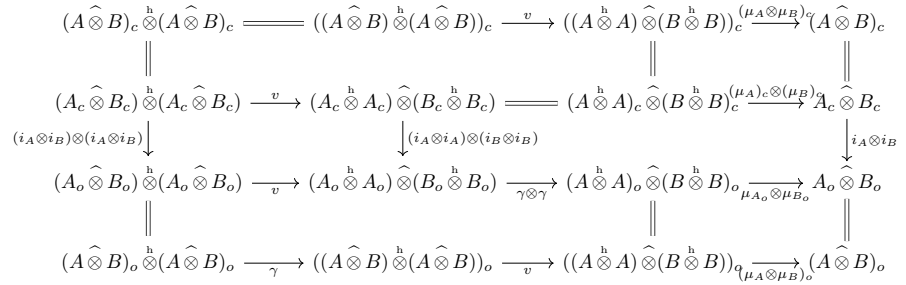


上方的方形图交换，因为 **FdOS** 是一个 BV-范畴（见（7））。两侧的菱形图根据 v 的自然性而交换；底部的五边形则基于 A 和 B 是冯·诺伊曼代数这一假设而交换。

现在来看冯诺依曼代数特有的相干结构。我们有 i 满足对合条件：



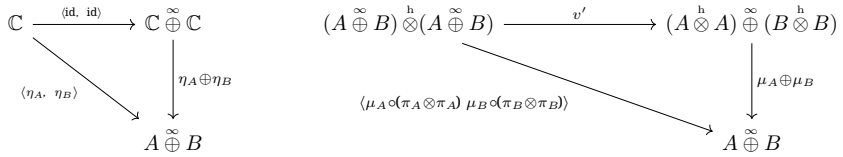
对合 i 也是反乘法的：



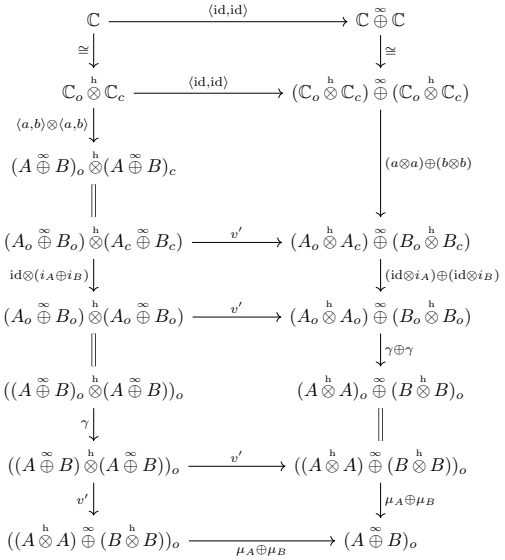
$^{\infty}$的相干图表 $A \oplus B$ 与之类似，因为二元积自动与任何幺结构构成双幺半结构（参见 [2, 例6。19]）。为了说明证明思路，请注意，这种双幺半结构的交换律由积的泛性质给出：

$$v' \triangleq \langle \pi_A \otimes \pi_C, \pi_B \otimes \pi_D \rangle : (A \overset{\infty}{\oplus} B) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (C \overset{\infty}{\oplus} D) \to (A \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C) \overset{\infty}{\oplus} (B \overset{\mathrm{h}}{\otimes} D)$$

$^{\infty}$并且， $A \oplus B$ 的单位和乘法可以按以下方式分解：



对于乘积的 C*-恒等态射，注意到给定有限维算子空间 A 和B 以及一个完全压缩映射 $u = \langle a,\ b \rangle : \mathbb{C} \to A \overset{\infty}{\oplus} B$ 当且仅当 a 或 b 是完全等距映射时，u 才是一个完全等距态射。设 $u = \langle a,\ b \rangle : \mathbb{C} \to A \overset{\infty}{\oplus} B$ 是一个完全等距映射，根据自然性和乘积的泛性质，我们知道下图交换：



因此，只需其中任意一个

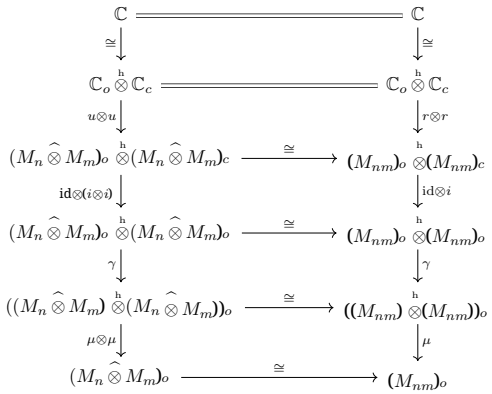
$$\mathbb{C} \cong \mathbb{C}_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathbb{C}_c \xrightarrow{a \otimes a} A_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} A_c \xrightarrow{A_o \otimes i} A_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} A_o \xrightarrow{\gamma} (A \overset{\mathrm{h}}{\otimes} A)_o \xrightarrow{\mu} A_o$$

or

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{C}_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathbb{C}_c \xrightarrow{b \otimes b} B_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} B_c \xrightarrow{B_o \otimes i} B_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} B_o \xrightarrow{\gamma} (B \overset{\mathrm{h}}{\otimes} B)_o \xrightarrow{\mu} B_o$$

是一个 c.i 映射。我们知道 a 或 b 是 c.i 的，因此根据假设，对于 $A \oplus B$，我们有$^{\infty}$C*-恒等式成立。

对于张量积的 C^*-恒等式，回顾一下，任意有限维冯诺依曼代数都同构于$^{\infty}$以下形式的直和：$\oplus_{1 \leq i \leq n} M_{k_i}$。现在，由于$\otimes$对 $\oplus$具有分配性，只需证明 C^*-恒等式在 $M_n \otimes M_m \cong M_{nm}$上成立即可。显然，容易验证 c.i.i. $M_n \otimes M_m \cong M_{nm}$ 是乘法保持的、保单位元的，并且保持对合。假设 $u : \mathbb{C} \to M_n \otimes M_m$ 是一个完全等距映射。那么 $r \triangleq \left(\mathbb{C} \xrightarrow{u} M_n \otimes M_m \cong M_{nm}\right)$ 也是一个完全等距映射。以下图表是交换的：

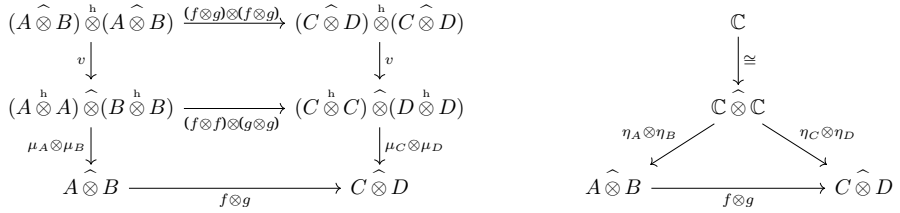


我们知道 M_{nm} 是一个冯诺依曼代数，因此图表右侧是一个 c.i 映射。所以左侧也必定是 c.i，因为水平箭头是 c.i.i。因此 $M_n \otimes M_m$ 也满足 C*-恒等式。

□

命题 33. 范畴 $\mathbf{vNAlg_{fd}}$ 是对称幺半范畴，并且具有有限的$^{\infty}$积，其上 $\otimes$ 和 $\oplus$ 的作用按命题 *32* 中的方式扩展。

证明。 根据命题 32，我们知道$\mathbf{vNAlg_{fd}}$ 中的对象在内射张量积下封闭。设 $f : A \to C$，$g : B \to D$ 是 $\mathbf{vNAlg_{fd}}$ 中的态射。以下图表：



$$\begin{array}{ccc}
(A\widehat{\otimes}B)_c & \xrightarrow{(f\otimes g)_c} & (C\widehat{\otimes}D)_c \\
\| & & \| \\
A_c\widehat{\otimes}B_c & \xrightarrow{f_c\otimes g_c} & C_c\widehat{\otimes}D_c \\
{\scriptstyle i_A\otimes i_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_C\otimes i_D} \\
A_o\widehat{\otimes}B_o & \xrightarrow{f_o\otimes g_o} & C_o\widehat{\otimes}D_o \\
\| & & \| \\
(A\widehat{\otimes}B)_o & \xrightarrow{(f\otimes g)_o} & (C\widehat{\otimes}D)_o
\end{array}$$

$\frown$可交换，因此函子 $\otimes : \mathbf{vNAlg_{fd}} \times \mathbf{vNAlg_{fd}} \to \mathbf{vNAlg_{fd}}$ 是良定义的。$\frown$接下来，我们需要验证 $\otimes$ 的结合子和单位子确实是$\mathbf{vNAlg_{fd}}$中的态射。

我们先从结合子开始。设 A、B 和 C 是有限维冯诺依曼代数，α 是 $\otimes$的结合子。为证明 α 是乘法保持的，考虑以下图表。

$$\begin{array}{ccc}
((A\widehat{\otimes}B)\widehat{\otimes}C)\overset{\text{h}}{\otimes}((A\widehat{\otimes}B)\widehat{\otimes}C) & \xrightarrow{\alpha\otimes\alpha} & (A\widehat{\otimes}(B\widehat{\otimes}C))\overset{\text{h}}{\otimes}(A\widehat{\otimes}(B\widehat{\otimes}C)) \\
{\scriptstyle (v\otimes\mathrm{id})\circ v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}\otimes v)\circ v} \\
((A\overset{\text{h}}{\otimes}A)\widehat{\otimes}(B\overset{\text{h}}{\otimes}B))\widehat{\otimes}(C\overset{\text{h}}{\otimes}C) & \xrightarrow[\alpha]{} & (A\overset{\text{h}}{\otimes}A)\widehat{\otimes}((B\overset{\text{h}}{\otimes}B)\widehat{\otimes}(C\overset{\text{h}}{\otimes}C)) \\
{\scriptstyle (\mu_A\otimes\mu_B)\otimes\mu_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A\otimes(\mu_B\otimes\mu_C)} \\
(A\widehat{\otimes}B)\widehat{\otimes}C & \xrightarrow[\alpha]{} & A\widehat{\otimes}(B\widehat{\otimes}C)
\end{array}$$

上方的方块可交换，因为**FdOS** 是一个 BV-范畴；下方的方块则由 α 的自然性可交换。下面的两个图表由 α 的自然性可交换（需对一些等式进行改写）。

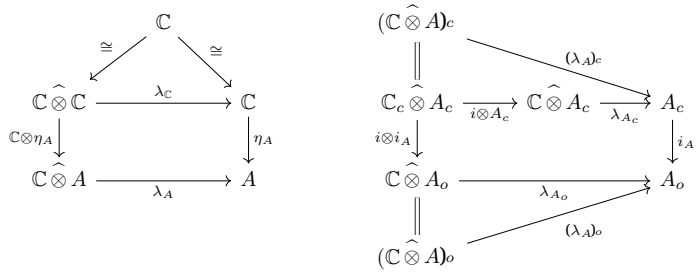
$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{C} & \\
\cong\swarrow & & \searrow\cong \\
(\mathbb{C}\widehat{\otimes}\mathbb{C})\widehat{\otimes}\mathbb{C} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C}\widehat{\otimes}(\mathbb{C}\widehat{\otimes}\mathbb{C}) \\
{\scriptstyle (\eta_A\otimes\eta_B)\otimes\eta_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_A\otimes(\eta_B\otimes\eta_C)} \\
(A\widehat{\otimes}B)\widehat{\otimes}C & \xrightarrow[\alpha]{} & A\widehat{\otimes}(B\widehat{\otimes}C)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
((A\widehat{\otimes}B)\widehat{\otimes}C)_c & \xrightarrow{\alpha_c} & (A\widehat{\otimes}(B\widehat{\otimes}C))_c \\
\| & & \| \\
(A_c\widehat{\otimes}B_c)\widehat{\otimes}C_c & \xrightarrow{\alpha} & A_c\widehat{\otimes}(B_c\widehat{\otimes}C_c) \\
{\scriptstyle (i\otimes i)\otimes i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i\otimes(i\otimes i)} \\
(A_o\widehat{\otimes}B_o)\widehat{\otimes}C_o & \xrightarrow[\alpha]{} & A_o\widehat{\otimes}(B_o\widehat{\otimes}C_o) \\
\| & & \| \\
((A\widehat{\otimes}B)\widehat{\otimes}C)_o & \xrightarrow[\alpha_o]{} & (A\widehat{\otimes}(B\widehat{\otimes}C))_o
\end{array}$$

这表明结合子 α 也是 $\mathbf{vNAlg_{fd}}$.中的自然变换。对于左单位元同构 λ，证明类似。

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{C}\widehat{\otimes}A)\overset{\text{h}}{\otimes}(\mathbb{C}\widehat{\otimes}A) & & \xrightarrow{\lambda\otimes\lambda} & & A\overset{\text{h}}{\otimes}A \\
{\scriptstyle v}\downarrow & & & & \downarrow \\
(\mathbb{C}\overset{\text{h}}{\otimes}\mathbb{C})\widehat{\otimes}(A\overset{\text{h}}{\otimes}A) & \xrightarrow[\mu_{\mathbb{C}}\otimes\mathrm{id}]{} & \mathbb{C}\widehat{\otimes}(A\overset{\text{h}}{\otimes}A) & \xrightarrow{\lambda} & A\overset{\text{h}}{\otimes}A \\
{\scriptstyle \mu_{\mathbb{C}}\otimes\mu_A}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\
\mathbb{C}\widehat{\otimes}A & & \xrightarrow[\lambda]{} & & A
\end{array}$$

