arXiv:2601.15862v1 [math.DG] 22 Jan 2026

# 合成微分喷射丛是既约的

GRIGORIOS GIOTOPOULOS、IGOR KHAVKINE、HISHAM SATI 和 URS SCHREIBER

摘要。我们此前曾指出，将偏微分方程解的理论视为喷射丛中的微分理想后，从 Fr´echet 光滑流形范畴转到*Cahiers* 托扑斯中的形式光滑集（这是合成微分几何的一个良适配模型），便可获得一种强有力的余单子表述。然而，人们一直未能证明，这种转换保留了定义无穷喷射丛的射影极限。本文给出详细证明。

目录

1. 引言 2. 陈述与证明 附录 1
A. 背景 参考文献 2
9
14

## 1. 引言

合成微分几何的基本理念（SDG，参见 [Koc79；Lav96；Koc10]）是：将光滑流形范畴忠实地嵌入一个合适的托扑斯中（参见 [MM92；Bor94]），从而使无穷小空间成为实际存在的对象。差分几何中的概念和结果往往因此能得到更自然、更有力的表述。

这样一个“良好适配”的合成微分几何托扑斯是*Cahiers* 托扑斯，由 E. Dubuc 提出（[Dub79],参见 [GS25b，§2]）；我们可以将其视为形式光滑集范畴（见 §A.1 ——这里“形式”是“无穷小增厚”或“带有光晕”的常用术语）。这相当于在代数几何中研究形式概形。

一个引人注目的例子来自偏微分方程的几何。在描述经典解的基础上，合成微分几何还能将偏微分方程的形式解（幂级数解）视为基本对象。在经典理论中，这些形式解以微分理想 的形式出现在无穷喷射丛之中（这一极富成果的观点归功于 [Vin81], 。相关背景简述于§ A.3）。它们的出现

日期：2026年1月23日。2020 数学主题分类。主要分类：58A03、51K10、58A20；次要分类：18F15、35A30。关键词与短语。合成微分几何、无穷喷射丛、Cahiers 托扑斯、形式光滑集。资助：IK 的研究工作得到捷克科学院研究计划RVO:67985840的支持。其余作者的研究工作得到$Tamkeen\ UAE$ 通过纽约大学阿布扎比分校研究院资助项目 CG008的支持。

在合成微分几何中则在很大程度上转变为结构性的（即余单子性的），这是从形式（无穷小加厚的）光滑集合这一合成语境来看时得出的结果。该结果由 [KS26]给出。然而，这一对应中的一个关键技术步骤此前一直未获证明，现作为定理2.1在下文中回顾：

也就是说，由于无穷喷射丛(A.9) 是有限维流形的射影极限，因此原则上 可以用两种不同方式将其视为形式光滑集：要么先取极限（在 Fr´échet 流形中），再转为形式光滑集；要么反过来！我们在此证明，这两种构造自然同构。

这对变分演算和拉格朗日场论中的应用有着关键影响，见下文推论 2.2 。

这一结果或许“直觉上理应成立”，但证明起来并非易事。本文给出一个详细且大体上具有构造性的证明。除了填补以往文献中的这一具体空白，我们的证明所采用的技术似乎也是新的，因而可能值得关注，并可应用于其他情形，参见下文注 2.7。

## 2. 陈述与证明

我们将 $i_!$ （定义 A.7）表示光滑集合——例如 Fr´échet 流形（引理 A.9）——到形式光滑集中的包含。

**定理 2.1**。 对于 $E \rightarrowtail \Sigma$光滑流形之间的有限维满射下沉，将其转到形式光滑集会保持构造其无穷喷射丛时所涉及的射影极限 $J^\infty_\Sigma E$ （参见 §A.3），即存在一个自然同构：

$$i_!\left(\varprojlim_{k\in\mathbb{N}} J^k_\Sigma E\right) \simeq \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \left(i_! J^k_\Sigma E\right). \tag{2.1}$$

根据 [KS26，命题 2.29；GS25a，推论 3。6]关于从 Fr´échet 射影极限流形（“局部原流形”）出发的光滑映射的刻画，定理 2.1 意味着：

**推论 2.2**。 从合成喷射丛 $J^\infty_\Sigma E$到有限维流形的形式光滑集映射，与在点集意义下局部具有有限喷射阶的光滑映射 一一对应 $F$ （如 [Tak79]中所考察）。

我们将在下文证明定理 2.1 ，为此先建立几个引理，它们基于以下识别形式光滑集中的约化对象的原则：

**引理 2.3.** 对象 $X \in \mathrm{FrmSmthSet}$ 是 既约的（A.2）当且仅当满足以下两个条件：

**(i)** 从某个 $U \times \mathbb{D} \in \mathrm{FrmCrtSp}$ 到 $X$ 的所有映射芽都$V \in \mathrm{CrtSp}$：

$$\forall\ U \times \mathbb{D} \overset{\exists\,\iota}{\dashrightarrow} V \overset{\exists f}{\dashrightarrow} X\,. \qquad (\forall\ \text{composite}) \tag{2.2}$$

**(ii)** 这类分解集合上的等价关系$(\iota, f)$ 由以下关系生成

$$(\iota, f) \sim (\iota', f) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "f"] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & \\ U \times \mathbb{D} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & & X \\ & V' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

即复合映射相等，因此：

$$(\iota, f) \sim \overset{\exists}{\cdots} \sim (\iota', f') \qquad \Leftrightarrow \qquad f \circ \iota = f' \circ \iota' . \tag{2.4}$$

证明。 这可直接改写为以下余端预层上的左Kan延拓公式（参见 [Kel82，第4.25页；Lor21，(2.27)]）：

$$(i_! X)(U \times \mathbb{D}) \simeq \int^{V \in \mathrm{CrtSp}} \mathrm{FrmCrtSp}(U \times \mathbb{D}, V) \times X(V) , \tag{2.5}$$

