arXiv:2601.15890v1 [cs.DM] 22 Jan 2026

稀疏图的存在正向转导*

Nikolas M¨ahlmann Sebastian Siebertz 华沙大学
不来梅大学 maehlmann@mimuw.edu.pl
siebertz@uni-bremen.de

摘要

单子稳定性推广了结构图论中的许多温和性概念，例如平面性、有界度、有界树宽和处处稀疏性。稀疏化猜想预测，（可能稠密的）单子稳定图类恰好是那些能够通过一阶（FO）转导，在（总是稀疏的）处处稠密类中进行逻辑编码的图类。迄今为止，该猜想已在若干特殊情形下得到验证，例如有界灌木深度图类，以及有界（线性）团宽、孪生宽度和合并宽度的单子稳定片段。

在这项工作中，我们提出了存在正稀疏化猜想，该猜想预测，余匹配自由的单子稳定类恰好是那些仅使用存在正 FO 公式、从处处稠密类转导而来的图类。虽然这一一般猜想仍未解决，但我们验证了原猜想所有已知特殊情形下该猜想均成立。更进一步，我们发现稀疏原像是稠密输入图的子图。

作为一项关键要素，我们引入了一种新的组合运算，称为子翻转。它是翻转操作的自然余匹配自由对应概念，而翻转操作是刻画单子稳定性的核心工具。利用子翻转，我们通过对已知的单子稳定性刻画（即翻转平坦性和翻转游戏）作适当强化，刻画了单子稳定性的余匹配自由片段。

在尝试将我们的结果推广到表达能力更强的 MSO 逻辑时，我们发现（或者说重新发现？）：在关系结构上，（存在）正的 MSO 与（存在）正 FO 具有相同的表达能力。

*NM 获得了欧洲研究理事会（ERC）资助，资助协议编号为 101126229 – buka。

目录

1 引言 3 2 预备知识 11

3 关于自环 133.1 一般转导中的自环.13 3.2 正转导中的自环.14

4 子翻转 **15**
4.1 翻转与划分.15 4.2 子翻转.15 4.3 对称性.16 4.4 传递性.18 4.5 遗传性.18 4.6 通过子翻转逼近翻转.19

5 子翻转平坦性 21

6 子翻转秩 22
6.1 定义与基本性质.22 6.2 有界子翻转秩.24 6.3 大余匹配意味着高秩.25

7 禁诱导子翻转 **26**

8 存在正一阶逻辑的范式 **28**

9 单子非相等性质 **29**
9.1 非结构.29 9.2 结构.30

10 有界子翻转深度的 EP-稀疏化 **32**
10.1 定义与基本性质.32 10.2 稀疏化.33

11 结构有界扩张的 EP-稀疏化 36

12 正 MSO **39**

1 引言

一阶转导已成为结构图论和有限模型论中的一项基础工具，它利用逻辑将一类结构编码到另一类结构中，提供了一种便捷的方法。非正式地说，转导Tφ 是由彩色图的签名上的一个二元一阶公式 $\varphi(x, y)$指定的操作。它将一个输入图 G 映射到集合T$\varphi(G)$，该集合包含通过以下三个步骤得到的每一个图 H。（示例见图1。）

1. $G \to G'$：为 G 着色，顶点颜色出现在 φ中。2. $G' \to H'$：令 φ 定义一个新的边关系：$uv \in E(H') \Leftrightarrow G' \models \varphi(u, v)$。3. $H' \to H$：选择 H 作为 H' 的任意诱导子图，并移除顶点颜色。

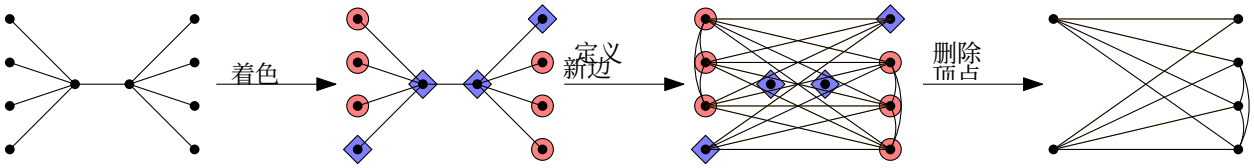

图1：转导示例。最左侧：图 G。最右侧：图 $H \in$ T$\varphi(G)$，对应公式 $\varphi(x, y) = (\text{dist}(x, y) = 3) \vee (\text{Red}(x) \wedge \text{Red}(y))$。

其他可用转导表示的图变换包括补图和平方运算，分别由公式 $\neg E(x, y)$和 $E(x, y) \vee \exists z \left(E(x, z) \wedge E(z, y)\right)$指定。这促使人们研究在转导下保持不变的图类性质。一个常见的此类转导封闭类性质是有界团宽：对于任意团宽由某个常数界定的图类 $\mathscr{C}$，以及任意转导T，类T($\mathscr{C}$) := $\bigcup_{G \in \mathscr{C}}$ T(G)的团宽仍由某个（可能更大的）常数界定。对于任意类 $\mathscr{D} \subseteq$ T($\mathscr{C}$)，我们称 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}$的转导，并称 $\mathscr{C}$ 转导出 $\mathscr{D}$。转导封闭类性质的其他例子包括有界灌木深度、有界线性团宽、有界孪生宽度和有界合并宽度。涵盖所有先前例子的最一般的非平凡转导封闭类性质是单子依赖：如果一个类不能转导出所有图组成的类，则称该类单子依赖。本文研究单子依赖的三个片段之间的关系：1. 无二分团（弱稀疏）片段；2. 无半梯子片段；以及3. 无半图（稳定）片段。

定义 1.1。我们称一个二分图 G，其顶点为 $a_1, \ldots, a_n$ 和 $b_1, \ldots, b_n$

- 为阶数为 n 的二分团 $K_{n,n}$，如果对于所有 $i, j \in [n]$，$a_i b_j \in E(G)$，
- 为阶数为 n 的半图，如果对于所有 $i, j \in [n]$，$a_i b_j \in E(G) \Leftrightarrow i \leqslant j$，并且
- 为阶数为 n 的余匹配，如果对于所有 $i, j \in [n]$，$a_i b_j \in E(G) \Leftrightarrow i \neq j$。

二分图 H 是图 G 的半诱导子图，如果存在 $A, B \subseteq V(G)$，使得 G 中由两侧 A 和 B 之间诱导出的二分子图同构于 H。若一个图类不包含任意大的二分团 / 半图 / 余匹配作为半诱导子图，则称其为二分团自由 / 无半图 / 余匹配自由。若该类同时是无半图且余匹配自由的，则称其为无半梯子。图 2 展示了一个示意图。

单子依赖的<biclique-free 片段（也称为弱稀疏 片段）恰好由处处稠密 类构成。处处稠密的概念是由 Ne$\check{\text{s}}$et$\check{\text{r}}$il 和 Ossona de Mendez [26] 创立的稀疏性理论的主要研究对象。它推广了稀疏图的许多驯性概念，例如平面性、有界树宽、排除子式、有界度和有界扩张。

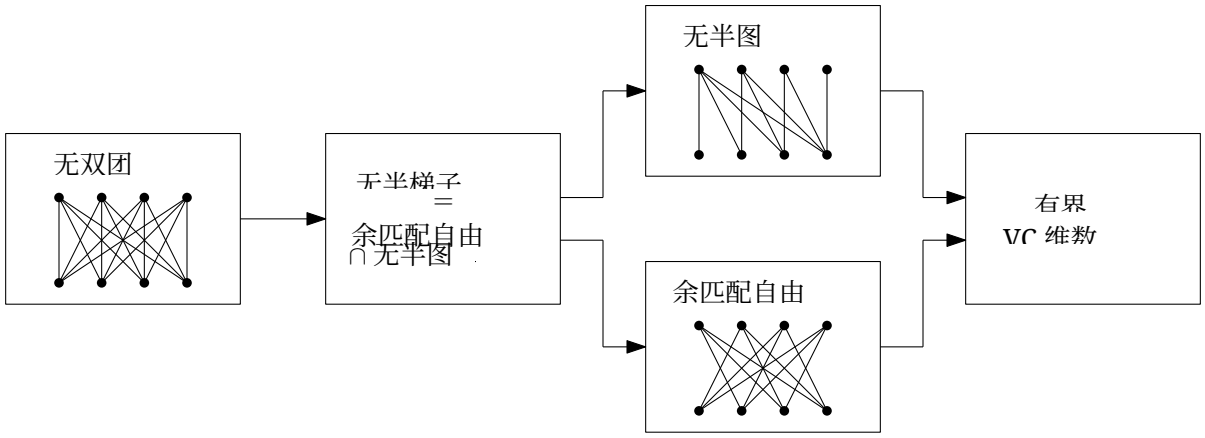

图 2：图类性质的层级。性质之间的箭头 $P_1 \to P_2$ 表示，每个具有性质 P_1 的图类也具有性质 P_2。

在无双团情形下，处处稠密这一组合概念与单子依赖这一逻辑概念的等价性，是最初将稀疏性理论与模型论联系起来的关键成果之一。这一结论源于 Podewski 和 Ziegler [34], 、Adler 和 Adler [1], 以及 Dvoˇr´ak [15] 的研究成果。

作为处处稀疏性的推广，单子依赖中的无半图片段恰好由单子稳定的图类构成 [28], ，也就是说，这些图类不会转导出所有半图组成的图类 [2]。处处稀疏性仅适用于稀疏图类，而单子稳定性还涵盖地图图等稠密图类，以及所有有界灌木深度图类。单子稳定性具有变换封闭性，因此，处处稀疏图类的任何转导都是单子稳定的。稀疏化猜想预言单子依赖的无二分团片段与无半图片段之间存在更强的联系，并断言反向结论也应成立。

猜想 1.2（见 [31]）。对于每个图类 $\mathscr{C}$，以下条件等价。

1. $\mathscr{C}$ 是单子稳定的。*2.* $\mathscr{C}$ 是处处稠密图类的转导。

迄今为止，稀疏化猜想已对所有具有有界灌木深度 $\mathscr{C}$、线性团宽度 [20, 21], 、团宽 [29], 、孪生宽度 [28], 或合并宽度 [19], 的无半图类 [9]得到验证。在这些情形中，实际上都有更强的结论。例如，每个具有有界团宽的无半图类，都可以从一个不仅处处稠密，而且具有有界树宽的类转导得到 [28]（这等价于同时具有有界团宽且无双团 [6, 22]）。这启发了猜想 1.2 的如下细化。

猜想 1.3。 设 $\mathcal{P}$ 是一个非平凡且变换封闭的类性质。对于每个图类 $\mathscr{C}$，以下命题等价。

1. $\mathscr{C}$ 是一个具有 $\mathcal{P}$的无半图类。*2.* $\mathscr{C}$ 是一个具有 $\mathcal{P}$的无双团类的转导。

注意，取 $\mathcal{P}$ 为单子依赖，即可由此猜想推出稀疏化猜想。稀疏化猜想中已解决的情形现在可以表述如下。

定理 1.4。 对于所有，猜想 *1.3* 对类性质有界 $\mathcal{P}$ 成立

$$\mathcal{P} \in \{\text{灌木深度、线性团宽度、团宽、孪生宽度、合并宽度}\}。$$

特别是，对于每个无半图类 $\mathscr{C}$，以下结论均成立。

1. $\mathscr{C}$ 具有有界灌木深度，当且仅当$\mathscr{C}$ 是某个有界树深度类 *[20, 21]*的转导。*2.* $\mathscr{C}$ 具有有界线性团宽度，当且仅当$\mathscr{C}$ 是某个有界路径宽度类 *[29]*的转导。*3.* $\mathscr{C}$ 具有有界团宽，当且仅当$\mathscr{C}$ 是某个有界树宽类 *[28]*的转导。*4.* $\mathscr{C}$ 具有有界李生宽度，当且仅当$\mathscr{C}$ 是某个有界稀疏李生宽度类 *[19]*的转导。*5.* $\mathscr{C}$ 具有有界合并宽度，当且仅当$\mathscr{C}$ 是某个有界扩张类 *[9]*的转导。

定理中“特别地”这一部分用到了以下事实。

定理 1.5. 每个无双团类 $\mathscr{C}$ 满足

1. 有界灌木深度具有有界树深度 *[20, 21]*,*2.* 有界线性团宽度具有有界路径宽度 *[22]*,*3.* 有界团宽具有有界树宽 *[6, 22]*,*4.* 有界李生宽度具有有界稀疏李生宽度 *[4]*,*5.* 有界合并宽度具有有界扩张 *[14]*。

贡献 1：存在正稀疏化

我们研究的主要对象是单子依赖中的无半梯子片段，它严格包含处处稀疏类，并严格包含于单子稳定类中。一个类是无半梯子的，当且仅当它无半图且余匹配自由 [16]。无半梯子的单子依赖类的典型例子包括地图图类，以及处处稀疏类的固定幂 [16]。与稀疏化猜想类似，我们猜想，无半梯子的单子依赖类恰好是处处稀疏类的存在正转导。更形式化地说，如果一个公式不包含否定符号（¬），尤其是不包含不等号（≠），那么它就是正的。此外，如果一个正公式不包含全称量词（∀），那么它就是存在的。这种情况下，我们称之为存在正公式。如果一个转导由存在正公式指定，我们就称它为*EP*-转导。

事实证明，在研究 EP-转导时，所有顶点都有自环（即每个顶点都与自身邻接）至关重要。直观地说，这是因为否则，两个顶点之间有边相连这一信息就会隐含地携带这些顶点不相等这一非正信息。我们将在下一小节和第 3 节中更详细地讨论这一现象。下文中，自反图 指每个顶点都有自环的图。为使表述更加清晰，我们用 a ○ 符号标记需要这一假设的陈述。另一方面，如果我们没有明确提及自反性，就表示允许图中存在自环，但不要求一定有自环。有时我们使用部分自反图这一术语，以强调我们是在这一更宽松的设定下进行讨论。

我们提出以下存在正稀疏化猜想。

猜想 1.6 (○)。 对于每个由自反图构成的类 $\mathscr{C}$，以下条件等价。

1. $\mathscr{C}$ 是无半梯子且单子依赖的。*2.* $\mathscr{C}$ 是处处稀疏的自反图类的一种 *EP*-转导。

注意，根据 [28] 和 [16]， $\mathscr{C}$ 是无半梯子且单子依赖的这一条件，等价于 $\mathscr{C}$ 是余匹配自由且单子稳定的这一条件。

同样，这一陈述可以细化为单子依赖的子性质。

猜想 1.7 (♂)。 设 $\mathcal{P}$ 是一个非平凡且变换封闭的类性质。对于每个由反射图组成的类 $\mathscr{C}$，以下条件等价。

1. $\mathscr{C}$ 是一个无半梯子的类，且满足 $\mathcal{P}$。 *2.* $\mathscr{C}$ 是一个由满足 $\mathcal{P}$的反射图构成的无双团类的 *EP*-转导。

作为我们的第一个主要结果，我们证明了猜想 1.6 的推论 (2. $\Rightarrow$ 1.)。在这一方向上，无需对自环作任何假设。

定理 1.8。 设 $\mathscr{C}$ 是一个部分自反图的处处稀疏类。$\mathscr{C}$ 的每个 *EP*-转导都是无半梯子的，且单子依赖。

由此可推得，猜想 1.7 的推论 (2. $\Rightarrow$ 1.) 也成立。

推论 1.9. 猜想 *1.7* 的 *(2. $\Rightarrow$ 1.)* 蕴含成立。

证明. 设 $\mathscr{C}$ 是无双团类 $\mathscr{D}$ 的一个 EP 转导，且该类具有某个非平凡的变换封闭类性质 $\mathcal{P}$。$\mathscr{D}$ 必须是单子依赖的，因为单子依赖是最一般的非平凡变换封闭类性质。于是，根据无双团性，$\mathscr{D}$ 处处稀疏。由定理 1.8，$\mathscr{C}$ 无半梯子。由于 $\mathcal{P}$ 变换封闭，$\mathscr{C}$ 仍具有 $\mathcal{P}$。 □

考虑我们的结构性结果的一项算法应用。文献 [10] 证明，在每个余匹配自由的单子稳定图类上，支配集和独立集问题都存在多项式核（相对于解的大小 k）。由此我们得出，这些问题在处处稀疏类的所有 EP 转导上都存在多项式核。

随着存在正稀疏化猜想的 (2. $\Rightarrow$ 1.) 蕴含得到证明，我们将继续证明所有原始稀疏化猜想已知成立的特殊情形下的完整等价性。

定理 1.10 (♂)。 猜想 *1.7* 对类性质 有界 $\mathcal{P}$ 对所有情况均成立

$$\mathcal{P} \in \{\textit{shrub-depth, linear clique-width, clique-width, twin-width, merge-width}\}.$$

特别是，对于每个由自反图组成的无半梯子类 $\mathscr{C}$，都存在 *EP* 转导 稀疏化 和恢复，使得每个图 $G \in \mathscr{C}$ 都包含一个自反子图 G^*，满足

$$G^* \in \mathsf{Sparsify}(G) \textit{ and } G \in \mathsf{Recover}(G^*),$$

并且类 $\mathscr{D} := \{G^* : \ G \in \mathscr{C}\}$ 满足以下所有条件。

1. 如果 $\mathscr{C}$ 具有有界灌木深度，那么 $\mathscr{D}$ 具有有界树深度。*2.* 如果 $\mathscr{C}$ 具有有界线性团宽度，那么 $\mathscr{D}$ 具有有界路径宽度。*3.* 如果 $\mathscr{C}$ 具有有界团宽，那么 $\mathscr{D}$ 具有有界树宽。*4.* 如果 $\mathscr{C}$ 具有有界孪生宽度，那么 $\mathscr{D}$ 具有有界稀疏孪生宽度。*5.* 如果 $\mathscr{C}$ 具有有界合并宽度，那么 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张。

请注意，在上述定理中，稀疏化图是通过原始输入图的子图得到的。这与一般稀疏化猜想（定理 1.4）已知的情形形成对比：在那些情形中，人们仅能证明存在某个具有所需结构性质、且与 $\mathscr{C}$ 转导等价的图类，却不能保证作为见证的图是原始图的子图。因此，对于该猜想所有已知的情形，此定理都确立了一种强得多的规范形式的稀疏化：它保留并细化 G 的结构，而不是对其进行抽象的重新编码。

图 3 概述了（存在正）稀疏化猜想中已解决的情形，以及其中出现的类性质之间的关系。

贡献 2：单子非等同性质

我们花些时间提炼出模型论的核心，以此解释半梯子自由性与 EP 转导之间的联系，以及为何需要使用自反图。

令 $\varphi(\bar{x},\ \bar{y})$ 为一个定义在彩色图的签名上的一阶公式，其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 是两个长度相同的元组变量 t。我们称 φ 在图类 $\mathscr{C}$ 上具有单子序性质，如果对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$，都存在某个图 $G_\ell \in \mathscr{C}$ 的一个图着色 G_ℓ^+，以及元组 $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\ell \in V(G)^t$，使得对于所有 $i,\ j \in [\ell]$

$$G_\ell^+ \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \iff i \leqslant j. \tag{$*$}$$