上方的方块由 BV假设保证交换，下方的方块则由 λ的自然性保证交换。注意，$\mu_{\mathbb{C}} = \lambda_{\mathbb{C}}$。对于幺元性和对合性，证明类似：

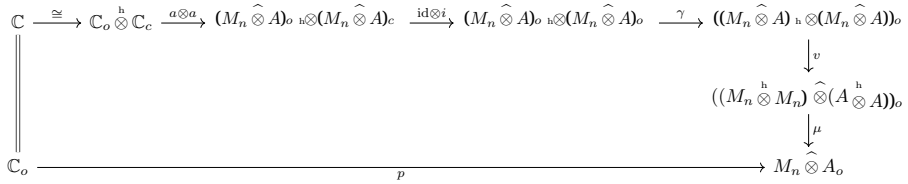


这表明，左单位元同构 λ 也是 $\mathbf{vNAlg_{fd}}$. 中的自然变换。我们可以用类似的论证证明，右单位元同构 ρ 也是 $\mathbf{vNAlg_{fd}}$ 中的自然变换。显然，对称同构属于 $\mathbf{vNAlg_{fd}}$ ，因为它们是自然的，并且与 v可交换。

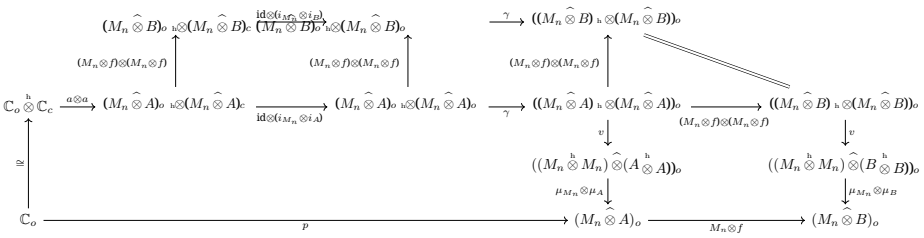
最后，为了说明$\mathbf{vNAlg_{fd}}$ 是对称幺半的，我们注意到⌢包含函子$\mathbf{vNAlg_{fd}} \hookrightarrow \mathbf{FdOS}$ 是忠实的，并且严格保持张量积 $\otimes$，因此所需的相干图表在$\mathbf{vNAlg_{fd}}$中也交换。□

引理 66. 设 $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{vNAlg_{fd}})$ ，且设 $f\colon\ A \to B$ 是$\mathbf{vNAlg_{fd}}$中的一个态射。那么 f 是第*4*节意义下的完全正幺映射。

证明。设 $f\colon\ A \to B$ 是$\mathbf{vNAlg_{fd}}$中的一个态射。根据假设，此映射保单位元，因此我们只需证明它是完全正的。假设⌢ ⌢p：$\mathbb{C} \to M_n \otimes A$是 $M_n \otimes A$的一个正元素，并设 $a\colon\ \mathbb{C} \to M_n \otimes A$满足



回忆一下， M_n 是一个冯诺依曼代数，因此根据命题 33，映射 $M_n \otimes f$：⌢ ⌢$M_n \otimes A \to M_n \otimes B$是乘法保持的，并且保持对合，所以下图在 **FdOS** 中交换：



图表的外边给出了 $(M_n \otimes f) \circ p$ 分解为 $(M_n \otimes f) \circ a$ 及其对合的乘积。□

命题 35. 范畴 $\mathbf{H}$是对称幺半的（关于 $\otimes$），具有有限积（由 $\overset{\infty}{\oplus}$ 给出），且包含映射 $\mathbf{vNAlg_{fd}} \hookrightarrow \mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{FdOS}$ 保留这些结构。

证明. 根据命题 32，我们知道 $\mathbf{H}$ 中的对象关于内射张量封闭，并且保单位映射的张量积仍是保单位映射。由内射张量对完全收缩映射的函子性，以及根据命题 34，完全正保单位映射等价于完全收缩保单位映射，内射张量积确实是一个函子 $\otimes : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$。命题 33 的证明表明，结合子、左/右单位子和 $\otimes$ 的对称性都是保单位映射；由于它们是完全收缩映射，因此也是完全正映射。

为了证明包含函子是对称幺半的，注意到 $\mathbf{FdOS}$ 是忠实的，并且严格保持 $\otimes$，因此必要的相干图表在$\mathbf{H}$中也交换。

最后，根据构造可知，包含函子严格保持对称幺半群结构和积。□

C.2 冯·诺依曼代数与冯·诺依曼余代数之间的对偶性

我们来回顾一下冯诺依曼余代数的定义。

定义 67。有限维冯诺依曼余代数是一个算子空间 C，并且

1. 一个完全压缩映射 $\delta\colon \ C \to C \otimes C$，称为余乘法；2. 一个完全压缩映射 $\varepsilon\colon \ C \to \mathbb{C}$，称为余单位；3. 一个完全压缩映射 $j\colon C_o \to C_c$，称为对合，

使得

- (C, ε, δ) 是$(\mathbf{FdOS}\ \mathbb{C}, \otimes)$中的一个余幺半群对象；
- j 是一个对合，这意味着下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} C & = & = & = & C \\ \| & & & & \| \\ C_{oo} & \xrightarrow[j_o]{} & C_{co} = C_{oc} & \xrightarrow[j_c]{} & C_{cc} \end{array} \qquad \text{(involution)}$$

- j 是反余乘的，这意味着下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} C_o & \xrightarrow{\ j\ } & C_c & \xrightarrow{\ \delta\ } & (C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C)_c \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & & & \| \\ (C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C)_o & \xrightarrow[\gamma]{} & C_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C_o & \xrightarrow[j\otimes j]{} & C_c \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C_c \end{array} \qquad \text{（反余乘）}$$

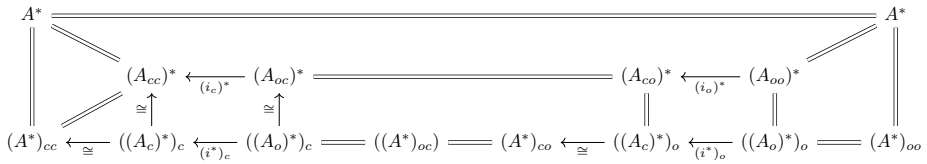
– 对于每个完全商映射（即强满态射） $e\colon C \to \mathbb{C}$，**FdOS** 中的以下复合映射是完全商映射（即强满态射）

$$C_o \xrightarrow{\delta} (C \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} C)_o \xrightarrow{\gamma} C_o \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} C_o \xrightarrow{C_o \otimes j} C_o \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} C_c \xrightarrow{e \otimes e} \mathbb{C}_o \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} \mathbb{C}_c \cong \mathbb{C}. \quad \text{(co-C*-id)}$$

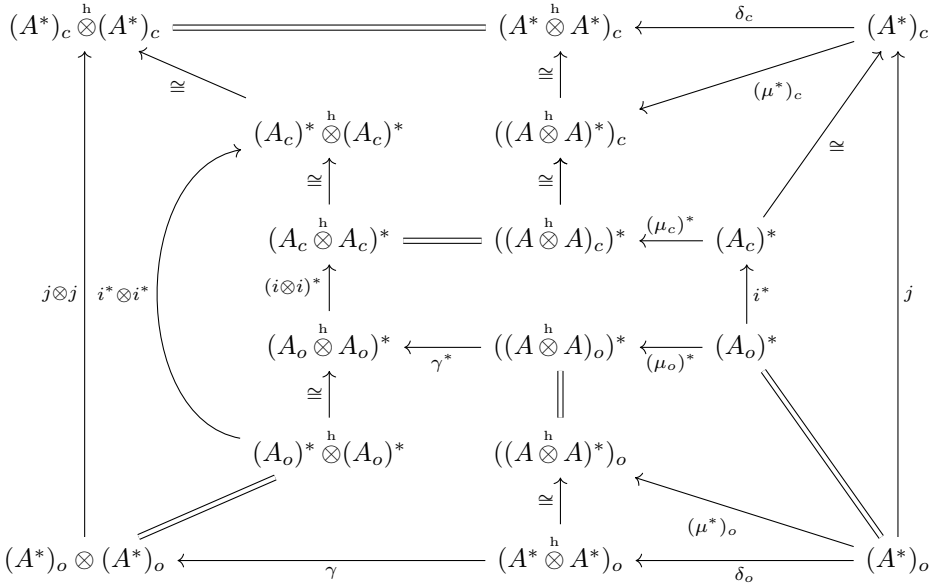
注释*68*。上述定义与第 5 节中的定义相同，只是略作扩展，为相干条件赋予了名称。

命题 43。若 $A \in \mathbf{vNAlg}_{\mathbf{fd}}$，则算子空间对偶 A^* 是一个冯诺依曼余代数，其余单位为 $\varepsilon \triangleq \left(A^* \xrightarrow{\eta^*} \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}\right)$，对合为 $j \triangleq \left((A^*)_o = (A_o)^* \xrightarrow{i^*} (A_c)^* \cong (A^*)_c\right)$，余乘法为 $\delta \triangleq \left(A^* \xrightarrow{\mu^*} (A \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} A)^* \cong A^* \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} A^*\right)$。反之，若 $C \in \mathbf{vNCoalg}_{\mathbf{fd}}$，则算子空间对偶 C^* 是一个冯诺依曼代数，其单位为 $\eta \triangleq \left(\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^* \xrightarrow{\varepsilon^*} C^*\right)$，对合为 $i \triangleq \left((C^*)_c \cong (C_c)^* \xrightarrow{j^*} (C_o)^* = (C^*)_o\right)$，乘法由 $\mu \triangleq \left(C^* \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} C^* \cong (C \mathbin{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}} C)^* \xrightarrow{\delta^*} C^*\right)$. 给出

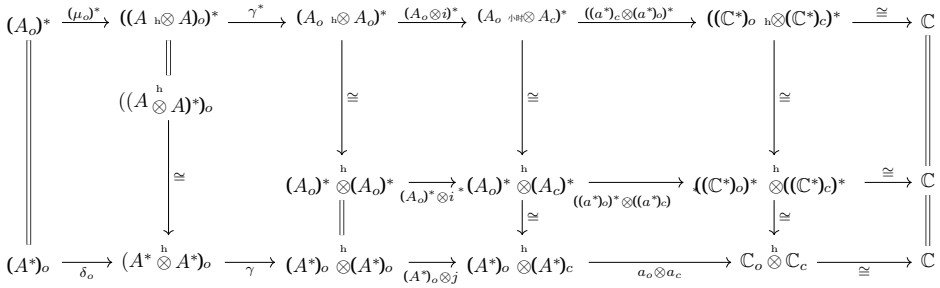
证明。给定一个 A :**冯诺伊曼代数**$_{\mathbf{fd}}$，显然 A^* 是一个余幺半群。对于其余结构，我们很容易验证以下图表均可交换。我们有， j满足对合相容图表:



它也具有反余乘性质:



C*-恒等式：设 $a\colon\ A^* \to \mathbb{C}$ 是一个完全商映射。根据注11，$a^*\colon\ \mathbb{C} \to A$ 是一个完全等距映射。我们知道以下图表是交换的：



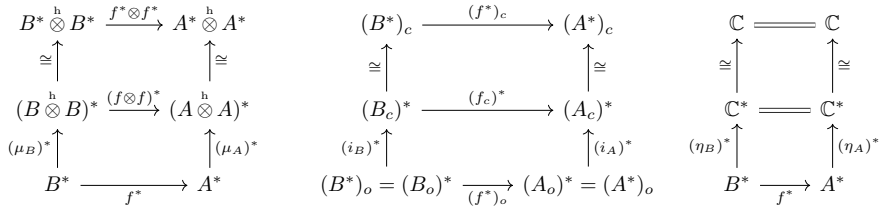
由于 A 是 avN-代数，因此顶端的态射是单射映射的对偶，即完全商映射，所以底端的态射也是完全商映射。

我们可以用类似的方法证明，冯诺依曼余代数的对偶是冯诺依曼代数。□

命题 69。 我们有 $\mathbf{vNAlg_{fd}}$ 与 $\mathbf{vNCoalg_{fd}}$ 中态射之间如下的对偶性（在 $\mathbf{FdOS}$ 中取对偶）：

– 设 $f\colon\ A \to B \in \mathbf{vNAlg_{fd}}$，则 $f^*\colon\ B^* \to A^* \in \mathbf{vNCoalg_{fd}}$；– 设 $g\colon\ C \to D \in \mathbf{vNCoalg_{fd}}$，则 $g^*\colon\ D^* \to C^* \in \mathbf{vNAlg_{fd}}$。

