arXiv:2601.15840v1 [math.OA] 22 Jan 2026

C^*-代数在群作用下不变的幺正完全正映射的 C*-极端点

CHAITANYA J. KULKARNI

摘要。本文在 C*-凸性框架下，研究从幺正C^*-代数 $\mathscr{A}$到 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$的一类幺正完全正映射，其中 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$上有界线性算子的代数。设 τ是群G 在C^*-代数 $\mathscr{A}$ 上的作用，且该作用通过C^*-自同构实现。我们重点研究从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$的所有幺正完全正映射中在 τ下保持不变的映射。我们将这一集合记为 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$。该集合构成一个$C^*$-凸集。我们刻画 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的$C^*$-极端点。此外，本文最后证明了 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$这一集合在$C^*$-凸性框架下的 Krein–Milman 型定理。

1. 引言

设 τ为群G 在幺正C^*-代数 $\mathscr{A}$ 上的一个作用，该作用通过（幺正）C^*-自同构实现。考虑以下两个集合:

$$\mathrm{UCP}\big(\mathscr{A},\mathbb{C}\big) := \{\omega : \mathscr{A} \to \mathbb{C} \ : \ \omega \text{ is a state}\};$$

$$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathbb{C}\big) := \big\{\omega \in \mathrm{UCP}\big(\mathscr{A},\mathbb{C}\big) \ : \ \omega(\tau_g(a)) = \omega(a) \text{ for all } g \in G \text{ and } a \in \mathscr{A}\big\}.$$

集合 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathbb{C}\big)$是对偶空间 $\mathscr{A}^*$的一个（线性）凸紧子集（在弱*拓扑下）。$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathbb{C}\big)$的极端点称为遍历态。关于遍历态的 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathbb{C}\big)$元素分解已在 [8, 第 4 章3]中研究。此外，针对群G 及其作用的专门研究也已开展，参见 [8, 第 4 章3])。随后， [7], 中的作者将这项研究扩展到了非交换情形。对于固定的希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，作者沿用上述记号，考虑以下两个集合。

$$\mathrm{UCP}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big) := \{\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}) : \ \phi \text{是保单位完全正映射}\};$$

$$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big) := \big\{\phi \in \mathrm{UCP}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big) : \ \phi(\tau_g(a)) = \phi(a) \text{对所有} g \in G \text{以及} a \in \mathscr{A}\big\},$$

其中 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 表示希尔伯特空间 $\mathscr{H}$上所有有界线性算子的代数。集合$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$是UCP $\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的（线性）凸紧子集（在BW拓扑下）。文献 [7]分析了$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的极端点刻画，以及相应地，$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$中元素关于其极端点的分解。此外，文献 [16]对部分群作用 τ也进行了这项研究。本文使用C^*-凸性这一概念来考察集合$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，它是线性凸性的量子类比。

线性凸性的概念已推广到各种其他非交换版本。这些版本的几个例子如下：C^*-凸性的概念在 [18]中提出。此外，矩阵凸性在 [10, 19]中得到了研究。在 [9], 中，作者提出了非交换凸性的概念。CP-凸性的概念于1993年在 [14]中提出。最近，在 [1],

2020数学学科分类。46L05, 47L07, 46A55, 46B22, 46L55.关键词和短语。幺正完全正映射，C^*-凸性，C^*-极端点，Krein–Milman 定理，群作用。

作者提出了P-C^*-凸性的概念，其定义与希尔伯特空间上的正算子P 相对应。在 [2], 中，W. Arveson 在经典（线性）凸性框架下刻画了完全正映射若干子集的极端点。在C^*-凸性的背景下，C^*-极端点的刻画，特别是关于 UCP$\big(\mathscr{A}$的各种C^*-凸子集的 Krein–Milman 型定理 $\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，已在 [3, 6,12, 13, 15, 22]中得到研究。在 [11, 21], 中，作者研究了某些C^*-凸集中的C^*-凸性概念。矩阵代数上纠缠破坏映射空间的C^*-凸结构及其C^*-极端点在 [4], 中得到了研究；而在 [5] 中，这项研究则针对算子系统上的纠缠破坏映射空间展开。

除非另有说明，本文始终采用以下设定。设G 为一个群，$\mathscr{A}$ 为一个幺正C^*-代数，$\mathscr{H}$为一个希尔伯特空间。假设 τ是G 在 $\mathscr{A}$ 上的一个通过（幺正）C^*-自同构实现的作用。设$\{\phi_i\}^n{}_{i=1}$ 是 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$中的一组元素。那么，$C^*$-凸组合$\{\phi_i\}^n{}_{i=1}$ 定义为

$$\phi(\cdot) := \sum_{i=1}^{n} T_i^* \phi_i(\cdot) T_i, \quad \text{where each } T_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) \text{ and } \sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}.$$

于是 $\phi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$。这表明 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 是集合 UCP$\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的一个$C^*$-凸子集。此外，关于 BW拓扑，UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 是 UCP$\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的一个紧子集。这自然引出了对 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的$C^*$-极端点的研究（见第3节）。本文首先给出 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 中的元素成为C^*-极端点的一些充分条件，随后刻画 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的$C^*$-极端点集合。关于 UCP $^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$中的 Radon-Nikodym型定理的概念，请参见 [7], 。我们还采用了 [4, 12, 13]中发展出的技巧。本文还在C^*-凸性的框架下，讨论集合 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的 Krein–Milman 型定理。该结果通过改编 [3, 6, 12]中建立的 Krein–Milman 型定理得到。

本文结构安排如下。第2节简要回顾本文后续所需的结果和概念。第3节介绍集合 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 中C^*-极端点的概念。随后讨论 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的C^*-极端点与线性极端点之间的关系。此外，我们给出若干充分条件，以确保 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 中的给定元素是C^*-极端点。第4节刻画 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 中所有C^*-极端点构成的集合。最后，在C^*-凸性框架下，我们证明集合 UCP$^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的一个 Krein—Milman型定理。

2. 预备知识

这里我们回顾一些将在本文余下部分中用到的重要结果。本节提及的结果主要参见 [2, 7, 20] 。

2.1. 完全正映射的 Stinespring 膨胀。

首先，我们回顾 Stinespring 膨胀，然后介绍完全正映射的 Radon–Nikodym 导数。

定理 2.1 ([20, 定理 4.1])。 设 $\mathscr{A}$ 是一个幺正 C^*-代数， $\mathscr{H}$ 是一个希尔伯特空间。设$\phi:\ \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个完全正映射。则存在一个希尔伯特空间 $\mathscr{K}$、一个有界线性映射 $V:\ \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ 以及一个幺正 *-同态 $\pi:\ \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{K})$，使得

$$\phi(a) = V^* \pi(a) V, \quad \text{for all } a \in \mathscr{A}.$$

此外，集合 $\{\pi(a)V h:\ a \in \mathscr{A},\ h \in \mathscr{H}\}$ 张成了 $\mathscr{K}$ 的稠密子空间；如果 ϕ 是幺正的，那么 $V:\ \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ 是一个等距映射。

对于一个完全正映射 $\phi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$，在定理 2.1 中得到的三元组 $(\pi, V, \mathscr{K})$ 称为 ϕ 的最小 *Stinespring* 表示。以下命题指出，对于给定的完全正映射 ϕ，最小 Stinespring 表示在酉等价意义下是唯一的。

命题 2.2 ([20, 命题 4。2])。设 $\mathscr{A}$ 是一个幺正 C^*-代数，$\mathscr{H}$ 是一个希尔伯特空间，且 $\phi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个完全正映射。假设 $(\pi_i, V_i, \mathscr{K}_i)_{i=1,2}$ 是 ϕ 的两个最小 *Stinespring* 表示。那么存在一个酉算子 $U: \mathscr{K}_1 \to \mathscr{K}_2$，使得 $UV_1 = V_2$ 且 $U\pi_1 U^* = \pi_2$。

设 $\phi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个完全正映射，且 $(\pi, V, \mathscr{K})$ 是其最小 Stinespring 表示。根据命题 2.2，我们将 $(\pi, V, \mathscr{K})$ 称为 ϕ 的最小 *Stinespring* 表示。接下来，对于一个幺正 C^*-代数 $\mathscr{A}$ 和一个希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，我们考虑集合

$$\mathrm{CP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) := \big\{\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}) \ : \ \phi \text{ is a completely positive map}\big\},$$

带有偏序“$\leq$”。对于 $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{CP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$

$$\phi_1 \leq \phi_2, \quad \text{whenever,} \quad \phi_2 - \phi_1 \in \mathrm{CP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big).$$

对于每个固定的 $\phi \in \mathrm{CP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，考虑集合

$$[0, \phi] = \big\{\theta \in \mathrm{CP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) \ : \ \theta \leq \phi\big\}.$$

设 $\phi \in \mathrm{CP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，且 $(\pi, V, \mathscr{K})$ 是 ϕ 的最小 Stinespring 表示。那么对于每个固定的 $T \in \pi\big(\mathscr{A}\big)'$，定义映射 $\phi_T: \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$，使得 $\phi_T(\cdot) := V^*\pi(\cdot)TV$。从 [2], 起，我们回顾完全正映射的 Radon–Nikodym 型结果