尽管我们先前通过转导定义了单子稳定性，但 Baldwin 和 Shelah [2] 给出的原始（且等价的）定义指出：若图类 $\mathscr{C}$ 上没有任何公式具有单子序性质，则该图类是单子稳定的 $\mathscr{C}$。现在，自然可以将单子序性质定义中的 $(*)$ 替换为，从而定义单子非相等性质

$$G_\ell^+ \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \iff i \neq j.$$

简单公式 $\varphi(x,\ y) = \neg(x = y)$ 在任何包含任意大图的图类上都具有单子非相等性质。因此，单子非相等性质只有对正公式才有意义。我们证明，对于自反图，EP公式的单子非相等性质刻画了单子依赖的无半梯子片段。

定理 1.11 (◌)。 对于每个自反图类 $\mathscr{C}$，以下条件等价 *t.*

1. $\mathscr{C}$ 是无半梯子的且单子依赖的。*2.* 在 $\mathscr{C}$ 上没有任何 *EP*公式具有单子非相等性质。

在上述结果中，假设图是自反的至关重要。通过与一般的部分自反图情形进行对比，可以清楚地看到其中的差异；在后者中，我们证明如下结果。

定理 1.12. 对于每个部分自反图类 $\mathscr{C}$，以下条件等价。

1. $\mathscr{C}$ 是无半梯子、无自反团的，且单子依赖。 *2.* 没有任何存在正公式在 $\mathscr{C}$ 上具有单子非相等性质。

这里，无自反图是指没有顶点带有自环的图。如果一个图类不包含所有无自反团作为诱导子图，我们就称它为无自反团的 。显然，在无自反团类上，边关系 $E(x, y)$ 具有单子非相等性质。这说明了为什么在正逻辑的语境下，自反图比无自反图表现得更好：在无自反图中，通过边相连这一正信息蕴含了不相等这一负信息。如前所述，我们将在第 3 节进一步讨论自反性。

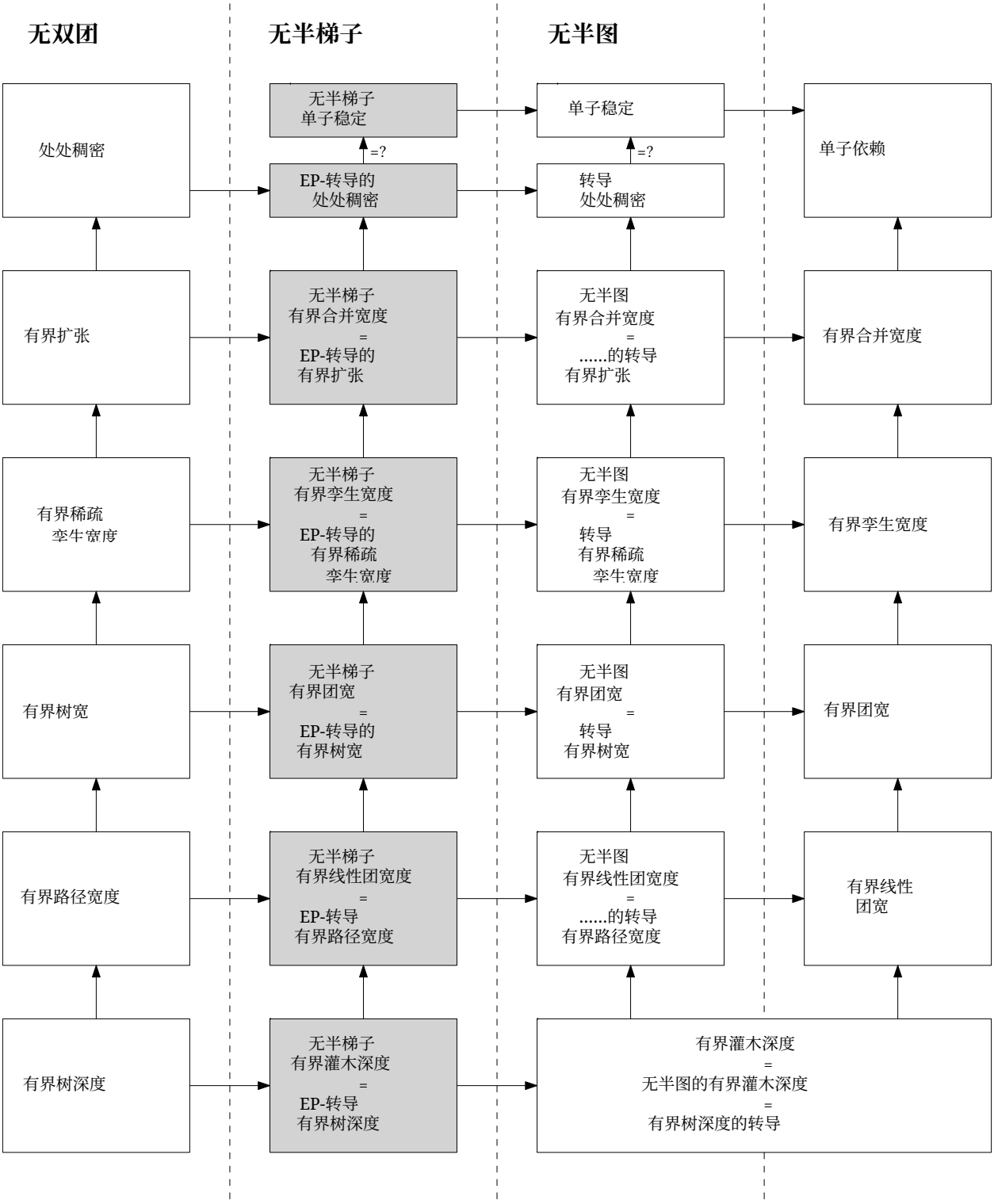

图 3：图类性质的层级结构。两个性质之间的箭头 $P_1 \to P_2$ 表示每个具有性质 P_1 的图类都具有性质 P_2。突出显示的无半梯子列展示了我们关于存在正稀疏化猜想的研究结果。

贡献3：子翻转

作为对贡献1和贡献2中逻辑结果的基础，我们着手对单子依赖的无半梯子片段进行系统的组合研究。我们通过一种操作获得了多种组合刻画，我们将其称为子翻转，并认为它本身也具有独立的研究价值。我们的出发点是更一般的单子稳定类（即单子依赖的无半图片段）。直到最近，所有单子稳定类的一阶逻辑模型检测问题才被证明具有固定参数可处理性 [8, 11]。这些算法结果的关键，在于出现了大量关于单子稳定性的组合刻画，而非模型论刻画。这些组合刻画的核心是翻转 操作。给定一个图 G，通过选取 V（G）的一个划分 $\mathcal{P}$，且其大小至多为 k，再对 $\mathcal{P}$ 中任意部分对之间的边关系取补，就可以得到 G 的一个 k-翻转 （也可以对部分自身取补，但保留自环）。示例见图 4。

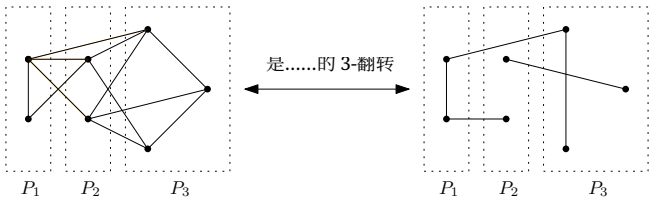

图4：两个互为 3-翻转的图。划分 $\{P_1, P_2, P_3\}$ 为此提供了见证，其中顶点对 (P_1, P_2)、(P_2, P_3) 和 (P_3, P_3) 被翻转。

通常，目标是通过对某个较小的 k 进行 k-翻转，使顶点集合彼此保持高距离。以下这种通过称为翻转平坦性的性质刻画单子稳定性的结果就是一个典型例子；该性质也是对单子稳定类进行算法处理的主要工具之一。

定义 1.13。 若图类 $\mathscr{C}$ 满足以下条件，则称其为翻转平坦：对于每个 $r \in \mathbb{N}$，都存在一个函数 $M_r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和一个常数 $k_r \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $m \in \mathbb{N}$、 $G \in \mathscr{C}$ 和满足 $|W| \geqslant M_r(m)$ 的 $W \subseteq V(G)$，都存在一个子集 $A \subseteq W$，满足 $|A| \geqslant m$，以及一个 k_r-翻转 H，其作用于 G，使得任意两个不同的顶点 $u, v \in A$

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \geqslant r.$$

定理1.14 ([12])。 一个图类是单子稳定的，当且仅当它是翻转平坦的。

直观地说，翻转平坦性表明，在每个足够大的集合 W 中，我们都能找到一个仍然很大的子集 A，使得对其进行一次小规模翻转后，其中的顶点两两之间具有高距离（“充分分离”）。

在这项工作中，我们考虑翻转操作的一种限制形式，称为子翻转。如果图 H 既是图 G 的 k-子翻转，又是图 G 的子图，那么称图 H 是图 G 的 k-子翻转。这意味着子翻转只允许删除边，因此，只有在以下条件成立时，我们才能对图 $V(G)$ 的翻转划分 $\mathcal{P}$ 中的两个部分 P 和 Q 之间的边关系取补图：

- P 和 Q 是同一部分，且 $P = Q$ 上诱导出的图是一个团；或者
- P 和 Q 是不同部分，且 P 与 Q 之间半诱导出的图是一个二分团。

由于限制更多，子翻转相比翻转有一些优势。举例来说，来自 [3] 的下一个引理指出，同一个图的多次翻转可以合并为一次翻转，从而大致实现相同的分离效果。这种翻转合并会损失信息，而且要证明这一点极具挑战性。

引理 1.15 ([3, 引理 8])。 设 G 是一个图，且 H_1、…、H_m 是 G的 k-翻转。存在一个 $\mathcal{O}(k^m \cdot 2^{k^m})$-翻转 H，属于 G，使得对于所有 u， $v \in V(G)$ 以及 $i \in [m]$

$$6 \cdot \mathrm{dist}_H(u, v) \geqslant \mathrm{dist}_{H_i}(u, v).$$

相比之下，通过处理两个翻转划分的公共细化，子翻转的聚合既简单又无损。（我们稍后将在引理 4.12 中证明这一观察的加强版本。）

观察 1.16. 设 G 是一个图，且 $H_1, \dots, H_m$ 是 G 的 k-子翻转。存在 G 的一个 k^m-子翻转 H，它是所有 H_i 的子图。

这种良性特性是以子翻转的能力弱于不受限制的翻转为代价的。通过在二分划分的两个部分之间进行翻转，2-翻转可以将任意余匹配变成匹配。这种翻转实现了非常强的分离：翻转后，每个顶点都只有一个邻居，并且与所有其他顶点的距离为 ∞。小型子翻转无法实现这一点。不过，事实证明，在某种意义上，余匹配是子翻转效果不如翻转的唯一一种图。作为我们的主要结果之一，我们证明，在无余匹配类中，总能用子翻转近似翻转。

定理 1.17. 设 G 是一个不含大小为 t 的半诱导余匹配的图，且 G 的一个 k-翻转为 H。存在 G 的一个 kt^k-子翻转 H'，使得对于所有 u，$v \in V(G)$

$$3t \cdot \operatorname{dist}_{H'}(u, v) \geqslant \operatorname{dist}_H(u, v).$$

借助上述定理，我们通过在单子稳定性的已知刻画中以子翻转替代翻转，获得了无半梯子的单子依赖类的多种组合刻画。这里我们无需对自环作任何假设。

定理 1.18. 对于每个图类 $\mathscr{C}$，以下条件等价。

1. $\mathscr{C}$ 无半梯子且单子依赖。 *2.* $\mathscr{C}$ 是子翻转平坦的。 *3.* 子翻转者在 $\mathscr{C}$ 上的子翻转者博弈中有必胜策略。 *4.* $\mathscr{C}$ 无半梯子，并且对于每个 r，$k \in \mathbb{N}$，以下两项均成立：

- 存在一个星图 r-交叉，它不是 $\mathscr{C}$ 中任何诱导子图的 k-子翻转。
- 存在一个团 r-交叉，它不是 $\mathscr{C}$ 中任何诱导子图的 k-子翻转。

显然，将翻转平坦性的定义（定义 1.13）中的翻转替换为子翻转，即可得到子翻转平坦性的定义。子翻转者博弈同样是从翻转游戏推导而来；后者是单子稳定性的博弈论刻画 [18]。最后一项将单子稳定性的一种基于禁用诱导子图 [8, 13] 的刻画，限制到无半梯子的情形。我们将在相应章节给出正式定义。

贡献 4：（存在）正 MSO 的坍缩

最后，在探索将我们的结果推广到表达能力更强的单子二阶逻辑（MSO）的可能性时，我们发现，在关系结构上，（存在）正 MSO 可坍缩为（存在）正 FO。

定理 1.19。 每个（存在）正 *MSO* 公式 $\varphi(\bar{x}, X)$ 都等价于一个（存在）正 *FO* 公式。

这个定理不难证明。不过，据我们所知，此前文献中尚未有人提出过，我们认为值得将其明确陈述出来。

论文结构

我们在第 2 节介绍预备知识。第 3 节进一步讨论自环。在第 4 至第 7 节中，我们引入子翻转，并证明单子稳定性的无半梯子片段的组合刻画，这些刻画构成了定理 1.18。在第 8 和第 9 节中，我们刻画单子非相等性质。在第 10 和第 11 节中，我们说明如何为 EP-转导找到作为子图的稀疏原像（定理 1.10）。在第 12 节中，我们说明（存在）正 MSO 如何归约为（存在）正 FO。

2 预备知识

我们采用图论和模型论中的标准记号，并参阅 [7] 和 [23] 以了解更多背景知识。我们用 $[m]$ 表示整数集合 $\{1, \dots, m\}$。

彩色图

在逻辑的语境中，我们将图视为一种有限结构，其签名仅包含一个二元关系符号 E，该符号解释为对称边关系。给定一个图 G，我们用 $V(G)$表示其顶点集，用 $E(G)$表示其边集。我们也允许存在自环，即对于顶点 v，可能有 $E(v,\ v)$（关于这一假设的讨论见第3节）。如果每个顶点都有自环，则称图为**自反的**；如果没有顶点有自环，则称其为**反自反的**。若 $V(H) \subseteq V(G)$且 $E(H) \subseteq E(G)$，则图 H 是图 G 的**子图**。对于图 $G,\ H$（其顶点集可能有交集），我们用 $G \cup H$ 表示顶点集为 $V(G) \cup V(H)$、边集为 $E(G) \cup E(H)$的图。如果图 G 和 H 的顶点集不相交，我们有时记作 $G \uplus H$。下面回顾引言中的一个定义。

定义 1.1. 我们称一个二分图为顶点集为 $G, \dots, a_n$ 和 $b_1, \dots, b_n$ 上的

- 阶数为 n 的**二分团** $K_{n,n}$，如果对所有 $i, j \in [n]$，$a_i b_j \in E(G)$，
- 阶数为 n 的**半图**，如果对所有 $i, j \in [n]$，$a_i b_j \in E(G) \Leftrightarrow i \leqslant j$，并且
- 阶数为 n 的**余匹配**，如果对所有 $i, j \in [n]$，$a_i b_j \in E(G) \Leftrightarrow i \neq j$。

二分图 H 是图 G 的**半诱导子图**，如果存在 $A, B \subseteq V(G)$，使得 G 在两侧 A 和 B 之间诱导出的二分子图与 H 同构。若一个图类不包含任意大的二分团 / 半图 / 余匹配作为半诱导子图，则称该类**无二分团 / 无半图 / 余匹配自由**。若该类同时无半图且余匹配自由，则称其**无半梯子**。图 2 展示了一个示意图。

图的**余匹配指数** G 是最大的数 t，使得 G 包含一个阶为 t的半诱导余匹配。

图签名的**单子扩张**通过添加（有限多个）一元谓词符号获得。我们通常不区分关系符号及其解释。我们将一元谓词称为**颜色**。**着色图**是通过一组（有限的）颜色扩张得到的图。

如果 $\mathscr{C}$ 是一个图类，且 σ^+ 是图签名的单子扩张，我们将 $\mathscr{C}[\sigma^+]$ 记作来自 $\mathscr{C}$的图的所有 σ^+-扩张结构所构成的图类。

一阶逻辑

签名 σ 上的一阶逻辑按通常方式定义。我们通常用 $\bar{x}$ 表示变量元组（x_1，...，x_k），用 $\bar{a}$ 表示元素元组（a_1，...，a_ℓ），并由上下文决定元组的长度。若一个公式不含全称量词，且否定仅作用于无量词子公式，则称其为**存在公式**。若一个公式不使用否定（因此尤其不能使用 $\neq$），则称其为**正的公式**。我们将存在正公式称为**存在正公式**。

作为简写，我们用 $\mathsf{dist}(x,\ y) \leqslant r$ 表示存在正公式

$$\exists z_1 \ldots \exists z_{r-1} \left(E(x,z_1) \wedge E(z_1,z_2) \wedge \ldots \wedge E(z_{r-2},z_{r-1}) \wedge E(z_{r-1},y)\right),$$

说明图中的两个元素之间的距离至多为 r。注意，我们不要求 z_i 互不相同，因此距离严格小于 r 的元素也可以满足该公式，尤其是在存在自环的情况下。

对于公式 $\varphi(\bar{x})$ 和一个（带颜色的）图 G，我们用 $\varphi(G)$ 表示图 G 的顶点元组 $\bar{v}$ 所构成的集合，其中这些元组满足 G 满足 $\varphi(\bar{v})$，即 $\varphi(G) = \{\bar{v} \in V(G)^{|\bar{x}|} \colon G \models \varphi(\bar{v})\}$。图在（带颜色的）图中的一个简单解释 I 是一个二元组 $(\nu(x)\ \eta(x,y))$，由两个（关于（带颜色的）图的签名的）公式组成，其中 η 是对称的，即 $\models \eta(x,y) \leftrightarrow \eta(y,x)$。若 G^+ 是一个（带颜色的）图，则 $H = \mathsf{I}(G^+)$ 是顶点集为 $V(H) = \nu(G^+)$、边集为 $E(H) = \eta(G^+) \cap \nu(G^+)^2$的图。

对于颜色集合 σ，着色操作 Γ_σ 将图 G 映射到其所有 σ-着色构成的集合 $\Gamma_\sigma(G)$。转导 T 是着色操作 Γ_σ 与将图解释为 σ-着色图的简单解释 I 的复合 $\mathsf{I} \circ \Gamma_\sigma$。换言之，对于每个图 G，都有 $\mathsf{T}(G) = \{\mathsf{I}(H^+) \colon H^+ \in \Gamma_\sigma(G)\}$。在许多情况下，我们处理的转导中，定义域公式 $\nu(x)$ 恒为真。在这种情况下，我们只需指定公式 $\eta(x,y)$；该公式所使用的颜色谓词足以完全确定一个转导。我们称之为 η-**转导**。对于图的类 $\mathscr{C}$，我们定义 $\mathsf{T}(\mathscr{C}) := \bigcup_{G \in \mathscr{C}} \mathsf{T}(G)$；若存在转导 T 使得 $\mathscr{D} \subseteq \mathsf{T}(\mathscr{C})$，则称类 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}$的**转导**，或称 $\mathscr{C}$ **转导** $\mathscr{D}$。若简单解释中的公式均为 EP公式，则该转导是***EP*-转导**。