根据 Yoneda 引理，这意味着，$U \times \mathbb{D} \rightarrowtail i_! X$ FrmSmthSet 中的映射 $U \times \mathbb{D} \rightarrowtail V$（属于 FrmCrtSp FrmSmthSet）与由一对元素构成的等价类自然双射：其中一个元素是映入一个笛卡尔空间 $V \in \mathrm{CrtSp}$ FrmCrtSp$^i$的映射 $V \rightarrowtail X$，另一个元素是 SmthSet 中的映射；等价关系由因子空间之间相容的映射生成 $\phi$： $V \rightarrowtail V'$（属于 CartSp）：

$$\Big\{ U \times \mathbb{D} \longrightarrow i_! X \Big\} \simeq \Big\{ \Big( U \times \mathbb{D} \xrightarrow{\iota} V, V \xrightarrow{f} X \Big) \Big\} \Big/ \left\{ \left( \begin{tikzcd} & V \arrow[d, dashed, "\phi"'] & V \arrow[d, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "f"] & \\ U \times \mathbb{D} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & & & X \\ & V' , & V' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} \right) \right\} ,$$

其中，右侧表示：若存在 $\phi$ 使两个三角形交换，则图表顶部所示的一对元素与底部所示的一对元素相关。

转到层（A.3）后，该陈述对映射芽仍然成立，正如所声称的那样。 □

定理 2.1 的典型例子是定义射影无限维笛卡尔空间的射影极限（参见 [KS26，定义 2.24，命题 2.26]），

$$\mathbb{R}^\infty := \varprojlim \Big( \cdots \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^0 \Big) \in \mathrm{FrchtMfd} \xhookrightarrow{(A.8)} \mathrm{SmthSet} , \tag{2.6}$$

得以保持：

**命题 2.4**。 转到带光环光滑集后，构造无限维笛卡尔空间 (2.6)：中涉及的射影极限得以保持

$$i_! \Big( \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^k \Big) \simeq \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \Big( i_! \mathbb{R}^k \Big) . \tag{2.7}$$

证明。 只需注意到等式（2.7）右侧是既约的（将在引理 2.5中证明），因此（利用（A.7））：

$$\varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \Big( i_! \mathbb{R}^k \Big) = \Re \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \Big( i_! \mathbb{R}^k \Big) \simeq i_! \, i^* \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \Big( i_! \mathbb{R}^k \Big) . \tag{2.8}$$

由此，再结合 $i_!$ 的完全忠实性（引理 A.8），该命题等价于：

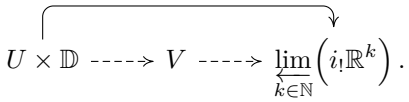
$$\varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^k \simeq i^*\left(\varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \left(i_!\mathbb{R}^k\right)\right). \tag{2.9}$$

但这是成立的，因为 $i^*$ 保极限（作为右伴随），然后利用（A.5）。□

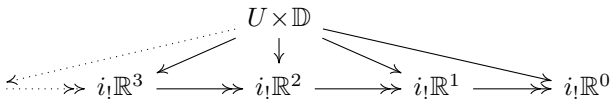
因此，关键在于证明：

**引理 2.5**。 极限对象 $\lim\longleftarrow_k(i_!\mathbb{R}^k)$是既约的 (A.2)。

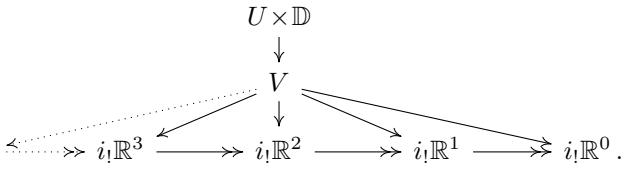
证明。 鉴于引理 2.3，我们首先证明，以下形式的每个顶部映射都可经由某个 $V \in$ CrtSp 分解，如底部所示：



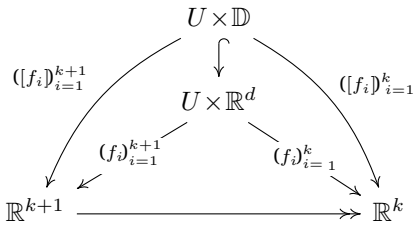

由于我们处理的是映入极限的映射，因此需要等价地证明，以下形式的每个映射交换图表




都可按如下形式分解：




现在，映射 $U\times\mathbb{D} \longrightarrow i_!\mathbb{R}^k$ 在 FrmSmthSet 中就是 FrmCrtSp 中一个形如 $U\times\mathbb{D} \;\succ\; \mathbb{R}^k$ 的态射（因为 $i_!$ 保持可表对象，参见引理 A.8），因此它是一个$k$元组 $\left([f_i]\right)_{i=1}^k$，其元素属于 $C^\infty(U\times\mathbb{D})$。根据定义 A.6，每个这样的元素 $[f_i]$ 都是某个元素 $f_i \in C^\infty(U\times\mathbb{R}^d)$ 的等价类，其中 $d \in \mathbb{N}$ 仅取决于 $\mathbb{D}$。因此，若取 $V := U\times\mathbb{R}^d$ 那么对于每个给定的 $f_i$，我们都可以选取这些 $[f_i]$:




以实现所需的分解。

为了得出引理 2.3，我们仍需证明，同一映射的任意两个这样的分解，都可以通过中间 $V$之间相容的映射之之字形链（2.4）联系起来。这可由以下事实推出：(i) 显而易见，每个分解都与一个这样的分解相关联，其中 $\iota$ 是余维任意高的形式真嵌入

（引理 A.11），再结合 (ii) 更为繁琐的验证：其中任意两个复合映射相等的分解，彼此之间都存在之字形关系。最后将在下文的引理 2.8 中证明这一点。□

由此我们得出：

**定理 *2.1* 的证明。** 关键在于注意到（2.1）右端是既约的，因为

$$\varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \left( i_! J^k_\Sigma E \right) \;\simeq\; i_!\, i^* \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \left( i_! J^k_\Sigma E \right),$$

由此即可形式地推出该结论，正如命题 2.4 的证明中那样：由于 $i_!$是全忠实的，所需条件（2.1）因而等价于：

$$\varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \left( J^k_\Sigma E \right) \;\simeq\; i^* \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \left( i_! J^k_\Sigma E \right),$$