定理 2.3 ([2, 定理 1.4.2])**.** 设 $\phi \in CP\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 且 $(\pi, V, \mathscr{K})$ 是 ϕ 的最小 *Stinespring* 表示。那么，存在一个从算子偏序凸集 $\{T \in \pi\big(\mathscr{A}\big)' : \ 0 \leq T \leq 1_{\mathscr{K}}\}$ 到 $[0, \phi]$ 的仿射序同构，该同构由映射给出

$$T \mapsto \phi_T(\cdot) := V^*\pi(\cdot)TV.$$

接下来，我们简要回顾 [7] 中的一些重要结果。对于幺正 C^*-代数 $\mathscr{A}$ 和希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，我们回顾以下记号：

$$\mathrm{CP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) = \big\{\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}) \ : \ \phi \text{ is a completely positive map}\big\};$$
$$\mathrm{UCP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) = \big\{\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}) \ : \ \phi \text{ is a unital completely positive map}\big\}.$$

设 G 是一个群，τ 是 G 在 $\mathscr{A}$ 上经由（幺正）C^*-自同构的作用。接着考虑以下集合：

$$\mathrm{CP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) = \big\{\phi \in \mathrm{CP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) : \ \phi(\tau_g(\text{对})) = \phi(\text{对}), \text{ 对所有} g \in G \text{和} a \in \mathscr{A}\big\};$$
$$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) := \big\{\phi \in \mathrm{UCP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) : \ \phi(\tau_g(\text{对})) = \phi(\text{对}), \text{ 对所有} g \in G \text{和} a \in \mathscr{A}\big\}。$$

设 $\phi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，并设 ϕ 的最小 Stinespring 表示为$(\pi、V、\mathscr{K})$。由于 $\phi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，对于$a \in \mathscr{A}$和$g \in G$，我们有

$$\phi(a) = V^*\pi(a)V = \phi(\tau_g(a)) = V^*\pi(\tau_g(a))V.$$

这意味着，对于固定的 $g \in G$，ϕ 的最小斯廷斯普林膨胀也可以表示为$(\pi \circ \tau_g, V, \mathscr{K})$。现在，根据最小斯廷斯普林膨胀的唯一性（见命题 2.2），我们得到一个酉算子，记作 $U_g: \mathscr{K} \to \mathscr{K}$，满足

$$U_g V = V \text{ and } U_g \pi U_g^* = \pi \circ \tau_g.$$

由于 $g \in G$ 是任意选取的，我们得到群 G 在希尔伯特空间 $\mathscr{K}$ 上的一个表示，记作 $U\phi : G \to \mathscr{B}(\mathscr{K})$，其定义如下：

$$U_\phi(g) := U_g, \quad \text{for all } g \in G.$$

此外，我们有

$$U_\phi(g)V = V \quad \text{and} \quad U_\phi(g)\pi(a)U_\phi(g)^* = \pi \circ \tau_g(a), \quad \text{for all } a \in A,\ g \in G.$$

注 2.4. 设 $\phi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，且 ϕ的最小 Stinespring 表示为 $(\pi, V, \mathscr{K})$。对固定的 $\phi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，由上述讨论可知，群 G 在希尔伯特空间 $\mathscr{K}$ 上有一个表示，记作 $U\phi : G \to \mathscr{B}(\mathscr{K})$，并满足

$$U_\phi(g)V = V \quad \text{and} \quad U_\phi(g)\pi(a)U_\phi(g)^* = \pi \circ \tau_g(a), \quad \text{for all } a \in A,\ g \in G.$$

下述定理在 [7] 中建立，给出了 $\mathrm{CP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$空间中的 Radon–Nikodym 型结果。

定理 2.5 ([7, 引理 4.1])。设 $\phi \in UCP^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，且 ϕ 的最小 *Stinespring* 表示为 $(\pi, V, \mathscr{K})$。那么，映射 $T \mapsto \phi_T$，其中

$$\phi_T(a) := V^*\pi(a)TV \quad \textit{for all } a \in \mathscr{A},$$

是从算子偏序凸集 $\big\{T \in \big(\pi(\mathscr{A}) \cup U_\phi(G)\big)' : 0 \le T \le \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}\big\}$ 到 $[0, \phi] \cap CP^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的仿射同构。

3. C^*-极端点：若干充分条件

设G 为一个群，$\mathscr{A}$ 为一个幺正C^*-代数，$\mathscr{H}$ 为一个希尔伯特空间。假设 τ是G 在 $\mathscr{A}$ 上的作用，由（幺正）C^*-自同构给出。我们快速回顾以下记号：

$$\mathrm{UCP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) := \{\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H}) : \ \phi \text{ 是保单位完全正映射}\};$$

$$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) := \big\{\phi \in \mathrm{UCP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) : \ \phi(\tau_g(a)) = \phi(a), \text{ 对所有} g \in G \text{和} a \in \mathscr{A}\big\} \text{均成立。}$$

例3.1. 现在我们给出集合 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 中映射的几个例子。

(1) 设G 为有限群，$\mathscr{A}$ 为幺正C^*-代数，$\mathscr{H}$ 为希尔伯特空间。假设 τ是G 通过（幺正）C^*-自同构在 $\mathscr{A}$ 上的作用。设 $\phi \in \mathrm{UCP}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$.~定义映射 $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 如下

$$\tilde{\phi}(a) := \phi\left(\frac{\sum\limits_{g \in G} \tau_g(a)}{|G|}\right), \quad \text{for all } a \in \mathscr{A}.$$

那么 $\tilde{\phi} \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$

(2) 设 G 为一个紧群，λ 为 G 上的哈尔测度。固定一个希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，以及 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的一个 C^*-子代数 $\mathscr{A}$。设 $\mathscr{A}$ 中有一族酉元 $\{W_g\}_{g \in G}$，且 τ 是群 G 在 $\mathscr{A}$ 上的一个作用，由下式给出

$$\tau_g(a) := W_g^* a W_g, \quad \text{for all } a \in \mathscr{A}.$$

考虑如下定义的映射 $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$

$$\phi(a) := \int_G W_g^* a W_g \, \mathrm{d}\lambda, \quad \text{for all } a \in \mathscr{A}.$$

其中，积分是在弱意义下观察的。也就是说，对于 $h_1, h_2 \in \mathscr{H}$，我们有

$$\left\langle \phi(a)h_1, h_2 \right\rangle = \int_G \left\langle W_g^* a W_g h_1, h_2 \right\rangle \mathrm{d}\lambda.$$

那么， ϕ 是一个保单位完全正映射。现在固定某个$g_0 \in G$。那么对于任意$a \in \mathscr{A}$和$h_1, h_2 \in \mathscr{H}$，我们有

$$\begin{aligned} \left\langle \phi(\tau_{g_0}(a))h_1, h_2 \right\rangle &= \int_G \left\langle W_g^* \tau_{g_0}(a) W_g h_1, h_2 \right\rangle \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_G \left\langle W_g^* W_{g_0}^* a W_{g_0} W_g h_1, h_2 \right\rangle \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_G \left\langle W_{g_0 g}^* a W_{g_0 g} h_1, h_2 \right\rangle \mathrm{d}\lambda \\ &= \left\langle \phi(a)h_1, h_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

这表明映射 $\phi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$。

设G 是一个群， $\mathscr{A}$ 是一个幺正C^*-代数， $\mathscr{H}$ 是一个希尔伯特空间。假设 τ 是G 在 $\mathscr{A}$ 上的一个通过（幺正）C^*-自同构给出的作用。设$\{\phi_i\}^n{}_{i=1}$ 是$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$中的一个元素集合。那么$\{\phi_i\}^n{}_{i=1}$的一个$C^*$-凸组合定义为

$$\phi(\cdot) := \sum_{i=1}^n T_i^* \phi_i(\cdot) T_i, \quad \text{where each } T_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) \text{ and } \sum_{i=1}^n T_i^* T_i = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}.$$

可以看出， ϕ 是一个保单位完全正映射，而且

$$\phi(\tau_g(a)) = \sum_{i=1}^n T_i^* \phi_i(\tau_g(a)) T_i = \sum_{i=1}^n T_i^* \phi_i(a) T_i = \phi(a)$$

对所有$g \in G$和$a \in \mathscr{A}$均成立。因此， $\phi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$是$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$的一个$C^*$-凸子集。另外，$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$是$\mathrm{UCP}\left(\mathscr{A}\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$的一个闭子集，因而在BW拓扑中是紧的（见[7]）。遵循 [12], 中引入的$\mathrm{UCP}\left(\mathscr{A}\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$中的$C^*$-极端点的概念，如果 ϕ 可写成一个*proper* C^*-凸组合，即，

$$\phi(\cdot) := \sum_{i=1}^n T_i^* \phi_i(\cdot) T_i, \text{ where each } \phi_i \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right), \ T_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H}), \text{ and } \sum_{i=1}^n T_i^* T_i = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}.$$

若对所有 $1 \le T^{-1}{}_i \le i_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H})\}^n$ n 都成立，则存在酉元 $\{U_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H})\}^n{}_{i=1}$， 使得

$$\phi_i(\cdot) = U_i^* \phi(\cdot) U_i, \quad \text{for all } 1 \le i \le n.$$

在这种情况下，我们将其记为 $\phi_i \sim \phi$ 对所有 $1 \le i \le n$。

本节中，我们给出一些充分条件，在这些条件下，$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 中的完全正映射是一个C^*-极端点。在此之前，当 $\mathscr{H}$ 为有限维时，我们证明 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 中的每个C^*-极端点也是 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$的线性极端点。