证明。 我们证明第一个陈述；第二个陈述的证明完全类似。设 $f\colon A \to B \in \mathbf{vNAlg_{fd}}$，则以下图表可交换



根据假设，下方的方形图均交换；上方的方形图则由自然性保证。□

命题 70. 命题 *43* 中定义的 *vN*-代数与冯诺依曼余代数之间的对偶可扩展为函子

$$(-)^*\colon \mathbf{vNCoalg_{fd}} \rightleftarrows \mathbf{vNAlg_{fd}}^{\mathrm{op}}\colon (-)^*.$$

证明. 命题 69 保证这两个函子都是良定义的。 □

引理 71. 函子 $(-)^*\colon \mathbf{vNCoalg_{fd}} \rightleftarrows \mathbf{vNAlg_{fd}}^{\mathrm{op}}\colon (-)^*$ 可导出：

– 一个自然同构 $d\colon \mathrm{Id} \cong (-)^{**}\colon \mathbf{vNAlg_{fd}} \to \mathbf{vNAlg_{fd}}$；– 一个自然同构 $d\colon \mathrm{Id} \cong (-)^{**}\colon \mathbf{vNCoalg_{fd}} \to \mathbf{vNCoalg_{fd}}$；

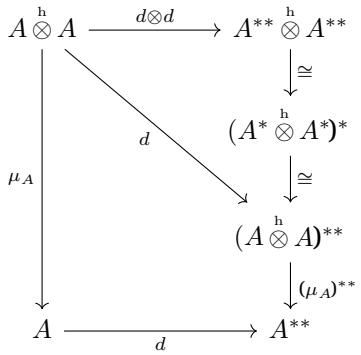
并且这两个同构都与明显的遗忘函子下的双对偶自然同构 $d\colon \mathrm{Id} \cong (-)^{**}\colon \mathbf{FdOS} \to \mathbf{FdOS}$ 一致。

证明。 由于第二个陈述的证明完全类似，我们只证明第一个陈述。设 $A \in \mathbf{vNAlg_{fd}}$，只需证明同构$d_A : A \to A^{**}$ 确实属于 $\mathbf{vNAlg_{fd}}$，因为它在**FdOS**上的自然性蕴含了所需的自然性。注意， d_A 与 Haagerup 张量积和共轭满足以下交换关系：

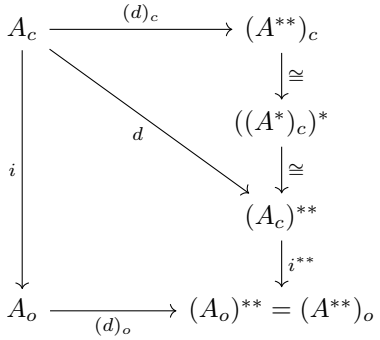
$$\begin{array}{ccc} A \overset{\mathrm{h}}{\otimes} A & \xrightarrow{d \otimes d} & A^{**} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} A^{**} \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ (A \overset{\mathrm{h}}{\otimes} A)^{**} & \xleftarrow[\cong]{} & (A^* \overset{\mathrm{h}}{\otimes} A^*)^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A_c & \xrightarrow{(d)_c} & (A^{**})_c \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ (A_c)^{**} & \xleftarrow[\cong]{} & ((A^*)_c)^* \end{array} \tag{12}$$

将其化归为初等张量时，这一点很容易验证。现在这些图表的交换性使得证明的其余部分归结为利用 d 的自然性，见下方图表。

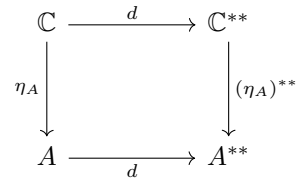
我们有 d 是乘法保持的：



对合保持：



且保单位元：



对于第二个陈述，请注意以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C & \xrightarrow{d} & (C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C)^{**} \\ {\scriptstyle d\otimes d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ C^{**} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C^{**} & \xleftarrow[\cong]{} & (C^{*} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C^{*})^{*} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_c & \xrightarrow{d} & (C_c)^{**} \\ {\scriptstyle (d)_c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ (C^{**})_c & \xleftarrow[\cong]{} & ((C^{*})_c)^{*} \end{array} \tag{13}$$

其余证明与此类似。 □

定理 72. 我们有一个范畴等价$(-)^{*}:\mathbf{vNCoalg_{fd}} \simeq \mathbf{vNAlg_{fd}}^{\mathrm{op}}\colon (-)^{*}$，其中$(-)^{*}$ 对对象的作用定义如命题 *43* 所述，对态射的作用则按通常方式定义，即如**FdOS**中所述。

证明。 由命题 70 和引理 71 合并即可得出。 □

C.3 冯·诺依曼余代数

本节的大部分内容将用于证明以下命题：

命题 38. 如果 $C, D \in$ **冯诺依曼余代数$_{\mathbf{fd}}$**，那么算子空间 $C \mathbin{\widehat{\otimes}} D$ 具有

- *counit* $\varepsilon \triangleq \left(C \mathbin{\widehat{\otimes}} D \xrightarrow{\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D} \mathbb{C} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}\right)$
- *involution* $j \triangleq \left((C \mathbin{\widehat{\otimes}} D)_o = C_o \mathbin{\widehat{\otimes}} D_o \xrightarrow{j_C \otimes j_D} C_c \mathbin{\widehat{\otimes}} D_c = (C \mathbin{\widehat{\otimes}} D)_c\right)$
- *comult.* $\delta \triangleq \left(C \mathbin{\widehat{\otimes}} D \xrightarrow{\delta_C \otimes \delta_D} (C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C) \mathbin{\widehat{\otimes}} (D \overset{\mathrm{h}}{\otimes} D) \xrightarrow{w} (C \mathbin{\widehat{\otimes}} D) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (C \mathbin{\widehat{\otimes}} D)\right)$

[1]也是一个冯诺依曼余代数。此外，算子空间 $C \oplus D$ 是一个冯诺依曼余代数，具有

- *counit* $\varepsilon \triangleq \left(C \overset{1}{\oplus} D \xrightarrow{\varepsilon_C \oplus \varepsilon_D} \mathbb{C} \overset{1}{\oplus} \mathbb{C} \xrightarrow{[id, id]} \mathbb{C}\right)$
- *involution* $j \triangleq \left((C \overset{1}{\oplus} D)_o = C_o \overset{1}{\oplus} D_o \xrightarrow{j_C \oplus j_D} C_c \overset{1}{\oplus} D_c = (C \overset{1}{\oplus} D)_c\right)$
- *comult.* $\delta \triangleq \left(C \overset{1}{\oplus} D \xrightarrow{\delta_C \oplus \delta_D} (C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C) \overset{1}{\oplus} (D \overset{\mathrm{h}}{\otimes} D) \xrightarrow{w'} (C \overset{1}{\oplus} D) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (C \overset{1}{\oplus} D)\right)$

where $w' \triangleq \left((C \overset{\mathrm{h}}{\otimes} C) \overset{1}{\oplus} (D \overset{\mathrm{h}}{\otimes} D) \xrightarrow{[(\iota_C \otimes \iota_C), (\iota_D \otimes \iota_D)]} (C \overset{1}{\oplus} D) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (C \overset{1}{\oplus} D)\right)$

为了证明这一点，我们希望利用上一节证明的 **冯诺依曼余代数$_{\mathbf{fd}}$ ≅vNAlg$_{\mathbf{fd}}^{\mathrm{op}}$** 之间的等价关系，因此需要以下两个引理。

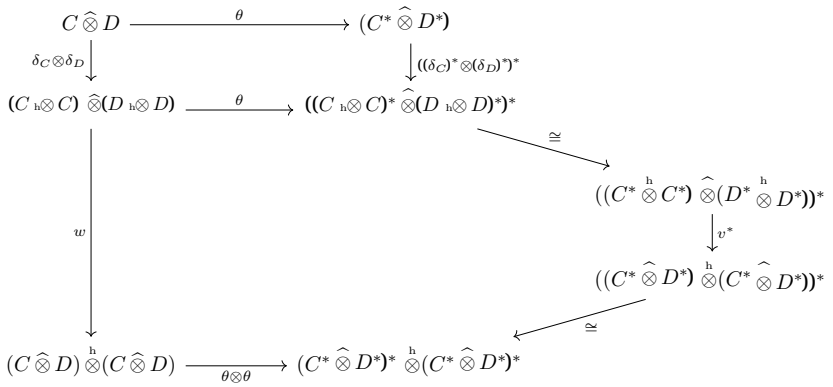
引理 73. 完全等距自然同构：

$$\theta : C \mathbin{\widehat{\otimes}} D \cong (C^{*} \mathbin{\widehat{\otimes}} D^{*})^{*} \tag{14}$$

在 **FdOS** 中，保持上述为 $C \mathbin{\widehat{\otimes}} D$ 定义的余幺半群结构和对合。

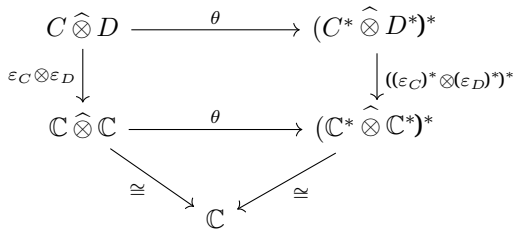
证明。 我们可以验证以下图表是交换的。

完全等距自然同构 θ 是余乘法保持的：

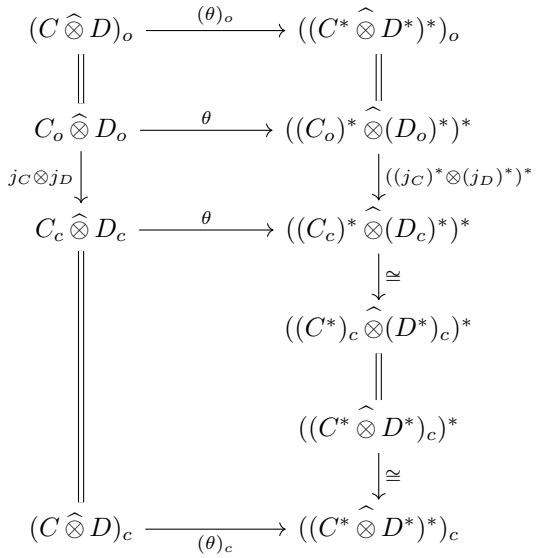


上方的方块由自然性保证交换，下方的方块则由带否定的 BV-范畴中两个交换映射 v 和 w 之间的对偶性保证交换。

它是余单位的：



并且它保持对合：



我们可以将问题归约到初等张量，并利用双对偶与共轭可交换这一事实，验证下方的方块是可交换的（见 (13)）。

□

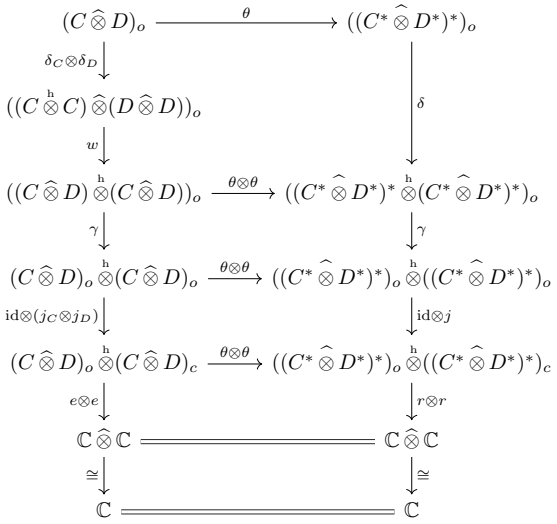
引理 74. 完全等距自然同构：

$$C \overset{1}{\oplus} D \cong (C^* \overset{\infty}{\oplus} D^*)^* \tag{15}$$

在 **FdOS** 中，保持如上定义的余幺半群结构和对合[1]对 $C \oplus D$。

证明. 其证明与引理 73 的证明类似。 □

证明（命题 *38*）。根据命题 43，我们有 C^* 和 D^* 都是⌢冯诺依曼代数；根据命题 32，我们知道 $C^* \otimes D^*$ 是冯诺依曼代数。应用命题 43 可得 $(C^* \otimes D^*)^*$ 是冯诺依曼余代数。现在，根据引理 73（$C \mathbin{\widehat{\otimes}} D,\ \varepsilon,\ j,\ \delta$）是一个余幺半群（$C \mathbin{\widehat{\otimes}} D,\ \varepsilon,\ \delta$），其中 j是一个反余乘的对合。还需证明余 C*-恒等式成立。为此，设 $e:\ C \mathbin{\widehat{\otimes}} D \to \mathbb{C}$ 是一个完全商映射，则 $r \triangleq \Big((C^* \mathbin{\widehat{\otimes}} D^*)^* \xrightarrow{\theta^{-1}} C \mathbin{\widehat{\otimes}} D \xrightarrow{e} \mathbb{C}\Big)$ 也是一个完全商映射。现在以下图表交换：



由于 $(C^* \otimes D^*)^*$ 是冯诺依曼余代数，右侧是完全商的，因此左侧也同样如此。余乘法保持的结论类似，使用引理 74 即可得到。□

引理 75。 设 $C, D \in \mathbf{vNCoalg}_{\mathbf{fd}}$，且 $g: C \to D$ 是$\mathbf{vNCoalg}_{\mathbf{fd}}$. 中的一个态射。那么 g 是第 *5* 节意义下的完全正保迹映射。