这成立，因为 $i^*$ 与射影极限交换（因为它是右伴随），再利用 $i^* \circ i_! \simeq \mathrm{id}$ (A.5)。

要看出（2.1）右端确实是既约的，考虑如下形式的虚线水平映射

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{D} & \dashrightarrow & \varprojlim_k i_! J^k_\Sigma E \\ & \searrow & \downarrow \\ & & i_!\Sigma\,, \end{array}$$

其中底部表示到 $\Sigma$ 的诱导映射，所有对象都在其上纤维化。根据引理 2.3 ，我们需要证明水平虚线映射的一个芽可经由某个笛卡尔空间分解。由于$E \twoheadrightarrow \Sigma$ 假设为满射浸没，因此类似地，对所有 $J^k_\Sigma E \to J^{k-1}_\Sigma E \to \cdots \to \Sigma$，每个 $U \times \mathbb{D} \to i_! J^k_\Sigma E$ 的芽都有一个代表，它可经由某个平凡纤维化 $U^k \times \mathbb{D}$ 分解，$\to i_! J^k_{\mathbb{R}^n} \mathbb{R}^{n+m}$。但进一步限制到共同交集上后，这些代表就给出了原映射的芽 $U \times \mathbb{D} \to \varprojlim_k i_! J^k_\Sigma E$(其定义域记作 $U' \hookrightarrow U$)的一个代表，该代表可经由相应的平凡纤维化射束分解：

$$\begin{array}{ccccc} U' \times \mathbb{D} & \dashrightarrow & \varprojlim_k i_! J^k_{\mathbb{R}^n} \mathbb{R}^{n+m} & \hookrightarrow & \varprojlim_k i_! J^k_\Sigma E \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & i_!\mathbb{R}^{n+m} & \hookrightarrow & i_! E \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & i_!\mathbb{R}^n & \hookrightarrow & i_!\Sigma\,. \end{array}$$

由此，我们实质上将问题归结为命题2.4的情形，证明也可类似地完成。□

现在只剩下证明引理2.5证明中的最后一条陈述。这是最费工夫的一步，我们将在下文的引理2.8 中证明它。

**记号 2.6。** 为简化记号，下面将把 $\mathbb{R}^\infty$ （2.6）的“综合微分版本”简称为

$$\mathbf{R}^\infty \;:=\; \varprojlim_k i_! \mathbb{R}^k \;\in\; \mathrm{FrmSmthSet} \tag{2.10}$$

（不过，一旦我们完成引理 2.8的证明，命题2.4 就断言$\mathbf{R}^\infty$ 与 $i_!\mathbb{R}^\infty$同构）。

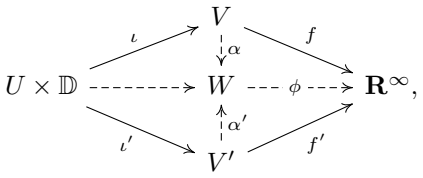
注记 2.7。 由于 $i_!\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \in \mathrm{FrmCrtSp}$ (A.4)，$\mathbf{R}\mathbf{R}^\infty$ (2.10) 的图无非是 $\mathbb{N}$元光滑函数组：

$$\mathrm{Hom}(U\times\mathbb{D},\mathbf{R}^\infty) \simeq \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(U\times\mathbb{D},\mathbb{R}^k) \simeq \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(U\times\mathbb{D},\mathbb{R}^1)$$
$$\simeq \prod_{k\in\mathbb{N}} C^\infty(U\times\mathbb{D})\,.$$

这意味着，特别是我们可以对这些图进行加减运算（将在下文的 (2.14) 和 (2.17) 中使用），并对它们应用 Hadamard 引理（将在下文的 (2.13) 和 (2.16) 中使用）。

事实上，在下面的证明中，我们只用到 $C^\infty(U,\mathbf{R}^\infty)$ 的元素（对于 $U \in$ CrtSp）具有可加性并满足 Hadamard 引理，因此，若 $\mathbf{R}^\infty$ 被任何同样具备这一性质的其他对象替代，类似的论证也适用。

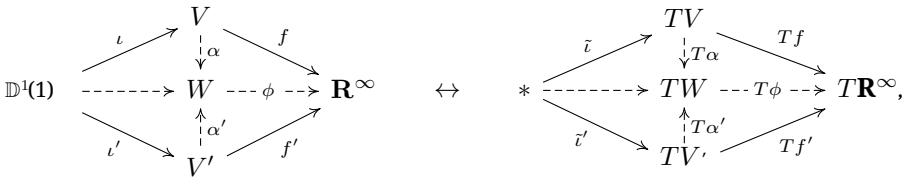
**引理 2.8。** 给定如下外交换图：




其中 $\iota$ 和 $\iota'$ 是余维充分高的形式正规嵌入 (定义A.10)，存在 $W \in \mathrm{CrtSp}$，使得可以如图所示用虚线映射填充该图，并使所有三角形都交换。

为了使引理 2.8 的证明更加清晰，我们分阶段逐步增加一般性。首先考虑简单情形，其中 $U \equiv *$ 和 $\mathbb{D} \equiv \mathbb{D}^1(1) \equiv$ 谱$\Big(C^\infty(\mathbb{R}^1)/(x^2)\Big)$。

**引理 2.9。** 给定一个由光滑函数构成的交换图，其形式与下图中的外侧实线箭头相同：




其中 $\iota$ 和 $\iota'$ 均为单态射，则存在 $W \in \mathrm{CrtSp}$ 以及与虚线箭头对应的光滑映射，使整个图表交换。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $\iota$ 和 $\iota'$ 所选取的基点分别是 $0 \in V$ 和 $0 \in V$ 的原点，（否则就重新参数化），因此有

$$\tilde{\iota}(\bullet) =: v_0 \in T_0V,$$
$$\tilde{\iota}'(\bullet) =: v_0' \in T_0V'.$$