命题 3.2。 设 $\mathscr{H}$ 是一个有限维希尔伯特空间，且 ϕ 是 $UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 的一个 C^*-极端点。那么 ϕ 是 $UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 的一个极端点。

证明。设 $\phi(\cdot)=\lambda\phi_1(\cdot)+(1-\lambda)\phi_2(\cdot)$，其中 $\phi_1,\phi_2\in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 且 $\lambda\in(0,1)$。这意味着 $\phi(\cdot)=(\lambda)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}\phi_1(\cdot)(\lambda)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}+(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}\phi_2(\cdot)(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$。由于 ϕ 是 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的一个 C^*-极端点，我们得到 $\phi\sim\phi_1\sim\phi_2$。因此，存在 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 中的酉元 U_1,U_2，使得对每个 $a\in\mathscr{A}$，我们有

$$\phi(a)=U_i^*\phi_i(a)U_i \quad \text{for } i\in\{1,2\}. \tag{1}$$

现在回想起 $\mathscr{H}$ 是一个有限维希尔伯特空间，由 [17] 可得，对每个 $a\in\mathscr{A}$，$\phi(a)$ 都是其酉轨道的凸包中的一个极端点。因此，对于每个 $a\in\mathscr{A}$，有 $\phi(a)=\phi_1(a)=\phi_2(a)$。由此得证。□

在本节余下部分，我们证明一些结果，给出元素 $\phi\in\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 成为 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的 C^*- 极端点的充分条件。

定义 3.3。设 $\omega:\mathscr{A}\to\mathbb{C}$ 是一个态。则对应于 ω 的膨胀 $\phi_\omega\in UCP\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 由 $\phi_\omega(a):=\omega(a)\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$ 给出。

命题 3.4. 考虑 $\phi\in UCP^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 其最小 *Stinespring* 表示为$\phi\ \big(\pi,\ V,\ \mathscr{K}\big)$。若满足以下条件之一，则 ϕ 是 $UCP^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的 C^*-极端点。

(1) ϕ 是某个纯态 $\omega\in UCP^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\ \mathbb{C}\big)$的膨胀；*(2)* ϕ 具有乘法性；*(3)* $V\mathscr{H}$在 $\big(\pi(\mathscr{A})\cup U_\phi(G)\big)'$下不变，其中 $U\phi$ 是注 *2.4* 中给出的 G 的表示；*(4)* ϕ 是 $CP\big(\mathscr{A},\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的纯元素。

证明。 **（1）的证明：** 假设 ϕ 是纯态 $\omega\in\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathbb{C}\big)$的膨胀。令 $\phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{k}T_i^*\,\phi_i(\cdot)T_i$为一个真凸组合，其中每个 $\phi_i\in\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$。取一个单位向量 $\xi\in\mathscr{H}$。对每个 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$，定义映射 $\omega^{\xi}{}_i:\mathscr{A}\to\mathbb{C}$ 为

$$\omega_i^{\xi}(a):=\frac{1}{\|T_i\xi\|^2}\big\langle\phi_i(a)T_i\xi,T_i\xi\big\rangle,\quad \text{for } a\in\mathscr{A}. \tag{2}$$

然后根据公式（2），可得

$$\omega(a)=\big\langle\omega(a)\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}\xi,\xi\big\rangle=\big\langle\phi(a)\xi,\xi\big\rangle=\sum_{i=1}^{k}\big\langle\phi_i(a)T_i\xi,T_i\xi\big\rangle=\sum_{i=1}^{k}\big\|T_i\xi\big\|^2\omega_i^{\xi}(a).$$

由于 ω 是纯态，对于每个$i\in\{1,2,\cdots,k\}$，我们得到 $\omega=\omega^{\xi}{}_i$。注意，单位向量$\xi\in\mathscr{H}$是任意选取的。这一观察将在下面的计算中用到。取$i\in\{1,2,\cdots,k\}$以及一个单位向量 $h\in\mathscr{H}$。由于 T_i可逆，存在一个单位向量 $h'\in\mathscr{H}$，使得 $T_i'hTh'\| = h$。因此，对每个 $a\in\mathscr{A}$，可得

$$\big\langle\phi(a)h,h\big\rangle=\omega(a)=\omega_i^{h'}(a)=\left\langle\phi_i(a)\frac{T_ih'}{\|T_ih'\|},\frac{T_ih'}{\|T_ih'\|}\right\rangle=\big\langle\phi_i(a)h,h\big\rangle.$$

由于单位向量 $h\in\mathscr{H}$ 和 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$ 是任意选取的，因此对每个$i\in\{1,2,\cdots,k\}$，均有 $\phi=\phi_i$。这证明了 ϕ 是 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的$C^*$-极端点。

（2）的证明： 假设 ϕ 具有乘法性，且 $\phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{k}T_i^*\,\phi_i(\cdot)T_i$ 是一个真C^*-凸组合，其中每个 $\phi_i\in\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$。由于 ϕ 具有乘法性，ϕ 保持伴随，且 ϕ 是幺正的，因此 ϕ 在 $\mathscr{H}$ 上非退化地作用。因此，最小 Stinespring

表示由 ϕ 给出，即 $\left(\pi=\phi, \mathrm{V}=\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}, \mathscr{K}=\mathscr{H}\right)$。对每个固定的 i，我们有 $\mathrm{T}^{*} \mathrm{i}\ \phi_i \mathrm{T}_i \leq \phi$，因此可得到一个算子 $\mathrm{S}_i \in \phi(\mathscr{A})'$，使得 $0 \leq \mathrm{S}_i \leq \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$ 且 $\mathrm{T}^{*} \mathrm{i}\ \phi_i(\cdot) \mathrm{T}_i=\mathrm{S}_i \phi(\cdot)$（参见 1 1 定理 2.3）。这意味着 $\phi_i(\cdot)=\left(\mathrm{T}^{*} \mathrm{i}\right)^{-1} \mathrm{S}^{2} \mathrm{i}\ \phi(\cdot) \mathrm{S}^{2} \mathrm{i}\left(\mathrm{T}_i\right)^{-1}$。现在只需证明 $1 \mathrm{S}^{2} \mathrm{i}\left(\mathrm{T}_i\right)^{-1}$ 是一个酉算子。首先注意，$\mathrm{T}^{*} \mathrm{i}\, \mathrm{T}_i=\mathrm{T}^{*} \mathrm{i}\ \phi_i\left(1_{\mathscr{A}}\right) \mathrm{T}_i=\mathrm{S}_i \phi\left(1_{\mathscr{A}}\right)=\mathrm{S}_i$。利用这一点，我们得到

$$\left(S_i^{\frac{1}{2}}(T_i)^{-1}\right)^{*} S_i^{\frac{1}{2}}(T_i)^{-1}=(T_i^{-1})^{*} S_i^{\frac{1}{2}} S_i^{\frac{1}{2}}(T_i)^{-1}=(T_i^{*})^{-1} S_i(T_i)^{-1}=(T_i^{*})^{-1} T_i^{*} T_i(T_i)^{-1}=\mathrm{Id}_{\mathscr{H}},$$

类似地，$S^{\frac{1}{2}} i(T_i)^{-1}\left(S^{\frac{1}{2}} i(T_i)^{-1}\right)^{*}=\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$。最后，由于$i$是任意选取的，我们得到 ϕ 是 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 的一个C^{*}-极端点。

（3）的证明：设 $\mathrm{V}\mathscr{H}$ 在 $\left(\pi(\mathscr{A}) \cup \mathrm{U}_\phi(\mathrm{G})\right)'$ 下不变，其中 $(\pi,\ \mathrm{V},\ \mathscr{K})$ 是 ϕ 的最小 Stinespring 表示，而 $\mathrm{U}\phi$ 是注 2.4 中给出的 G 的酉表示。k 设 $\phi(\cdot)=\sum \mathrm{T}^{*} \mathrm{i}\ \phi_i(\cdot) \mathrm{T} i$ 是一个真 C^{*}-凸组合，其中每个 $\phi_i \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$。$\mathrm{i}=1$对每个固定的 i，根据定理 2.5，存在唯一的 $\mathrm{S}_i \in\left(\pi(\mathscr{A}) \cup \mathrm{U}_\phi(\mathrm{G})\right)'$，使得 $1 0 \leq \mathrm{S}_i \leq \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}$ 且 $\mathrm{T}^{*} \mathrm{i}\ \phi_i(\cdot) \mathrm{T}_i=\mathrm{V}^{*} \mathrm{S}_i \pi(\cdot) \mathrm{V}$。定义 $\mathrm{R}_i=\mathrm{V}^{*} \mathrm{S}^{2} \mathrm{i}\, \mathrm{V}$。根据假设，我们知道投影 $\mathrm{V}\, \mathrm{V}^{*}$ 与 $\left(\pi(\mathscr{A}) \cup \mathrm{U}_\phi(\mathrm{G})\right)'$可交换。因此，我们得到

$$VR_i=VV^{*} S_i^{\frac{1}{2}} V=S_i^{\frac{1}{2}} VV^{*} V=S_i^{\frac{1}{2}} V. \tag{3}$$