一个图类 $\mathscr{C}$ 是 单子依赖的，当且仅当它不能转导所有图构成的类；它是 单子稳定的，当且仅当它不能转导所有半图构成的类 [2]。等价地，一个类是单子稳定的，当且仅当它是单子依赖且无半图 [28]。

接下来我们总结一些关于转导的性质。众所周知，转导可以复合，参见例如 [17]。正如下面的引理所示，EP 转导也具有同样的性质。证明可沿用 [17] 中证明的思路，并注意到正存在公式的复合仍然是正存在公式。

引理 2.1. *EP* 转导类在复合运算下封闭。更确切地说，设

$$\mathsf{T}_1 = \mathsf{I}_1 \circ \Gamma_{\sigma_1} \qquad \textit{and} \qquad \mathsf{T}_2 = \mathsf{I}_2 \circ \Gamma_{\sigma_2}$$

是具有不相交颜色集 σ_1、σ_2 的 *EP* 转导。那么存在一个 *EP* 转导 $\mathsf{T} = \mathsf{I} \circ \Gamma_\sigma$，其中$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$，使得对于每个图 G,

$$\mathsf{T}(G) \supseteq (\mathsf{T}_2 \circ \mathsf{T}_1)(G).$$

我们进一步说明如何组合在图的各个部分上运作的转导。

引理 2.2. 对于每个 ***(EP-)*转导** T 和 $s \in \mathbb{N}$，都存在一个 ***(EP-)*转导** $\mathsf{Glue}(\mathsf{T}\ s)$，满足以下性质。对于每个图 G和集合 U_1、...、$U_s \subseteq V(G)$，我们有

$$\mathsf{Glue}(\mathsf{T}, s)(G) \supseteq \left\{ H_1 \cup \cdots \cup H_s \;\middle|\; H_i \in \mathsf{T}(G[U_i]) \textit{ for all } i \in [s] \right\}.$$

证明。 设 $\mathsf{T} = \mathsf{I} \circ \Gamma_\sigma$ 的颜色集合为 σ。令 σ' 由以下颜色组成：

- 对于每个 $i \in [s]$，颜色 U_i 和 $\overline{U_i}$（旨在标记是否属于集合 $U_i \subseteq V(G)$），
- 对于每个 $i \in [s]$以及每种颜色 $C \in \sigma$，一个颜色 $C_{(i)}$（旨在表示用于证明 T 在 $G[U_i]$上有输出的 σ-着色）。

我们将 Glue(T s) 定义为 $\mathrm{I}' \circ \Gamma_{\sigma'}$，其中 $\mathrm{I}' = (\nu', \eta')$ 是从图到 σ'-着色图的一个适当解释。对于每个 $i \in [s]$，我们通过递归替换 ν 和 η 中的内容，在 σ'-着色图的签名上定义新公式 $\nu_i(x)$ 和 $\eta_i(x, y)$：

- 每个颜色谓词 $C(z)$，由 $C^{(i)}(z)$，
- 每个存在量化公式 $\exists z\, \psi(\bar{z}, z)$，由 $\exists z\, U_i(z) \wedge \psi(\bar{z}, z)$，以及
- 每个全称量化公式 $\forall z\, \psi(\bar{z}, z)$，由 $\forall z\, U_i(z) \vee \psi(\bar{z}, \overline{z})$。

直观地说，ν_i 和 η_i 在诱导子图 $G[U_i]$中计算 ν 和 η，同时从调色板 $\{C^{(i)}$ 读取 σ-颜色：$C \in \sigma\}$。我们将 $\mathrm{I}' = (\nu', \eta')$ 定义为

$$\nu'(x) := \bigvee_{i=1}^{s} U_i(x) \wedge \nu_i(x), \qquad \eta'(x, y) := \bigvee_{i=1}^{s} U_i(x) \wedge U_i(y) \wedge \eta_i(x, y).$$

于是 η' 是对称的，因为每个 η_i 都是对称的（正如 η 一样），而我们只取析取。

设 G 为一个图，且给定 $U_1, \ldots\ldots, U_s \subseteq V(G)$。我们证明，对所有 $i \in [s]\}$，Glue(T s)(G) $\supseteq \{ H_1 \cup \cdots \cup H_s : H_i \in \mathrm{T}(G[U_i])$。任取图 $H_i \in \mathrm{T}(G[U_i])$，其中 $i \in [s]$。根据 T 的定义，对于每个 i，存在一个 σ-着色图 $G_i^+ \in \Gamma_\sigma(G[U_i])$，使得 $H_i = \mathrm{I}(G_i^+)$。考虑 σ'-着色$G^+ \in \Gamma_{\sigma'}(G)$：对于每个 $i \in [s]$，恰好将 U_i 中的顶点着为颜色 U_i；并且对于每个 $i \in [s]$ 和每个 $C \in \sigma$，每个顶点 $v \in U_i$ 在 G^+ 中满足 $C^{(i)}(v)$，当且仅当它在 σ-着色 G_i^+中满足 $C(v)$（正如预期的那样）。

现在很容易看出

$$\mathrm{I}'(G^+) = H_1 \cup \cdots \cup H_s.$$

事实上，固定 $i \in [s]$。根据 G^+ 的构造，诱导子图 $G[U_i]$ 连同颜色 $\{C^{(i)} : C \in \sigma\}$ 与给定的 σ-着色图 G_i^+相一致。此外，在 G^+ 中，定义 ν_i和 η_i 的替换确保 ν_i 和 η_i 的取值与它们在 G_i^+中 ν 和 η 的取值完全相同。因此，顶点集为 $\nu_i(G^+)$、边集为 $\eta_i(G^+) \cap \nu_i(G^+)^2$ 的图恰好是 $\mathrm{I}(G_i^+) = H_i$。由于 $\nu' = \bigvee_i \nu_i$ 和 $\eta' = \bigvee_i \eta_i$，解释 $\mathrm{I}'(G^+)$恰好是并集 $H_1 \cup \cdots \cup H_s$。因此，$H_1 \cup \cdots \cup H_s \in$ Glue(T s)(G)，从而证明了所需的包含关系。

最后，由于 EP公式的复合仍然是一个存在正公式，这显然表明，若 T 是一个 EP-转导，则 Glue(T s) 是一个 EP-转导。 □

最后，我们指出以下事实。

事实 2.3。对于每个签名 σ 和 q，$t \in \mathbb{N}$，都存在一个数 $N \in \mathbb{N}$，使得量词秩为 q 且含有 t 个自由变量的 σ-公式中，两两不等价的公式至多有 N 个。

3 关于自环

本节中，我们将说明在正转导的语境下考虑带有自环的图这一非标准假设的合理性。

3.1 一般转导中的自环

我们首先注意到，对于一般的（即不一定是正的）转导，禁止、允许或强制使用自环，对转导的表达能力完全没有影响。在这里，一个顶点是否带有自环，本质上等同于是否被标记了一个一元谓词：我们可以通过检查 $\neg(u = v)$，区分“普通”边 uv 和自环。因此，就转导的输入图而言，自环既不能用来

- .....隐藏信息，因为转导可以恢复不含自环的图，也不能
- .....添加新信息，因为转导可以在着色步骤中添加一个携带相同信息的一元谓词。

此外，就其输出而言，通过采用以下三种改写之一，可以始终假设转导 T_φ 生成的输出图具有.....

(R1) .....完全没有自环：将 $\varphi(x,\ y)$ 改写为 $\neg(x=y)\wedge\varphi(x,\ y)$；或 (R2) ...
...每个顶点都有一个自环：将 $\varphi(x,\ y)$ 改写为 $(x=y)\vee\varphi(x,\ y)$；或者甚至 n
(R3) .....在任意顶点子集 S 上添加自环：将 $\varphi(x,\ y)$ 改写为

$$\big(\neg(x=y)\wedge\varphi(x,y)\big)\vee\big((x=y)\wedge S(x)\big),$$

其中，S 是在转导的着色步骤中添加的一元谓词。因此，在一般转导的情形下，自环无关紧要。

3.2 正转导中的自环

在正转导的情形下，自环自然会出现，而且似乎无法避免。例如，考虑创建图的平方的转导 T_φ，其定义如下：

$$\varphi(x,y) := E(x,y)\vee\big(\exists z\ E(x,z)\wedge E(z,y)\big)$$

将其应用于星图时，会在每个顶点上创建自环，如图5所示。

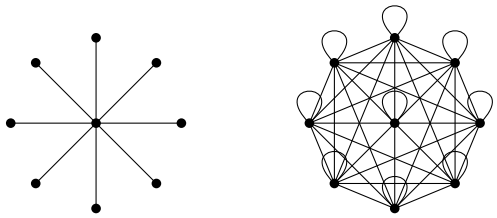

图5：星图，以及对其应用转导 T_φ 后得到的图。

注意，由于使用了否定，我们无法使用 (R1) 使 φ 反自反。因此，禁止自环会严重限制我们表达能生成无环图的正转导的能力。自环的存在对我们的工作至关重要。有人可能会想修改转导的定义，增加一个后处理步骤，从输出图中移除所有自环。我们称这种新概念为 非自反转导。但这个新概念并不能解决问题。EP 转导的一个关键性质是它们具有传递性（引理 2.1）。EP-无自反转导则不具有传递性。图6中的例子展示了如何通过串联三个 EP-无自反转导，从匹配生成余匹配；而单个 EP-无自反转导无法做到这一点。第二个转导由公式 $\varphi(x,\ y) := \exists z\,(E(x,\ z)\wedge E(z,\ y))$ 定义。注意，第一个 EP-无自反转导会从一个独立集中生成一个大的无自反团，而 EP 转导无法做到这一点。

正如引言中所述，在不存在自环的情况下，定理 1.11 不成立：对于不含自环的团类（该类无半梯子且单子依赖），简单公式 $\varphi(x,\ y) = E(x,\ y)$ 具有单子非相等性质。

缺少自环为何会不由自主地增强 EP公式的表达能力，其“哲学原因”如下：两个没有自环的顶点之间的一条边，还携带着这两个顶点不相等这一额外信息；而这本质上是一种非正性质。

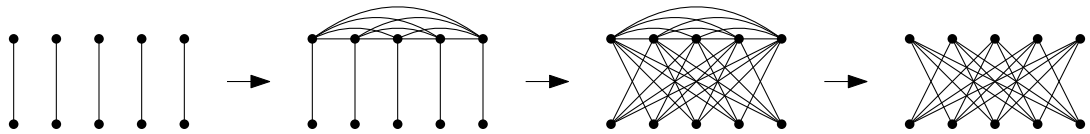

图6：由三个 EP-无自反转导组成的链，该链将匹配类生成余匹配类。

4 子翻转

本节中，我们将介绍子翻转这一新概念。为此，我们先回顾文献中的翻转 概念。

4.1 翻转与划分

设 $\mathcal{P}$ 是集合 V 的一个划分。对于每个元素 $v \in V$，我们用 $\mathcal{P}(v) \in \mathcal{P}$ 表示包含 v 的 $\mathcal{P}$ 的部分。对于集合 $S \subseteq V$，我们记作

$$\mathcal{P}|_S := \{P \cap S : P \in \mathcal{P}\}$$

$\mathcal{P}$ 在 S 上的 限制，它是 S 的一个划分。对于 V 上的另一个划分 $\mathcal{Q}$，我们记作

$$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} := \{P \cap Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$$

$\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{Q}$的 公共细化。

固定一个图 G 及其顶点的一个划分 $\mathcal{P}$。设 $F \subseteq \mathcal{P}^2$ 为一个对称关系。我们将 $H := G \oplus (\mathcal{P}, F)$ 定义为顶点集为 $V(G)$ 的图，其中不同顶点之间的边$u,\ v \in V(G)$ 按照以下条件定义：

$$uv \in E(H) \Leftrightarrow \begin{cases} uv \notin E(G) & \text{if } (\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(v)) \in F, \\ uv \in E(G) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

保留自环，即对于每个 $v \in V(G)$，都有 $vv \in E(H) \Leftrightarrow vv \in E(G)$。我们称 H 为 G的一个 $\mathcal{P}$-翻转。如果 $\mathcal{P}$ 至多有 k 个部分，我们称 H 为 G的一个 k-翻转 。引言中的图 4 给出了一个示例。下面列出关于翻转的一些基本事实。

事实 4.1。设 G、H、H_1、H_2 是顶点集为 V 的图，设 $\mathcal{P}$，$\mathcal{P}_1$，$\mathcal{P}_2$ 是 V 的划分，并设 $S \subseteq V$。

1. 对称性：若 H 是 G 的一个 $\mathcal{P}$-翻转，则 G 也是 H 的一个 $\mathcal{P}$-翻转。 2. 传递性：若 H_1 是 G 的一个 $\mathcal{P}_1$-翻转，且 H_2 是 H_1 的一个 $\mathcal{P}_2$-翻转，则 H_2 是 G 的一个 $(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2)$-翻转。 3. 遗传性：若 H 是 G 的一个 $\mathcal{P}$-翻转，则 $H[S]$是 $G[S]$的一个 $\mathcal{P}|_S$-翻转。

4.2 子翻转

定义 4.2 （完全（非）邻接集）。 对于一个图 G 和两个集合 $A,\ B \subseteq V$（G），其中可以有 $A = B$，如果 A 和 B 中的任意两个不同顶点 $a \in A$ 和 $b \in B$ 在 G 中邻接（在 G中非邻接），则称 A 和 B 是完全邻接（完全不邻接）的。如果 A 和 B 不相交，这意味着它们在 G 中半诱导出一个二分团（在 G中半诱导出一个无边图）。如果 $A = B$，这意味着 A诱导出一个团（一个独立集）。

由于我们只讨论互不相同的顶点，上述定义并未对自环作出任何假设。

定义 4.3（子翻转）。 对于图 G 及其 $V(G)$ 的划分 $\mathcal{P}$，我们将 G 的 $\mathcal{P}$-子翻转定义为图

$$G \ominus \mathcal{P} := G \oplus (\mathcal{P}, F), \text{ where } F := \{(A, B) : A \text{ and } B \text{ are fully adjacent in } G\}.$$

如果 $\mathcal{P}$ 至多有 k 个部分，我们就称 H 为 G的一个-子翻转 。

请注意，子翻转的结构与翻转不同。我们固定一个划分 $\mathcal{P}$，但不提供翻转关系 F。相反，我们总是使用 F 这种能移除最多边的关系。以下关键观察揭示了子翻转得名的缘由。

观察 4.4. 如果 H 是 G的一个子翻转，那么 H 是 G的子图。

接下来，我们将建立一套处理子翻转的基础工具。这将以翻转所具有的对称性、传递性和遗传性为指导（事实 4.1）。

4.3 对称性

显然，子翻转关系并不对称：独立集 nK_1 是团 K_n的子翻转，但反过来则不成立，因为 K_n 不是 nK_1的子图。为逆转子翻转操作，我们引入纯翻转 ，作为子翻转与常规翻转之间的一种折中。

定义 4.5 (纯翻转)。 如果翻转 $G \oplus (\mathcal{P}, F)$ 对 G 是纯的，则称之为纯翻转；如果每一对部分 $(A, B) \in F$ 在其中完全邻接或完全不邻接。

Ob注 4.6。 如果 H 是 k的子翻转，那么 H 和 G 互为纯 k翻转。

关键的是，在自反图中，我们可以用无量词正公式转导纯翻转。

引理 4.7 (♡)。 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个无量词正公式 $\varphi(x, y)$，使得对于每个自反图 G 以及 G 的纯 k翻转 H， H φ都转导出 G。

我们不证明引理 4.7，而是证明下面这个更一般的引理；在这个引理中，我们只要求那些与自身翻转的部分中的顶点带有自环。

引理 4.8。 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个无量词正公式 $\varphi(x, y)$，具有以下性质。设 G 是一个部分自反图 G，且 $H = G \oplus (\mathcal{P}, F)$ 是 G 的纯 k翻转，并满足

$$\forall v \in V(G): \quad (\mathcal{P}(v), \mathcal{P}(v)) \in F \Rightarrow vv \in E(G). \tag{$*$}$$

然后 H φ转导 G。

证明。 我们需要证明，存在一个公式 φ 和 H 的一个着色 H^+，使得对于所有 $u,\ v \in V(G)$，都有 $H^+ \models \varphi(u,\ v) \Leftrightarrow uv \in E(G)$。令 H^+ 为通过标记 $\mathcal{P}$的各部分而得到的 H 的着色。我们将 F 划分为 $F_\top$ 和 $F_\bot$，其中 $F_\top$ 包含 F 中在 G 里完全邻接的那些点对，而 $F_\bot$包含其中在 G里完全不邻接的点对。考虑这个正的无量词公式

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) &:= \alpha(x, y) \vee \beta(x, y) \vee \gamma(x, y), \\
\alpha(x, y) &:= (x = y) \wedge E(x, x), \\
\beta(x, y) &:= \bigvee_{(P,Q) \in F_\top} (x \in P \wedge y \in Q), \\
\gamma(x, y) &:= \bigvee_{(P,Q) \notin F_\bot} (E(x, y) \wedge x \in P \wedge y \in Q).
\end{aligned}$$

命题 4.9。对于所有 $u,\ v \in V(G)$: $H^+ \models \psi(u,\ v) \Leftrightarrow uv \in E(G)$。

证明。令 $P := \mathcal{P}(u)$ 且 $Q := \mathcal{P}(v)$。

1. 假设 $uv \in E(G)$。目标是证明 H^+ 满足以下之一: $\alpha(u,\ v)$、$\beta(u,\ v)$ 和 $\gamma(u,\ v)$.