假设 $\iota$ 和 $\iota'$ 是单态的，意味着 $v_0 \neq 0$ 和 $v_0' \neq 0$。因此（记 $V_\perp \subset V$ 为与 $v_0$ 正交的子空间，$V_\perp' \subset V_\prime$ 为与 $v_0'$ 正交的子空间），我们可以用坐标表示 $V$ 和 $V'$：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V_\perp & \xrightarrow{\sim} & V \\ (t, \vec{x}\,) & \longmapsto & (tv_0, \vec{x}\,), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V_\perp' & \xrightarrow{\sim} & V' \\ (t', \vec{x}\,') & \longmapsto & (t'v_0', \vec{x}\,'). \end{array}$$

现在令

$$W := V \times V' \times \mathbb{R}^1$$

and

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & W \\ (t, \vec{x}\,) & \longmapsto & \big((t, \vec{x}\,), (t, 0), 0\big), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{\alpha'} & W \\ (t', \vec{x}\,') & \longmapsto & \Big((t', 0), (t', \vec{x}\,'), t'^2\Big). \end{array}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(0,0) &= \big((0,0),(0,0),0\big), & \tfrac{\partial}{\partial t}\alpha(0,0) &= \big((1,0),(1,0),0\big), \\ \alpha'(0,0) &= \big((0,0),(0,0),0\big), & \tfrac{\partial}{\partial t'}\alpha'(0,0) &= \big((1,0),(1,0),0\big), \end{aligned}$$

这使得我们的图表左侧部分可交换。

最后，要定义 $\phi$，首先考虑

$$\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{R}^\infty \tag{2.11}$$

$$t \longmapsto f'(t,0) - f(t,0). \tag{2.12}$$

由外部图表的可交换性可知，$\delta(0) = 0$ 且 $\frac{d}{dt}\delta(0) = 0$。因此，根据 Hadamard 引理，存在一个光滑函数

$$\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{R}^\infty, \quad \text{such that } \delta(t) = t^2 \cdot \mu(t). \tag{2.13}$$

有了这个函数，最后定义

$$\phi : \Big((t, \vec{x}\,), (t', \vec{x}\,'), j\Big) \longmapsto f(t, \vec{x}\,) - f'(t,0) + f'(t, \vec{x}\,') + j \cdot \mu(t). \tag{2.14}$$

我们验证这使图表的右侧部分可交换，因为：

$$\begin{aligned} \phi \circ \alpha(t, \vec{x}\,) &= \phi\big((t, \vec{x}\,), (t,0), 0\big) \\ &= f(t, \vec{x}\,) + 0 + 0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \phi \circ \alpha'(t', \vec{x}\,') &= \phi\Big((t',0), (t', \vec{x}\,'), t'^2\Big) \\ &= \underbrace{f(t',0) - f'(t',0)}_{-\delta(t')} + f'(t', \vec{x}\,') + \underbrace{t'^2 \cdot \mu(t')}_{\delta(t')} \\ &= f'(t', \vec{x}\,'). \end{aligned}$$

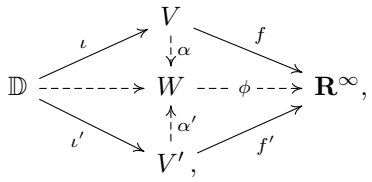
证明至此完成。 □

接下来，我们将这个证明推广到（仍然 $U \equiv *$ 但）$\mathbb{D}$ 任意的情况。为此，选择一个具有最小 $d$ 的包含 $\mathbb{D} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$，并选择一组生成元

$$\vec{h} := \Big(h_i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\Big)_{i=1}^n \quad (\text{for some } n \in \mathbb{N}) \tag{2.15}$$

对偶代数同态的核 $C^\infty(\mathbb{R}^d)\, C^\infty(\mathbb{D})$。 $\twoheadrightarrow$

**引理 2.10**。 给定如下图中外侧实线箭头所构成的光滑函数交换图：




其中 $\iota$ 和 $\iota'$ 是单态射，则存在 $W \in \mathrm{CrtSp}$，以及虚线映射，使内层图表也交换。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $\iota(0) = 0 \in V$ 和$\iota'(0) = 0 \in V'$（否则重新参数化）。由于 $\iota$ 和 $\iota'$ 是单态的，我们可以分别将 $V$、 $V'$ 分解为 $\iota$、 $\iota'$ 像的张成空间及其正交补：

$$\mathbb{R}^d \times V_\perp \xrightarrow{\sim} V\,,$$
$$\mathbb{R}^d \times V'_\perp \xrightarrow{\sim} V'\,.$$

现在取

$$W := V \times V' \times \mathbb{R}^n$$

and

$$\alpha(\vec{t}, \vec{x}) := \Big((\vec{t}, \vec{x}), (\vec{t}, 0), 0\Big)$$
$$\alpha'(\vec{t}\,', \vec{x}\,') := \Big((\vec{t}\,', 0),\, (\vec{t}\,', \vec{x}\,'), \vec{h}(\vec{t}\,')\Big)\,,$$

其中最后一个分量是幂零理想的生成元（2.15）的取值。

于是我们得到以下复合映射（在下方几行中，我们给出了典范坐标函数沿顶部映射的拉回；检查这些拉回足以确定这些映射，参见 [GS25b，命题 4。6]）

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{D} & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{R}^d \times V_\perp & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^d \times V_\perp \times \mathbb{R}^d \times V'_\perp \times \mathbb{R}^n \\
[\vec{t}\,] & \longmapsto & \vec{t} & \longmapsto & \vec{t} \\
0 & \longmapsto & \vec{x} & \longmapsto & \vec{x} \\
[\vec{t}\,'] & \longmapsto & \vec{t}\,' & \longmapsto & \vec{t}\,' \\
0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & \vec{x}\,' \\
0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & \vec{j}
\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{D} & \xrightarrow{\iota'} & \mathbb{R}^d \times V'_\perp & \xrightarrow{\alpha'} & \mathbb{R}^d \times V_\perp \times \mathbb{R}^d \times V'_\perp \times \mathbb{R}^n \\
[\vec{t}\,] & \longmapsto & \vec{t} & \longmapsto & \vec{t} \\
0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & \vec{x} \\
[\vec{t}\,'] & \longmapsto & \vec{t}\,' & \longmapsto & \vec{t}\,' \\
0 & \longmapsto & \vec{x}\,' & \longmapsto & \vec{x}\,' \\
0 & \longmapsto & \vec{h}(\vec{t}\,') & \longmapsto & \vec{j}\,,
\end{array}$$