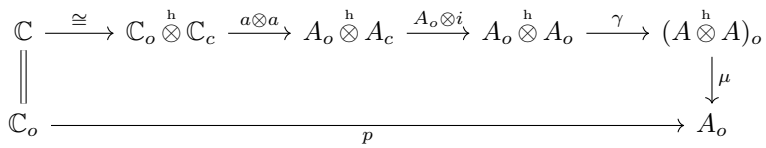
证明。 此证明与引理 66 的证明类似。 □

C.4 H 与 S 之间的对偶性

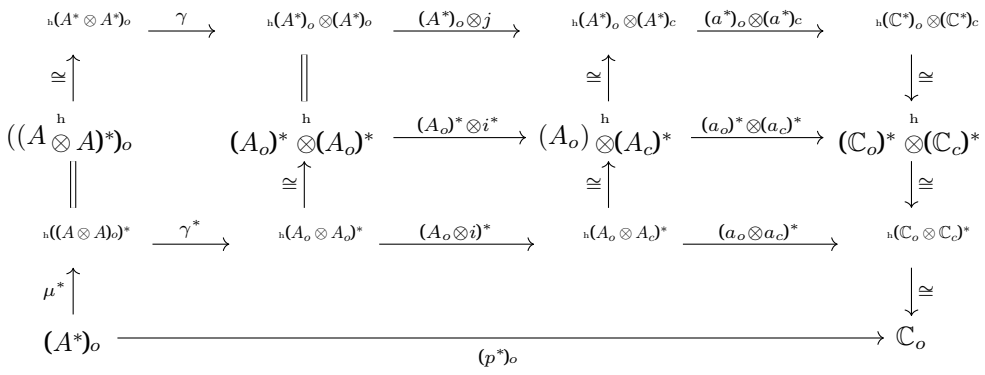
引理 76。 设 $A \in \mathbf{vNAlg}_{\mathbf{fd}}$，且 $p: \mathbb{C} \to A$ 是一个完全有界映射，则以下各项等价：

1. p 是 A中的 正元素；2. p^* 是 A^*上的 正线性泛函。

证明。 我们证明 1. 蕴含 2.（反方向的证明完全类似）。设 $p : \mathbb{C} \to A$ 是 A的一个正元素，这意味着存在某个 $a: \mathbb{C} \to A$，使得下图



可交换。下图表明， p^* 按要求分解。

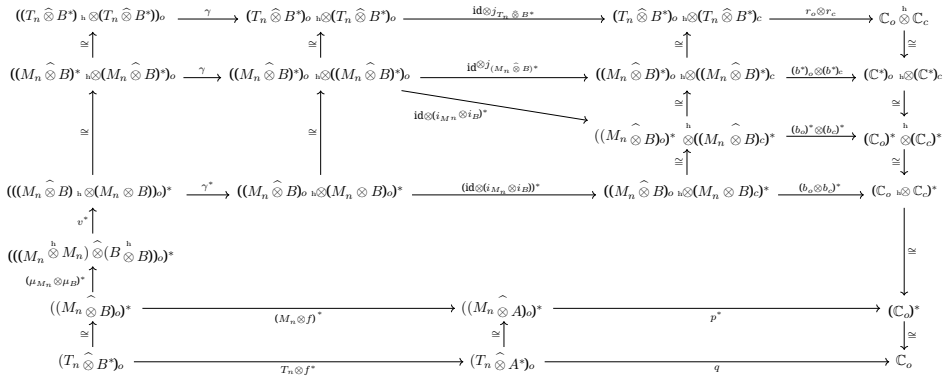


□

命题 77。 我们有如下冯诺依曼代数上的完全正映射与冯诺依曼余代数上的完全正映射之间的对偶性：

– 假设 $A, B \in \mathbf{vNAlg_{fd}}$，且 $f\colon A \to B$ 是一个完全正映射。那么 $f^*\colon B^* \to A^*$ 是冯诺依曼余代数之间的完全正映射。– 假设 $C, D \in \mathbf{vNCoalg_{fd}}$，且 $g\colon C \to D$ 是一个完全正映射。那么 $g^* : D^* \to C^*$ 是冯诺依曼代数之间的完全正映射。

证明。 我们证明第一个陈述，第二个陈述的证明完全类似。设 q：$T_n \mathbin{\widehat{\otimes}} A^* \to \mathbb{C}$ 是一个正线性泛函。由引理 76，$\frown$ q 是正元素 $p\colon \mathbb{C} \to (T_n \mathbin{\widehat{\otimes}} A^*)^* \cong M_n \otimes A$的对偶。根据假设，$\frown(M_n \otimes f) \circ p\colon \mathbb{C} \to M_n \otimes B$ 也是正的，也就是说，它可以利用一个 $\frown$元素 $b\colon \mathbb{C} \to M_n \otimes B$ 及其对合进行因式分解。令 r 表示线性泛函$r \triangleq \left(T_n \mathbin{\widehat{\otimes}} B^* \cong (M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} B)^* \xrightarrow{b^*} \mathbb{C}\right)$，则下图交换：



根据上面的图表，线性泛函 $q \circ (T_n \otimes f^*)$：$T_n \mathbin{\widehat{\otimes}} B^* \to \mathbb{C}$通过余乘法分解为线性泛函 r 及其对合。

□

命题 78。 命题 *43* 中定义的 *vN*-代数与冯诺依曼余代数上的对偶可扩展为函子

$$(-)^* \colon \mathbf{S} \rightleftarrows \mathbf{H}^{\mathrm{op}} \colon (-)^*.$$

证明。 由命题 69 可知，对偶会将保单位映射映射为余单位的／保迹的映射，反之亦然。命题 77 现在保证这些函子类型正确。□

定理 79。 我们有一个范畴等价 $(-)^* \colon \mathbf{S} \simeq \mathbf{H}^{\mathrm{op}} \colon (-)^*$，其中 $(-)^*$ 在对象上的作用如命题 *43* 所定义，在态射上的作用则按通常方式定义，即如 $\mathbf{FdOS}$ 中所示。

证明。 由于任意冯诺依曼代数态射也是中央处理器（引理 66），且任意冯诺依曼余代数态射也是完全正且保迹的（引理 75），双对偶自然同构（引理 71）可扩展为自然同构：

- $d : \mathrm{Id} \cong (-)^{**} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$;
- $d : \mathrm{Id} \cong (-)^{**} : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$.

□

命题 39。 范畴 $\mathbf{vNCoalg_{fd}}$ 是对称幺半范畴，并且有有限余积，其上 $\mathbin{\widehat{\otimes}}$ 和 $\overset{1}{\oplus}$ 的作用按命题 *38* 中的方式扩展。

证明。 回顾一下，当两个范畴中的一个具有对称幺半结构时，范畴等价会在另一个范畴上诱导出对称幺半结构。根据定理 72，我们知道 $\mathbf{vNCoalg_{fd}} \simeq \mathbf{vNAlg_{fd}}^{\mathrm{op}}$，并且根据命题 33，$\mathbf{vNAlg_{fd}}$ 是幺半的。引理 73 现在保证，所诱导的张量积与命题 38 中由 $\mathbin{\widehat{\otimes}}$给出的张量积自然同构。对于余积，我们也可以作类似的论证。□

命题 42。 范畴 $\mathbf{S}$ 是对称幺半的（关于 $\mathbin{\widehat{\otimes}}$），具有有限余积（由 $\overset{1}{\oplus}$给出），并且包含映射 $\mathbf{vNCoalg_{fd}} \hookrightarrow \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{FdOS}$ 保留这些结构。

证明。 这可以通过与命题 39 的证明类似的论证得到，使用定理 79 中的等价 $\mathbf{S} \simeq \mathbf{H}^{\mathrm{op}}$ 以及 $\mathbf{H}$上的幺半结构（见命题 35）。余积同样可通过相同的论证得到。

由构造可知，包含函子保留幺半结构和余积。□

命题 80。 这些等价 $(-)^* \colon \mathbf{S} \simeq \mathbf{H}^{\mathrm{op}} \colon (-)^*$ 和 $(-)^* \colon \mathbf{vNCoalg_{fd}} \simeq \mathbf{vNAlg_{fd}}^{\mathrm{op}} \colon (-)^*$ 是强幺半的。

证明。 由引理 73 可得。 □

例 *40.* 算子空间 T_n 是一个冯诺依曼余代数，其中：(1) 余单位由迹泛函 $\varepsilon \triangleq \mathrm{tr} : T_n \to \mathbb{C} :: t \mapsto \mathrm{tr}(t)$ 给出；(2) 对合由共轭转置 $j \triangleq (\cdot)^* \colon T_n^o \to T_n^c$ 给出；(3) 余乘法由

$_{\mathrm{h}}\delta\colon\ T_n \to T_n \otimes T_n :: e_{ij} \mapsto \sum_k (e_{kj} \otimes e_{ik})$，其中 $e_{ij} \in T_n$ 是一个矩阵，它在位置 $(i,\ j)$ 处为 1^{1}，其余位置均为 0。利用命题 38，我们看到 $\oplus_{1 \leq i \leq n} T_{k_i}$ 也是一个冯诺依曼余代数；再由定理 44 和例 28 可知，每个有限维冯诺依曼余代数在冯诺依曼余代数同构意义下都具有这种形式。

证明。对于命题的第一部分，回顾一下，M_n 上的典范冯诺依曼代数结构具有：

1. 单位由 $\eta \triangleq 1_n : \mathbb{C} \to M_n :: \lambda \mapsto \lambda 1_n$ 给出2. 对合由共轭转置 $i \triangleq (-)^* : M_n^c \to M_{n^{\mathrm{h}}}^o$ 给出3. 乘法由矩阵乘法 $\mu\colon\ M_n \otimes M_n \to M_n :: a \otimes b \mapsto ab$ 给出

为避免混淆，我们将用 i 表示共轭转置。还要回顾一下，我们有同构 $T_n \cong (M_n)^* :: a \mapsto \mathrm{tr}(a(-))$。根据命题 43，$(M_n)^*$ 具有冯诺依曼余代数结构。将此结构通过同构 $T_n \cong (M_n)^*$ 取商后，我们得到

1. 余单位：

$$\begin{aligned} T_n \cong (M_n)^* &\xrightarrow{\eta^*} \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C} \\ a &\overset{\cong}{\longmapsto} \mathrm{tr}(a(-)) \\ &\overset{\cong \circ \eta^*}{\longmapsto} \mathrm{tr}(a 1_n) = \mathrm{tr}(a) \end{aligned}$$

2. 对合：

$$\begin{aligned} T_n^o \cong ((M_n)^*)_o = (M_n^o)^* &\xrightarrow{i^*} (M_n^c)^* \cong ((M_n)^*)_c \cong T_n^c \\ a &\overset{\cong}{\longmapsto} \mathrm{tr}(a(-)) \\ &\overset{(i(-))^*}{\longmapsto} \mathrm{tr}(ai(-)) \\ &\overset{\cong}{\longmapsto} \overline{\mathrm{tr}(ai(-))} = \mathrm{tr}(i(ai(-))) = \mathrm{tr}((-)i(a)) = \mathrm{tr}(i(a)(-)) \\ &\overset{\cong}{\longmapsto} i(a) \end{aligned}$$

3. 余乘法

$$\begin{aligned} T_n \cong (M_n)^* &\xrightarrow{\mu^*} (M_n \overset{\mathrm{h}}{\otimes} M_n)^* \cong (M_n)^* \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (M_n)^* \cong T_n \overset{\mathrm{h}}{\otimes} T_n \\ e_{ij} &\overset{\cong}{\longmapsto} \mathrm{tr}(e_{ij}(-)) \\ &\overset{\mu^*}{\longmapsto} (a \otimes b \mapsto \mathrm{tr}(e_{ij}ab) = \textstyle\sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k \mathrm{tr}(e_{kj}a)\mathrm{tr}(e_{ik}b)) \\ &\overset{\cong}{\longmapsto} \textstyle\sum_k \mathrm{tr}(e_{kj}(-)) \otimes \mathrm{tr}(e_{ik}(-)) \\ &\overset{\cong}{\longmapsto} \textstyle\sum_k (e_{kj} \otimes e_{ik}) \end{aligned}$$

对于该陈述的第二部分，设 $C \in \mathbf{vNCoalg_{fd}}$。根据命题 43，$C^* \in \mathbf{vNAlg_{fd}}$，从而得到以下一系列自然同构

在 **vNCoalg$_{\mathbf{fd}}$**

$$\begin{aligned} C &\cong C^{**} && \text{(by Lemma 71)} \\ &\cong (\overset{\infty}{\oplus}_i M_{n_i})^* && \text{(by Example 28)} \\ &\cong \overset{1}{\oplus}_i (M_{n_i})^* && \text{(de Morgan duality)} \\ &\cong \overset{1}{\oplus}_i T_{n_i} && \text{(by argument above)} \end{aligned}$$