此外，观察$T^{*} {}_i T_i=T^{*} {}_i\ \phi_i\left(1_{\mathscr{A}}\right) T_i=V^{*} S_i \pi\left(1_{\mathscr{A}}\right) V=V^{*} S i V$，我们得到

$$R_i=\left(R_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(V^{*} S_i^{\frac{1}{2}} VV^{*} S_i^{\frac{1}{2}} V\right)^{\frac{1}{2}}=\left(V^{*} S_i^{\frac{1}{2}} S_i^{\frac{1}{2}} VV^{*} V\right)^{\frac{1}{2}}=\left(V^{*} S_i V\right)^{\frac{1}{2}}=\left(T_i^{*} T_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由于T_i 可逆，因此R_i 可逆。根据方程（3），我们得到

$$T_i^{*} \phi_i(\cdot) T_i=V^{*} S_i^{\frac{1}{2}} \pi(\cdot) S_i^{\frac{1}{2}} V=R_i^{*} V^{*} \pi(\cdot) V R_i=R_i^{*} \phi(\cdot) R_i,$$

因此

$$\phi_i(\cdot)=(R_i T_i^{-1})^{*} \phi(\cdot)(R_i T_i^{-1}), \quad \phi(\cdot)=(T_i R_i^{-1})^{*} \phi_i(\cdot)(T_i R_i^{-1}).$$

现在，只需证明$R_i T^{-1} i$是酉算子。我们有

$$\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}=\phi_i(1_{\mathscr{A}})=(R_i T_i^{-1})^{*} \phi(1_{\mathscr{A}})(R_i T_i^{-1})=(R_i T_i^{-1})^{*}(R_i T_i^{-1});$$

$$\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}=\phi(1_{\mathscr{A}})=(T_i R_i^{-1})^{*} \phi_i(1_{\mathscr{A}})(T_i R_i^{-1})=(T_i R_i^{-1})^{*}(T_i R_i^{-1}) \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}=(R_i T_i^{-1})(R_i T_i^{-1})^{*}.$$

这表明$R_i T^{-1} i$是酉算子。由于i是任意选取的，我们得到所需结果。

（4）的证明： 假设 ϕ 在 $\mathrm{CP}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 中是纯的。根据 [2, 推论 1.4.3], , 我们得到 π 是 $\mathscr{K}$ 上的 $\mathscr{A}$ 不可约表示。因此$(\pi(\mathscr{A}))' \cong \mathbb{C}$，进而 $\left(\pi(\mathscr{A}) \cup U_\phi(G)\right)' \cong \mathbb{C}$。由此，结论可由（3）推出。□

定义 3.5. [12] 对每个 $1 \leq i \leq n$，令 $\phi_i \in UCP\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H}_i)\right)$ 为纯映射，其关于 ϕ_i 的最小 *Stinespring* 表示由 $\left(\pi_i, V_i, \mathscr{K}_i\right)$ 给出。若不可约表示 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ 两两不等价，则称 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 不相交。

命题 3.6. 对每个 $1 \leq i \leq n$，令 $\phi_i \in UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H}_i)\right)$ 为纯映射。若 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 不相交，则 $\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \cdots \oplus \phi_n$ 是 $UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 的一个 C^{*}-极端点，其中 $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathscr{H} n$。

证明。设 $\phi := \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \cdots \oplus \phi_n \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}_n)$。则 $\phi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$。设 $\big(\pi_i, V_i, \mathscr{K}_i\big)$ 是 ϕ_i 的最小 Stinespring 表示，并设 $P_i \colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}_i$ 是每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 对应的投影。定义

$$\mathscr{K} := \mathscr{K}_1 \oplus \mathscr{K}_2 \oplus \cdots \oplus \mathscr{K}_n, \quad V : \mathscr{H} \to \mathscr{K} \ \text{ by } \ Vh := V_1 P_1 h \oplus V_2 P_2 h \oplus \cdots \oplus V_n P_n h,$$

对于所有 $h \in \mathscr{H}$，以及

$$\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{K}), \ \text{ by } \ \pi := \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \cdots \oplus \pi_n.$$

那么，ϕ 的最小 Stinespring 表示由 $\big(\pi、V、\mathscr{K}\big)$ 给出（见 [6, 注 3.1]）。此外，根据 [6, 引理 3.3], ，我们得到 $\pi(\mathscr{A})' \cong \mathbb{C}^n$。因此，结论由命题 3.4 的 (3) 得出。□

4. C^*-极端点的刻画

本节将刻画 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的$C^*$-极端点。我们提出了一些有助于识别这些$C^*$-极端点的判据。首先，我们将说明，为了验证 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 中的给定元素是否为C^*-极端点，只需考虑仅涉及 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$中两个元素的$C^*$-凸组合。

定理 4.1. 设给定 $\phi \in UCP^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，其关于 ϕ 的最小 *Stinespring* 表示为 $\big(\pi, V, \mathscr{K}\big)$。则以下陈述等价

(1) ϕ is a C^*-extreme point of $UCP^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$;

(2) if $\phi(\cdot) = \sum_{i=1}^{2} T_i^* \phi_i(\cdot) T_i$, where each $\phi_i \in UCP^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ and $T_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ with T_i^{-1} exists for all $i = 1, 2$ and $\sum_{i=1}^{2} T_i^* T_i = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$, then ϕ_i is unitarily equivalent to ϕ for $i = 1, 2$.

证明。由 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的 C*-极端点定义可知，(1) $\Longrightarrow$ (2) 成立。因此，只需证明 (2) $\Longrightarrow$ (1)。现在假设 $\mathrm{n}\phi(\cdot) = \sum \mathrm{T}^* \mathrm{i}\ \phi_i(\cdot)\mathrm{T}i$，其中每个 $\phi_i \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，且对于所有 $\mathrm{i}=1\mathrm{n}$，均存在满足 $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{i}$ 的 $\mathrm{T}_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$，其中 $\mathrm{i} \in \{1, 2, \cdots, \mathrm{n}\}$，并且 $\sum \mathrm{T}^* \mathrm{i}\, \mathrm{T}_i = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$。根据假设可知，若 $\mathrm{n} = 2$，则每个 $\mathrm{i}=1\phi_i$ 都与 ϕ 酉等价。假设该结论对 $\mathrm{m} \geq 2$ 成立，并设 $\phi(\cdot) = \mathrm{m}{+}1\sum \mathrm{T}^* \mathrm{i}\ \phi_i(\cdot)\mathrm{T}i$，其中每个 $\phi_i \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，且对所有 $\mathrm{i} \in \mathrm{i}=1\mathrm{m}{+}1\{1, 2, \cdots, \mathrm{m}+1\}$，均存在满足 $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{i}$ 的 $\mathrm{T}_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$，并且 $\sum \mathrm{T}^* \mathrm{i}\, \mathrm{T}_i = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$。于是有 $\mathrm{i}=1$

$$\phi(\cdot) = \sum_{i=1}^{m+1} T_i^* \phi_i(\cdot) T_i = \sum_{i=1}^{m} T_i^* \phi_i(\cdot) T_i + T_{m+1}^* \phi_{m+1}(\cdot) T_{m+1}.$$

m 令 S 为 $\sum \mathrm{T}^* \mathrm{i}\, \mathrm{T}i$ 的正平方根。由于每个 $\mathrm{T}i$ 都可逆，S 也可逆，因此我们得到 $\mathrm{i}=1\mathrm{m}\ \mathrm{S}^*\mathrm{S} + \mathrm{T}^* \mathrm{m}{+}1\mathrm{T}_{m+1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$。定义 $\psi(\cdot) := \sum \mathrm{S}^{-1*}\mathrm{T}^* \mathrm{i}\ \phi_i(\cdot)\mathrm{T}i\mathrm{S}^{-1}$。那么 $\psi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$并且 $\mathrm{i}=1$ 我们有

$$\phi(\cdot) = S^* \psi(\cdot) S + T_{m+1}^* \phi_{m+1}(\cdot) T_{m+1}.$$

因此，根据假设，我们得到 ψ 和 ϕ_{m+1} 与 ϕ 酉等价。现在利用m
m 这一事实：S是 $\sum T^{*}{}_{i}T_{i}$ 的正平方根，我们得到 $\psi(\cdot)=\sum S^{-1*}T^{*}{}_{i}\ \phi_{i}(\cdot)T_{i}S^{-1}$ 是 ψ 的一个真
$i=1$ $i=1C^{*}$-凸组合。利用归纳假设，我们得出每个 ϕ_{i} 都与 ψ 酉等价，因此每个 ϕ_{i} 都与 ϕ 酉等价。证明至此完成。□

接下来，我们回顾 [13] 中 ϕ-可逆算子的定义。受 [13], 中所述结果的启发，我们随后证明定理 4.3。

定义 4.2。 [13] 设 $\phi\in UCP^{G_{\tau}}\left(\mathscr{A},\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 的最小 *Stinespring* 表示为 $\left(\pi,\ V,\ \mathscr{K}\right)$。若正算子 $S\in\pi(\mathscr{A})'$满足 $V^{*}SV$ 可逆于 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, 则称其为 ϕ-可逆。

定理 4.3。设 $\mathscr{A}$ 是一个幺正 C^{*}-代数， $\mathscr{H}$ 是一个希尔伯特空间。假设 ϕ 属于 $UCP^{G_{\tau}}\left(\mathscr{A},\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$。令 $\left(\pi,\ V,\ \mathscr{K}\right)$为 ϕ 的最小 *Stinespring* 表示，并令 $U\phi$ 为注 *2.4* 中给出的 G 在 $\mathscr{K}$上的表示。那么， ϕ 是 $UCP^{G_{\tau}}\left(\mathscr{A},\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$的 C^{*}-极端点，当且仅当对于每个 ϕ-可逆正算子 $S\in\left(\pi(\mathscr{A})\cup U_{\phi}(G)\right)'$，都存在