其中在最后一行，我们利用函数 $h$ (2.15) 按假设在 $\mathbb{D}$ 上取值为零。由于这两个复合映射相等，我们的图表左侧部分可交换。

现在考虑

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathbf{R}^\infty \\ \vec{t} & \longmapsto & f'(\vec{t},0) - f(\vec{t},0)\,. \end{array}$$

由于我们图表外部部分的交换性，这个映射的各分量都属于由以下元素生成的理想 $h_i$ (2.15)，因此

$$\delta(\vec{t}) \;=\; \textstyle\sum_i h_i(\vec{t})\,\mu^i(\vec{t}) \quad \text{for some} \quad (\mu^i : \mathbb{R}^d \to \mathbf{R}^\infty)_{i=1}^n\,. \tag{2.16}$$

有了这一点，最后定义

$$\phi\Big((\vec{t},\vec{x}),\,(\vec{t}\,',\vec{x}\,'),\,\vec{j}\Big) \;:=\; f(\vec{t},\vec{x}) - f'(\vec{t},0) + f'(\vec{t},\vec{x}\,') + \textstyle\sum_i j_i\,\mu^i(\vec{t})\,. \tag{2.17}$$

通过直接计算，我们验证这确实使图表的右侧部分交换：

$$\begin{aligned} \phi\circ\alpha(\vec{t},\vec{x}) \;&=\; \phi\Big((\vec{t},\vec{x}),\,(\vec{t},0),\,0\Big) \\ &=\; f(\vec{t},\vec{x}) + 0 + 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \phi\circ\alpha'(\vec{t}\,',\vec{x}\,') \;&=\; \phi\Big((\vec{t}\,',0),\,(\vec{t}\,',\vec{x}\,'),\,\vec{h}(\vec{t})\Big) \\ &=\; \underbrace{f(\vec{t},0) - f'(\vec{t},0)}_{-\delta(\vec{t})} + f'(\vec{t},\vec{x}\,') + \underbrace{\textstyle\sum_i h_i(\vec{t})\,\mu^i(\vec{t})}_{\delta(\vec{t})} \\ &=\; f'(\vec{t},\vec{x}\,')\,. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

最后，将这个证明推广到一般情形并不需要多费多少功夫：

引理 *2.8* 的证明。根据引理 A.12，不失一般性，我们可以假设，经目标空间上的微分同胚变换后：

$$\begin{aligned} \iota|_{U\times\{*\}} \;&\simeq\; (\mathrm{id},0) : U \hookrightarrow U\times\tilde{V} \;\simeq\; V \\ \iota'|_{U\times\{*\}} \;&\simeq\; (\mathrm{id},0) : U \hookrightarrow U\times\tilde{V}' \;\simeq\; V'. \end{aligned}$$

但在此对应关系下，对每个点 $u \in U$ 我们都有引理 2.10 中的确切情形，因此解如该引理所述，只是 $W$ 多了一个因子 $U$，且 $\alpha$、$\alpha'$ 和 $\phi$ 还依赖于另一个变量 $u \in U$。

具体而言，按如下方式推广引理 2.9：

**(i)** $V$ 的参数化现在是一个以 $U \times \mathbb{R}$为底空间的丛，其中（$u$，$t\cdot v(u)$ $\vec{x}_{v(u)}$）$\in V$，这里 $\vec{x}_{v(u)}$ 是垂直于 $v(u)$的元素。**(ii)** 相应的 $\delta$ 现在是一个映射 $U\times\mathbb{R} \to \mathbf{R}^\infty$，满足 $\delta(u,0) = 0$，$\frac{\partial}{\partial t}\delta(u,0) = 0$，因此根据 Hadamard 引理定理 A.5 的偏变量/参数化版本，可以写成 $\delta(u,t) = t^2\cdot\mu(u,t)$，其中$\mu$ 是一个光滑的 $U\times\mathbb{R}\to\mathbf{R}^\infty$: □

## 附录 A. 背景

为便于在正文中查阅，我们在此简要记录一些基本定义和事实。

A.1. **形式光滑集**。 我们简要回顾一下形式光滑集([Sch13，定义 4.5.5； KS26，§2.1；GS25b， §2], Sch 中的论述 [Sch25]），它与 Dubuc 的[GS25b， §4.1]）等价于 Dubuc 的 *Cahiers* 托扑斯 [Dub79； KR87], 它是合成微分几何的一个"良适模型"。

我们的底域是实数。我们用 CAlg 表示交换 $\mathbb{R}$-代数构成的范畴。

**定义 A.1. (i)** 我们用 CrtSp 表示这样一个范畴：其对象为笛卡尔空间 $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$，态射为它们之间的光滑函数。因此，这是光滑流形范畴在笛卡尔空间上的全子范畴

$$\mathrm{CrtSp} \hookrightarrow \mathrm{SmthMfd}$$

。我们将一般的笛卡尔空间记作 $U, V \in$CrtSp。**(ii)** 我们通过赋予该范畴由微分良好开覆盖构成的覆盖（Grothendieck 预拓扑），将其视为一个位。

**命题 A.2** （参见 [KMS93，§35]）。 将光滑函数构成（普通的） $\mathbb{R}$-代数的函子，构成了光滑流形的一个满包含，因此特别也构成了笛卡尔空间的一个满包含 （定义A.1）：

$$\mathrm{CrtSp} \hookrightarrow \mathrm{SmthMfd} \xhookrightarrow{C^\infty(-)} \mathrm{CAlg}^{\mathrm{op}}$$

**定义 A.3**。 无穷小加厚点（晕点）的范畴，是交换代数的对范畴的一个满子范畴

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{FrmPnt} & \hookrightarrow & \mathrm{CAlg}^{\mathrm{op}} \\ \mathbb{D} & \longmapsto & C^\infty(\mathbb{D})\,. \end{array}$$