(a) 假设 $u = v$。由于子翻转保持自环, u 和 v 在 H 中也邻接, 且 α 成立。(b) 假设 $u \neq v$。

i. 假设 $(P,\ Q) \in F$。由于 u 和 v 在 G中邻接, 根据纯翻转的定义, 部分 P和 Q 在 G 中必须完全邻接。于是 $(P,\ Q) \in F_\top$, 且 β 成立。ii. 假设 $(P,\ Q) \notin F$。于是 u和 v在 H中也邻接。此外, $(P,\ Q) \notin F_\perp$, 因此 γ成立。

2. 假设 $uv \notin E(G)$。目标是证明 H^+ 不满足以下任何一个: $\alpha(u,\ v)$、$\beta(u,\ v)$ 和 $\gamma(u,\ v)$。

(a) 假设 $u = v$。由于子翻转保留自环, u 和 v 在 H 中也非邻接, 并且 α 和 γ 均不满足。根据 $(*)$, $(P, Q = P) \notin F \supseteq F_\top$, 且 β 也不满足。

(b) 假设 $u \neq v$。显然, α 不满足。i. 假设 $(P, Q) \in F$。由于 u 和 v 在 G 中非邻接, 根据纯翻转的定义, P 和 Q 在 G 中必须完全不邻接。于是 $(P, Q) \notin F_\top$, 且 $(P, Q) \in F_\perp$, β 和 γ 均不满足。ii. 假设 $(P, Q) \notin F \supseteq F_\top$。则 β 不满足。此外, u 和 v 在 H 中也非邻接, 因此 γ 不满足。

穷尽检查所有情况后, 命题得证。 ■

所给公式 ψ 不仅取决于 k, 还取决于 F的选择及其划分为 $F_\top$ 和 $F_\perp$的方式。注意, 选择 2^{k^2} 以及各自的 $F_\top$ 和 $F_\perp$ 的方式至多有 2^{k^2} 种。通过增大颜色集, 我们可以将这些信息编码到 H^+ 中每个顶点的颜色里, 并构造所需的公式 φ; 该公式对有界数量的情况进行分支, 且只取决于 k。 □

为了稍微放宽对自环的要求, 我们证明总是可以(逐个)添加常数个具有任意邻域的顶点。

引理 4.10。对于每个无量词正公式 φ, 都存在一个无量词正公式 ψ, 使得对于定义在相同顶点集 $A \uplus \{b\}$上的任意两个部分自反图 G 和 H: 若 $H[A]$ φ转导出 $G[A]$, 则 H ψ转导出 G。

证明。我们将 用于 φ-转导的 $H[A]$ 着色扩展为 H 的着色, 方法是额外 :

- 用颜色谓词 A标记集合 A,
- 用颜色谓词 C_b标记顶点 b,
- 用颜色谓词 N_b标记 G 中 b 的邻域。

H 的这种着色证明了: H ψ可通过公式转导 G

$$\psi(x, y) := (x \in C_b \wedge y \in N_b) \vee (y \in C_b \wedge x \in N_b) \vee (x \in A \wedge y \in A \wedge \varphi(x, y)).$$ □

迄今证明的引理最终导出了以下推论, 我们稍后将用它来刻画一元不等性质。

推论 4.11. 对于所有 $k, t \in \mathbb{N}$, 都存在一个无量词正公式 $\varphi(x, y)$, 具有以下性质。设 G 是一个部分自反图 G, 它不以反自反的 K_t 作为诱导子图, 且设 H 是 G 的一个 k-子翻转。那么 H φ 可以转导 G。

证明。设 $\mathcal{P}$ 是一个大小至多为 k 的划分，使得 $H = G \ominus \mathcal{P}$，并设 $F \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ 为完全邻接的部分对。则 $H = G \oplus (\mathcal{P}, F)$，且 $G = H \oplus (\mathcal{P}, F)$。令 $\mathcal{P}^* := \{P \in \mathcal{P} \colon (P, P) \in F\}$ 为与自身翻转的部分集合。根据定义，$\mathcal{P}^*$ 的每个部分在 G 中构成一个团。由于排除了反自反的 K_t，这意味着包含在 $\mathcal{P}^*$ 的某个部分中的无自环顶点集合 A 的大小有界于 kt。令 $B := V(G) - A$，并注意到 $H[B]$ 和 $G[B]$ 满足引理 4.8 的条件：$G[B]$ 是 $H[B]$ 的纯 k-翻转，且在见证划分 $\mathcal{P}|_B$ 中，与自身翻转的部分不再包含无自环顶点。这意味着存在一个公式 ψ（仅取决于 k），使得 $G[B]$ 可以用 ψ 转导 $H[B]$。反复应用引理 4.10，我们可以将至多 kt 个已移除的顶点 A 加回，从而得到一个无量词正公式 φ，使得 H φ 可以转导 G。 □

4.4 传递性

一般翻转的传递性不适用于子翻转。$\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ 的较细部分可以完全邻接，而它们在 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 中所属的较粗部分却并非如此。在这种情况下，由 $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ 指定的子翻转会移除更多的边。我们仍然可以借助细化来处理，利用以下性质。

引理 4.12. 对于每个图 G、$V(G)$的划分 $\mathcal{P}$，以及 $\mathcal{P}$ 的细化 $\mathcal{R}$，我们有

$$(G \ominus \mathcal{P}) \ominus \mathcal{R} = G \ominus \mathcal{R}.$$

证明。设 v_1 和 v_2 是 G 中的两个不同顶点，$P_i \in \mathcal{P}$ 和 $R_i \in \mathcal{R}$ 是包含$v_i \in R_i \subseteq P_i$的部分。如果 v_1v_2 在 G 中是一条非边，那么在两个子图 $(G \ominus \mathcal{P}) \ominus \mathcal{R}$ 和 $G \ominus \mathcal{R}$中也同样如此，因此无需验证。于是，假设 v_1v_2 是 G中的一条边。

假设在 $G \ominus \mathcal{R}$ 中移除了 v_1v_2。那么，部分 R_1 和 R_2 在 G 中完全邻接。如果 P_1 和 P_2 在 G 中完全邻接，那么 v_1v_2 已经在 $G \ominus \mathcal{P}$ 中被移除。否则，P_1 和 P_2 之间的邻接关系在 G 中与在 $G \ominus \mathcal{P}$ 中相同。特别地，子部分 R_1 和 R_2 在 $G \ominus \mathcal{P}$ 中仍然完全邻接，这意味着 v_1v_2 在 $(G \ominus \mathcal{P}) \ominus \mathcal{R}$ 中被移除。

假设在 $(G \ominus \mathcal{P}) \ominus \mathcal{R}$ 中移除了 v_1v_2。如果 v_1v_2 已经在 $G \ominus \mathcal{P}$ 中被移除，那么结论成立，因为 $G \ominus \mathcal{R}$ 是 $G \ominus \mathcal{P}$ 的子图。否则，v_1v_2 仍然存在于 $G \ominus \mathcal{P}$ 中，并且 R_1 和 R_2 之间的邻接关系在 $G \ominus \mathcal{P}$ 和 G 中相同。然后，应用 $\ominus \mathcal{R}$ 必定已经移除了 v_1v_2 这条边，且在 $G \ominus \mathcal{P}$ 和 G 中也移除了它。 □

4.5 遗传性

取子翻转并不　　与取诱导子图可交换，如下例所示　　.

例 4.13. 对于图 $G := G_1 \uplus G_2 = 2K_2$，其中 G_1 和 G_2 均为单边图 K_2，将 $\mathcal{P} := \{V(G)\}$ 划分为一个单独的部分，并且集合 $S := V(G_1)$，我们有

$$2K_1 = G[S] \ominus \mathcal{P}|_S \neq (G \ominus \mathcal{P})[S] = K_2.$$

我们将借助以下引理来解决这个问题。

引理 4.14. 对于每个图 G、V的划分 $\mathcal{P}(G)$，以及 $S \subseteq V(G)$

$$G[S] \ominus \mathcal{P}|_S = ((G \ominus \mathcal{P})[S]) \ominus \mathcal{P}|_S.$$

证明。我们可以将注意力限制在集合 S 上。$G[S]$ 中的非边在两个子翻转中仍然是非边。因此，只需证明 $G[S]$ 的边在 $G[S] \ominus \mathcal{P}|_S$ 中被移除，当且仅当它们在 $((G \ominus \mathcal{P})[S]) \ominus \mathcal{P}|_S$ 中被移除。取 $G[S]$ 中任意一条边 uv。

首先假设 uv 是一条非边 $G[S] \ominus \mathcal{P}|_S$。那么在 $G[S]$ 中，$\mathcal{P}|_S(u)$ 与 $\mathcal{P}|_S(v)$ 完全邻接。如果较粗部分 $\mathcal{P}(u)$ 与 $\mathcal{P}(v)$ 在 G 中也完全邻接，那么 uv 已在 $G \ominus \mathcal{P}$ 中被移除。否则，$\mathcal{P}|_S(u)$ 与 $\mathcal{P}|_S(v)$ 之间的邻接关系在 $G[S]$ 和 $(G \ominus \mathcal{P})[S]$ 中相同，因此 uv 会在 $((G \ominus \mathcal{P})[S]) \ominus \mathcal{P}|_S$ 中被移除。

现在假设 uv 是 $((G \ominus \mathcal{P})[S]) \ominus \mathcal{P}|_S$ 中的一条非边。那么，以下情况之一成立：

1. $\mathcal{P}(u)$ 和 $\mathcal{P}(v)$ 在 G 中完全邻接，或者 2. $\mathcal{P}|_S(u)$ 和 $\mathcal{P}|_S(v)$ 在 $(G \ominus \mathcal{P})[S]$ 中完全邻接。

在第一种情况下，特别是 $\mathcal{P}|_S(u)$ 和 $\mathcal{P}|_S(v)$ 在 $G[S]$ 中完全邻接，因此问题解决。如果第一种情况不成立而第二种情况成立，那么 $\mathcal{P}|_S(u)$ 与 $\mathcal{P}|_S(v)$ 之间的邻接关系在 $G[S]$ 和 $(G \ominus \mathcal{P})[S]$ 中相同，因此 uv 在 $G[S] \ominus \mathcal{P}|_S$ 中被移除。 □

4.6 通过子翻转近似翻转

图 G 中大小为 t 的 半诱导匹配 是由顶点 $a_1, \ldots, a_t$ 和 $b_1, \ldots, b_t$ 组成的集合，使得对所有 $i, j \in [t]$: $E(a_i, b_j) \in E(G) \Leftrightarrow i = j$。在更严格的 诱导匹配概念中，我们还要求所有 a_is 构成一个独立集，并且所有 b_is 也构成一个独立集。区分这两者对于接下来的观察至关重要。

观察 4.15。 设 G 是一个图， B 是半诱导于 G 中的二分图，而 B 是 B的二分补图。若 G 的余匹配指数小于 t，则 B 不含大小为 t的诱导匹配。

如下图左侧的图 G所示，若将“诱导匹配”替换为“半诱导匹配”，则该观察不再成立。



由于 G 只有一条边，其余匹配指数小于 2。右侧展示的是 B: 图 B 在 $\{a_1, a_2\}$与 $\{b_1, b_2\}$ 之间半诱导出的二分补图。 B 含有一个大小为 2 的半诱导匹配，它是通过在 $\{a_1, b_2\}$ 与 $\{b_1, a_2\}$ 之间进行半诱导得到的。因此，对于半诱导匹配而言， G 是观察 4.15 的一个反例。这就是为什么我们在下一个引理中讨论禁止诱导匹配，尽管对于禁止半诱导匹配而言，可以得到更好的界 $2t$ 。

引理 4.16. 设 G 是一个不含大小为 t 的诱导匹配的图。那么， G 中大小至少为 2 的连通分量少于 t 个，且这些连通分量的直径均小于 $3t$。

证明。 设 $C_1, \ldots, C_m$ 是 G 中大小至少为 2 的连通分量。每个连通分量 C_i 都至少包含一条边 $u_i v_i$。这些 u_i 和 v_i 诱导出一个阶为 m 的匹配。因此， $m < t$。

反设其中一个连通分量的直径至少为 $3t$。这意味着存在一条含有 $3t$ 条边的诱导路径，其中 t 条边诱导出一个阶为 t 的匹配，矛盾。 □

引理 4.17. 对于每个余匹配指数小于 t 的图 G 及其大小为 k 的划分 $\mathcal{P}(G)$，存在一个对 $\mathcal{P}$ 的细化 $\mathcal{Q}$，其大小至多为 $k \cdot t^k$，使得对于 G 的每个 $\mathcal{P}$-翻转 H 以及所有顶点 u、 $v \in V(G)$

$$G \ominus \mathcal{Q} \models E(u, v) \textit{ implies } \operatorname{dist}_H(u, v) < 3t.$$

注 4.18. 引理 4.17 表明，对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和 $v \in V(G)$:

$$B_r^{G \ominus \mathcal{Q}}(v) \subseteq B_{3tr}^H(v).$$

引理 *4.17* 的证明. 我们通过分别细化每个部分 $P \in \mathcal{P}$来构造 $\mathcal{Q}$。对于所有成对的部分$P, Q \in \mathcal{P}$（可能 $P = Q$），我们将定义一个划分 $\mathcal{X}(P, Q)$，它划分 P且大小至多为 t，并自然地提升为划分 $\mathcal{X}'(P, Q) := \mathcal{X}(P, Q) \cup \{V(G) \setminus P\}$，该划分作用于整个顶点集 $V(G)$。我们将 $\mathcal{Q}$定义为所有 $\mathcal{X}'(P, Q)$ 的公共细化。由于每个 $\mathcal{X}'(P, Q)$ 只细化一个部分 P，因此 $\mathcal{Q}$ 的大小至多为 $k \cdot t^k$。

构造 $\mathcal{X}(P, Q)$，其中 $P \neq Q$。考虑由 P和 Q在 G中半诱导出的二分图 B，并令 B为其二分补图。首先，我们向 $\mathcal{X}(P, Q)$ 中添加孤立部分 $X_0(P, Q)$，该部分包含 P中在 B里孤立的所有顶点。其次，设 $C_1, \ldots, C_m$为 B中大小至少为二的连通分量。对于每个 C_i，我们向 $\mathcal{X}(P, Q)$ 中添加分量部分 $X_i(P, Q) := C_i \cap P$。由于 G的余匹配指数小于 t，B 不能包含大小为 t 的诱导匹配（观察 4.15）。根据引理 4.16，我们得出 $m < t$ 以及 $|\mathcal{X}(P, Q)| = m + 1 \leqslant t$。

构造 $\mathcal{X}(P, P) =: \mathcal{X}(P)$。考虑 G中由 P诱导的图 $G[P]$的补图 $G[P]$。我们按照上述情形进行：向 $\mathcal{X}(P)$ 中添加 孤立部分 $X_0(P)$，该部分包含在 $G[P]$ 中孤立的所有顶点；而 $G[P]$中每个大小至少为二的连通分量 C_i 都有其各自的分量部分 $X_i(P) := C_i$。再次根据引理 4.16，$|\mathcal{X}(P)| \leqslant t$。

不同部分之间边的分析。考虑 uv 中的一条边 $G \ominus \mathcal{Q}$，其端点分别位于不同的部分$u \in P \in \mathcal{P}$和 $v \in Q \in \mathcal{P}$中，以及 $\mathcal{P}$-翻转 H的任意 G。我们的目标是证明 $\mathsf{dist}_H(u, v) < 3t$。如果 u和 v 在 H 中也邻接，则结论成立，因此假设它们非邻接。由于它们在 G的子图 $G \ominus \mathcal{Q}$ 中邻接，它们在 G中也必然邻接。这意味着 P与 Q 之间的邻接关系在 H 中被翻转了，并且 H 中 P与 Q 之间半诱导的二分图 B，与 G中 P与 Q 之间半诱导的图 B 的二分补图相同。注意，在 B中，孤立部分 $X_0(P, Q)$ 与 Q 完全不邻接，这意味着它们在 G中完全邻接，也就意味着它们在 $G \ominus \mathcal{Q}$中完全不邻接。由于 u 在 $G \ominus \mathcal{Q}$中与 $v \in Q$ 邻接，我们必有 $u \notin X_0(P, Q)$，对称地也有$v \notin X_0(Q, P)$。于是，u和 v必然分别包含在分量部分 $u \in X_i(P, Q)$和 $v \in X_j(Q, P)$中。如果 u和 v 包含在 B的不同连通分量中，那么 B 中以及 $G \ominus \mathcal{Q}$中，$X_i(P, Q)$与 $X_j(Q, P)$都完全不邻接，矛盾。因此，u 和 v 包含在 B的同一个连通分量中。根据引理 4.16，该分量在 B中的直径小于 $3t$，从而得到所需的界 $\mathsf{dist}_H(u, v) < 3t$。

对同一部分内部边的分析。与上文类似。如果在 $G \ominus \mathcal{Q}$ 中 $\{u, v\} \subseteq P \in \mathcal{P}$ 相邻，而在 H中非邻接，那么部分 P就对自身进行了翻转。$\mathcal{X}$（P）中的任意两个不同部分在 $G[P]$中都完全不邻接，因此在 G中完全邻接，进而在 $G \ominus \mathcal{Q}$中完全不邻接。这意味着 u 和 v 必须包含在 $\mathcal{X}$（P）的同一个部分中。孤立部分 X_0（P）在 G 中构成一个团，因此在 $G \ominus \mathcal{Q}$中构成一个独立集。因此，u 和 v必须包含在同一个分量部分中，由引理 4.16 可得结论。 □

引理 4.19。对于每个图 G 及其划分 $\mathcal{P}$，其中 V（G），以下结论成立：

1. 对所有 $t > 1$，若$G \ominus \mathcal{P}$的余匹配指数为 $\geqslant t \cdot |\mathcal{P}|^2$，则$G$的余匹配指数为 $\geqslant t$。*2.* 对所有 $t \geqslant 0$，若G的余匹配指数为 $\geqslant t \cdot |\mathcal{P}|^2$，则$G \ominus \mathcal{P}$的余匹配指数为 $\geqslant t$。

证明。对于第一个蕴含，设 $A, B \subseteq V(G)$ 是大小为 $t \cdot |\mathcal{P}|^2$ 的集合，它们在 $G \ominus \mathcal{P}$ 中半诱导出一个余匹配。两次应用鸽巢原理，我们得到两个部分 $P, Q \in \mathcal{P}$ 以及子集 $A' \subseteq A \cap P$ 和 $B' \subseteq B \cap Q$，其中 $|A'| = |B'| = t$，且它们仍在 $G \ominus \mathcal{P}$ 中半诱导出一个余匹配。因此，P 和 Q 在 $G \ominus \mathcal{P}$ 中并非完全邻接，在 G 中也并非完全邻接（这里我们用到了 $t > 1$，因为大小为 1 的余匹配只会是一个非边，所以 P 和 Q 可能完全邻接）。这意味着 A' 与 B' 之间的邻接关系在 G 和 $G \ominus \mathcal{P}$ 中相同，而它们半诱导出一个大小为 t 的余匹配。

对于第二个蕴含，在 $t > 1$ 的情况下，交换上面证明中 $G \ominus \mathcal{P}$ 和 G 的角色即可。$t = 0$ 的情形是平凡的；对于 $t = 1$，注意 G 中每个大小为 1 的余匹配（即 G 中的每条非边）也是 $G \ominus \mathcal{P}$ 中大小为 1 的余匹配。 □

5 子翻转平坦性

定义 5.1 （（子）翻转平坦性）。 对于 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，若存在一个裕度函数 $M\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 以及一个预算 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$ 和大小至少为 $M(m)$ 的集合 $W \subseteq V(G)$，都存在一个 k-翻转（k-子翻转）H（属于 G）以及一个大小为 m 的集合 $A \subseteq W$，使得对于所有互不相同的$u,\ v \in A$，我们有

$$\operatorname{dist}_H(u, v) > r.$$

（对于 $r = \infty$，我们要求 u 和 v 位于 H 的不同连通分量中。）

Dreier、M¨ahlmann、Siebertz 和 Toru´nczyk 在 [12] 中证明了单子稳定性的如下组合刻画。

定理 5.2 （[12]）。 对于每个图类 $\mathscr{C}$，以下命题等价：

1. $\mathscr{C}$ 是单子稳定的。*2.* 对于每个 $r \in \mathbb{N}$，$\mathscr{C}$ 都是 r-翻转平坦的。

本节的目标是证明无余匹配类的以下对应结果。

定理 5.3。 对于每个图类 $\mathscr{C}$，以下条件等价：

1. $\mathscr{C}$ 是单子稳定且余匹配自由的。*2.* 对于每个 $r \in \mathbb{N}$，$\mathscr{C}$ 都是 r-子翻转平坦的。