□

D 冯·诺依曼余代数与（完全）正性

本附录旨在说明，第5节中冯诺依曼余代数之间正线性泛函和（完全）正映射的定义，与这些概念在空间{v1}上的通常具体定义相
一致；这些空间在同构意义下涵盖了所有有限维冯诺依曼余代数。我们将[1]形如 $\oplus_i T_{k_i}$ 的冯诺依曼余代数[1]称为具体的冯诺依曼余代数。

回忆一下，元素 $p \in \mathbb{M}_n$ 称为正，当且仅当 $\langle h, ph\rangle \geq 0$ 对每个$h \in \mathbb{C}^n$ 都成立；这里我们记 $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 表示 $\mathbb{C}^n$. 上的标准内积。此外，$p \in \mathbb{M}_n$ 为正当且仅当存在 $a \in \mathbb{M}_n$ 使得$p = a^* a$. 成立。元素$(p_1, \ldots, p_n)$ $\in \oplus_{1\leq i\leq n}\mathbb{M}_{k_i}$ 为正，当且仅当每个 $p_i \in \mathbb{M}_{k_i}$ 都为正。

记号。 在本节余下部分中，我们将简写为 V和W，指代两个（可能不同的）形如 $\oplus_{1\leq i\leq n}\mathbb{M}_{k_i}$的向量空间。

注意，向量空间 V 和 W 可以赋予有限维 vN（余）代数的结构，正如我们在文档正文中已经说明的那样。此外，所有有限维 vN（余）代数的底层向量空间都与这种形式的向量空间同构。若线性映射 f: $V \to W$ 满足 f 将 V的正元素映射为 W.的正元素，则称其为正（在具体意义上）。正线性泛函 （在具体意义上）是一个正映射 f: $V \to \mathbb{C}$。根据 C*-代数理论，我们有以下命题。

命题81。 设 f: $V \to W$ 是一个线性映射。以下条件等价：

– f 是正映射；– f 保正线性泛函，即对每个正线性泛函p: $W \to \mathbb{C}$，线性泛函 $p \circ f$: $V \to \mathbb{C}$ 也是正的。

证明。 (⇒) 这是显而易见的。

(⇐) 由 [29, 定理4.3.4] 可轻易推出。事实上，该陈述对无限维 C*-代数也成立。

我们的首要目标是证明，线性泛函在余代数意义下的正性等价于其在具体意义下的正性。我们先给出一个引理。

引理82。 设 φ: $T_n \to \mathbb{C}$ 是所示冯诺依曼余代数上的线性泛函。以下条件等价：

– φ 在余代数意义下为正，即存在一个线性泛函ψ: $T_n \to \mathbb{C}$，使得以下图表：

$$\begin{array}{ccccccccc} (T_n \overset{\mathrm{h}}{\otimes} T_n)^o & \xrightarrow{\gamma} & T_n^o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} T_n^o & \xrightarrow{T_n^o \otimes j} & T_n^o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} T_n^c & \xrightarrow{\psi\otimes\psi} & \mathbb{C}_o \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathbb{C}_c & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle\delta}\uparrow & & & & & & & & \| \\ T_n^o & & & & \xrightarrow[\varphi]{} & & & & \mathbb{C}_o \end{array} \tag{16}$$

可交换。

– φ 在具体意义上是正的。

证明。 (⇒) 令 $\psi\colon T_n \to \mathbb{C}$ 为一个线性泛函。由此可得 $\psi = \mathsf{tr}(a\cdot)$，其中某个 $a \in T_n$. 沿图表上方路径进行图追踪可知， $e_{ij} \in T_n$映射为

$$\begin{aligned} e_{ij} &\overset{\delta}{\mapsto} \sum_k e_{kj} \otimes e_{ik} \\ &\overset{\gamma}{\mapsto} \sum_k e_{ik} \otimes e_{kj} \\ &\overset{T_n^o \otimes j}{\longmapsto} \sum_k e_{ik} \otimes e_{jk} \\ &\overset{\psi\otimes\psi}{\longmapsto} \sum_k \mathrm{tr}(e_{ik}a) \otimes \mathrm{tr}(e_{jk}a) \\ &\overset{\cong}{\mapsto} \sum_k \mathrm{tr}(e_{ik}a)\overline{\mathrm{tr}(e_{jk}a)} \\ &= \sum_k a_{ki}\overline{a_{kj}} \end{aligned}$$

对上述复合映射取线性扩张，并利用上述图表的交换性，可得

$$\varphi(b) = \sum_{i,j,k} a_{ki}\overline{a_{kj}}b_{ij}$$

对于任意 $b = [b_{ij}] \in T_n\cdot$ ， 直接验证可得

$$\varphi(b) = \sum_{i,j,k} a_{ki}\overline{a_{kj}}b_{ij} = \mathrm{tr}(a^*ab)$$

因此， $\varphi = \mathsf{tr}((a^*a)\ \cdot)$ 是具体意义下的正线性泛函。

(⇐) 令 $\varphi\colon T_n \to \mathbb{C}$ 为具体意义下的正线性泛函。由此可得 $\varphi = \mathsf{tr}(p\ \cdot)$, 其中某个具体意义下的正元素 $p \in T_n$ 。这等价于存在某个元素 $a \in T_n$，使得 $\varphi = \mathsf{tr}((a^*a)\ \cdot)$。现在我们可以定义 $\psi\colon T_n \to \mathbb{C}$ ， 令 $\psi \triangleq \mathsf{tr}(a\ \cdot)$; 按照上述相同的推理可知，所需的图表是交换的。□

因此，对于线性泛函 $\varphi\colon T_n \to \mathbb{C}$，抽象（余代数的）正性概念与具体正性概念相一致，所以我们不再加以区分。

[1]接下来，我们将这一等价关系推广到线性泛函 $\varphi\colon \oplus_{1\le i\le n} T_{k_i} \to \mathbb{C}$。每个这样的泛函必然具有以下形式： $\varphi = [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ 其中有$\varphi_i\colon T_{k_i} \to \mathbb{C}$ 以及 $\varphi(t_1, \ldots\ldots, t_n) = \sum_i \varphi_i(t_i)$。

[1]**引理 83.** 设 $\varphi\colon \oplus_{1\le i\le n} T_{k_i} \to \mathbb{C}$ 是一个线性泛函。当且仅当上述分解中的每个 $\varphi_i\colon T_{k_i} \to \mathbb{C}$ 都是正的， φ 在余代数意义下是正的。

证明. 为简单起见，假设直和[1]中只有两项，即有一个线性泛函 φ: $T_n \oplus T_m \to \mathbb{C}$. 一般情形的证明类似。

($\Rightarrow$) 按余代数意义，令 φ 为正。对 (6) 中形如 $(t,\ 0) \in T_n \oplus T_m$ 的元素进行图追踪，可知 φ_1 为正。对于 φ_2 的论证是对称的。

($\Leftarrow$) 若 φ_1 和 φ_2 均为正，则存在 $t_1 \in T_n$ 和 $t_2 \in T_m$，使得 $\varphi_1 = \mathrm{tr}(t_1^* t_1 \cdot)$ 且 $\varphi_2 = \mathrm{tr}(t_2^* t_2 \cdot)$。现在可以定义线性泛函$a$: $T_n \overset{1}{\oplus} T_m \to \mathbb{C}$，令 $a(x_1, x_2) = \mathrm{tr}(t_1 x_1) + \mathrm{tr}(t_2 x_2)$。为验证图表 (6) 可交换，只需对形如 $(e_{ij},\ 0)$ 和 $(0,\ e_{lp})$ 的元素进行图追踪。在这两种情形下，图追踪都很容易归结为前述引理证明中的图追踪，并且用相同的论证即可证明其可交换。

[1]**命题 84.** 设 φ: $\oplus_{1 \le i \le n} T_{k_i} \to \mathbb{C}$ 是一个线性泛函。那么，φ 在余代数意义下为正，当且仅当 φ 在具体意义下为正。

证明。根据前一个引理，只需证明 φ 在具体意义下为正，当且仅当每个 φ_i: $T_{k_i} \to \mathbb{C}$ 为正。这显然成立。□

因此，对于具体 vN-余代数，线性泛函在抽象（余代数）意义和具体意义下的正性是一致的。

定理 85. 设 f: $C_1 \to C_2$ 是两个具体有限维冯诺依曼余代数之间的线性映射。那么：

1. f 在抽象（余代数）意义下为正，当且仅当 f 在具体意义下为正；*2.* f 在抽象（余代数）意义下完全正，当且仅当 f 在具体意义下完全正。

证明。第一条结论由命题 84 和 81 合并得出。第二条结论则立即由第一条得出，因为根据完全正性的余代数定义，线性映射 $T_n \widehat{\otimes} \varphi$: $T_n \widehat{\otimes} C_1 \to T_n \widehat{\otimes} C_2$ 与根据完全正性的具体定义得到的线性映射 $\mathbb{M}_n \otimes \varphi$: $\mathbb{M}_n \otimes C_1 \to \mathbb{M}_n \otimes C_2$ 完全相同。□

由此很容易得出，具体有限维冯诺依曼余代数中的元素 $p \in C$ 在余代数意义下为正（见第7节），当且仅当 p 在具体意义下为正。

总而言之，当我们考察具体有限维冯诺依曼余代数时，我们在余代数意义下引入的所有（完全）正性概念，都与（完全）正性的标准具体定义相一致。

我们的下一个目标是证明，vN-余代数上的密度算子集合 C 可以用两种等价的方式刻画：

$$\{c \in C \mid \|c\| = 1 = \varepsilon(c)\} = \{\rho \in C \mid \varepsilon(\rho) = 1 \text{ and } \rho \ge 0\} = P_C.$$

为此，我们证明以下命题。其关于 vN-代数/C*-代数的对偶类比结果早已众所周知，因此我们用一个简单的对偶论证来证明下一个命题。

命题 86。设 C 为一个有限维冯诺依曼余代数，且 $\rho \in C$ 为一个元素，满足$\varepsilon(\rho) = 1$. 以下条件等价：

1. $\rho \geq 0$，即 ρ 为正；
2. $\|\rho\| = 1$；3. $\|\rho\| \leq 1$。

证明。考虑线性映射 p: $\mathbb{C} \to C$，其定义为 $p(1) \triangleq \rho$. 。由于 $\varepsilon(\rho) = 1$，映射 p是余单位的（即保迹）。

(1) $\implies$ (2)。映射 p 是正的（根据定义）。命题 77 的证明表明，$C^* \xrightarrow{p^*} \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}$ 是正的（一个简单的特例），并且显然保单位元。根据 C*-代数理论，我们知道每个正幺泛函 φ的范数为 $\|\varphi\| = 1 = \|\varphi\|_{\text{cb}}$ [29, 定理 4.3。2]（并且也是完全正的）。算子空间对偶 $(-)^*$ 保持 p的完全有界范数，因此 $1 = \|p^*\|_{\text{cb}} = \|p\|_{\text{cb}} = \|p\| = \|\rho\|$.

(2) $\implies$(3)。显然。(3) $\implies$ (1)。映射 p 是一个（必然是完全的）压缩映射，并且保持迹。由命题 41 可知，p 是完全正的，因此也是正的，所以 $p(1) = \rho$ 是正的（根据定义）。□

推论 87。设 C 为一个有限维冯诺依曼余代数。那么，密度算子P_C 的集合可以通过以下两种等价方式定义：

$$P_C = \{\rho \in C \mid \varepsilon(\rho) = 1 \ and \ \rho \geq 0\} = \{\rho \in C \mid \|\rho\| = 1 = \varepsilon(\rho)\} \tag{17}$$

E 双重粘合的背景及第7节中省略的证明

本节将重新讨论经典线性逻辑中的同态函子双重粘合构造，该构造来自 [25]。

定义 88（粘合范畴， [25, 第 4.3 节。2]）。给定一个 $*$-自主范畴 $(\mathbf{C}\ I, \otimes, [-,-])$，则（同态函子）双重粘合范畴 $G(\mathbf{C})$ 具有

– 对象：(c, S, V)，其中 c 是 $\mathbf{C}$ 中的一个对象，且 $S \subseteq \mathbf{C}(I, c)$ 和 $R \subseteq \mathbf{C}(c, \bot)$ – 态射： $f : (c, S, V) \to (d, R, W)$，其中 $f : c \to d$ 是 $\mathbf{C}$ 中的态射，并且对所有 $s \in S$，我们都有 $f \circ s \in R$；对所有 $w \in W$，我们都有 $w \circ f \in V$

备注 *89*。当我们沿同态函子进行双重粘合时，可以将对象中的第二个参数视为公式 A 的一组 “ 证明 ”，并将第三个参数视为公式 $\neg A$ 的一组 “ 证明 ” 或 “ 反证明 ”。

命题90（粘合范畴， [25, 命题 41]）。范畴 $G(\mathbf{C})$ 是 $*$-自对偶的，且具有

– 否定：$(c, S, V)^* \triangleq (c^*, V, S)$ – 张量积：$(c, S, V) \otimes (d, R, W) \triangleq (c \otimes d, S \otimes R, G(\mathbf{C})((c, S, V), (d, R, W)^*))$，其中 $S \otimes R \triangleq \{s \otimes u \mid s \in S,\ u \in U\}$，单位为：$(I, \{id_I\}, \mathbf{C}(I, \bot))$