其中那些在合成微分几何文献中称为*Weil* 代数、或在代数几何中称为*Artin* 局部代数的对象，即具有如下形式的对象

$$C^\infty(\mathbb{D}) \simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \oplus V\,,$$

其中 $V \subset C^\infty(\mathbb{D})$ 是一个有限维理想，并且是幂零的，即

$$\exists_{k \in \mathbb{N}} \;:\; V^{k+1} = 0\,.$$

满足该条件的最小 $k$ 是 $\mathbb{D}$ 的幂零阶。

**例 A.4**。 一个无穷小圆盘，其维数为 $d \in \mathbb{N}$，无穷小阶为 $k \in \mathbb{N}$，是一个无穷小加厚点 $\mathbb{D}^d(k) \in$ FrmPnt（定义 A.3），其形式为

$$\begin{aligned} C^\infty\left(\mathbb{D}^d(k)\right) &\simeq \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d)/(x^1, \cdots, x^d)^{k+1} \\ &\simeq \mathbb{R}[\epsilon^1, \cdots, \epsilon^d]/(\epsilon^1, \cdots, \epsilon^d)^{k+1}\,. \end{aligned}$$

上面的第二个等价关系由 Hadamard 引理得出，我们在下文中会反复引用该引理。为便于查阅，现陈述一个同时适用于参数和偏导数的版本：

**引理 A.5** (Hadamard 引理，参见 [DK04，引理 2.2。7], 我们遵循 [GS25b，引理 4。1])。对于任意光滑函数 $f(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m)$ 以及任意 $l \in \mathbb{N}$，存在光滑函数 $\{h_{i_1\cdots i_{l+1}}\}_{i_1,\cdots i_{l+1}=1,\cdots\ m} \subset C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m)$ 使得

$$\begin{aligned} f \;=\; f(x,0) + \sum_{i=1}^m y^i \partial_{y^i} f(x,0) + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m y^i y^j \partial_{y^i}\partial_{y^j} f(x,0) \\ + \cdots + \; \tfrac{1}{l!} \sum_{i_1,\cdots,i_l=1}^m y^{i_1}\cdots y^{i_l} \cdot \partial_{y^{i_1}} \cdots \partial_{y^{i_l}} f(x,0) \\ + \sum_{i_1,\cdots,i_{l+1}=1}^m y^{i_1}\cdots y^{i_{l+1}} \cdot h_{i_1\cdots i_{l+1}}(x,y). \end{aligned}$$

**定义 A.6. (i)** 形式笛卡尔空间 的范畴是交换代数的对范畴的满子范畴，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{FrmCrtSp} & \xhookrightarrow{C^\infty(-)} & \mathrm{CAlg}^{\mathrm{op}} \\ U \times \mathbb{D} & \longmapsto & C^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathbb{D})\,, \end{array}$$

其对象是一个代数的张量积，该代数是某个
$U \in$ CrtSp（参见命题 A.2）上的光滑函数代数与一个 $\mathbb{D} \in$ FrmPnt（定义 A.3）上的光滑函数代数。

**(ii)** 我们将此范畴视为一个位，并赋予其如下覆盖（Grothendieck 预拓扑）：其覆盖族具有以下形式

$$\left\{ U_i \times \mathbb{D} \xhookrightarrow{\iota_i \times \mathrm{id}} U \times \mathbb{D} \right\}_{i \in I}$$

for

$$\{ U_i \xhookrightarrow{\iota_i} U \}_{i \in I}$$

CrtSp 中的一个覆盖族（一个微分良好开覆盖）。

由构造可知，我们有位的全忠实嵌入：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CrtSp} & \xhookrightarrow{i} & \mathrm{FrmCrtSp} \\ U & \longmapsto & U \times \mathbb{D}^0\,. \end{array} \tag{A.1}$$

**定义 A.7.** 我们称层拓扑斯

**(i)** 在 CrtSp 上是光滑集合的范畴，

**(ii)** 在 FrmCrtSp 上是形式光滑集的范畴，

并且前者在沿包含 $i_!$ 进行左基变换 A.1) 后的本质像构成既约的 形式光滑集：

$$\mathrm{SmthSet} \;:=\; \mathrm{Sh}(\mathrm{CrtSp}) \underset{\longleftarrow i^* \longrightarrow}{\overset{\longrightarrow i_! \hookrightarrow}{\perp}} \mathrm{Sh}(\mathrm{FrmCrtSp}) \;=:\; \mathrm{FrmSmthSet}\,, \tag{A.2}$$

这里，$i_!$ 在层上的左 *Kan* 延拓 $i_!$ 是对预层进行 2.5，再进行层化 $L$；我们利用了 $i^*$ 显然保持层这一事实：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSh}(\mathrm{CrtSp}) & \underset{\longleftarrow i^* \longrightarrow}{\overset{\longrightarrow i_! \hookrightarrow}{\perp}} & \mathrm{PSh}(\mathrm{FrmCrtSp}) \\ \uparrow & & \uparrow \downarrow L \\ \mathrm{Sh}(\mathrm{CrtSp}) & \underset{\longleftarrow i^* \longrightarrow}{\overset{\longrightarrow i_! \hookrightarrow}{\perp}} & \mathrm{Sh}(\mathrm{FrmCrtSp})\,. \end{array} \tag{A.3}$$

现在，基本的范畴论展示了以下重要性质：

**引理 A.8**。 包含映射 $i_!$ 在 (A.2)中：

**(i)** *preserves representables* $V \in \mathrm{CrtSp} \hookrightarrow \mathrm{SmthSet}$ *in that:*[1]

$$i_! V \simeq V \equiv V \times \mathbb{D}^0 \in \mathrm{FrmCrtSp} \hookrightarrow \mathrm{FrmSmthSet}\,, \tag{A.4}$$