正向结论可由引理 4.17 直接推出。

引理 5.4。 对于每个余匹配指数小于 $t \in \mathbb{N}$ 的图类 $\mathscr{C}$，以及每个 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$：若 $\mathscr{C}$ 是 $3tr$-翻转平坦的，则它也是 r-子翻转平坦的。

证明。 设 $M\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 分别是使 $\mathscr{C}$ 为 $3tr$-翻转平坦的裕度和预算。我们声称，对于裕度 M 和预算 $k' := k \cdot t^k$，$\mathscr{C}$ 是 r-子翻转平坦的。给定图 $G \in \mathscr{C}$ 中一个大小为 $M(m)$ 的顶点子集 W，我们可以应用 $3tr$-翻转平坦性，得到 W 的一个大小为 m 的子集 A，以及一个 k-翻转 H，使得 A 中的所有元素两两之间的距离都大于 $3tr$。利用引理 4.17，我们可以从 H 得到 G 的一个 kt^k-子翻转 H'，使得 A 中的所有元素两两之间的距离都大于 r。（特别地，如果 $r = \infty$，那么 H 的不同连通分量中的元素仍然位于 H' 的不同连通分量中。） □

对于反向蕴含，注意若一个图类不是单子稳定的，那么由于它甚至不是翻转平坦的，因此肯定也不是子翻转平坦的。接下来只需证明，余匹配指数无界的类不是子翻转平坦的。

引理 5.5。 余匹配指数无界的类都不是2-子翻转平坦的。

证明。 反设存在一个图类 $\mathscr{C}$，其余匹配指数无界，且以裕度 M 和预算 k满足 2-子翻转平坦。设 $G \in \mathscr{C}$ 是一个余匹配指数至少为$\ell := M(3k^2)$ 的图，且 a_1、.....、a_ℓ 和 b_1、.....、b_ℓ 是半诱导出一个阶为 ℓ的余匹配的顶点。对 G 及集合 $W = \{a_1, \ldots, a_\ell\}$ 应用子翻转平坦性，可得一个大小至多为 k 的划分 $\mathcal{P}$，以及一个大小为 $\ell' := 3k^2$、属于 W的子集 A（我们可以假设 $A = \{a_1, \ldots, a_{\ell'}\}$），使得 A 中的顶点两两之间的

距离在 $G \ominus \mathcal{P}$中大于 2。两次应用鸽巢原理后，我们可以假设 a_1、a_2、a_3 都属于 $\mathcal{P}$ 的同一部分 P，而 b_1、b_2、b_3 都属于 $\mathcal{P}$的同一部分 Q。这意味着在 G中，P 与 Q 并非完全邻接，因此 P 与 Q 之间的边在子翻转中没有被删除。这意味着这六个顶点仍在 $G \ominus \mathcal{P}$中半诱导出一个余匹配。于是 a_1 与 a_2 之间的距离至多为二，矛盾。 □

这就完成了定理 5.3 的证明。之后，我们希望将子翻转平坦性不仅用于单个元素，也用于元组。若两个元组不共享任何元素，则称它们不相交。我们将 H 中两个 t-元组 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 之间的距离定义为 $\min_{i,\ j\in[t]} \mathrm{dist}_H(u_i,\ v_j)$。

定义 5.6（元组的子翻转平坦性）。对于 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，若图类 $\mathscr{C}$ 是关于元组的 r-子翻转平坦类，则对每个 $t \in \mathbb{N}$，都存在一个边际函数 $M\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和一个预算 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$以及每个由至少 $M(m)$ 个两两不相交的 t-元组构成的集合 $W \subseteq V(G)^t$，都存在 G 的一个 k-子翻转 H和一个大小为 m 的集合$A \subseteq W$，使得对于所有不同的 $\bar{u},\ \bar{v} \in A$，我们都有

$$\mathrm{dist}_H(\bar{u}, \bar{v}) > r.$$

引理 5.7。每个 $2r$-子翻转平坦的图类也都是元组 r-子翻转平坦的 .

证明。该引理的证明与 [32], 的引理 2.10 完全相同，只需将一致拟宽度替换为子翻转平坦性，并使用引理 4.12。 □

6 子翻转秩

本节将刻画单子依赖的无半梯子片段，即具有有界子翻转秩的那些类。

6.1 定义与基本性质

给定图 G、整数 r 和顶点 $v \in V(G)$，我们将 $\mathrm{Ball}_r^G(v)$ 作为图 $G[N_r^G[v]]$ 的简写，该图由 G 中 v 的闭 r-邻域诱导。

定义 6.1（（子）翻转秩）。固定 $r \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。对于单顶点图 K_1，我们定义翻转秩

$$\mathrm{frk}_{r,k}(K_1) := 0.$$

对于其他所有图 G，我们定义

$$\mathrm{frk}_{r,k}(G) := 1 + \min_{\substack{H \text{ is a} \\ k\text{-flip of } G}} \max_{v \in V(H)} \mathrm{frk}_{r,k}(\mathrm{Ball}_r^H(v)).$$

图类 $\mathscr{C}$具有有界 r-翻转秩，当且仅当存在 $k, \ell \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{frk}_{r,k}(G) \leqslant \ell$ 对所有 $G \in \mathscr{C}$均成立。对子翻转秩 $\mathrm{sfrk}_{r,k}(G)$ 的定义，则要求 H 也是 G的一个 k-子翻转。我们按预期定义有界 r-子翻转秩 。

直观地说，我们可以将翻转秩（以及子翻转秩）理解为一种称为翻转游戏 [18]的游戏。游戏在图 G 上进行，由两名玩家翻转者 和定位者参与。每一轮中，翻转者对当前图进行一次 k-翻转（目标是尽可能快地将其分解），而定位者则将竞技场缩小至一个 r-邻域（目标是尽可能长时间地存活）。因此，翻转秩表示翻转者完成游戏所需的轮数。以下定理是一阶模型检测算法用于单子稳定类的关键组成部分。

定理 6.2 ([18])。 对于每个图类 $\mathscr{C}$，以下条件等价：

1. $\mathscr{C}$ 是单子稳定的。*2.* 对每个 $r \in \mathbb{N}$， $\mathscr{C}$ 的 r翻转秩有界。

本节的目标是证明无余匹配类的以下对应结论。

定理 6.3. 对于每个图类 $\mathscr{C}$，以下两项等价：

1. $\mathscr{C}$ 是单子稳定且无余匹配的。*2.* 对每个 $r \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}$ 的 r子翻转秩有界。

在第 6.2 节和第 6.3 节证明定理 6.3 的正向和反向之前，我们先汇总一些关于（子）翻转秩的有用事实。

引理 6.4. 对于所有图 G和 G'：

1. $frk_{r,k}(G) \leqslant sfrk_{r,k}(G)$。 *2.* 如果 G' 是 G的诱导子图，那么 $frk_{r,k}(G') \leqslant frk_{r,k}(G)$。 *3.* 如果 G' 是 G的 k'-翻转，那么 $frk_{r,k\cdot k'}(G') \leqslant frk_{r,k}(G)$。

证明。 我们依次证明这些结论。

1. 对子翻转秩进行归纳，并利用每个 k-子翻转也是一个 k-翻转这一事实。 2. 对翻转秩进行归纳，并利用遗传性（事实 4.1）。 3. 根据对称性（事实 4.1）， G 是 G'的 k'-翻转。令 H 为 G 的 k-翻转，它见证 $\mathrm{frk}_{r,k}(G) \leqslant d$。根据传递性（事实 4.1）， H 也是 G' 的$(k \cdot k')$-翻转，它见证 $\mathrm{frk}_{r,k\cdot k'}(G') \leqslant d$。 □

我们稍后将通过归纳法证明翻转秩的上界，并利用归纳过程中的每个阶段，我们的图都类似于一个余匹配指数较小的图。

定义 6.5 （$\mathcal{M}$-相似）。 顶点集为 V 的两个图 G_1 和 G_2 称为 $\mathcal{M}$-相似，如果 $\mathcal{M}$ 是 V 的一个划分，且满足 $G_1 \ominus \mathcal{M} = G_2 \ominus \mathcal{M}$。如果存在一个大小至多为 m 的划分 $\mathcal{M}$，使得 G_1 和 G_2 是 m-相似的，我们就称 G_1 和 G_2 是 m- 相似的；这样的划分称为中介划分，或简称中介。

引理 6.6. 对于任意图 G 和 H、 V 的任意划分 $\mathcal{M}(G)$以及集合 $S \subseteq V(G)$：

1. G和 G是1-相似的。*2.* G 和 $G \ominus \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$-相似的。*3.* 如果 G 和 H 是 $\mathcal{M}$-相似的，那么它们互为 $\mathcal{M}$-翻转。*4.* 如果 G 和 H 是 $\mathcal{M}$-相似的，那么 $G[S]$ 和 $H[S]$是 $\mathcal{M}|_S$-相似的。

证明。 我们按顺序证明这些陈述。

1. 考虑中介 $\{V(G)\}$。2. 考虑中介 $\mathcal{M}$。3. $G \ominus \mathcal{M}$ 是 G的一个 $\mathcal{M}$-翻转。根据翻转的对称性（事实 4.1）， H是 $G \ominus \mathcal{M} = H \ominus \mathcal{M}$的一个 $\mathcal{M}$-翻转。根据翻转的传递性， H 是 G的一个($\mathcal{M} \wedge \mathcal{M} = \mathcal{M}$)-翻转。4. 两次应用引理 4.14，得到

$$G[S] \ominus \mathcal{M}|_S = ((G \ominus \mathcal{M})[S]) \ominus \mathcal{M}|_S = ((H \ominus \mathcal{M})[S]) \ominus \mathcal{M}|_S = H[S] \ominus \mathcal{M}|_S. \qquad \square$$

6.2 子翻转秩的有界性

定理 6.3 的正向由以下引理推出。

引理 6.7。 如果一个图类 $\mathscr{C}$ 的 $3tr$-翻转秩有界，且余匹配指数小于 t，那么 $\mathscr{C}$ 的 r-子翻转秩也有界。

更确切地说，存在一个函数 $f\colon\ \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$，使得对于任意 r、t、$k \geqslant 1$、$d \geqslant 0$，以及余匹配指数小于 t的图 G

$$\mathrm{frk}_{3tr,k}(G) \leqslant d \Rightarrow \mathrm{sfrk}_{r,k'}(G) \leqslant d,$$

其中 $k' :=f(t、k、d)$。

我们将转而证明以下引理：取 $G_0 = G$ 即可由此推出引理 6.7。我们通过使用引理 4.17，以子翻转近似翻转游戏策略中的操作来证明该引理。

引理 6.8。 存在一个函数 $f\colon\ \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$，使得对于任意 r、t、m、$k \geqslant 1$、$d \geqslant 0$，以及与某个余匹配指数小于 t的图 G_0 相似度为 m的图 G

$$\mathrm{frk}_{3tr,k}(G) \leqslant d \Rightarrow \mathrm{sfrk}_{r,k'}(G) \leqslant d,$$

其中 $k' :=f(t,m,k,d)$。

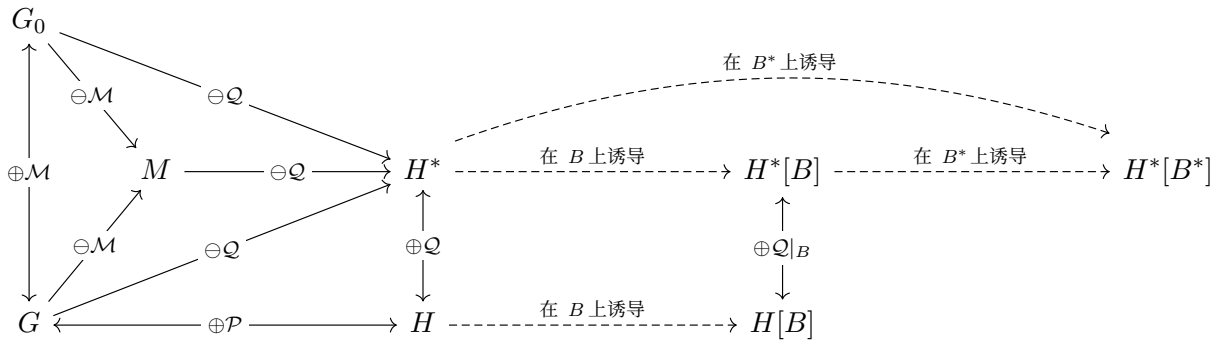

图 7：引理 6.8 的证明示意图。从图 G_1 指向图 G_2、标记为 $\ominus\mathcal{P}$ 的实线有向箭头表示 $G_1 \ominus \mathcal{P} = G_2$。连接 G_1 和 G_2、标记为 $\oplus\mathcal{P}$ 的实线双向箭头表示 G_1 和 G_2 互为 $\mathcal{P}$-翻转。从 G_1 指向 G_2 的虚线箭头表示 G_2 是 G_1的诱导子图。

证明。 我们归纳地定义

$$f(t,m,k,0) := m \quad \text{and} \quad f(t,m,k,d+1) := f(t, m\cdot k\cdot t^{m\cdot k}, m\cdot k^2\cdot t^{m\cdot k}, d),$$

并通过对 d 作归纳法证明 f 满足该引理。$d = 0$ 的情形显然。归纳步骤如图 7 所示。假设给定了引理陈述中的 G 和 G_0，且 $\mathcal{M}$ 是一个大小至多为 m 的中介划分。根据引理 6.6，G 和 G_0 彼此是 $\mathcal{M}$-翻转。

根据对 G 的翻转秩的假设，存在一个 $\mathcal{P}$-翻转 H，它是 G 的翻转，并且

$$\max_{v\in V(H)} \mathrm{frk}_{3tr,k}(\mathrm{Ball}^H_{3tr}(v)) \leqslant d \tag{1}$$

对于某个划分 $\mathcal{P}$，将 $V(G)$ 划分为至多 k 个部分。根据传递性，H 和 G_0 互为 $(\mathcal{M}\wedge\mathcal{P})$-翻转。由于 G_0 的余匹配指标小于 t，我们可以将引理 4.17 应用于 G_0、$(\mathcal{M}\wedge\mathcal{P})$ 和 H，从而得到一个划分 $\mathcal{Q}$，其大小为

$$|\mathcal{Q}| \leqslant m\cdot k\cdot t^{m\cdot k},$$

该划分细化了 $(\mathcal{M} \wedge \mathcal{P})$，使得 $H^* := G_0 \ominus \mathcal{Q}$ 如下近似 H：

$$\text{for every } v \in V(G): \quad N_r^{H^*}[v] \subseteq N_{3tr}^{H}[v]. \tag{2}$$

利用引理 4.12 以及 $\mathcal{Q}$ 细化 $\mathcal{M}$这一事实，我们得到

$$G \ominus \mathcal{Q} = M \ominus \mathcal{Q} = G_0 \ominus \mathcal{Q} = H^*.$$

由传递性可知， H^* 和 H 互为 $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} = \mathcal{Q})$-翻转。现在考虑任意一个顶点 v，它在 H 中的 $3tr$-邻域，以及它在 H^*中的 r-邻域：

$$B := N_{3tr}^{H}[v] \quad \text{and} \quad B^* := N_r^{H^*}[v].$$

由翻转的遗传性（事实 4.1）可知， $H[B]$ 和 $H^*[B^*]$ 互为 $\mathcal{Q}|_B$-翻转。此外，由等式 (2)，$H^*[B^*]$ 是 $H^*[B]$的诱导子图。这意味着我们可以给出以下界

$$\mathrm{frk}_{3tr,k\cdot|\mathcal{Q}|}(H^*[B^*]) \leqslant \mathrm{frk}_{3tr,k\cdot|\mathcal{Q}|}(H^*[B]) \leqslant \mathrm{frk}_{3tr,k}(H[B]) \leqslant d,$$

前两个不等式由引理 6.4 得出，最后一个由等式 (1) 得出。此外，由引理 6.6， $H^*[B^*]$ 与图 $G_0[B]$ 是 $|\mathcal{Q}|_B$-相似的，而该图的余匹配指数小于 t。因此，对 $H^*[B^*]$ 应用归纳法可得

$$\mathrm{sfrk}_{r,k'}(H^*[B^*]) \leqslant d,$$

其中 $k' := f(t,\ |\mathcal{Q}|,\ k\cdot|\mathcal{Q}|,\ d) = f(t,\ m\cdot k\cdot t^{m\cdot k},\ m\cdot k^2\cdot t^{m\cdot k},\ d) = f(t,\ m,\ k,\ d+1)$。总结如下：存在一个 $(|\mathcal{Q}| \leqslant m\cdot k\cdot t^{m\cdot k} \leqslant k')$-子翻转 H^*，其作用于 G，且其中每个 r-球邻域 $H^*[B^*]$ 都满足 $\mathrm{sfrk}_{r,\ c}(H^*[B^*]) \leqslant d$。这意味着 $\mathrm{sfrk}_{r,\ k'}(G) \leqslant d+1$，从而完成证明。 □

这就完成了定理 6.3 正向部分的证明。

6.3 大余匹配蕴含更大的秩

在本小节中，我们证明定理 6.3 的反向部分。我们需要证明，如果一个图类 $\mathscr{C}$不是单子稳定的，或者不是余匹配自由的，那么存在某个 $r \in \mathbb{N}$，使得 $\mathscr{C}$具有无界的 r-子翻转秩。根据定理 6.2，如果一个图类 $\mathscr{C}$不是单子稳定的，那么存在某个 $r \in \mathbb{N}$，使得 $\mathscr{C}$具有无界的 r-翻转秩。根据引理 6.4， $\mathscr{C}$具有无界的 r-子翻转秩。剩下的情况是 $\mathscr{C}$不是余匹配自由的。

引理 6.9. 对于任意 $k \geqslant 2$、 $d \geqslant 0$ 和图 G：如果 G 的余匹配指数至少为 $(k^2)^d$，那么$\mathrm{sfrk}_{3,k}(G) \geqslant d$。

证明. 我们对 d 使用归纳法证明该引理。 $d = 0$ 和 $d = 1$ 的情形是平凡的。归纳步骤中，设 G 是一个余匹配指数至少为 $(k^2)^{d+1}$ 的图，其中 $d \geqslant 1$ 为某个值。令 H 为 G 的任意 k-子翻转。根据引理 4.19， H 包含一个大小至少为 $(k^2)^d$ 的半诱导余匹配指数。任取该余匹配中的一个顶点 v。由于 $(k^2)^d \geqslant 3$，不难验证，球邻域 $N_3^H(v)$ 包含整个半诱导余匹配。根据归纳假设，我们有 $\mathrm{sfrk}_{3,k}$(球邻域$_3^H(v)) \geqslant d$。由于 H 是 G 的任意 k-子翻转，这就证明了 $\mathrm{sfrk}_{3,k}(G) \geqslant d+1$。 □