这种 $*$-自对偶结构意义不大，因为“证明”和“反证明”之间没有任何交互，因此对偶是平凡的。还请注意，幺半结构为第三个参数增加了许多额外数据。因此，我们需要划出一个由“有意义”的对象构成的子范畴。为了对对象施加限制，使“证明”能够与“反证明”交互，我们使用 [25]中的聚焦正交性概念。

定义 91（聚焦正交性）。设 $\mathbf{C}$ 是一个 $*$-自对偶范畴，则 聚焦正交性 $\perp\!\!\!\perp$ 在 $\mathbf{C}$ 上是一个关系族 $\{\perp\!\!\!\perp_c \in \mathbf{C}(I, c) \times \mathbf{C}(c, \bot)\}$，由 $\perp\!\!\!\perp \subseteq C(I, \bot)$ 诱导，这意味着

$$u \perp\!\!\!\perp_c f \quad \iff \quad f \circ u \in \perp\!\!\!\perp$$

我们称由 $\perp\!\!\!\perp \subseteq \mathbf{C}(I, \bot)$ 诱导的聚焦正交性在 $\perp\!\!\!\perp$ 上具有焦点 。

命题 92（聚焦精确， [25, 第 5 节。3]）。设 $\perp\!\!\!\perp$ 是 $\mathbf{C}$ 上的聚焦正交性，则 $\perp\!\!\!\perp$ 是精确的，即满足

– *For all* $u : I \to c$, $v : I \to d$ *and* $f : c \otimes d \to \bot$

$$u \perp\!\!\!\perp \langle v | f \rangle \quad \textit{and} \quad v \perp\!\!\!\perp \langle u | f \rangle \quad \iff \quad u \otimes v \perp\!\!\!\perp f$$

其中

$$\langle v | f \rangle \triangleq \left(c \cong c \otimes I \xrightarrow{v} c \otimes d \xrightarrow{f} \bot \right)$$

$$\langle u | f \rangle \triangleq \left(d \cong I \otimes d \xrightarrow{u} c \otimes d \xrightarrow{f} \bot \right)$$

– 对于所有 $u\colon\ I \to c$、 $v\colon\ d \to \bot$ 以及 $f\colon\ c \to d$

$$f \circ u \perp\!\!\!\perp v \quad and \quad u \perp\!\!\!\perp v \circ f \quad \iff \quad f \perp\!\!\!\perp u \multimap v$$

引入一些记号，令 $S \subseteq \mathbf{C}(I, c)$、 $R \subseteq \mathbf{C}(I, d)$ 和 $V \subseteq \mathbf{C}(c, \bot)$，则

$$S \otimes R \triangleq \{s \otimes r \mid s \in S \text{ and } r \in R\} \subseteq \mathbf{C}(I, c \otimes d)$$

$$R \multimap V \triangleq \{r \multimap v \mid r \in R \text{ and } v \in V\} \subseteq \mathbf{C}(d \multimap c, \bot)$$

子集 $S \subseteq \mathbf{C}(I, c)$ 的极集现可定义为 $S^\circ \triangleq \{f \in C(c, \bot) \mid \forall s \in S\ s \perp\!\!\!\perp f\}$。集合 S° 可视为一个极大子集，其中所有元素都与 S 正交。它具有以下性质：

引理 93（[25, 第 5 节。1]）。对于 $R \subseteq S \subseteq \mathbf{C}(I, c)$，有 $S \subseteq S^{\circ\circ}$,$S^{\circ\circ\circ} = S^\circ$ 和 $S^\circ \subseteq R^\circ$

定义 94（聚焦正交范畴，[25, 第 5 节。1]）。设 $\mathbf{C}$ 是一个对称幺半闭范畴，且 $\perp\!\!\!\perp \subseteq \mathbf{C}(I, c)$，则称其为聚焦正交范畴，记作 $\mathcal{O}_{\perp\!\!\!\perp}(\mathbf{C})$，其具有

- *objects:* (c, S, V)*, where* $c \in ob(\mathbf{C})$*,* $S \subseteq \mathbf{C}(I, c)$*,* $V \subseteq \mathbf{C}(c, \bot)$ *such that* $S = V^\circ$ *and* $V = S^\circ$
- *morphisms:* $f : (c, S, V) \to (d, R, W)$*, where* $f : c \to d \in mor(\mathbf{C})$*, such that* $f \circ s \in R$ *and* $w \circ f \in V$

条件 $S = V^\circ$ 和 $V = S^\circ$ 等价于 $S = S^{\circ\circ}$，因此我们可以将 $\mathcal{O}_{\perp\!\!\!\perp}(\mathbf{C})$ 的对象看作对 $(c, S^{\circ\circ})$，而不是三元组。

命题 95（稳定性）。在 $\mathbf{C}$ 上的聚焦正交性 $\perp\!\!\!\perp$是稳定的，也就是说，对于所有 $S \subseteq \mathbf{C}(I, c)$、 $R \subseteq \mathbf{C}(I, d)$ 和 $W \subseteq \mathbf{C}(d, \bot)$

- $(S^{\circ\circ} \otimes R^{\circ\circ})^\circ = (S \otimes R^{\circ\circ})^\circ = (S^{\circ\circ} \otimes R)^\circ$
- $(R^{\circ\circ} \multimap W^{\circ\circ})^\circ = (R \multimap W^{\circ\circ})^\circ = (R^{\circ\circ} \multimap W)^\circ$

证明。– 对于聚焦正交性，我们有以下等价关系

$$s \perp\!\!\!\perp \langle r | f \rangle \quad \iff \quad r \perp\!\!\!\perp \langle s | f \rangle \tag{18}$$

因为下面两个复合映射相等

$$I \xrightarrow{s} S \otimes I \xrightarrow{S \otimes r} S \otimes R \xrightarrow{f} \bot$$

$$I \xrightarrow{r} R \otimes I \xrightarrow{s \otimes R} S \otimes R \xrightarrow{f} \bot$$

第一个等式：根据引理 93，只需证明 $(S \otimes R^{\circ\circ})^\circ \subseteq (S^{\circ\circ} \otimes R^{\circ\circ})^\circ$。假设 $f \in (S \otimes R^{\circ\circ})^\circ$，由精确性（命题 92）可知，对于所有 $r \in R^{\circ\circ}$，都有 $\langle r | f \rangle \in S^\circ$。因此，对于所有 $s \in S^{\circ\circ}$ 和 $r \in R^{\circ\circ}$，都有 $s \perp\!\!\!\perp \langle r | f \rangle$，故由上述等价关系可得 $f \in (S^{\circ\circ} \otimes R^{\circ\circ})^\circ$。第二个等式可用类似方法证明。

– 对于一种聚焦正交性

$$f \circ r \perp\!\!\!\perp w \quad \Longleftrightarrow \quad r \perp\!\!\!\perp w \circ f$$

为 $w \circ (f \circ u) = (w \circ f) \circ u \in \perp\!\!\!\perp$。

第一个等式：根据引理 93，只需证明 $(R \multimap W^{\circ\circ})^{\circ} \subseteq (R^{\circ\circ} \multimap W^{\circ\circ})^{\circ}$。假设 $f \in (R \multimap W^{\circ\circ})^{\circ}$，则根据精确性，对所有$w \in W^{\circ\circ}$都有 $w \circ f \in R^{\circ}$。因此，对所有 $r \in R^{\circ\circ}$和 $w \in W^{\circ\circ}$，我们都有 $r \perp\!\!\!\perp w \circ f$，故根据精确性，$f \in (R^{\circ\circ} \multimap W^{\circ\circ})^{\circ}$。第二个等式可以用类似的方法证明。

□

定理 96 ([25, 命题 62])。设 $\mathbf{C}$ 是一个 $*$-自对偶范畴，且 $\perp\!\!\!\perp \subseteq \mathbf{C}(I, \perp)$，则诱导出的聚焦正交范畴 $\mathcal{O}_{\perp\!\!\!\perp}(\mathbf{C})$ 是 $*$-自对偶的，其中

– *Tensor:* $(c, S) \widehat{\otimes} (d, R) \triangleq (A \widehat{\otimes} B, (S \otimes U)^{\circ\circ})$ *with unit:* $(I, \{id_I\}^{\circ\circ})$, *where* $S \otimes U \triangleq \{s \otimes u \mid s \in S,\ u \in U\}$
– *Negation:* $(c, S)^* \triangleq (c^*, S^{\circ})$

命题 97（聚焦态射，[25,第 5 节。2]）。设$\mathbf{C}$ 是一个带有正交性 $\perp\!\!\!\perp \subseteq \mathbf{C}(I, \perp)$ 和 $S \subseteq \mathbf{C}(I, c)$、$V \subseteq \mathbf{C}(d, \perp)$的 $*$-自对偶范畴，那么任意 $f\colon c \to d$都是聚焦的（相对于 S和 V），这意味着

$$f \circ s \perp\!\!\!\perp v \quad \Longleftrightarrow \quad s \perp\!\!\!\perp v \circ f \quad \forall s \in S\ \forall v \in V$$

命题 98（（余）积）。设$\mathbf{C}$ 是一个带有正交性 $\perp\!\!\!\perp \subseteq \mathbf{C}(I, \perp)$的 $*$-自对偶范畴

– 假设$\mathbf{C}$ 是笛卡尔的，则 $\mathcal{O}_{\perp\!\!\!\perp}(\mathbf{C})$ 是笛卡尔的。二元积的显式定义如下

$$(c, S) \times (d, R) \triangleq (c \times d, S \times R)$$

其中 $S \times R \triangleq \{\langle s, r\rangle : I \to c \times d \mid s \in S, r \in R\}$，且终对象为$(1, \mathbf{C}(I, 1))$。

– 假设$\mathbf{C}$ 是余笛卡尔的，则 $\mathcal{O}_{\perp\!\!\!\perp}(\mathbf{C})$ 是余笛卡尔的。二元余积的显式定义如下

$$(c, S) + (d, R) \triangleq (c + d, (S^{\circ} + R^{\circ})^{\circ})$$

其中 $S^{\circ} + R^{\circ} \triangleq \{[f, g]\colon \quad c + d \to \perp \mid f \in S^{\circ}, g \in R^{\circ}\}$，且始对象为$(0, \mathbf{C}(0, \perp)^{\circ})$。

证明。 根据 [25, 命题 63]，只需证明投影（单射）是聚焦的。由命题 97 可知，聚焦正交范畴中的所有态射都是聚焦的，因此投影（单射）也是如此。□

现在，$\mathbf{Q}$是 G（$\mathbf{FdOS}$）的聚焦正交范畴，其焦点为 $\{1\} \subseteq \mathbf{FdOS}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathrm{Ball}(\mathbb{C})$。

定理 *48*。范畴 Q 是 $*$-自对偶的，并且具有有限（余）积：对偶由 $(X,\ S)^* \triangleq (X^*,\ S^\circ)$ 给出；始对象由 $(0,\ \varnothing)$ 给出；终对象由 $(0,\ \{0\})$ 给出；二元积由 $(X,\ S) \overset{\infty}{\oplus} (Y,\ R) \triangleq (X \overset{\infty}{\oplus} Y,\ S \times R)$ 给出；二元余积由 $(X,\ S) \overset{1}{\oplus} (Y,\ R) \triangleq (X \overset{1}{\oplus} Y,\ (S^\circ + R^\circ)^\circ)$ 给出，其中

$$S^\circ + R^\circ \triangleq \{[s', r'] \colon X \overset{1}{\oplus} Y \to \mathbb{C} \mid s' \in S^\circ, r' \in R^\circ\} \subseteq \mathrm{Ball}((X \overset{1}{\oplus} Y)^*);$$

乘法合取由 $(X, S)\ \widehat{\otimes} (Y, R) \triangleq (X \widehat{\otimes} Y, (S \otimes R)^{\circ\circ})$ 给出，其中 $S \mathbin{\widehat{\otimes}} R \triangleq \{s \otimes r \mid s \in S,\ r \in R\}$ $X\ S\ \otimes\ Y\ R \triangleq$；乘法析取由 $(,)\,(,)\,(X \otimes Y, (S^\circ \otimes R^\circ)^\circ)$; 给出；两个张量积的张量单位均由 $(\mathbb{C}, \{1\})$ 给出。

证明。 根据命题 92，任何聚焦正交性都是精确的；根据命题 95，它也是稳定的 。由于**FdOS** 是 $*$-自治的，根据定理 96，**Q** 在给定结构下也同样是 $*$-自治的。我们还知道**FdOS** 具有有限积，因此**Q** 也具有有限积（因而也具有余积），这由命题 98 给出。□

F Q 中的双极子集

我们的极性概念是一个强条件，它意味着非平凡的极集必须是单位球面的子集。

命题 99. 给定一个算子空间 X 和一个非空子集 $S \subseteq$单位球(X)，若 $S^\circ \neq \varnothing$，则 $\forall s \in S.\ \|s\| = 1$ 和 $\forall s' \in S^\circ.\ \|s'\| = 1.$