**(ii)** 是全忠实的，因此

$$i^* \circ i_! \simeq \mathrm{id}\,, \tag{A.5}$$

**(iii)** 并且使得 既约的 对象 $X \in \mathrm{SmthSet}\ \mathrm{FrmSmthSet} \xrightarrow{i_!}$ 恰好是那些与其自身纯既约部分$\Re(X)$同构的对象，

$$X \simeq \Re(X)\,, \tag{A.6}$$

其中

$$\Re := i_! \circ i^*\,. \tag{A.7}$$

证明。 由余端公式（2.5）可得第一个结论：每一对（$\iota$，$f$）（映入笛卡尔空间 $V$、且经由笛卡尔空间 $W$因子化的映射）都等价于将其实际复合视为一对（$f \circ \iota$，id），如下所示：

$$\begin{array}{ccccc} & & W & \xrightarrow{f} & \\ U \times \mathbb{D} & \overset{\iota}{\nearrow} & \downarrow f & & V. \\ & \underset{}{\searrow} & V & \underset{\mathrm{id}}{\nearrow} & \end{array}$$

这表明 $i_!$ 在预层上保持可表对象。最后，我们的覆盖显然是次典范的，因为可表预层本身已经是层。

关于第二个结论，参见 [Kel82，命题 4。23] 另见 [Mac98，§IV.3 定理 1]。由此可得最后一个结论。□

无限维微分几何中的一个经典概念是 *Fr´echet* 流形 (参见 [Ham82，§I.4])。这里对它们进行了忠实的概括：

**引理 A.9**。 *Fr´echet* 流形到光滑集合的显然包含 (因此也进一步包含到形式光滑集合中，定义 *A.7*)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{FrchtMfd} & \hookrightarrow & \mathrm{SmthSet} \\ X & \longmapsto & \big(U \mapsto C^\infty(U, X)\big) \end{array} \tag{A.8}$$

是全忠实的。

证明。 这实质上就是 [Los94，定理 3.1 的陈述。1], 参见 [KS26，命题 2。22]。□

## A.2. 形式嵌入。

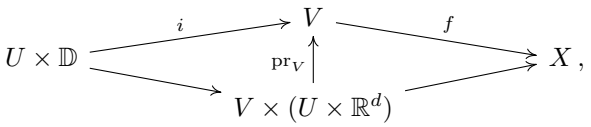
**定义 A.10**。 映射 $i : U \times \mathbb{D} \to V$ 属于FrmCrtSp（定义 A.6）是形式嵌入，如果其在 $U \times\{0\}$ 上的限制是光滑流形之间的嵌入，并且其在每个 $\{u\} \times \mathbb{D}$ 上的限制是单态射。此外，如果其在 适当的 形式嵌入在 $U \times\{0\}$ 上的限制也是适当映射。

下面的引理显然成立，但仍值得记录：

[1]我们在记号上省略米田嵌入。

**引理 A.11.** 每个 $U \times \mathbb{D} \overset{i}{\rightarrowtail} V \overset{f}{\twoheadrightarrow} X$都等价于 (2.3) 到 $(\iota, f')$，其中 $\iota$ 是一个形式真嵌入 (定义 A.10)，其余维可以任意高。

证明。 选择一个如下形式的单态射（其中 $d$ 可以任意大）：$\delta$ : $U \times \mathbb{D} \hookrightarrow U \times \mathbb{R}^d$ （参见 [GS25b，推论 4.3(iii)]），注意这使下图交换：




最后注意到 $\iota := (i,\ \delta)$ 是一个形式真嵌入。 □

**引理 A.12。** 对于每个余维充分高的真嵌入 $\iota$ : $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+c}$ ，存在一个 $\mathbb{R}^{n+c}$ 微分同胚，使得该嵌入为直线包含： $i \simeq (\mathrm{id},\ 0)$。

证明。 首先我们断言，存在一个从 $i$ 到 (id，0) 的真光滑同伦。注意到适当映射可延拓为一点紧化之间的基点映射（参见 [Jam84，第 80]页）。在本例中，延拓后的映射具有如下形式：$S^n \to S^{n+c}$ 因此当 $c \geq 1$时是基点零伦。这个基点零伦来自原映射之间的一个真同伦，正如所需。

由此可知， $i$ 与 (id,0) 通过环境各向同性相关（参见 [Hir76，§8.1 习题 11],，其中要求 $c > 1 + n$），因此也通过微分同伦相关（参见 [Hir76，§8.1 定理 1。3]）。□

A.3. **射束。** 关于喷射丛几何的传统背景知识，参见 [Sau89；Tak79]。

有限秩射束 $J^k_\Sigma E$ 是给定满射浸没 $\leq k$的截面的所有可能偏导数（阶数为 $p$ : $E \to \Sigma$ 光滑流形）的丛。 —

这一传统概念有一种简洁的合成微分表述（[KS26，§3。3][GS25b，§2。4]），它用任意点$\mathbb{D}_s$周围的极大无穷小圆盘$k$（Σ（例 A.4）来描述：点 $s \in \Sigma$上 $J^k_\Sigma E$ 的纤维 $s$ 由 $p$ 在$\mathbb{D}_s$上$k$的截面组成：

$$(J^k_\Sigma E)_s \simeq \mathrm{FrmSmthSet}_{/\Sigma}\left(\mathbb{D}_s(k),\, E\right) \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow & \downarrow p \\ \mathbb{D}_s(k) & \hookrightarrow & \Sigma \end{array} \right\},$$

并且 $J^k_\Sigma E$ 由此自然地继承光滑流形的结构。

现在，显然的包含映射 $\mathbb{D}_s(k)\ \mathbb{D}_s(k \hookrightarrow 1)$ 由此诱导出自然投影

$J^{k+1}_\Sigma E \twoheadrightarrow J^k_\Sigma E$，而无限秩射束（参见 [Sau89，§7]）是这些投影的射影极限：

$$J^\infty_\Sigma E := \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} J^k_\Sigma E\,. \tag{A.9}$$

传统上，这个极限是在 Fr´歇流形范畴中理解的（参见引理 A.9），但先验地，尚不清楚这与在形式光滑集范畴中形成的相应极限有何关系，因为包含映射 $i_!$ (A.2)一般不保持极限