推论 6.10。 每个 $\mathscr{C}$ 非余匹配自由的类都具有无界的3-子翻转秩。

这就完成了定理 6.3 的证明。

7 禁用诱导子翻转

以下关于由禁诱导子图刻画无半图单子依赖类（即单子稳定类）的结论最初发表于 [8]。以下这一结果的表述参见 [25, 33] 。星图/团 r-交叉的定义如下。

定理 7.1 ([8])。 对于每个无半图图类 $\mathscr{C}$，以下命题等价。

1. $\mathscr{C}$ 是单子依赖的。*2.* 对于每个 r、$k \geqslant 1$，

都存在 $t \in \mathbb{N}$，使得

- 阶数为 t 的星图 r-交叉不是 $\mathscr{C}$ 中任何诱导子图的 k-翻转，并且
- 阶数为 t 的团 r-交叉不是 $\mathscr{C}$ 中任何诱导子图的 k-翻转。

类似于子翻转平坦性的定义，我们通过将翻转替换为子翻转，得到刻画。

定理 7.2。 对于每个无半梯子图类 $\mathscr{C}$，以下命题等价。

1. $\mathscr{C}$ 是单子依赖的。*2.* 对于每个 r、$k \geqslant 1$，

存在 $t \in \mathbb{N}$，使得

- 阶为 t 的星图 r-交叉不是 $\mathscr{C}$中任何诱导子图的 k-子翻转，并且
- 阶为 t 的团 r-交叉不是 $\mathscr{C}$中任何诱导子图的 k-子翻转。

对于 $r \geqslant 1$，阶为 t 的星图 r-交叉是 K_t的 r-细分，t （阶为 t的二分团）。更准确地说，它由根 a_1、.....、a_t 和 b_1、.....、b_t，以及 t^2 条两两顶点不相交的 r−顶点路径 $\{\pi_{i,j}:\ i$、$j \in [t]\}$ 组成；我们将这些路径的端点分别记为 start($\pi_{i,j}$) 和 end($\pi_{i,j}$)。每个根 a_i 都与 start($\pi_{i,j}$): $j \in [t]\}$ 相邻，而每个根 b_j 都与 end($\pi_{i,j}$): $i \in [t]\}$ 相邻。见图 8。阶为 t 的团 r-交叉，是将阶为 t 的星图 r-交叉中每个根的邻域变为一个团后得到的图。稍后，将两个模式的顶点划分为层 $\mathcal{L} = \{L_0, \ldots, L_{r+1}\}$ 会很有用：第 0 层由顶点 $\{a_1, \ldots, a_t\}$ 组成。对于 $l \in [r]$，第 l 层由路径 $\{\pi_{i,j}:$ i、$j \in [t]\}$ 的第 l 个顶点组成。最后，第（$r+1$）层由顶点 $\{b_1, \ldots, b_n\}$ 组成。

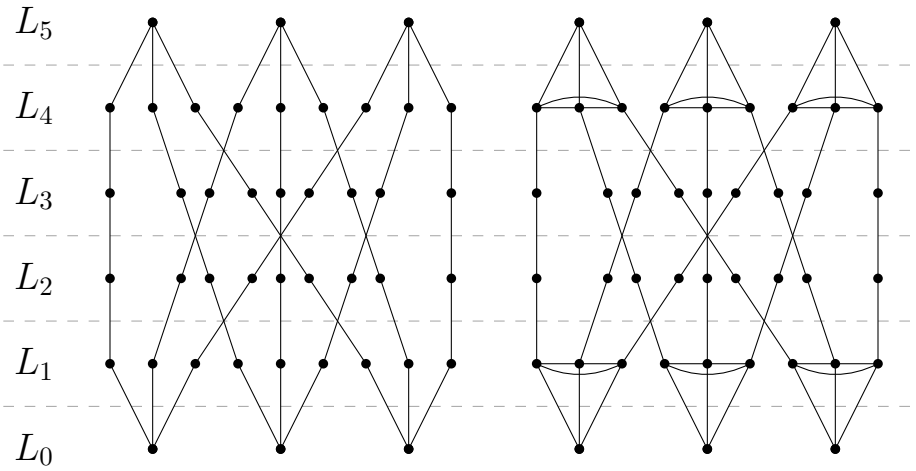

图 8：阶为 3 的星图 4-交叉和团 4-交叉。

现在我们可以证明定理 7.2 了

定理 7.2 的证明。 固定一个无半梯子图类 $\mathscr{C}$。定理的方向 (1. $\Rightarrow$ 2.) 直接由定理 7.1 得出，因为 $\mathscr{C}$ 尤其是无半图的，而且每个 k-子翻转也都是一个 k-翻转。

我们通过逆否命题证明方向（1. $\Rightarrow$ 2.）。假设 $\mathscr{C}$ 不是单子依赖的。我们需要证明，对于某个 r, $k \in \mathbb{N}$，可以从 $\mathscr{C}$中的诱导子图通过 k-子翻转得到任意大的星图 r-交叉或团 r-交叉。根据定理 7.1，我们已经知道可以从 $\mathscr{C}$ 通过 k-翻转得到这些模式。我们将利用 $\mathscr{C}$ 的无余匹配性来说明，子翻转足以提取这些模式。

首先假设，对于每个 t， $\mathscr{C}$都包含一个诱导图 G_t，满足 $C_t = G_t \oplus (\mathcal{P},\ F)$，并具有某个大小为 k 的划分 $\mathcal{P}$，其中 C_t 是大小为 t的团 r-交叉。根据这些模式的二部结构和拉姆齐定理，我们可以假设 $\mathcal{P}$ 是 $V(C_t) = V(G_t)$的划分，其分为 $r+2$ 层L_0，.....， L_{r+1}，如团 r-交叉的定义所述（关于如何对这些模式进行拉姆齐化，详见 [13] 或 [25]）。此外，根据鸽巢原理，我们可以假设，对每个$t \in \mathbb{N}$，这些层的翻转方式都相同：对每个 $t \in \mathbb{N}$，我们都使用相同的 $F \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$。我们要证明$C_t = G_t \ominus \mathcal{P}$。这意味着我们必须说明， F 中的各对恰好是 G_t中完全邻接的层对。首先注意，在 C_t中，没有两对层完全邻接。因此，若 G_t中存在一对完全邻接的层，它必定包含在 F中。剩下要证明的是，每对层（L_i， L_j）$\in F$都在 G_t中完全邻接。

首先考虑 $L_i = L_j$ 的情况，即某一层已经与自身发生翻转。若 $i \in \{1, r\}$，则 L_i 是“团层”之一：$C_t[L_i]$ 是由 t 个团组成的不交并，尤其包含大小为 t 的诱导匹配。因此，补图 $G_t[L_i]$ 包含大小为 t 的半诱导余匹配。回想一下， t 可以任意大，因此这与 $\mathscr{C}$ 是余匹配自由的矛盾。若 $i \notin \{1, r\}$，则 $G_t[L_i]$ 是一个独立集，因此 $G_t[L_i]$ 是一个团，而 L_i 在 G_t 中与自身完全邻接，正如所需。

现在假设 $L_i \neq L_j$。若 i 和 j 不是相邻层，则 C_t 中 L_i 与 L_j 之间半诱导出的图为空，因此这两个集合在 G_t 中必定完全邻接，结论即得。对于相邻层 L_i 和 $L_{i+1} = L_j$， C_t 中半诱导出的图包含一个大小至少为 t 的诱导匹配（若包含最外层，大小为 t： $\{i, i+1\} \cap \{0, r+1\} \neq \emptyset$; 否则大小为 t^2）。如前所述， G_t 必须包含大小为 t 的半诱导余匹配，由此得到矛盾。

这意味着 $C_t = G_t \ominus \mathcal{P}$，并且我们可以从 $\mathscr{C}$ 的诱导子图中，通过 $(r+2)$-子翻转提取任意大的团 r-交叉。

$\mathscr{C}$ 含有任意大的星图 r-交叉的翻转 S_t 的情形也可用相同的方法处理，但只需考虑少一种情形，因为每一层 L_i 都是 S_t 中的独立集。 □

由此可得以下推论。

推论 7.3. 对于每个半梯形无关类 $\mathscr{C}$ 部分自反图，以下命题等价。

1. $\mathscr{C}$ 是单子依赖的。*2.* $\mathscr{C}$ 不会 *EP*-转导所有自反图

组成的类。

证明。 如果 $\mathscr{C}$ 是单子依赖的，那么它不会转导所有图组成的类，因此尤其不会 EP-转导所有自反图组成的类。现在假设 $\mathscr{C}$ 不是单子依赖的。根据定理 7.2，存在 r， $k \geqslant 1$，使得 $\mathscr{C}$ 含有所有星图 r-交叉或所有团 r-交叉作为k-子翻转。

首先假设 it $\mathscr{C}$ 包含所有星图 r-交叉作为子翻转。先取诱导子图并添加所有自环，再应用引理 4.7，我们便能从 $\mathscr{C}$进行 EP-转导，得到所有自反星图r-交叉构成的类。对于每个自反图 G，所有星图自反 r-交叉构成的类都包含 G 的 $(2r+1)$-细分作为诱导子图。利用该细分，我们可以使用表达两个顶点之间距离至多为 $2r+2$ 的存在正公式来转导 G。（这会自然地添加自环，因此我们要求 G 是自反的。）由此可知，我们能够从所有星图 r-交叉构成的类 EP-转导出所有自反图构成的类，因此也能从 $\mathscr{C}$进行 EP-转导。

现在假设 $\mathscr{C}$ 包含所有团 r-交叉作为子翻转。同样， $\mathscr{C}$ 可以 EP-转导出所有自反团 r-交叉构成的类。由此，我们可以通过对交叉的各层进行着色，并仅保留不同层之间的边，使用公式 EP-转导出所有自反星图 r-交叉（从而归约到前一种情况）：

$$\varphi(x,y) := \bigvee_{i\neq j\in\{0,\dots,r+1\}} E(x,y)\wedge L_i(x)\wedge L_j(y). \qquad \square$$

8 存在正一阶逻辑的范式

本节将为存在正公式建立一种范式，以供后续论证使用。我们指出，通过考虑 G 的盖夫曼图中的距离，也可以为一般的关系型 Σ-结构建立这种范式；为保持表述一致，我们不这样做。

定义 8.1 （团公式）。 公式 $\varphi(\bar{x})$ 是一个 r-团公式 ，如果对于每个图 G 和每个元组 $\bar{v}\in V(G)^{|\bar{x}|}$

$$G\models\varphi(\bar{v}) \quad\Longrightarrow\quad G\models\bigwedge_{1\leqslant i<j\leqslant|\bar{x}|}\mathrm{dist}(v_i,v_j)\leqslant r.$$

这意味着， φ 的自由变量（的实例化）在 G 中构成一个距离-r 团 。

我们证明以下范式。

定理 8.2。 每个量词秩为 q 的 *EP*公式 $\varphi(\bar{x})$ 都等价于一个 *EP*公式，该公式是量词秩至多为 q 的 2^q-团公式 $\chi_i(\bar{z}_i)$ 的布尔组合，其中 $\bar{z}_i$ 和 是 $\bar{x}$ 的子元组。

证明。 我们对 φ的结构进行归纳法证明该命题。对于原子公式 $E(x,\ y)$、 $P(x)$，对于一元谓词 P，以及对于 $x=y$，该命题显然成立。它可以平凡地推广到正的布尔组合。

有趣的情形是存在量词。假设 $\varphi(\bar{x})\ =\exists y\,\psi(\bar{x},\ y)$ 是一个量词秩为 $q\geqslant 1$ 的公式。令 $r:=2^{q-1}$ 以及 $t:=q+|\bar{x}|$。目标是证明， φ 等价于 $2r$-团公式的正的布尔组合。

通过应用归纳法，我们可以假设 $\psi(\bar{x},\ y)$ 是 r-团公式的正的布尔组合。我们将 ψ 化为析取范式。注意到，为此我们只需根据以下等价关系将合取分配到析取上

$$\zeta_1\wedge(\zeta_2\vee\zeta_3)\ \equiv\ (\zeta_1\wedge\zeta_2)\ \vee\ (\zeta_1\wedge\zeta_3),$$

因此，正性在这一操作下得以保持。根据以下等价关系

$$\exists y\,(\zeta_1(y)\vee\zeta_2(y))\ \equiv\ (\exists y\,\zeta_1(y))\ \vee\ (\exists y\,\zeta_2(y)),$$

我们将存在量词移入析取式中。因此需要处理以下情况

$$\varphi(\bar{x})=\exists y\big(\chi_1(\bar{z}_1)\wedge\ldots\wedge\chi_m(\bar{z}_m)\big),$$

其中， χ_i 是 r-团公式，而 $\bar{z}_i$ 和 $\bar{z}'_i$ 是 $\bar{x}y$的子元组。

注意，如果元组 $\bar{z}_i$ 不包含量化变量 y，那么我们可以将合取项 $\chi_i(\bar{z}_i)$移出量词的作用域。因此，我们可以假设每个元组 $\bar{z}_i$ 都包含量化变量 y。通过限制 φ的自由变量，我们还可以假设 $\bar{x}$中的每个变量都出现在某个元组 $\bar{z}_i$中。

我们声称 φ 是一个 r-团公式。假设 $\varphi(\bar{x})$成立。这意味着存在一个元素 y，使得所有 r-团公式 $\chi_i(\bar{z}_i)$都成立。现在考虑 $\bar{x}$中的任意两个变量 x 和 x'。令 $\bar{z}_i$ 为一个包含 x 的元组，令 $\bar{z}_j$ 为一个包含 x' 的元组。 r-团公式 $\chi_i(\bar{z}_i)$为$\mathrm{dist}(x,\ y)\ \leqslant r$ 提供了见证（因为 $\{x,y\}\subseteq\bar{z}_i$）。类似地，我们推得 $\mathrm{dist}(x',\ y)\ \leqslant r$，根据三角不等式，$\mathrm{dist}(x,\ x')\ \leqslant 2r$，证毕。 $\square$

9 单子非相等性质

定义 9.1。 设 $\varphi(\bar{x},\ \bar{y})$是彩色图签名上的一个一阶逻辑公式，其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 是两个长度相同的元组变量，长度为 t。我们称 φ 在图类 $\mathscr{C}$ 上具有单子非相等性质 ，如果对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$，都存在一个图 $G_\ell \in \mathscr{C}$的图着色 G_ℓ^+ 以及元组 $\bar{a}_1$、.. . 、 $\bar{a}_\ell \in V(G)^t$，使得对于所有 $i,\ j \in [\ell]$

$$G_\ell^+ \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \iff i \neq j.$$

本节的目标是证明引言中的定理 1.12，为方便起见，我们在此重述该定理。

定理 1.12。 对于每个部分自反图类 $\mathscr{C}$，以下条件等价。

1. $\mathscr{C}$ 是无半梯子、无自反团的，且单子依赖。 *2.* 没有任何存在正公式在 $\mathscr{C}$ 上具有单子非相等性质。

由于自反图不含无自反团，因此自反图的较简化版本（定理 1.11）可立即推出。

在接下来的两个小节中，我们将分别证明定理 1.12 的两个方向。

9.1 非结构

对于所有存在正公式都不具有单子非相等性质这一性质，在 EP-转导下保持不变，以下观察对此作出了精确说明。

观察 9.2。 对于每个存在正公式 $\varphi(x,\ y)$ 和 EP-转导 T，都存在一个存在正公式 $\psi(x,\ y)$，具有以下性质。对于每个图类 $\mathscr{C}$：如果 φ 在 T($\mathscr{C}$) 上具有单子非相等性质，那么 ψ 在 $\mathscr{C}$ 上具有单子非相等性质。

引理 9.3 （（$2. \Rightarrow 1.$） 定理 1.12）。 对于每个图类 $\mathscr{C}$，如果 $\mathscr{C}$ 是

1. 非无自反团的，或 *2.* 非无半梯子的，或 *3.* 非单子依赖的，

那么存在一个在 $\mathscr{C}$ 上具有单子非等同性质的存在正公式。

证明。 在第一种情况下， $E(x,\ y)$ 在 $\mathscr{C}$ 上具有单调不等式性质。

在第二种情况下， $\mathscr{C}$ 将所有余匹配构成的类或所有半图构成的类 EP-转译。根据观察 9.2，只需证明存在 EP公式 φ 和 ψ，它们分别在所有余匹配构成的类和所有半图构成的类上具有单调不等性质。我们可以选取

$$\varphi(x_1x_2, y_1y_2) := E(x_1, y_2) \text{ and } \psi(x_1x_2, y_1y_2) := E(x_1, y_2) \vee E(y_1, x_2).$$

关于如何选择见证元组，请参见图 9。

在第三种情况下，如果 $\mathscr{C}$是无半梯子的，但不是单子依赖的，那么根据推论 7.3，它 EP-转译所有自反图构成的类，因此我们可以像在第二种情况下那样得出结论。 □

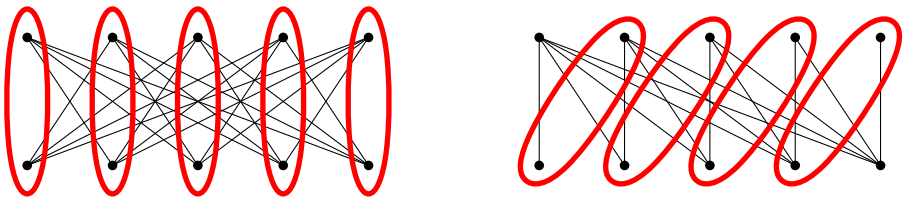

图 9：在余匹配和半图中见证单子非相等性质的元组。

9.2 结构

如果我们在单子非相等性质的定义（定义 9.1）中进一步要求元组 $\bar{a}_1$、…、$\bar{a}_\ell$ 两两不相交，那么就称 φ 在 $\mathscr{C}$ 上具有不相交的 单子非相等性质。下面说明我们总可以假设它们不相交。

引理 9.4. 对于每个图类 $\mathscr{C}$：如果存在一个（存在）正公式 φ，使其在 $\mathscr{C}$ 上具有单子非等同性质，那么也存在一个（存在）正公式 ψ，使其在 $\mathscr{C}$ 上具有不相交的单子非等同性质。

为了证明这个引理，我们需要以下引理，它可以视为适用于元组的向日葵引理。对于一个 t元组 $\bar{a} = a_1 \dots a_t$，我们记 $\bar{a}[i] := a_i$ 为其在第 i个坐标上的投影，并记 $\bar{a}|_I := a_{i_1} \cdots a_{i_p}$ 为由集合 $I = \{i_1 < \dots < i_p\} \subseteq [t]$所确定的子元组。