证明。设 $s \in S$ 和 $s' \in S^\circ$。根据定义，$s'(s) = 1$，因此 $1 = |s'(s)| \leq \|s'\|\|s\| \leq 1$，因为 s 和 s' 属于 X 和 X^*. 的单位球。这显然意味着 $\|s\| = \|s'\| = 1.$

我们回顾泛函分析中的一些事实。对于一个矩阵 $a \in \mathbb{M}_n$，我们用 $\|a\|$ 表示其算子范数，即它作为 $a \in M_n$ 中元素时的范数。我们用 $\|a\|_{\mathrm{tr}}$ 表示其迹范数，也就是它作为 $a \in T_n$. 中元素时的范数

引理 100。 设 a、$b \in \mathbb{M}_n$ 为两个矩阵，$u \in \mathbb{M}_n$ 为一个酉矩阵。则：

1. $\|u\| = 1$2. $\|u\|_{\mathrm{tr}} = n.$
3. $|\mathrm{tr}(ab)| \leq \|a\|_{\mathrm{tr}}\|b\|.$

证明。前两个陈述由定义可直接得到。最后一个陈述是 [11, 第 267] 页的特殊情形。

引理 101。 设 X 为一个严格凸赋范空间，并设 x_1、...、$x_n \in X$（其中 $\|x_i\| = 1$）为单位球面上的 n 个点。进一步假设 $\|\sum_{k=1}^n x_k\| =$$n$。则 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$

证明。严格凸赋范空间的特征是具有如下性质 [24, p.263]:

$$\text{if } \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \text{ and } x \neq 0, \text{ then } y = cx \text{ for some } c \geq 0.$$

该引理对 $n = 0$ 或 $n = 1$ 显然成立。其余部分通过一个简单的归纳论证得到。若该引理对 $n = k \geq 1$ 成立，那么要证明它对 $n = k+1$ 成立，我们如下推理。设 $y = \sum_{i=1}^k x_i$。则

$$k+1 = \|y + x_{k+1}\| \leq \|y\| + \|x_{k+1}\| \leq k+1.$$

因此 $\|y + x_{k+1}\| = \|y\| + \|x_{k+1}\|$，并且 $\|y\| = k$。由后者和归纳假设可得 $x_1 = \cdots = x_k.$；由前者和严格凸性可得 $x_{k+1} = cy$，其中 $c \geq 0.$。由此可得 $c = \frac{\|x_{k+1}\|}{\|y\|} = \frac{1}{k}$，因此 $x_1 = \cdots = x_{k+1}.$ □

引理 102。 设 $i\colon\ X \to Y$是 **FdOS**中的一个同构。若(X, U)是**Q**中的一个对象，则$(Y, i[U])$也是**Q**中的一个对象，其中 $i[U] \triangleq \{i(u) \mid u \in U\}$是 U 在 i.下的像

证明。这可以通过直接验证得到证明。

F.1 与冯·诺伊曼代数相关的双极集

现在，我们继续确定可与 $\mathbf{Q}$ 中的有限维冯诺依曼代数相关联的重要双极集。

引理 103。 设 X 是一个算子空间，其底层向量空间为 $\mathbb{M}_n$，且对每个 $a \in \mathbb{M}_n$，都有 $\|a\|_{M_n} \leq \|a\|_X$。假设$(X, S) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$，即 S 是双极的。若 $S^\circ \subseteq \mathrm{Ball}(\underline{X}^*)$ 包含形如$\frac{1}{n}\operatorname{tr}(u^* \cdot)$的元素，其中 $u \in \mathbb{M}_n$ 是酉矩阵，则 $S \subseteq \{u\}$。

证明。 设 $g \in S = S^{\circ\circ}$ 是任意元素。根据 $S^{\circ\circ}$ 的定义，有$\operatorname{tr}\left(\frac{1}{n}u^*g\right) = 1$，因此$\operatorname{tr}(u^*g) = n.$设 $\{e_k\}_{k=1}^n$是 $\mathbb{C}^n$的一组标准正交基。那么

$$\begin{aligned} n &= \operatorname{tr}(u^*g) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle u^* g e_k, e_k \rangle && \text{(definition of } \operatorname{tr}\text{)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle g e_k, u e_k \rangle && \text{(adjoint)} \end{aligned}$$

因此 $n = |\sum_{k=1}^n \langle ge_k,\ ue_k\rangle|$。由柯西-施瓦茨不等式可知，对每个 $1 \leq k \leq n$:

$$|\langle ge_k, ue_k\rangle| \leq \|ge_k\|\|ue_k\| = \|ge_k\| \leq \|g\|_{M_n}\|e_k\| \leq \|g\|_X \leq 1 \tag{19}$$

记 $c_k \triangleq \langle ge_k,\ ue_k\rangle \in \mathbb{C}$，因此我们有 $0 \leq |c_k| \leq 1$ 且

$$n = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k| \leq n$$

因此，对每个 $1 \leq k \leq n.$，$|c_k| = 1$。由引理 101 可得 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$。回到 (19)，我们有

$$1 = |\langle ge_k, ue_k\rangle| = \|ge_k\|\|ue_k\|$$

再次应用柯西-施瓦茨论证（用于等式），可得

$$ge_k = \frac{\langle ge_k, ue_k\rangle}{\|ue_k\|^2} ue_k = ue_k$$

对每个 $1 \leq k \leq n.$，因此 $g = u.$ □

引理 104. 设 $u \in M_n$ 是酉元，且 $n \in \mathbb{N}.$。那么，数对$(M_n, \{u\})$ 是 $\mathbf{Q}$ 的一个对象。

证明。若 $n=0$，则 $M_0 \cong 0$，且唯一的（零）元 $0 \in M_0$ 是酉元，因为它也是单位元。根据定理 48，数对 $(M_0, \{0\})$ 是 $\mathbf{Q}$ 的终对象。

若 $n>0$，则令 $U \triangleq \{u\}$.。考虑这一对 $(M_n^*,\ U^\circ)$。根据定义，我们有

$$U^\circ = \{f\colon M_n \to \mathbb{C} \mid f(u)=1\} \subseteq \mathbf{FdOS}(M_n, \mathbb{C}).$$

由此可得 $\mathrm{tr}(\frac{1}{n}u^*\cdot) \in U^\circ$，其中 u^* 是 u. 的共轭转置（也是逆）。事实上，我们有 $\mathrm{tr}(\frac{1}{n}u^*u) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(1_n) = 1$，并且为了证明 $\mathrm{tr}(\frac{1}{n}u^*\cdot)$ 是一个（必然完备的）压缩映射，我们验证若 $b \in M_n$，则

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{tr}\left(\frac{1}{n}u^*b\right)\right| &= \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\,(u^*b)| \\ &\leq \frac{1}{n}\|u^*\|_{\mathrm{tr}}\|b\| && \text{(Lemma 100)} \\ &\leq \|b\| && \text{（引理 100）}\end{aligned}$$

我们总有 $U \subseteq U^{\circ\circ}$，而引理 103 给出了另一个方向。 □

命题 105。设 M 是一个有限维冯诺依曼代数，$u \in M$ 是一个酉元，即 $uu^* = 1_M = u^*u$. 那么 $(M、\ \{u\}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$。

证明。根据例 28，我们有一个 vN-代数同构 $M \cong \bigoplus_{1\leq i\leq n}^{\infty} M_{k_i}$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k_i \geq 1$。该同构保持酉元不变，因此根据引理 102，只需证明

$$\left(\bigoplus_{1\leq i\leq n}^{\infty} M_{k_i}, \{u\}\right)$$

对于任意酉元 $u \in \bigoplus_{1\leq i\leq n}^{\infty} M_{k_i}$，$u$ 是 $\mathbf{Q}$ 的一个对象。酉元 u 具有如下形式

$$u = (u_1, \ldots, u_n)$$

其中 $u_i \in M_{k_i}$，并且每个 u_i 都是 M_{k_i} 中的酉元。根据引理 104，每一对 $(M_{k_i}, \{u_i\})$ 都是 $\mathbf{Q}$ 的一个对象，并且根据定理 48，我们有

$$\left(\bigoplus_{1\leq i\leq n}^{\infty} M_{k_i}, \{(u_1, \ldots, u_n)\}\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$$

是对象 $(M_{k_i},\ \{u_i\})$ 的范畴积。 □

现在很容易证明，我们有一个全忠实嵌入 $H\colon \mathbf{H} \overset{\text{full}}{\hookrightarrow} \mathbf{Q}$。

定理 49. 若 $A \in \mathbf{vNAlg_{fd}}$，则 $(A, \{1_A\}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$。此外，由 $H(A) \triangleq (A, \{1_A\})$ 和 $H(f) \triangleq f$定义的函子$H\colon \mathbf{H} \to \mathbf{Q}$是全忠实的，关于 $\otimes$ 为严格幺半函子，并且严格保有限积。

证明. 由前一个命题可知，函子 H 在对象上定义良好。利用命题 34，可得 H 在态射上定义良好。忠实性显然，而满性由命题 34（再次）得出，因为 $\mathbf{Q}$ 中的任意态射 $f\colon (A, \{1_A\}) \to (B, \{1_B\})$ 显然都是保单位元的完全压缩映射，因此也是完全正的。

定理 48 立即表明，H 严格保持积。接下来只需证明 H 严格保持 $\otimes$。我们先对形如 M_n 的冯诺依曼代数证明这一点。这相当于证明，当将

$$S \triangleq \{1_n\}^\circ \otimes \{1_m\}^{\circ\circ} = \{1_n \otimes 1_m\}$$

视为 $M_n \otimes M_m$ 的子集时，它们相等。为证明 $1_n \otimes 1_m \in S$，令

$$\varphi \otimes \psi \in (\{1_n\}^\circ \otimes \{1_m\}^\circ).$$

于是，根据定义，$\varphi(1_n) = 1 = \psi(1_m)$，因此 $(\varphi\otimes\psi)(1_n\otimes 1_m) = 1$，如所需。为证明 $S \subseteq \{1_n \otimes 1_m\}$，注意到我们有线性泛函 $\frac{1}{n}\mathrm{tr} \in \{1_n\}^\circ$ 和 $\frac{1}{m}\mathrm{tr} \in \{1_m\}^\circ$，这一点可由引理 104 的证明得知。现在可通过 vN-代数同构 $M_n \otimes M_m \cong M_{nm}$，将泛函 $\frac{1}{n}\mathrm{tr} \mathbin{\overline{\otimes}} \frac{1}{m}\mathrm{tr}$ 与 $\frac{1}{nm}\mathrm{tr}$ 对应起来；引理 104 的证明表明，满足 $\mathrm{tr}(g) = nm$ 的 M_{nm} 的 Ball 中唯一元素 $g \in$ 是 $g = 1_{nm}$，它通过同构 $M_{nm} \cong M_n \otimes M_m$ 对应于 $1_n \otimes 1_m$，如所需。

因此 $H(M_n) \mathbin{\widehat{\otimes}} H(M_m) = H(M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_m)$。如果 $A = M_n \overset{\infty}{\oplus} M_k$，那么

$$\begin{aligned}
H(A \mathbin{\widehat{\otimes}} M_m) &\xrightarrow{H(\cong)} H((M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_m) \overset{\infty}{\oplus} (M_k \mathbin{\widehat{\otimes}} M_m)) \\
&= H(M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_m) \overset{\infty}{\oplus} H(M_k \mathbin{\widehat{\otimes}} M_m) \\
&= (H(M_n) \mathbin{\widehat{\otimes}} H(M_m)) \overset{\infty}{\oplus} (H(M_k) \mathbin{\widehat{\otimes}} H(M_m)) \\
&\xrightarrow{\cong^{-1}} (H(M_n) \overset{\infty}{\oplus} H(M_k)) \mathbin{\widehat{\otimes}} H(M_m) \\
&= H(A) \mathbin{\widehat{\otimes}} H(M_m)
\end{aligned}$$

并且由于 H 对态射的作用是平凡的，且 $\mathbf{Q}$ 的 MALL 结构与 $\mathbf{FdOS}$ 的 MALL 结构一致（在遗忘函子下），因此上述复合映射就是恒等映射。显然，这一论证可以推广为 $\mathbin{\widehat{\otimes}}$ 并进行对称化，由此可得，对于所有具体的冯诺依曼代数，$H(A) \otimes H(B) = H(A \otimes B)$。利用例 28 和类似的论证，可以得出所有（抽象）有限维冯诺依曼代数的相应结果。□

F.2 与冯·诺依曼余代数相关的双极集

现在我们转而关注有限维冯诺依曼余代数在 $\mathbf{Q}$。中的包含关系。

命题 106. 设 C 是一个余单位为 $\varepsilon\colon C \to \mathbb{C}$ 的有限维冯·诺依曼余代数，并设 $S_C \triangleq \{c \in C \mid \|c\| = 1 = \varepsilon(c)\}$。则 $(C, S_C) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$。此外，双对偶同构 $d\colon C \cong C^{**} : \mathrm{Id} \to \mathbf{vNCoalg_{fd}}$ 以如下方式提升为 $\mathbf{Q}$ 的一个同构

$$d\colon (C, S_C) \cong (C^{**}, \{\varepsilon\}^\circ) = (C^*, \{\varepsilon\})^*,$$