(1) 一族 $\left\{W_{g}\in\mathscr{B}(\mathscr{K})\right\}_{g\in G}$ 的偏等距算子，满足 $W_{g}\pi(a)=\pi(\tau_{g}(a))W_{g}$，对所有 $g\in G$ 和 $a\in\mathscr{A}$，且 $Range(W^{*}{}_{g})=Range(W^{*}{}_{g}\ W_{g})=Range(S^{\frac{1}{2}})$，对所有 $g\in G$；*(2)* 一族 $\left\{Z_{g}\in\mathscr{B}(\mathscr{H})\right\}_{g\in G}$ 的可逆算子，使得 $W_{g}S^{\frac{1}{2}}V=VZ_{g}$。

证明。 首先，假设 ϕ 是 $\mathrm{UCP}^{G_{\tau}}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 的 C^{*}-极端点，并且 S 是 ϕ-可逆正算子，属于 $\left(\pi(\mathscr{A})\cup U_{\phi}(G)\right)'$。那么存在一个实数 $\alpha\in(0,1)$，使得 $S_{1}:=\alpha S$ 和 $S_{2}:=\mathrm{Id}_{\mathscr{K}}-\alpha S$ 是 ϕ-可逆正算子，而且 $S_{1},S_{2}\in\left(\pi(\mathscr{A})\cup U_{\phi}(G)\right)'$。因此，对所有 $g\in G$ 和 $a\in\mathscr{A}$，我们有

$$\begin{aligned}V^{*}\pi(\tau_{g}(a))V=\phi(\tau_{g}(a))=\phi(a)&=V^{*}\pi(a)V\\&=V^{*}\pi(a)(S_{1}+S_{2})V\\&=V^{*}S_{1}^{\frac{1}{2}}\pi(a)S_{1}^{\frac{1}{2}}V+V^{*}S_{2}^{\frac{1}{2}}\pi(a)S_{2}^{\frac{1}{2}}V.\end{aligned}$$

$_{1}$定义 $R_{i}=V^{*}S_{i}V$以及 $T_{i}=R^{2}{}_{i}$，其中 $i\in\{1,2\}$。根据定义 4.2，我们得到，对于每个 i，T_{i} 是一个可逆算子。利用这一点，对于每个固定的 $g\in G$ 和 $a\in\mathscr{A}$，我们看到

$$\begin{aligned}V^{*}\pi(\tau_{g}(a))V&=\phi(\tau_{g}(a))\\&=\phi(a)\\&=T_{1}^{*}T_{1}^{*-1}\left(V^{*}S_{1}^{\frac{1}{2}}\pi(a)S_{1}^{\frac{1}{2}}V\right)T_{1}^{-1}T_{1}+T_{2}^{*}T_{2}^{*-1}\left(V^{*}S_{2}^{\frac{1}{2}}\pi(a)S_{2}^{\frac{1}{2}}V\right)T_{2}^{-1}T_{2}\\&=T_{1}^{*}\left(T_{1}^{*-1}V^{*}S_{1}^{\frac{1}{2}}\pi(a)S_{1}^{\frac{1}{2}}VT_{1}^{-1}\right)T_{1}+T_{2}^{*}\left(T_{2}^{*-1}V^{*}S_{2}^{\frac{1}{2}}\pi(a)S_{2}^{\frac{1}{2}}VT_{2}^{-1}\right)T_{2}\end{aligned}$$

$_{1}$ $_{1}$ $_{11}$定义 $\phi_{1}(a):=T_{1}^{*-1}V^{*}S_{1}^{2}\pi(a)S_{2}1\ VT_{1}^{-1}$ 以及 $\phi_{2}(a):=T_{2}^{*-1}V^{*}S_{2}^{2}\pi(a)S_{2}2$ VT_{2}^{-1}，对所有 $a\in\mathscr{A}$均成立。于是显然

$$\phi_{1}(a)=T_{1}^{*-1}V^{*}S_{1}^{\frac{1}{2}}\pi(a)S_{1}^{\frac{1}{2}}VT_{1}^{-1}=T_{1}^{*-1}V^{*}S_{1}^{\frac{1}{2}}\pi(\tau_{g}(a))S_{1}^{\frac{1}{2}}VT_{1}^{-1}=\phi_{1}(\tau_{g}(a)),$$

对所有 $g\in G$ 以及所有 $a\in\mathscr{A}$均成立。这表明 $\phi_{1}\in\mathrm{UCP}^{G_{\tau}}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$。类似地， $\phi_{2}\in\mathrm{UCP}^{G_{\tau}}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$。因此，对固定的 $g\in G$，有

$$V^{*}\pi(\tau_{g}(a))V=\phi(\tau_{g}(a))=\phi(a)=T_{1}^{*}\phi_{1}(a)T_{1}+T_{2}^{*}\phi_{2}(a)T_{2},\ \text{for all}\ \ a\in\mathscr{A}.\qquad(4)$$

现在注意到

$$T_1^*T_1 + T_2^*T_2 = R_1 + R_2 = V^*(S_1 + S_2)V = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}.$$

这表明，方程（4）中给出的C^*-凸组合是一个真C^*-凸组合。由于 ϕ 是 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$的一个$C^*$-极端点，对于固定的$g \in G$，存在一个酉算子$U1,_g \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 使得

$$V^*\pi(\tau_g(a))V = U_{1,g}^*\phi_1(a)U_{1,g} = (S_1^{\frac{1}{2}}VT_1^{-1}U_{1,g})^*\pi(a)S_1^{\frac{1}{2}}VT_1^{-1}U_{1,g} \quad \text{for all } a \in \mathscr{A}.$$

设$\mathscr{K}_{1,g}$ 是 $\mathscr{K}$的希尔伯特子空间，其中

$$\mathscr{K}_{1,g} := \overline{\mathrm{span}}\left\{\pi(a)S_1^{\frac{1}{2}}VT_1^{-1}U_{1,g}h \ : \ a \in \mathscr{A}, \ h \in \mathscr{H}\right\} \subseteq \mathscr{K}.$$

然后，利用$S_1 = \alpha S \in \big(\pi(\mathscr{A}) \cup U_\phi(G)\big)'$这一事实，以及算子$T_1^{-1}$和$U1,_g$在 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$中均为可逆算子这一事实，可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{K}_{1,g} &= \overline{\mathrm{span}}\left\{\pi(a)S_1^{\frac{1}{2}}VT_1^{-1}U_{1,g}h \ : \ a \in \mathscr{A}, \ h \in \mathscr{H}\right\} \\
&= \overline{\mathrm{span}}\left\{\alpha^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}\pi(a)VT_1^{-1}U_{1,g}h \ : \ a \in \mathscr{A}, \ h \in \mathscr{H}\right\} \\
&= \overline{\mathrm{span}}\left\{S^{\frac{1}{2}}\pi(a)Vh \ : \ a \in \mathscr{A}, \ h \in \mathscr{H}\right\} \\
&= \overline{\mathrm{span}}\left\{S^{\frac{1}{2}}k \ : \ k \in \mathscr{K}\right\},
\end{aligned}$$

最后一步是根据 ϕ 的最小 Stinespring 表示由 $\big(\pi, V, \mathscr{K}\big)$给出这一事实得到的。因此

$$\mathscr{K}_{1,g} = \overline{\mathrm{Range}(S^{\frac{1}{2}})} \tag{5}$$

因此，对于固定的 $g \in G$，我们有以下两个关于 ϕ 的最小 Stinespring 表示

$$\big(\pi, S_1^{\frac{1}{2}}VT_1^{-1}U_{1,g}, \mathscr{K}_{1,g}\big) \ \text{ and } \ \big(\pi \circ \tau_g, V, \mathscr{K}\big).$$

由于最小 Stinespring 表示是唯一的，根据命题 2.2，我们得到一个酉算子 $w_g : \mathscr{K}_{1,g} \to \mathscr{K}$，使得

$$w_g(S_1^{\frac{1}{2}}VT_1^{-1}U_{1,g}) = V \ \text{ and } \ w_g\pi(a)\big|_{\mathscr{K}_{1,g}} = \pi(\tau_g(a))w_g.$$

现在，将 w_g 延拓到希尔伯特空间 $\mathscr{K}$：在 $\mathscr{K}_{1,g}$ 的补空间上将其定义为 0，并将此映射记为 $W_g \in \mathscr{B}(\mathscr{K})$。于是，$W_g$ 是 $\mathscr{B}(\mathscr{K})$ 中的一个偏等距算子。另请注意，

$$W_g(S_1^{\frac{1}{2}}VT_1^{-1}U_{1,g}) = V \ \text{ and } \ W_g\pi(a) = \pi(\tau_g(a))W_g. \tag{6}$$

根据等式 (5) 以及 W_g 的定义，我们有值域$(W^*g) =$值域$(W^*g\,W_g) =$值域$(S^{\frac{1}{2}})$。由等式 (6) 可得 $W_gS^{\frac{1}{2}}VT_1^{-1}U_{1,g} = V$，其中 $U_1^*,gT_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 可逆。现在利用 $S_1 = \alpha S$ 这一事实，得出 $W_gS^{\frac{1}{2}}V = VU_1^*,gT_\alpha^{-1}$。令 $Z_g := U_1^*,gT_\alpha^{-1}$。于是得到 $W_gS^{\frac{1}{2}}V = VZ_g$。最后，由于 ϕ-可逆正算子 $S \in \big(\pi(\mathscr{A}) \cup U_\phi(G)\big)'$ 和 $g \in G$ 是任意选取的，我们得到必要条件。