引理 9.5. 对于所有 $t, m \in \mathbb{N}$，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得对于每个由 n 个 t元组 S组成的集合，都存在一个大小为 m 的 t 元组子集 $A = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m\}$ 以及一个集合 $I \subseteq [t]$，使得对于所有不同的 $\bar{a}, \bar{a}' \in A$ 以及 $J := [t] \setminus I$，子元组 $\bar{a}|_I$ 和 $\bar{a}'|_I$ 相等，而子元组 $\bar{a}|_J$ 和 $\bar{a}'|_J$ 不相交。

证明。 固定 t，$m \in \mathbb{N}$ 并令 n 足够大，使其满足适用于大小至多为 t 、向日葵大小为 m 的集合系统的经典向日葵引理（回顾一下，若一族集合构成一个核心为 C 的向日葵，则所有两两交集都等于 C；向日葵引理保证大型集合系统中存在大型向日葵）。设 S 是一个包含 n 个 t-元组的集合。对于元组 $\bar{a} = (a_1, \dots, a_t)$，定义其支撑 $\mathrm{supp}(\bar{a}) := \{a_1, \dots, a_t\}$（将该元组视为一个集合）。将向日葵引理应用于族 $\{\mathrm{supp}(\bar{a}) : \bar{a} \in S\}$，可得一个子集 $A = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m\} \subseteq S$，其支撑构成一个核心为 C的向日葵。也就是说，对于所有 $i \neq j$，$\mathrm{supp}(\bar{a}_i) \cap \mathrm{supp}(\bar{a}_j) = C$，且集合 $\mathrm{supp}(\bar{a}_i) \setminus C$ 两两不交。

对于每个 $\bar{a} \in A$，令 $I(\bar{a}) := \{k \in [t] : \bar{a}[k] \in C\}$。由于 $[t]$ 只有有限多个子集，根据鸽巢原理，我们可以假设（必要时舍弃一些元组）$I(\bar{a}_1) = \dots = I(\bar{a}_m) =: I$。由于将 I 中的索引分配给集合 C 只有常数种方式，再次应用鸽巢原理，我们可以假设 $\bar{a}_i|_I = \bar{a}_j|_I$ 对所有 i，j。另一方面，对于 $k \in J := [t] \setminus I$，我们有 $\bar{a}_i[k] \in \mathrm{supp}(\bar{a}_i) \setminus C$；由于向日葵的花瓣两两不相交，子元组 $\bar{a}_i|_J$ 和 $\bar{a}_j|_J$ 对于所有 $i \neq j$均不相交。 □

现在我们可以证明引理 9.4。

引理 *9.4* 的证明。 令 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ 为一个在 $\mathscr{C}$ 上对长度为 $t := |\bar{x}| = |\bar{y}|$ 的元组具有单子非相等性质的公式。根据引理 9.5 和鸽巢原理，我们可以假设存在一个单一集合 $I \subseteq [t]$，使得对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$，存在一个图 $G_\ell \in \mathscr{C}$ 的着色 G_ℓ^+，其中包含元组 $\bar{a}_1$、……、$\bar{a}_\ell$，见证单子非相等性质，并且此外，$\bar{a}_i|_I$ 子元组两两相等，而对于 $J := [t] \setminus I$，$\bar{a}_i|_J$ 子元组两两不相交。在对 φ中的变量进行置换后，不妨设 $I = \{p+1, \dots, t\}$ 对某个 $p \in [t]$ 成立。（我们知道 $I \subsetneq [t]$，否则所有元组都会

相等，因而无法见证单子非相等性质。）我们为每个 $i \in I$ 向每个 G_ℓ^+ 添加一个谓词 X_i，用于标记唯一的元素 $\bar{a}_1[i] = \ldots = \bar{a}_\ell[i]$。现在，这个（存在的）正公式

$$\psi(\bar{x}' = x_1 \ldots x_p, \bar{y}' = y_1 \ldots y_p) := \exists \bar{z} \in (X_{p+1} \times \ldots \times X_t)\, \varphi(\bar{x}'\bar{z}, \bar{y}'\bar{z})$$

见证元组 $\bar{a}_1|_J$、……、$\bar{a}_\ell|$上的不相交单子非等同性性质 $_J$. □

引理 9.6 ((1. $\Rightarrow$ 2.)（定理 1.12 的）。 对于每个 $\mathscr{C}$ 部分自反图的类，如果 $\mathscr{C}$ 满足

1. 无自反团，且 *2.* 无半梯

子，且 *3.* 单子依赖，

那么，没有任何存在正公式在 $\mathscr{C}$ 上具有单子非等同性质。

证明。 反设存在一个存在正公式，在 $\mathscr{C}$ 上具有单子非等同性质。由引理 9.4，还存在一个存在正公式 $\varphi(\bar{x},\ \bar{y})$，在 $\mathscr{C}$ 上具有不相交单子非等同性质。固定一组足够大的两两不相交的顶点元组 $A = \{a_1, \ldots, a_\ell\}$，它们在某个图 $G_\ell \in \mathscr{C}$ 中见证 φ 具有不相交单子非等同性质。这意味着存在一种对 G_ℓ 的着色 G_ℓ^+，使得对于所有 $i,\ j \in [\ell]$

$$G_\ell^+ \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \Leftrightarrow i \neq j.$$

（可以从接下来的证明中确定 ℓ 所需的取值，但这样做并无益处。重要的只是 ℓ 仅依赖于 φ 和 $\mathscr{C}$。）令 q 为 φ的量词秩。由于 $\mathscr{C}$无半梯子且单子依赖，它满足定理 5.3 的条件，因此是 2^{q+1}-子翻转平坦的。根据引理 5.7，$\mathscr{C}$对于元组也具有 2^q-子翻转平坦性。于是存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 G_ℓ 中存在一个 k-子翻转 H，其中许多元组 $A' \subseteq A$ 两两之间的距离都大于 2^q。由于 $\mathscr{C}$无自反团，我们可以应用推论 4.11，得到一个无量词正公式 $\psi(x,\ y)$，它仅依赖于 k和 $\mathscr{C}$。在 φ 中用 ψ 替换边关系 $E(x,\ y)$，得到公式 φ^*；存在 H 的一个着色 H^+，使得对所有 $i,\ j \in [\ell]$

$$H^+ \models \varphi^*(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \Leftrightarrow G_\ell^+ \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \Leftrightarrow i \neq j. \tag{3}$$

由于 ψ 是无量词且正的，φ^* 仍然是量词秩为 q的 EP公式。应用存在正公式的范式（定理 8.2），我们可以将 φ^* 改写为由量词秩至多为 q的 2^q-团公式构成的正析取范式。这意味着 φ 是如下形式的公式的析取

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_1(\bar{z}_1) \wedge \ldots \wedge \alpha_m(\bar{z}_m), \tag{4}$$

其中每个 α_i 都是量词秩至多为 q 的 2^q-团公式，而每个 $\bar{z}_i$ 都是 $\bar{x}\bar{y}$的子元组。在图的签名上，使用 φ^* 中出现的谓词构成的签名，量词秩为 q 的一阶公式数量是有界的（事实 2.3）。由于 A' 很大，它包含两个不同的元组 $\bar{a}$和 $\bar{a}'$，它们满足 H^+中相同的量词秩为 q 的公式。根据构造，

$$H^+ \models \varphi^*(\bar{a}, \bar{a}'),$$

这可由 φ^* 中一个成立的析取项 α 见证，如公式 (4) 所示。这意味着 α 中的所有合取项 α_i 都成立。由于这些合取项是 2^q-团公式，且元组 $\bar{a},\ \bar{a}'$ 在 H^+ 中彼此之间的距离大于 2^q，因此它们的自由变量中都不可能同时包含来自这两个元组的元素。因此，α 的真假仅取决于 $\bar{a}$ 和 $\bar{a}'$ 各自满足的量词秩为 q 的公式。由于它们满足 H^+ 中相同的公式，我们得出 $H^+ \models \alpha(\bar{a},\ \bar{a})$ 也成立，进而 $H^+ \models \varphi^*(\bar{a},\ \bar{a})$ 也成立；这与公式 (3) 矛盾。 □

作为推论，我们得到引言中的定理 1.8。

定理 1.8。 设 $\mathscr{C}$ 是一个由部分自反图构成的处处稀疏类。$\mathscr{C}$ 的每个 *EP*-转导都是无半梯子的，且单子依赖。

证明。 由于 $\mathscr{C}$处处稠密，它满足定理 1.12 的所有条件。因此，没有任何存在正公式在 $\mathscr{C}$上具有单子非相等性质。根据观察 9.2，对于每个可从 $\mathscr{C}$ EP-转导得到的类 $\mathscr{D}$，上述结论同样成立。由引理 9.3 可知， $\mathscr{D}$ 必定无半梯子。 □

10 有界子翻转深度的 EP-稀疏化

作为通向定理 1.10 的垫脚石，我们在本节定义图参数 子翻转深度 ，并证明每个有界子翻转深度的类都可以从一个有界树深度的类 EP-转导得到。（根据定理 1.8，反过来也成立。）

10.1 定义与基本性质

我们通过半径为 $r = \infty$的（子）翻转秩来定义翻转深度 和子翻转深度 。对于每个图 G和 $k \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\text{flip-depth}_k(G) := \text{frk}_{\infty,k}(G) \quad \text{and} \quad \text{subflip-depth}_k(G) := \text{sfrk}_{\infty,k}(G).$$

为方便起见，我们在此回顾半径为 $r = \infty$ 时翻转秩的定义。

定义 10.1 ((子)翻转深度)。 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们将单顶点图 K_1 的 k-翻转深度 定义为

$$\text{flip-depth}_k(K_1) := 0.$$

对于其他每个图 G，我们定义

$$\text{flip-depth}_k(G) := 1 + \min_{\substack{H \text{ is a} \\ k\text{-flip of } G}} \max_{C \in \text{Conn}(H)} \text{flip-depth}_k(C),$$

其中，Conn(H) 是 H 的连通分量。将上述定义中的 k-翻转替换为 k-子翻转，即可自然得到 k-子翻转深度的定义。若存在$k, d \in \mathbb{N}$，使得每个图 $G \in \mathscr{C}$的 k-(子)翻转深度至多为 d，则称图类 $\mathscr{C}$具有有界（子）翻转深度。

比 k-翻转深度更为人熟知的参数是*SC*-深度 [20], ，其定义是将 k-翻转深度的定义中的 k-翻转替换为子集补 。若 H可通过对 G 的某个顶点子集上的边取补得到，则称 H 是 G的子集补。用翻转的语言来说：对于某个集合 $A \subseteq V(G)$，$H = G \oplus (\{A, V(G) \setminus A\}, \{(A, A)\})$。众所周知，翻转深度与 SC-深度在函数意义上等价。

引理 10.2. 对于每个图 G和 $k \geqslant 2$

$$\text{flip-depth}_k(G) \leqslant \text{SC-depth}(G) \leqslant 3k^2 \cdot \text{flip-depth}_k(G).$$

证明。 第一个不等式成立，是因为每个子集补图都是一次 2-翻转。对于第二个不等式，注意，在一个划分的两个部分 P 和 Q 之间进行翻转，可以通过执行三次子集补图来模拟：我们对 $P \cup Q$、P和 Q取补图。随后，执行一次 k-翻转可以通过依次翻转至多 k^2 对部分来模拟。 □

通过上述等价关系，以下关于 SC-深度的事实可以转移到翻转深度。

定理 10.3 ([20, 21])。 对于每个 k， d 都存在一个 $t \in \mathbb{N}$，使得任何具有 k-翻转深度 d 的图 G 都不包含长度为 t 的诱导路径。

定理 10.4 ([13])。 图类 $\mathscr{C}$ 具有有界翻转深度，当且仅当它是 ∞-翻转平坦的。

由此得到子翻转深度的如下刻画。

定理 10.5。 对于每个图类 $\mathscr{C}$，以下条件等价。

1. $\mathscr{C}$ 是余匹配自由的，并且具有有界翻转深度。

2. $\mathscr{C}$ 具有有界子翻转深度。 *3.* $\mathscr{C}$ 是 ∞- 子翻转平坦的。

证明。 我们已经证明了所有所需的蕴含关系。

- (1. $\Rightarrow$ 2.)由引理 6.7 得出。
- (2. $\Rightarrow$ 1.)由推论 6.10 得出。
- (1. $\Rightarrow$ 3.)由定理 10.4 和引理 5.4 得出。
- (3. $\Rightarrow$ 1.)由定理 10.4 和引理 5.5 得出。 □

10.2 稀疏化

本小节的目标是证明以下定理。

定理 10.6 （↻）。 对于每个 k、$d \in \mathbb{N}$，存在 *EP*-转导 图稀疏化$_{k,\,d}$ 和 恢复$_{k,\,d}$ 使得对于每个自反图 G，若其 k-子翻转深度至多为 d，则存在 G 的一个自反子图 G^*，其树深度至多为 $k \cdot d$，满足

$$G^* \in \mathsf{Sparsify}_{k,d}(G) \textit{ and } G \in \mathsf{Recover}_{k,d}(G^*).$$

我们回顾树深度的定义。

定义 10.7 （树深度）。 我们将单顶点图 K_1 的树深度 定义为

$$\text{tree-depth}(K_1) := 0.$$

对于其他图 G，我们定义

$$\text{tree-depth}(G) := 1 + \min_{v \in V(G)} \max_{C \in \text{Conn}(G-v)} \text{tree-depth}(C),$$

其中， $G - v$ 是删除了 v 后的图 G，而 Conn($G - v$) 是 $G - v$的连通分量。

在开始对具有有界子翻转深度的图进行稀疏化之前，我们还需要一些额外的工具。我们首先说明如何使用转导添加和删除具有小顶点覆盖的边集。如果对于每个 $uv \in X$ 都有 $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$，则顶点集合 $S \subseteq V$是边集 $X \subseteq V \times V$的顶点覆盖 。

引理 10.8（↻）。 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个无量词正转导 顶点覆盖，使得对于每个自反图 $G =$（V, E）以及边集 $X \subseteq E$，若其顶点覆盖的大小至多为 k

$$H \in \mathsf{VertexCover}(G) \textit{ and } G \in \mathsf{VertexCover}(H), \textit{ where } H := (V, E - X).$$

证明。 设 $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ 是 X 的一个顶点覆盖。对于每个 $i \in [k]$，令 $\mathcal{P}_i$ 为 $V(G)$ 的划分，划分为

1. 一个部分 V_i 仅包含 v_i，2. 一个部分 X_i 包含所有
满足 $v_i x \in X$ 的顶点 x，3. 一个部分包含其余顶点。

令 $\mathcal{P}$ 为所有 $\mathcal{P}_i$ 的公共细化。我们有 $|\mathcal{P}| \leqslant 3^k$。令 R 为如下关系：对于每个 $i \in [k]$，它都包含所有对 (V_i, X_i') 和 (X_i', V_i)，其中 X_i' 是 $\mathcal{P}$ 中包含于 X_i 的一个部分。R 中的所有点对在 G 中都完全邻接，且 $H = G \oplus (\mathcal{P}, R)$，因此应用引理 4.7 即可得出两个方向上的结论。 □

接下来，我们展示如何在所有连通分量直径有界的情况下，将一个转导并行应用于图的所有连通分量。

引理 10.9。 对于每个 $d \in \mathbb{N}$ 和 *EP*-转导 T，存在一个 *EP*-转导P，具有以下性质。对于任意两个部分自反图 G 和 G^*，如果它们满足

- $H_1, \ldots, H_m$ 是 G的连通分量，
- 每个 H_i 的直径至多为 d，
- $H_1^*, \ldots, H_m^*$ 是 G^*的连通分量，并且
- 每个 H_i^*都包含在$\mathsf{T}(H_i)$中，

那么 $G^* \in \mathsf{P}(G)$。

证明。 设 $\varphi(x, y)$是刻画 T 的公式。我们通过以下方式构造刻画 P 的公式 $\varphi^*(x, y)$：

1. 修改公式 $\varphi(x, y)$，使其仅在同一连通分量中的两个顶点 x 和 y 之间创建边；2. 将 φ 的所有量词相对化到 x的连通分量。

更确切地说，我们定义

$$\varphi^*(x, y) := \mathrm{sameComponent}(x, y) \wedge \mathrm{relativize}(\varphi)(x, y),$$

其中，relativize(φ)通过对 φ的每个量化子公式 $\exists z\ \psi(\bar{z}z)$递归地替换为以下内容而得到

$$\exists z\ \mathrm{sameComponent}(x, z) \wedge \psi(\bar{z}z).$$

关键在于依赖直径界，谓词 sameComponent(x, y)可以用存在正一阶逻辑表达，因为它只需检查 x和 y 之间的距离是否至多为 d。

在图 H 中对同一连通分量 H_i中的两个顶点 u 和 v 评估 φ^* 时，其结果与仅在图 H_i中评估 ψ 的结果相同。因此，我们转导 H^*。容易验证， ψ^* 仍然是一个存在正公式。

□

现在我们可以证明定理 10.6。为方便起见，我们重新陈述如下。

定理 10.6 （↻）。 对于每个 k， $d \in \mathbb{N}$ 都存在 *EP* 转导 稀疏化$_{k,\,d}$ 和 恢复$_{k,\,d}$ 使得对于每个具有不超过 d 的 k- 子翻转深度的自反图 G，都存在 G 的一个自反子图 G^*，其树深度不超过 $k \cdot d$，使得

$$G^* \in \mathsf{Sparsify}_{k,d}(G) \text{ and } G \in \mathsf{Recover}_{k,d}(G^*).$$

证明。 我们首先对 d进行归纳证明引理的一个略微变体，其中我们还额外

- 假设输入 G 是连通的，并且
- 要求结果 G^* 是连通的。

对于基例 $d = 0$，我们可以选择 $G^* := G = K_1$ 以及稀疏化$_{k,\ 1}$ 和恢复$_{k,\ 1}$ 为恒等转导。对于归纳步骤，假设 G 的 k-子翻转深度至多为 $d+1$。设 $\mathcal{P}$ 为大小至多为 k 的划分，使得图的连通分量 H_1、.....、H_m

$$H := H_1 \uplus \ldots \uplus H_m = G \ominus \mathcal{P}$$

都具有 k-子 翻转深度至多为 d。对这些连通分量应用归纳法，我们构造图 h

$$H^* := H_1^* \uplus \ldots \uplus H_m^*$$

我们通过向 H^* 添加按如下方式定义的边 X 来构造 G^*。从每个部分 $P \in \mathcal{P}$ 中任意选取一个引领顶点 $\ell(P) \in P$。通过加入以下内容来构造 X：

- 对于在 G 中构成团的每个部分 P：从 $\ell(P)$ 到 P 中其他每个顶点添加一条边；以及
- 对于在 G 中完全邻接的每对不同部分 $P,\ Q$：从 $\ell(P)$ 到Q 的每个顶点添加一条边，并从 $\ell(Q)$ 到 P 中的每个顶点添加一条边。