其中 $(C^*, \{\varepsilon\}) = H(C^*)$ 是冯诺依曼代数 C^* 的典范包含。

证明。 由定理 44 可知， C^* 是一个单位为 ε. 的冯诺依曼代数。命题 105 表明 $(C^*, \{\varepsilon\}) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Q})$，而定理 48 表明 $(C^{**}, \{\varepsilon\}^\circ)$ 也是 $\mathbf{Q}$ 的一个对象。 根据定义

$$\{\varepsilon\}^\circ = \{f \in \mathrm{Ball}(C^{**}) \mid f(\varepsilon) = 1\}.$$

但是对于 $f \in \{\varepsilon\}^\circ$，我们有 $1 = \|f(\varepsilon)\| \leq \|f\|\|\varepsilon\| \leq \|f\| \leq 1$，因此$f(\varepsilon) = 1 = \|f\|_{C^{**}}$.令

$$V \triangleq \{f \in C^{**} \mid f(\varepsilon) = 1 = \|f\|_{C^{**}}\} = \{\varepsilon\}^\circ.$$

我们有一个完全等距同构 $d\colon\ C \cong C^{**} :: c \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(c))$，根据引理 102，可推出 $(C,\ d^{-1}[V])$ 是 $\mathbf{Q}$ 的一个对象。很容易看出

$$d^{-1}[V] = \{c \in C \mid \varepsilon(c) = 1 = \|c\|\} = S_C$$

这就完成了证明。 □

注 *107*。 注意，当 $\dim(C) = 0$ 时，上述命题表明 $(0,\ \varnothing) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Q})$。事实上，这是 $\mathbf{Q}$ 的始对象（定理 48）。

推论 108。 如果 C 是有限维冯诺依曼余代数，那么 $(C, P_C) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$。

证明。 结合命题 106 和推论 87。 □

我们还可以证明，包含函子 H 和 S 关于对偶性表现良好。

命题 109。 设 A为一个有限维冯诺依曼代数， C 为一个有限维冯诺依曼余代数。则$H(A)^* = S(A^*)$ 以及 $S(C)^* = H(C^*)$。

证明。 我们验证

$$\begin{aligned}
H(A)^* &= (A, \{1_A\})^* \\
&= (A^*, \{1_A\}^\circ) \\
&= (A^*, \{f \in \mathrm{Ball}(A^*) \mid f(1_A) = 1\}) \\
&= (A^*, \{f \in A \mid f(1_A) = 1 = \|f\|\}) \\
&= (A^*, P_{A^*}) && \text{(Corollary 87)} \\
&= S(A^*)
\end{aligned}$$

对于另一个陈述，我们有

$$\begin{aligned}
S(C)^* &= (C, P_C)^* \\
&= (C^*, P_C^\circ) \\
&= (C^*, \{\epsilon\}) && \text{（命题 106）} \\
&= H(C^*)
\end{aligned}$$

至此证明完成。 □

为了证明我们有一个全忠实嵌入 $S\colon \mathbf{S} \overset{\text{全}}{\hookrightarrow} \mathbf{Q}$，我们先证明一个额外的命题。

命题110。 设 $f\colon (C, P_C) \to (D, P_D)$ 是 $\mathbf{Q}$ 中的一个态射，其中 $C = {}_1\oplus_{1\leq i\leq n} T_{k_i}$ 是一个具体 *vN*-余代数， D 是一个有限维冯诺依曼余代数。则 f 是余单位的，即保迹。

证明。 设 $c \in C$ 是一个满足 $c \neq 0$ 的正元素。根据附录 D 中的结果，我们知道 $c = (c_1, \ldots, c_n)$，其中每个 $c_i \in T_{k_i}$ 都是正矩阵。容易看出

$$\|c\| = \sum_i \|c_i\|_{\mathrm{tr}} = \sum_i \mathrm{tr}(c_i) = \varepsilon_C(c)$$

利用迹范数在正矩阵上与迹一致这一事实。如果定义 $c' \triangleq \frac{c}{\|c\|}$，则可知 $c' \in P_C$，从而 $f(c') \in P_{D^\circ}$ 因此$\varepsilon_D(f(c')) = 1 = \varepsilon_C(c')$，将两边乘以 $\|c\|$ 后得到 $\varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c)$。因此， f 在非零正元素上保迹。但显然，对于 $c = 0$，它也是保迹的，所以 f 在 $C.$ 的所有正元素上都保迹。对于一般情形，回顾一下， C （的底层向量空间）中的每个元素都是 C 中正元素的有限线性组合（ [29,推论 4.2 的特例），因此若 $c = \sum_j \lambda_j p_j$，其中每个 $p_j \in C$ 都是正的，则

$$\varepsilon_D(f(c)) = \sum_j \lambda_j \varepsilon_D(f(p_j)) = \sum_j \lambda_j \varepsilon_C(p_j) = \varepsilon_C(c),$$

因此， f 确实是余单位的，即保迹。 □

推论 111。 设 $f\colon (C, P_C) \to (D, P_D)$ 是 $\mathbf{Q}$ 中的一个态射，其中 C和D 是有限维冯·诺伊曼余代数。则 f 是余单位的，即保迹。

证明。 将前一个命题与例 40 结合起来，例 40 说明 C作为冯诺依曼余代数同构于一个具体的冯诺依曼余代数。

定理50。 若 $C \in \mathbf{vNCoalg}_{\mathbf{fd}}$，则 $(C, P_C) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$。此外，由 $S(C) \triangleq (C, P_C)$ 和 $S(f) \triangleq f$定义的函子 $S\colon \mathbf{S} \to \mathbf{Q}$ 是全忠实的、关于 $\widehat{\otimes}$ 的严格幺半函子，并且严格保持有限余积。

证明。 推论 108 表明函子 S 在对象上定义良好。由命题 41 可知，**S**中的态射可以等价地描述为完全压缩的保迹映射。为证明 S 在态射上定义良好，只需检验对于一个完全压缩的保迹映射 $f\colon C \to D$，有 $f[C] \subseteq D.$。若 $c \in P_c$，则 $\varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c) = 1$， 利用迹保持性，因此

$$1 = \|\varepsilon_D(f(c))\| \leq \|f(c)\| \leq \|c\| = 1$$

因此 $\|f(c)\| = 1 = \varepsilon_D(f(c))$，符合要求。忠实性显然成立，而满性由推论 111 得出。

现在我们可以通过验证来证明 S 严格保持 $\widehat{\otimes}$

$$\begin{aligned}
S(C)\,\widehat{\otimes}\,S(D) &\xrightarrow{d} (S(C)\,\widehat{\otimes}\,S(D))^{**} \\
&\xrightarrow{\cong} (S(C)^*\,\widehat{\otimes}\,S(D)^*)^* \\
&= (H(C^*)\,\widehat{\otimes}\,H(D^*))^* && \text{（命题 109）} \\
&= H(C^*\,\widehat{\otimes}\,D^*)^* && \text{(Theorem 49)} \\
&= S((C^*\,\widehat{\otimes}\,D^*)^*) && \text{（命题 109）} \\
&\xrightarrow{S(\cong^{-1})} S((C\,\widehat{\otimes}\,D)^{**}) \\
&\xrightarrow{S(d^{-1})} S(C\,\widehat{\otimes}\,D)
\end{aligned}$$

[1]并注意到上述复合映射是恒等映射。$\oplus$ 的证明完全类似。□

F.3 与纯态计算相关的双极集

最后，我们证明论文最后一段中讨论纯态计算时提出的论断。请注意，在以下命题 $\curvearrowleft$中，我们并未使用 $\otimes$ 张量积，因此 $M_n\,\widehat{\otimes}\,M_n$ 不必是冯诺依曼代数，也不必是冯诺依曼余代数。

命题112。 设 u、$v \in M_n$ 是两个酉矩阵。那么我们在**Q**中有以下对象等式

$$(M_n,\{u\})\,\widehat{\otimes}\,(M_n,\{v\}) = (M_n\,\widehat{\otimes}\,M_n,\{u\otimes v\}^{\circ\circ}) = (M_n\,\widehat{\otimes}\,M_n,\{u\otimes v\}).$$

证明。 第一个等式由定义可得，因此我们只需证明 $\{u\otimes v\}^{\circ\circ} =\{u\otimes v\}.$。包含关系 $\{u\otimes v\}^{\circ\circ}\supseteq\{u\otimes v\}$ 显然成立，所以我们证明另一个方向。为简单起见，我们将 $\mathbb{M}_n\otimes\mathbb{M}_n$ 与 $\mathbb{M}_{n^2}$ 等同，并用 X 表示带有从 $M_n\,\widehat{\otimes}\,M_n$诱导的矩阵范数的算子空间，因此我们有一个由前述同构给出的 c.i.i.$X \cong M_n\,\widehat{\otimes}\,M_n$。注意，对任意 $\curvearrowleft a \in M_n\otimes M_n$，都有 $\|a\|_{M_n\,\widehat{\otimes}\,M_n} \le \|a\|_{M_n\,\widehat{\otimes}\,M_n}$，因此对任意 $\curvearrowleft a\in\mathbb{M}_{n^2}$，都有 $\|a\|_{M_{n^2}} \le \|a\|_X$，因为 $M_n\otimes M_n \cong M_{n^2}.$。接下来，注意线性泛函 $\frac{1}{n^2}\,\mathrm{tr}((u^*\otimes v^*)\ \cdot) : X\to\mathbb{C}$ 满足

$$\frac{1}{n^2}\,\mathrm{tr}((u^*\otimes v^*)(u\otimes v)) = 1$$

并且这是一个（必然完备的）压缩映射，因为对于任意 $x\in X$，我们都有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n^2}\,\mathrm{tr}((u^*\otimes v^*)x)\right| &= \frac{1}{n^2}\,|\mathrm{tr}((u^*\otimes v^*)x)| \\
&\le \frac{1}{n^2}\|u^*\otimes v^*\|_{\mathrm{tr}}\|x\|_{M_{n^2}} \\
&= \|x\|_{M_{n^2}} \\
&\le \|x\|_X.
\end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{n^2}\operatorname{tr}((u^* \otimes v^*)\ \cdot) \in \{u \otimes v\}^\circ$，我们通过引理 103 完成证明，该引理表明 $\{u \otimes v\}^{\circ\circ} \subseteq \{u \otimes v\}$. □

命题 113。设 u、$v \in M_n$ 为两个酉矩阵。则

$$(M_n \overset{\text{h}}{\otimes} M_n, \{u \otimes v\}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q}).$$

证明。证明与前一个命题类似，因为对于任意 $a \in \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n$，都有 $\|a\|_{M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_n} \leq \|a\|_{M_n \overset{\text{h}}{\otimes} M_n}$. □

命题 114。设 u、$v \in \mathbb{M}_n$ 为两个酉矩阵。则

$$(M_{2n}, \{|0\rangle\langle 0| \otimes (uv) + |1\rangle\langle 1| \otimes (vu)\}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q}).$$

证明。直接验证可知，$|0\rangle\langle 0| \otimes (uv) + |1\rangle\langle 1| \otimes (vu)$ 是 $\mathbb{M}_{2n}$ 中的酉矩阵，因此由引理 104 可得该命题。□

命题 115。设 u、$v \in \mathbb{M}_n$ 为两个酉矩阵。则

$$\mathrm{qsw} \colon (M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_n, \{u \otimes v\}) \to (M_{2n}, \{|0\rangle\langle 0| \otimes (uv) + |1\rangle\langle 1| \otimes (vu)\})$$

是$\mathbf{Q}$的一个态射，但是

$$\mathrm{qsw} \colon (M_n \overset{\text{h}}{\otimes} M_n, \{u \otimes v\}) \to (M_{2n}, \{|0\rangle\langle 0| \otimes (uv) + |1\rangle\langle 1| \otimes (vu)\})$$

不是$\mathbf{Q}$的一个态射。

证明。所有这些对都是 $\mathbf{Q}$ 的有效对象，且 $\mathrm{qsw} \colon M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_n \to M_{2n}$ 是一个完全压缩 [32, §4]。显然，$\mathrm{qsw}(u \otimes v) = |0\rangle\langle 0| \otimes (uv) + |1\rangle\langle 1| \otimes (vu)$，因此

$$\mathrm{qsw} \colon (M_n \mathbin{\widehat{\otimes}} M_n, \{u \otimes v\}) \to (M_{2n}, \{|0\rangle\langle 0| \otimes (uv) + |1\rangle\langle 1| \otimes (vu)\})$$

$_{\text{h}}$是$\mathbf{Q}$的一个有效态射。然而，$\mathrm{qsw} \colon M_n \otimes M_n \to M_{2n}$ 不是一个完全压缩 [32, §4], ，因此我们没有一个态射

$$\mathrm{qsw} \colon (M_n \overset{\text{h}}{\otimes} M_n, \{u \otimes v\}) \to (M_{2n}, \{|0\rangle\langle 0| \otimes (uv) + |1\rangle\langle 1| \otimes (vu)\}).$$

□