反之，现在假设对于每个 ϕ-可逆正算子 $S \in \big(\pi(\mathscr{A}) \cup U_\phi(G)\big)'$，都存在一族 $\{W_g \in \mathscr{B}(\mathscr{K})\}_{g\in G}$ 偏等距算子，满足对所有 $g \in G$ 和 $a \in \mathscr{A}$，$W_g\pi(a) = \pi(\tau_g(a))W_g$，且对所有 $g \in G$，$\mathrm{Range}(W^*g) = \mathrm{Range}(W^*g\,W_g) = \overline{\mathrm{Range}(S^{\frac{1}{2}})}$。此外，还存在一族可逆算子 $\{Z_g \in \mathscr{B}(\mathscr{H})\}_{g\in G}$，使得 $W_gS^{\frac{1}{2}}V = VZ_g$。现在我们利用

定理 4.1 的 2。设 $\phi(a)=\sum T^{*}i\ \phi_i(a)T_i$ 是 $i=1UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 中元素的一个真 C*-凸组合。固定 $i\in\{1,2\}$，并注意到 $T^{*}i\ \phi_iT_i\in UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 且 $T^{*}i\ \phi_iT_i\le\phi$。由引理 2.5 可知，存在唯一的 $S_i\in\left(\pi(\mathscr{A})\cup U_\phi(G)\right)'$，使得

$$T_i^{*}\phi_i(a)T_i=V^{*}S_i\pi(a)V=V^{*}S_i^{\frac{1}{2}}\pi(a)S_i^{\frac{1}{2}}V,\quad \text{for all } a\in\mathscr{A}. \tag{7}$$

利用上述方程，我们得到

$$T_i^{*}T_i=T_i^{*}\phi_i(1_{\mathscr{A}})T_i=V^{*}S_i\pi(1_{\mathscr{A}})V=V^{*}S_iV.$$

由于 $T^{*}iT_i$ 可逆，因此 $V^{*}S_iV$ 也可逆。因此，根据假设，存在一族 $\{W_g\in\mathscr{B}(\mathscr{K})\}_{g\in G}$ 偏等距算子，满足对所有 $g\in G$ 和 $a\in\mathscr{A}$，$W_g\pi(a)=\pi(\tau_g(a))W_g1$，且对所有 $g\in G$，$Range(W^{*}g)=Range(W^{*}gW_g)=Range(S^{2}i)$。此外，还存在一族 $\{Z_g\in\mathscr{B}(\mathscr{H})\}_{g\in G}$ 可逆算子，使得 $W_gS^{2}iV=VZ_g$。由于对所有 $g\in G$，111 成立，且我们有 $Range(W^{*}gW_g)=Range(S^{2}i)$，因此得到 $W^{*}gW_gS^{2}i=S^{2}i$。于是，对所有 $a\in\mathscr{A}$ 和 $g\in G$（利用方程 (7)），我们得到

$$\begin{aligned}
\phi_i(a)&=(S_i^{\frac{1}{2}}VT_i^{-1})^{*}\pi(a)(S_i^{\frac{1}{2}}VT_i^{-1})\\
&=(W_g^{*}W_gS_i^{\frac{1}{2}}VT_i^{-1})^{*}\pi(a)(S_i^{\frac{1}{2}}VT_i^{-1})\\
&=(S_i^{\frac{1}{2}}VT_i^{-1})^{*}W_g^{*}W_g\pi(a)(S_i^{\frac{1}{2}}VT_i^{-1})\\
&=(S_i^{\frac{1}{2}}VT_i^{-1})^{*}W_g^{*}\pi(\tau_g(a))W_g(S_i^{\frac{1}{2}}VT_i^{-1})\\
&=(W_gS_i^{\frac{1}{2}}VT_i^{-1})^{*}\pi(\tau_g(a))(W_gS_i^{\frac{1}{2}}VT_i^{-1})\\
&=(VZ_gT_i^{-1})^{*}\pi(\tau_g(a))(VZ_gT_i^{-1})\\
&=(Z_gT_i^{-1})^{*}V^{*}\pi(\tau_g(a))V(Z_gT_i^{-1})\\
&=(Z_gT_i^{-1})^{*}\phi(\tau_g(a))(Z_gT_i^{-1})\\
&=(Z_gT_i^{-1})^{*}\phi(a)(Z_gT_i^{-1}).
\end{aligned}$$

由于 $\phi_i(1_{\mathscr{A}})=\phi(1_{\mathscr{A}})=Id_{\mathscr{H}}$，算子 $Z_gT^{-1}i$ 是一个等距映射；此外，我们知道 Z_g 和 T_i 均可逆。因此，$Z_gT^{-1}i$ 是酉算子。由于 $i\in\{1,2\}$ 是任意选取的，我们得到 ϕ 是 $UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$的一个$C^{*}$-极端点。证明完毕。□

在下面的定理中，我们采用 Zhou 在 [22] 中介绍的技巧，并给出 $UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 中一个元素为C^{*}-极端点的一个等价条件。

定理 4.4. 设 $\phi\in UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$，且 ϕ 的最小 *Stinespring* 表示为 $(\pi,V,\mathscr{K})$。则以下陈述等价

(1) ϕ 是 $UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$的 C^{*}-极端点；*(2)* 若 $\psi\in CP^{G_\tau}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 使得 $\psi\le\phi$ 且 $\psi(1_{\mathscr{A}})$ 可逆，则存在一个可逆算子 $Z\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，使得对于所有 $a\in\mathscr{A}$，$\psi(a)=Z^{*}\phi(a)Z$。

证明。首先，我们假设 ϕ 是 $UCP^{G_\tau}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$的一个 C^{*}-极端点。考虑 $CP^{G_\tau}\left(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 中的一个元素ψ，使得 $\psi\le\phi$ 和 $\psi(1_{\mathscr{A}})$ 可逆。根据引理 2.5，我们得到一个

唯一的 $T \in \big(\pi(\mathscr{A}) \cup U_\phi(G)\big)'$，使得

$$\psi(a) = V^*T\pi(a)V = (T^{\frac{1}{2}}V)^*\pi(a)T^{\frac{1}{2}}V$$

对所有$a \in \mathscr{A}$均成立。现在令 $\alpha \in (0,1)$。根据假设，$\psi \le \phi$ 也 $\psi(1_{\mathscr{A}})$ 可逆，且 ϕ 是幺正的，因此我们得到

$$\alpha\psi(1_{\mathscr{A}}) = \alpha V^*TV \quad \text{and} \quad \mathrm{Id}_{\mathscr{H}} - \alpha V^*TV$$

是 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 中的可逆正压缩算子。于是，算子$T_1 := (\alpha V^*TV)^{\frac{1}{2}}$和$T_2 := (\mathrm{Id}_{\mathscr{H}} - \alpha V^*TV)^{\frac{1}{2}}$也可逆，由此得到$T_1^*T_1 + T_2^*T_2 = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$。考虑以下两个映射:

$$\phi_1(\cdot) := \alpha T_1^{-1^*}\psi(\cdot)T_1^{-1} \quad \text{and} \quad \phi_2(\cdot) := T_2^{-1^*}(\phi - \alpha\psi)(\cdot)T_2^{-1}.$$

注意到

$$\phi_1(1_{\mathscr{A}}) = \alpha T_1^{-1^*}\psi(1_{\mathscr{A}})T_1^{-1} = T_1^{-1^*}\alpha\psi(1_{\mathscr{A}})T_1^{-1} = T_1^{-1^*}\alpha V^*TVT_1^{-1} = T_1^{-1^*}T_1T_1T_1^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}},$$

类似地，$\phi_2(1_{\mathscr{A}}) = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$。由于 ψ 和 $\phi - \psi$ 属于 $\mathrm{CP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，我们得到 $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$。此外，我们得到

$$\phi(\cdot) = T_1^*\phi_1(\cdot)T_1 + T_2^*\phi_2(\cdot)T_2.$$

由于 ϕ 是 C^*-极端点，因此存在酉算子 $\mathrm{U} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 使得 $\phi(\cdot) = \mathrm{U}^*\phi_1(\cdot)\mathrm{U}$。定义 $\mathrm{V}_1 := \alpha^{\frac{1}{2}}\mathrm{T}^{\frac{1}{2}}\mathrm{V}\,\mathrm{T}_1^{-1}\mathrm{U} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$。然后利用 $\psi(\cdot) = \mathrm{V}^*\mathrm{T}^{\frac{1}{2}}\pi(\cdot)\mathrm{V} = (\mathrm{T}^{\frac{1}{2}}\mathrm{V})^*\pi(\cdot)\mathrm{T}^{\frac{1}{2}}\mathrm{V}$，可得

$$V_1^*\pi(\cdot)V_1 = \alpha U^*T_1^{-1^*}V^*T^{\frac{1}{2}^*}\pi(\cdot)T^{\frac{1}{2}}VT_1^{-1}U = \alpha U^*T_1^{-1^*}\psi(\cdot)T_1^{-1}U = U^*\phi_1(\cdot)U = \phi(\cdot).$$