这一点 $i_!$ 确实保留了特定的极限（A.9），这就是我们的主要结果定理 2.1。

## 参考文献

[Bor94] F. Borceux.《层范畴》第3卷。《范畴代数手册》。剑桥：剑桥大学出版社，1994。isbn：9780521061247。doi： 10.1017/CBO9780511525872 （引自第1页）。[DK04] J. Duistermaat 和 J. Kolk。《多维实分析 I：微分》。第86卷。《剑桥高等数学研究丛书》。伦敦：剑桥大学出版社，2004。isbn：9780521551144（引自第11页）。[Dub79] E. Dubuc。《论合成微分几何的模型》。载于：《拓扑与范畴微分几何笔记》20.3（1979），第231–279页。网址： http://www.numdam.org/item/CTGDC_1979__20_3_231_0 （引自第1、10页）。[GS25a] G. Giotopoulos 和 H. Sati。《通过高阶几何的场论 I：场的光滑集合》。载于：《几何与物理学杂志》213（2025年7月），第105462页。doi： 10.1016/j.geomphys.2025.105462。arXiv：2312.16301[math-ph]（引自第2页）。[GS25b] G. Giotopoulos 和 H. Sati。《通过高阶几何的场论 II：作为综合基础的加厚光滑集合》。2025。arXiv：2512.22816[math-ph]（引自第1、8、10、11、13页）。[Ham82] R. S. Hamilton。《Nash–Moser逆函数定理》。载于：《美国数学会通报》7.1（1982），第65–222页。doi： 10.1090/S0273-0979-1982-15004-2 （引自第12页）。[Hir76] M. W. Hirsch。《微分拓扑》。第33卷。《数学研究生教材》。纽约：Springer-Verlag，1976。isbn：978-0-387-90148-0。doi：10.1007/978-1-4684-9449-5 （引自第13页）。[Jam84] I. M. James。《一般拓扑与同伦论》。Springer，1984。doi： 10.1007/978-1-4613-8283-6 （引自第13页）。[Kel82] G. M. Kelly。《富范畴论基本概念》。第64卷。《伦敦数学学会讲义系列》。再版为：《范畴论理论与应用重印本》第10期（2005），第1–136页。剑桥大学出版社，1982。isbn：9780521287029（引自第3、12页）。[KMS93] I. Kol´aˇr、P. Michor 和 J. Slov´ak。《微分几何中的自然运算》。Springer，1993。doi： 10.1007/978-3-662-02950-3（引自第10页）。[Koc10] A. Kock。《流形的综合几何》。第180卷。《剑桥数学论丛》。剑桥：剑桥大学出版社，2010。doi：10.1017/CBO9780511691690 （引自第1页）。[Koc79] A. Kock，编。《几何中的拓扑斯理论方法》。第30卷。《各类出版物丛书》。奥胡斯：奥胡斯大学数学研究所，1979。网址： https://ncatlab.org/nlab/files/Kock-1979.pdf （引自第1页）。

[KR87] A. Kock 和 G. Reyes。《勘误与补遗：便捷向量空间嵌入 Cahiers 托扑斯》。载于：《拓扑与范畴微分几何笔记》28.2（1987），第99–110页。网址：ht
tp://www.numdam.org/item/CTGDC_1987__28_2_99_0（引自第10页）。[KS26] I. Khavkine 和 U. Schreiber。《微分方程的合成几何：射流与余代数结构》。载于：《几何与物理学杂志》（2026）。即将出版。arXiv：1701.06238 [math.DG]（引自第2、3、10、12、13页）。[Lav96] R. Lavendhomme。《合成微分几何基本概念》。第13卷。《Kluwer数学科学丛书》。多德雷赫特：Springer，1996。doi：10.1007/978-1-4757-4588-7（引自第1页）。[Lor21] F. Loregian。《余端演算》。第468卷。《伦敦数学学会讲义系列》。剑桥大学出版社，2021。isbn：978-1-108-77865-7。doi：10.1017/9781108778657。arXiv：1501.02503 [math.CT]（引自第3页）。[Los94] M. V. Losik。《范畴微分几何》。载于：《拓扑与范畴微分几何笔记》35.4（1994），第274–290页。网址：http://eudml.org/doc/91549（引自第12页）。[Mac98] S. Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。第2版。第5卷。《数学研究生教材》。纽约：Springer，1998。isbn：9781475747218。doi：10.1007/978-1-4757-4721-8（引自第12页）。[MM92] S. Mac Lane 和 I. Moerdijk。《几何与逻辑中的层：拓扑斯理论入门》。Universitext丛书。纽约：Springer-Verlag，1992。doi：10.1007/978-1-4612-0927-0（引自第1页）。[Sau89] D. Saunders。《射丛几何》。第142卷。《伦敦数学学会讲义系列》。剑桥：剑桥大学出版社，1989。isbn：9780521369480。doi：10.1017/CBO9780511526411（引自第13页）。[Sch13] U. Schreiber。《凝聚 $\infty$-托扑斯中的微分上同调》。v2（2017）：https://ncatlab.org/schreiber/files/dcct170811.pdf。2013。arXiv：1310.7930 [math-ph]（引自第10页）。[Sch25] U. Schreiber。《物理学中的高阶拓扑斯理论》。载于：《数学物理百科全书》。R. Szabo 和 M. Bojowald 编。第2版。Academic Press，2025，第62–76页。isbn：9780323957069。doi：10.1016/B978-0-323-95703-8.00210-X。arXiv：2311.11026 [math-ph]（引自第10页）。[Tak79] F. Takens。《变分法逆问题的全局版本》。载于：《微分几何杂志》14.4（1979），第543–562页。网址：https://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214435235（引自第2、13页）。[Vin81] A. Vinogradov。《非线性微分方程几何》。载于：《苏联数学》17.2（1981），第1624–1649页。doi：10.1007/BF01084594（引自第1页）。

纽约大学阿布扎比分校数学项目与量子和拓扑系统中心电子邮箱： gg2658@nyu.edu捷克科学院数学研究所，布拉格 ˇ现地址：Zitn´a 25, 110 00 Prague 1, 捷克电子邮箱： khavkine@math.cas.cz纽约大学阿布扎比分校数学项目与量子和拓扑系统中心电子邮箱： hsati@nyu.edu纽约大学阿布扎比分校数学项目与量子和拓扑系统中心电子邮箱： us13@nyu.edu