此外，$V_1^*V_1 = \phi(1_{\mathscr{A}}) = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$。令

$$\mathscr{K}_1 := \overline{\mathrm{span}}\big\{\pi(a)V_1h \;:\; a \in \mathscr{A},\ h \in \mathscr{H}\big\} \subseteq \mathscr{K}.$$

那么 $\big(\pi\big|_{\mathscr{K}_1},\ V1,\ \mathscr{K}_1\big)$ 也是 ϕ的最小 Stinespring 表示。因此，根据命题 2.2，可得酉映射 $U_1 : \mathscr{K}_1 \to \mathscr{K}$使得

$$U_1V_1 = V \quad \text{and} \quad U_1^*\pi(\cdot)U_1 = \pi(\cdot)\big|_{\mathscr{K}_1}.$$

现在考虑

$$V = U_1V_1 = U_1\alpha^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}VT_1^{-1}U = U_1T^{\frac{1}{2}}VZ^{-1}, \quad \text{where } Z = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}U^*T_1.$$

那么，对于所有的 $a \in \mathscr{A}$，我们得到（在以下计算中，我们利用了 U_1 的定义域包含 V_1 的值域这一事实）

$$\begin{aligned}
Z^*\phi(a)Z = Z^*V^*\pi(a)VZ &= Z^*V^*U_1U_1^*\pi(a)VZ \\
&= Z^*V^*U_1\pi(a)\big|_{\mathscr{K}_1}U_1^*VZ \\
&= (U_1^*VZ)^*\pi(a)\big|_{\mathscr{K}_1}U_1^*VZ \\
&= (U_1^*U_1T^{\frac{1}{2}}VZ^{-1}Z)^*\pi(a)\big|_{\mathscr{K}_1}U_1^*U_1T^{\frac{1}{2}}VZ^{-1}Z \\
&= (T^{\frac{1}{2}}V)^*\pi(a)\big|_{\mathscr{K}_1}T^{\frac{1}{2}}V \\
&= (T^{\frac{1}{2}}V)^*\pi(a)T^{\frac{1}{2}}V \\
&= V^*T^{\frac{1}{2}}\pi(a)T^{\frac{1}{2}}V \\
&= V^*T\pi(a)V = \psi(a).
\end{aligned}$$

这证明在给定假设下 $\psi(\cdot) = Z^*\phi(\cdot)Z$ 对某个可逆算子 $z \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$成立。

2 为证明另一个方向，我们使用定理 4.1。设 $\phi(\cdot)=\sum \mathrm{T}^{*}\mathrm{i}\ \phi_i(\cdot)\mathrm{T}i$ 是 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 中元素的一个 C*-凸 i=1组合。固定 $\mathrm{i}\in\{1,2\}$，并定义 $\psi(\cdot):=\mathrm{T}^{*}\mathrm{i}\ \phi_i(\cdot)\mathrm{T}i$。于是$\psi(1_{\mathscr{A}})=\mathrm{T}^{*}\mathrm{i}$ Ti是一个可逆算子。此外，$\psi\in\mathrm{CP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$和 $\psi\le\phi$。于是存在一个可逆算子 Z $\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，使得对所有 $\mathrm{a}\in\mathscr{A}$，都有 $\psi(\mathrm{a})=\mathrm{Z}^{*}\phi(\mathrm{a})\mathrm{Z}$。现在由于 ϕ 是幺正的，注意到

$$\begin{aligned}(ZT_i^{-1})^{*}ZT_i^{-1}=(T_i^{*})^{-1}Z^{*}ZT_i^{-1}&=(T_i^{*})^{-1}Z^{*}\phi(1_{\mathscr{A}})ZT_i^{-1}\\&=(T_i^{*})^{-1}\psi(1_{\mathscr{A}})T_i^{-1}=(T_i^{*})^{-1}T_i^{*}T_iT_i^{-1}=\mathrm{Id}_{\mathscr{H}},\end{aligned}$$

由于Z和T_i均可逆，利用上面的等式可得$U:=ZT^{-1}{}_i$是酉算子，并且

$$U^{*}\phi(a)U=(T_i^{*})^{-1}Z^{*}\phi(a)ZT_i^{-1}=(T_i^{*})^{-1}\psi(a)T_i^{-1}=\phi_i(a),\quad\text{for all } a\in\mathscr{A}.$$

由于$i\in\{1,2\}$是任意选取的，ϕ 是 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的一个C^{*}-极端点。 □

5. Krein–Milman 定理

本节证明C^{*}-凸集 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的 Krein–Milman 定理。我们先回顾 $\mathrm{CP}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的任意子集的C^{*}-凸包的定义。

定义 5.1. 设 $S\subseteq CP\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$。那么，$S$ 的 C^{*}-凸包定义为

$$C^{*}-con(S)=\left\{\sum_{i=1}^{n}T_i^{*}\phi_i(\cdot)T_i\ :\ \phi_i\in S,\ T_i\in\mathscr{B}(\mathscr{H}),\ \sum_{i=1}^{n}T_i^{*}T_i=\mathrm{Id}_{\mathscr{H}},\ n\ge1\right\}.$$

包含S的最小C^{*} −凸(集) 是C^{*}-凸集。

现在我们陈述并证明C^{*}-凸集 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 的 Krein–Milman 定理。我们将使用 [3, 6, 12] 中建立的 Krein–Milman 定理的多个版本。

定理 5.2。设 G 是一个有限群，$\mathscr{A}$ 是一个幺正 C^{*}-代数，$\mathscr{H}$ 是一个可分希尔伯特空间。假设 τ 是有限群 G 通过（幺正）C^{*}-自同构在 $\mathscr{A}$ 上的一个作用。若以下条件之一成立：

(1) $\mathscr{H}$ 是有限维的；*(2)* $\mathscr{A}$ 是可分的或为 I 型因子；*(3)* $\mathscr{A}$ 是交换的，

于是我们有

$$UCP^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)=\overline{C^{*}-con}\big(C^{*}-ext\big(UCP^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)\big)\big),$$

其中闭包是相对于 BW拓扑取的。

证明。 设 $\{\phi_i\}^{n}{}_{i=1}$是 $C^{*}-ext\big(\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)\big)$ 中的一个元素集合。设 $i\in\{1,2,\cdots,n\}_n$，且 $T_i\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 满足 $\sum T^{*}{}_i\,T_i=\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$，其中 $n\ge1$。于是对所有 $g\in G$ 和 $a\in\mathscr{A}$，我们得到$i=1$

$$\sum_{i=1}^{n}T_i^{*}\phi_i(\tau_g(a))T_i=\sum_{i=1}^{n}T_i^{*}\phi_i(a)T_i\quad\text{and}\quad\sum_{i=1}^{n}T_i^{*}\phi_i(1_{\mathscr{A}})T_i=\sum_{i=1}^{n}T_i^{*}T_i=\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}.$$

$_n$因此 $\sum T^{*}{}_i\ \phi_i(\cdot)T_i\in\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$。由于集合 $\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$是$_{i=1}$$\mathrm{UCP}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$中关于 BW拓扑的闭子集（见 [7]），因此

$$\overline{C^{*}-con}\big(C^{*}-ext\big(\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big)\big)\big)\subseteq\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\mathscr{B}(\mathscr{H})\big).$$

现在，为了证明另一个包含关系，考虑 $\mathscr{A}_G := \{a \in \mathscr{A} : \tau_g(a) = a, \text{ 对于所有} g \in G\}$。显然，$1_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}_G$。此外，对于任意固定的$g_0 \in G$和$a \in \mathscr{A}$，可以观察到

$$\tau_{g_0}\left(\frac{\sum_{g\in G}\tau_g(a)}{|G|}\right) = \frac{\sum_{g_0 g = g' \in G}\tau_{g'}(a)}{|G|} = \frac{\sum_{g\in G}\tau_g(a)}{|G|}.$$

这表明，对于任意 $a \in \mathscr{A}$，都有 $\sum_{g\in G}\tau_g(a)/|G| \in \mathscr{A}_G$。若 a、$b \in \mathscr{A}_G$，$\lambda \in \mathbb{C}$，则对所有 $g \in G$，我们得到

$$\tau_g(a+\lambda b) = \tau_g(a) + \lambda\tau_g(b) = a + \lambda b;$$
$$\tau_g(ab) = \tau_g(a)\tau_g(b) = ab;$$
$$\tau_g(a^*) = \tau_g(a)^* = a^*.$$

此外，由于 τ_g 是等距的，我们发现 $\mathscr{A}_G$ 是 $\mathscr{A}$的一个C^*-子代数。

现在我们考虑集合 $\mathrm{UCP}\left(\mathscr{A}_G, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$ 它由从 $\mathscr{A}_G$ 到$\mathscr{B}(\mathscr{H})$的所有幺正完全正映射组成，并定义一个映射

$$E : \mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right) \to \mathrm{UCP}\left(\mathscr{A}^G, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$$

由 $E(\phi) := \phi\big|_{\mathscr{A}_G}$给出。首先我们证明$E$是一一映射。假设 $E(\phi_1) = E(\phi_2)$。则对于任意 $a \in \mathscr{A}$，

$$\phi_1(a) = \phi_1\left(\frac{\sum_{g\in G}\tau_g(a)}{|G|}\right) = \phi_2\left(\frac{\sum_{g\in G}\tau_g(a)}{|G|}\right) = \phi_2(a).$$

由于$a \in \mathscr{A}$ 是任意选取的，我们得到 $\phi_1 = \phi_2$。现在证明E 是满射。为此，考虑元素 $\phi \in \mathrm{UCP}\left(\mathscr{A}_G, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$。然后定义 $\tilde{\phi} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 如下：

$$\tilde{\phi}(a) := \phi\left(\frac{\sum_{g\in G}\tau_g(a)}{|G|}\right), \quad \text{for all } a \in \mathscr{A}.$$

显然，对于所有$a \in \mathscr{A}^G$，都有 $\tilde{\phi}(a) = \phi(a)$。这意味着$E(\tilde{\phi}) = \phi$。因此$E$ 是满射。此外，我们得到

$$\left(\phi = \sum_{i=1}^n T_i^*\phi_i T_i\right)\Big|_{\mathscr{A}^G} = \sum_{i=1}^n T_i^*\phi_i\big|_{\mathscr{A}_G} T_i, \quad \text{that is,} \quad E\left(\phi = \sum_{i=1}^n T_i^*\phi_i T_i\right) = \sum_{i=1}^n T_i^* E(\phi_i) T_i,$$

n，其中每个 $\phi_i \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$，且$T_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$满足 $\sum T^*{}_i T_i = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$。这表明$_{i=1}$映射$E$ 保持C^*-凸组合。此外，映射E 具有如下性质：若 $\phi_\alpha \to \phi$在 BW拓扑中，则$E(\phi_\alpha) \to E(\phi)$ 也在 BW拓扑中。由于E 的定义域是紧的，因此逆映射E^{-1} 也是连续的。

现在假设 $\psi \in \mathrm{C}^* - \mathrm{ext}\left(\mathrm{UCP}\left(\mathscr{A}\mathrm{G}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)\right)$。接下来我们证明 $\mathrm{E}^{-1}(\psi)$属于 $\mathrm{C}^* - \mathrm{next}\left(\mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)\right)$。假设 $\mathrm{E}^{-1}(\psi) = \sum \mathrm{T}^*\mathrm{i}\ \phi_i \mathrm{T}i$，其中 $\phi_i \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\left(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\right)$，$\mathrm{T}_i \in_{i=1}^{n} \mathscr{B}(\mathscr{H})$，且对所有 $\mathrm{i} \in \{1, 2, \cdots, \mathrm{n}\}$，$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{i}$ 均存在，并且 $\sum \mathrm{T}^*\mathrm{i}\,\mathrm{T}_i = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$。那么我们有 $_{\mathrm{i}=1}$

$$\psi = E\left(E^{-1}(\psi)\right) = E\left(\sum_{i=1}^n T_i^*\phi_i T_i\right) = \sum_{i=1}^n T_i^* E(\phi_i) T_i.$$

由于 $\psi \in C^*\text{—}ext\big(\mathrm{UCP}\big(\mathscr{A}_G,\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)\big)$，存在一族酉算子 $\big\{U_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H})\big\}^n{}_{i=1}$，使得

$$E(\phi_i)(\cdot) = U_i^*\psi(\cdot)U_i,\ \text{ for all } 1 \le i \le n.$$

这意味着

$$\phi_i(\cdot) = E^{-1}(E(\phi_i))(\cdot) = E^{-1}(U_i^*\psi(\cdot)U_i) = U_i^*E^{-1}(\psi)(\cdot)U_i,\ \text{ for all } 1 \le i \le n.$$

这表明$E^{-1}(\psi)$属于$C^* - ext\big(\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A},\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)\big)$。

现在我们完成该结果的证明。设 $\phi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$，并相应地考虑$E(\phi) \in \mathrm{UCP}\big(\mathscr{A}_G, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$。如果假设$C^*$-代数 $\mathscr{A}$与希尔伯特空间 $\mathscr{H}$满足条件（1）、（2）或（3）中的一个（假设中给出），那么C^*-代数$\mathscr{A}^G$ 也满足相同的条件。根据 [3, 6, 12], 中给出的结果，我们知道存在一个网$\{\psi_\alpha\}_\alpha \subseteq C^* - con\big(C^* - ext\big(\mathrm{UCP}\big(\mathscr{A}_G,\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)\big)\big)$使得

$$\psi_\alpha \to E(\phi),\quad \text{in BW-topology.} \tag{8}$$

设 $\psi_\alpha = {}_n\sum_{j=1}^{\alpha} T_{\alpha,j}^*\psi_{\alpha,j}T_{\alpha,j}$，其中 $\psi_{\alpha,j} \in C^* - ext\big(\mathrm{UCP}\big(\mathscr{A}_G,\ \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)\big), T_{\alpha,j} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$和$n_\alpha \in \mathbb{N}$。那么对于每个 α和 $j \in \{1, 2, \cdots, n_\alpha\}$，我们得到

$$E^{-1}(\psi_{\alpha_j}) \in C^* - ext\big(\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)\big).$$

因此，我们得到一个网 $\big\{E^{-1}(\psi_\alpha)\big\}_\alpha \subseteq C^* - con\big(C^* - ext\big(\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)\big)\big)$。根据等式 (8), 并且知道 E^{-1} 关于 BW拓扑是连续的这一事实，我们得到

$$E^{-1}(\psi_\alpha) \to \phi\ \text{ in BW-topology.}$$

由于 $\phi \in \mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)$ 是任意选取的，我们得到

$$\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big) \subseteq \overline{C^* - con}\big(C^* - ext\big(\mathrm{UCP}^{G_\tau}\big(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathscr{H})\big)\big)\big).$$

这就证明了该结果。 □

致谢。作者衷心感谢印度莫哈利的印度科学教育与研究学院（IISER）提供的学院博士后奖学金资助。

数据和材料的可用性。不适用。

参考文献

[1] Anand O. R. 和 Sumesh K. 完全正映射中的广义 C^*-凸性 数学分析与应用杂志 551（2025年），第 2 期，第 2 部分，129700.[2] Arveson, W. B.C 的子代数*-代数。数学学报 123（1969年），141-224.[3] Banerjee, T.、Bhat, B. V. R. 和 Kumar M. C^*-正算子值测度与幺正完全正映射的极端点 数学物理通讯，388（2021年），第 4 期，1235-1280.[4] Bhat, B. V. R.、Devendra R.、Mallick N. 和 Sumesh K. C^*-纠缠破坏映射的极端点 数学物理评论，35（2023年），第 3 期，论文编号：2350005，17.[5] Balasubramanian, S. 和 Hotwani, N. C^*-算子系统上的极端纠缠破坏映射 线性代数及其应用，685（2024年），182-213.[6] Bhat, B. V. R. 和 Kumar M. C^*-极端映射与嵌套泛函分析杂志，282（2022年），第 8 期，论文编号：109397，40.[7] Bhattacharya, A. 和 Kulkarni, C. J. 幺正完全正映射空间中的遍历分解 无限维分析、量子概率及相关主题 28（2025年），第 3 期，论文编号：2450012.[8] Bratteli, O. 和 Robinson, D. W. 算子代数与量子统计力学 *I. C*-代数与 W*-代数、对称群、态分解。 第 2 版（1987年）物理学文本与专著。[9] Davidson K. R. 和 Kennedy M. 非交换 *Choquet* 理论arXiv: 1905.08436 v3。

[10] Effros, E. G. 和 Winkler, S. 矩阵凸性：双极与 Hahn-Banach 定理的算子类比 泛函分析杂志 144（1997），第 1 期，117–152。[11] Farenick, D. R. 和 Morenz, P. B. C*- 紧 C*- 凸集的极端点 美国数学会会刊 118 （1993），第 3 期，765–775。[12] Farenick, D. R. 和 Morenz, P. B. C*-代数广义状态空间中的极端点 美国数学会汇刊 349（1997），第 5 期，1725–1748。[13] Farenick, D. R. 和 Zhou, H. C*-代数上完全正线性映射空间中 C-极端点的结构 美国数学会会刊 126（1998），第 5 期，1467–1477。[14] Fujimoto I. C*-与 W*-代数的 CP 对偶性 算子理论杂志 30（1993），201-215。[15] Gregg, M. C. 关于 C*-极端映射与交换 C*-代数的 ⁎-同态 积分方程与算子理论，63（2009），第 3 期，337–349。[16] Hossain, Md. A. 和 Kulkarni, C. J. 部分作用下不变的幺正完全正映射的极端点 预印本，arXiv:2507.20797 [math.OA], 16p.[17] Loebl, R. I. 关于酉轨道的一点注记 数学研究所学报（台湾中央研究院）7（1979），401–407。[18] Loebl, R. I. 和 Paulsen, V. I. 关于 C*-凸性的一些注记 线性代数及其应用 35（1981），63–78。[19] Ostapenko, V. V. 矩阵凸性 乌克兰数学杂志 47（1995），第 1 期，64-69。[20] Paulsen, V. 完全有界映射与算子代数 剑桥高等数学研究丛书，78。[21] Wu, W. W*-代数中的 C*-极端点 数学学报（中文版）45（2002），第 3 期，455–460。[22] Zhuo, H. C*-完全正映射空间中的极端点 ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，1998。博士论文——里贾纳大学，加拿大。

CHAITANYA J.KULKARNI, THEORETICAL STATISTICS AND MATHEMATICS UNIT, INDIAN STATISTICAL INSTITUTE, DELHICENTRE,7 S.J.S.SANSANWAL MARG,NEW DELHI 110016, INDIA电子邮件地址:
chaitanyakulkarni58@gmail.com