观察 10.10。 这些引领顶点构成 X 的一个顶点覆盖，其大小至多为 k。

现在我们验证 G^* 满足引理的陈述。

断言 10.11. G^* 是 G的一个连通子图。

证明。 根据归纳法，所有的 H_i^*都是 G 的连通子图。显然， G^* 是 G的一个子图： G^* 只向 H_i^*添加了边 X，而这些边原本就存在于 G中。

还需证明 G^* 是连通的。由于 G 是连通的，只需证明对于 G中的每条边 uv， G^*中存在一条连接 u 和 v 的路径。若 u 和 v 属于同一个 H_i^*，则由归纳法可得。否则， u 和 v 分别属于 $G \ominus \mathcal{P}$的不同连通分量 H_i 和 H_j，因此边 uv 是在应用子翻转时被删除的。因此，要么 u 和 v 属于同一个部分 $P \in \mathcal{P}$，且该部分在 G中是一个团；要么它们属于两个不同的部分 P和 Q，且这两个部分在 G中完全邻接。在这两种情况下，我们都可以验证，在 G^*中仅使用 X 中的边，就存在一条长度至多为 3 的路径。■

断言 10.12. G^* 的树深度至多为 $k \cdot (d+1)$

证明。 根据归纳法， H^* 是若干树深度至多为 $k \cdot d$ 的图的不交并。根据树深度的定义，添加边 X（其顶点覆盖大小至多为 k）至多会使树深度增加 k。■

断言 10.13. 存在一个 *EP*-转导 稀疏化$_{k,\ d+1}$ 可将 G转导为 G^*。

证明。 由于子翻转可转导（引理 4.7），我们可以将 G转导为 H。根据归纳法，对于所有 $i \in [m]$, 稀疏化$_{k,\ d}$都可将 H_i 转导为 H_i^*。由于每个 H_i 的直径都有界（定理 10.3），我们可以并行应用 稀疏化$_{k,\ d}$，将 H 转导为 H^*（引理 10.9）。通过引理 10.8 添加额外的边 X，我们可以将 H^* 转导为 G^*。根据传递性（引理 2.1），我们可以串联这些转导，将 G转导为 G^*。■

断言 10.14。 存在一个 *EP*-转导 恢复$_{k,\ d+1}$ 它可以从 G^* 生成 G。

证明。 我们首先通过删除边 $E(G^*) - E(H^*) = X$，从 G^* 转导出 H^*（引理 10.8）。回想一下，$H^* = H_1^* \uplus \ldots \uplus H_m^*$。根据归纳法，对于所有 $i \in [m]$, Recover$_{k,\ d}$都能从 H_i^* 生成 H_i。关键在于，每个 H_i^* 都是连通的，且树深度有界，因此直径也有界（定理 10.3）。因此，我们可以对所有 H_i^* 并行应用 Recover$_{k,\ d}$（引理 10.9）。由此得到 H。最后，我们撤销子翻转，得到 G（引理 4.7）。■

至此，引理的证明完成，其中我们假设 G 是连通的。根据引理 10.9，原引理的陈述由此得证。

□

11 结构有界扩张的 EP-稀疏化

本节我们证明定理 1.10，并为方便起见重新陈述该定理。

定理 1.10 (◌)。 猜想 *1.7* 对以下类性质成立：对所有

$$\mathcal{P} \in \{\text{灌木深度、线性团宽度、团宽、李生宽度、合并宽度}\}。$$

特别地，对于每个无半梯子自反图类 $\mathscr{C}$，存在 *EP* 转导 稀疏化 和恢复，使得每个图 $G \in \mathscr{C}$ 都包含一个自反子图 G^*，满足

$$G^* \in \mathsf{Sparsify}(G) \text{ and } G \in \mathsf{Recover}(G^*),$$

且类 $\mathscr{D} := \{G^* : \ G \in \mathscr{C}\}$ 满足以下所有条件。

1. 若 $\mathscr{C}$ 具有有界灌木深度，则 $\mathscr{D}$ 具有有界树深度。 *2.* 若 $\mathscr{C}$ 具有有界线性团宽度，则 $\mathscr{D}$ 具有有界路径宽度。 *3.* 若 $\mathscr{C}$ 具有有界团宽，则 $\mathscr{D}$ 具有有界树宽。 *4.* 若 $\mathscr{C}$ 具有有界李生宽度，则 $\mathscr{D}$ 具有有界稀疏李生宽度。 *5.* 若 $\mathscr{C}$ 具有有界合并宽度，则 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张。

同时处理定理 1.10 的全部五种情形，关键在于运用类性质结构有界扩张。如果一个图类可以从有界扩张 [17]类通过转导得到（使用一般的一阶逻辑，而非局限于 EP 片段），那么它就具有结构有界扩张。有界扩张 [30]类是非常一般的稀疏图类，涵盖了所有有界树深度、路径宽度、树宽度和稀疏李生宽度的类，但其一般性不及处处稠密类。结构有界扩张类涵盖了前面提到的稀疏类中，其稠密且转导封闭对应类的无半图片段。

定理 11.1。以下类性质 $\mathcal{P}$ 在转导下封闭，并且每个满足 $\mathcal{P}$ 的无半图类都具有结构有界扩张。

1. 灌木深度 *[20, 21]* *3*。团宽 *[28]* *5*。合并宽度 *[14, 9]*。 *2.* 线性团宽度 *[29]* *4*。李生宽度 *[5, 19],*

我们不会使用（结构）有界扩张的定义，而是采用以下通过覆盖给出的刻画。

定义 11.2 （p-覆盖）。 固定一个全集 V。若一组集合 $U_1, \dots, U_s \subseteq V$满足：对于大小至多为 p 的每个子集 $X \subseteq V$，都存在 $i \in [s]$ 使得 $X \subseteq U_i$，则称其为 V 的 p-覆盖 。

定义 11.3 （$\mathcal{P}$-覆盖）。 对于类性质 $\mathcal{P}$ 和图类 $\mathscr{C}$，如果对于每个 $p \in \mathbb{N}$，都存在 $s \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$，存在一个 V（G）的大小为 $s\,p$ 的覆盖 $U_1, \dots, U_s$，且类 $\mathscr{D} = \{G[U_i] \mid G \in \mathscr{C}, i \in [s]\}$ 具有性质 $\mathcal{P}$，则称 $\mathscr{C}$ 具有 $\mathcal{P}$-覆盖 。

定理 11.4。 对于任意图类 $\mathscr{C}$，以下各项均成立。

1. $\mathscr{C}$ 具有有界扩张，当且仅当 $\mathscr{C}$ 具有有界树深度覆盖。 *[30]2.* $\mathscr{C}$ 具有结构有界扩张，当且仅当 $\mathscr{C}$ 具有有界 *SC*-深度覆盖。 *[17]*

我们在此补充以下等价关系，并将在后文中使用。

定理 11.5。 对于每个图类 $\mathscr{C}$，以下命题等价。

1. $\mathscr{C}$ 是余匹配自由的，并具有结构有界扩张。 *2.* $\mathscr{C}$ 具有有界子翻转深度覆盖。

为证明该定理，注意到无余匹配性可以从覆盖集提升到整个图，这一点会很有帮助。

引理 11.6. 设 G 是一个图，且 U_1、…、U_s 是 $V(G)$ 的一个二重覆盖。如果 G 包含一个大小为 $s \cdot t$ 的半诱导余匹配，那么存在 $i \in [s]$，使得 $G[U_i]$ 包含一个大小为 t 的半诱导余匹配。

证明。 设 a_1、…、$a_{s\cdot t}$ 和 b_1、…、$b_{s\cdot t}$ 是在 G 中半诱导出余匹配的顶点，也就是说，

$$a_i b_j \in E(G) \Leftrightarrow i \neq j \quad \text{for all } i, j \in [s \cdot t].$$

利用 U_i 构成二重覆盖这一假设，我们可以为每个指标 $m \in [s\cdot t]$ 指定一个覆盖集 $f(m) \in [s]$，使得 $\{a_m, b_m\} \in U_{f(m)}$。根据鸽巢原理，存在一些指标 $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant s \cdot t$，它们都被指定到同一个覆盖集 U_i，其中某个 $i \in [s]$。因此， $G[U_i]$ 包含一个大小为 t 的半诱导余匹配。 □

现在我们可以证明定理 11.5。

定理 *11.5* 的证明。 为证明 $(1. \Rightarrow 2.)$，若 $\mathscr{C}$ 具有结构有界扩张，则根据定理 11.4，它具有有界 SC 深度覆盖。由引理 10.2 可知，它具有有界翻转深度覆盖。根据定理 10.5，利用无余匹配性可知，它具有有界子翻转深度覆盖。

为证明 $(2. \Rightarrow 1.)$，若 $\mathscr{C}$ 具有有界子翻转深度覆盖，则根据定义，它也具有有界翻转深度覆盖。由引理 10.2 可知，它具有有界 SC 深度覆盖。根据定理 11.4， $\mathscr{C}$ 具有结构有界扩张。还需证明无余匹配性。我们知道， $\mathscr{C}$ 中的图可以由一个有界子翻转深度的类 $\mathscr{D}$ 中的图进行二重覆盖。根据定理 10.5， $\mathscr{D}$ 是余匹配自由的。根据引理 11.6 的逆否命题，无余匹配性可传递到 $\mathscr{C}$。 □

我们的目标是利用定理 11.5 稀疏化结构有界扩张的图，方法是用有界数量的有界子翻转深度图覆盖它们。根据上一节的定理 10.6，我们可以分别将这些图稀疏化为有界树深度图。为了控制由这些有界树深度图取并集后所得图的密度，我们将使用以下拉姆齐型引理。

引理 11.7. 对于所有 $s, t \in \mathbb{N}$，存在 $f = f(s,t)$，使得以下结论成立。对于每个图 $G = \bigcup_{i\in[s]} H_i$，如果 G 包含一个半诱导的 $K_{f,f}$，那么存在 $i \in [s]$，使得 H_i 包含一个半诱导的 $K_{t,t}$。

证明. 设 A 和 B 是 G 中半诱导一个二分团的集合，即 $A \times B \subseteq E(G)$。对于每条边 $ab \in A \times B$，选取一个指标 $i(ab) \in [s]$，使得 $ab \in E(H_i)$。这便得到完全二分图 $K_{|A|,|B|}$ 的边的一种 s 着色。

根据二分拉姆齐定理，存在 $f = f(s,t)$，使得若 $|A|, |B| \geqslant f$，则存在大小为 t 的子集 $A' \subseteq A$ 和 $B' \subseteq B$，以及一个指标 $i \in [s]$，使得 A' 与 B' 之间的所有边都被染成 i。这表明 H_i 包含一个半诱导的 $K_{t,t}$。 □

我们将结合上述引理与定理 11.4 的以下推论，得到一个有界扩张类。

推论 11.8 ([17])。 无二分团图类具有有界扩张，当且仅当它具有结构有界扩张。

现在，对于有界扩张图类，我们可以利用以下引理从图的并集中恢复子图。

引理 11.9（由 [27] 的引理 34 推出）。 设 $\mathscr{C}$ 是一个有界扩张类。那么存在一个从 $\mathscr{C}$ 到其单调闭包 $\{H$ 上的 *EP*-转导：H 是 $\mathscr{C}\}$中某个图的子图。

现在是将所有内容结合起来并证明以下引理的时候了，该引理概括了定理 1.10 的本质。

引理 11.10。 对于每个由结构有界扩张的自反图组成的无余匹配类 $\mathscr{C}$，存在 *EP* 转导 稀疏化 和 恢复，使得每个图 $G \in \mathscr{C}$ 都包含一个自反子图 G^*，满足

$$G^* \in \mathsf{Sparsify}(G) \quad \textit{and} \quad G \in \mathsf{Recover}(G^*),$$

并且类 $\mathscr{D} := \{G^* : \ G \in \mathscr{C}\}$ 具有有界扩张。

证明。 根据定理 11.5， $\mathscr{C}$ 具有有界子翻转深度覆盖：存在 $s,\ k,\ d \in \mathbb{N}$，使得对于每个图 $G \in \mathscr{C}$，存在 $V(G)$的一个大小为-s 2的覆盖 $U_1, \ldots\ldots, U_s$，使得每个 $G[U_i]$ 的 k-子翻转深度都被 d所界定。对于每个 $G \in \mathscr{C}$，固定这样一个覆盖。根据定理 10.6，存在 EP 转导稀疏化$_{k,\ d}$ 和恢复$_{k,\ d}$，使得对于每个 $G_i := G[U_i]$，存在一个 G_i 的自反子图 G_i^*，其树深度至多为 $k \cdot d$，满足

$$G_i^* \in \mathsf{Sparsify}_{k,d}(G_i) \text{ and } G_i \in \mathsf{Recover}_{k,d}(G_i^*).$$

我们将 Sparsify 定义为定义以下内容的转导

$$G^* := \bigcup_{i=1}^{s} G_i^*.$$

该转导由引理 2.2 中的 Glue(Sparsify s)(G) 实现。由于结构有界扩张的转导闭包性，$\mathscr{D}$ 具有结构有界扩张。类 $\mathscr{D}$:= $\{G^*$:$G \in \mathscr{C}\}$ 中的图是有界数量的有界树深度图的并。众所周知，有界树深度蕴含无双团性。根据引理 11.7，$\mathscr{D}$ 也无双团。根据推论 11.8，$\mathscr{D}$ 具有有界扩张。

现在我们来说明如何构造 Recover。回想一下，$G^* = \bigcup_{i=1}^{s} G_i^*$，其中每个 G_i^* 都是 G 在顶点集 U_i 上的一个（自反的）子图。需要注意的是，一般而言，G_i^* 并非 G^*的诱导子图，尤其不等于 $G^*[U_i]$: $G^*[U_i]$ 可能包含来自某个 G_j^*的额外边，且 $j \neq i$，这种情况下 U_i 和 U_j 会重叠。因此，我们不能直接将 $G^*[U_i]$ 传递给 Recover$_{k,\ d}$ 要恢复 G_i，必须先选出 G_i^* 在 G^*中作为子图时所对应的目标边集。

利用引理 11.9以及 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张这一事实，存在一个 EP-转导 M，使得 M($\mathscr{D}$)包含 $\mathscr{D}$的单调闭包；也就是说，对于每个 $H \in \mathscr{D}$，

$$\mathsf{M}(H) \supseteq \{H' : H' \subseteq H \text{ is a (reflexive) subgraph}\}.$$

特别地，对于我们的 $G^* \in \mathscr{D}$ 以及每个 $i \in [s]$，都有 $G_i^* \in$ M(G^*)。

令 Recover$_{k,d}$ 为定理 10.6中的转导（见上文）。对于每个 $i \in [s]$，考虑复合

$$\mathsf{R}_i \ := \ \mathsf{Recover}_{k,d} \circ \mathsf{M}.$$

那么，R$_i$ 是一个 EP-转导（由 EP 转导复合而成），并且

$$G_i \in \mathsf{Recover}_{k,d}(G_i^*) \subseteq \mathsf{Recover}_{k,d}(\mathsf{M}(G^*)) = \mathsf{R}_i(G^*).$$

因此，我们可以从 G^* 得到每个诱导子图 $G_i = G[U_i]$：首先使用 M 猜测正确的子图 G_i^*，然后应用 Recover$_{k,\ d}$。接下来需要将 s 个恢复后的图 G_1，……，G_s合并为 G。注意，$V(G)$和 $E(G) = \bigcup_{i=1}^{s} E(G_i)$，因为 U_i是一个二重覆盖。因此，我们将 Recover 定义为这样一种 EP-转导：输入 G^* 时，输出所有 R$_i$的并集。

形式上，可以再次通过对 M 和 Recover 所需的颜色集进行简单的乘积着色来实现，并以 $i \in [s]$ 为索引；然后将最终的边谓词解释为对 $i \in [s]$ 的析取，其中每一项是第 i 个恢复副本的边谓词。

□

定理 1.10 现在可由引理 11.10、定理 11.1 和定理 1.5 结合得出。我们将展示有界团宽情形下的证明方式，其他情形也类似。

推论 11.11。对于每个有界团宽的自反图半梯子自由类 $\mathscr{C}$，都存在 *EP*-转导 稀疏化 和 恢复，使得每个图 $G \in \mathscr{C}$ 都包含一个自反子图 G^*，满足

$$G^* \in \mathsf{Sparsify}(G) \text{ and } G \in \mathsf{Recover}(G^*),$$

并且类 $\mathscr{D} := \{G^* : \ G \in \mathscr{C}\}$ 具有有界树宽。

证明。由于 $\mathscr{C}$ 是半梯子自由且具有有界团宽，根据定理 11.1，它具有结构有界扩张。根据半梯子自由性的定义，$\mathscr{C}$ 也是余匹配自由的。这意味着我们可以应用引理 11.10，得到转导稀疏化和恢复、子图 G^*，以及类 $\mathscr{D} := \{G^* : G \in \mathscr{C}\}$。类 $\mathscr{D}$ 具有有界团宽（根据团宽的转导封闭性，定理 11.1）。由于 $\mathscr{D}$ 具有有界扩张，因此它无双团。现在根据定理 1.5，$\mathscr{D}$ 具有有界树宽。 □

12 正 MSO

现在我们证明正 MSO 可约化为正 FO。我们使用正公式的一项标准单调性性质，参见例如 [24, 引理 10.7]。

引理 12.1. 设 $\psi(\bar{x}, Y, X)$ 是一个关于 Y正的公式，也就是说，Y的每次出现都处于偶数次否定之下。那么对于任意图 G、$\bar{x}$的任意赋值 $\bar{a}, B$，以及任意集合 $Y \subseteq Y' \subseteq V(G)$，

$$G \models \psi(\bar{a}, Y, \bar{B}) \implies G \models \psi(\bar{a}, Y', \bar{B}).$$

定理 12.2. 每个（存在）正 *MSO* 公式 $\varphi(\bar{x}, X)$ 都等价于一个（存在）正 *FO* 公式。

证明。我们逐个消去集合量词。首先设 $\varphi = \exists Y\, \psi(\bar{x}, Y, X)$，其中 ψ关于 Y是正的（因为整个公式是正的）。定义 $\psi^{\top}(\bar{x}, \bar{X})$ 为从 $\psi(\bar{x}, Y, X)$ 得到的公式，方法是将每个原子公式 $Y(t)$ 替换为 $\top$（等价地说，将 Y解释为全体顶点集）。我们声称，对于任意 G、任意元组 $\bar{a}$ 和元组 B，都有

$$G \models \exists Y\, \psi(\bar{a}, Y, \bar{B}) \quad \iff \quad G \models \psi^{\top}(\bar{a}, \bar{B}).$$

为说明这一点，注意如果 $G \models \exists Y\, \psi(\bar{a}, Y, \bar{B})$，那么根据引理 12.1，也有 $G \models \psi^{\top}(\bar{a}, \bar{B})$。反过来，如果 $G \models \psi^{\top}(\bar{a}, \bar{B})$，那么选择 $Y = V(G)$ 即可见证存在量词，因此 $G \models \exists Y\, \psi(\bar{a}, Y, \bar{B})$。

现在假设 $\varphi = \forall Y\, \psi(\bar{x},\ Y,\ \bar{X})$ 在 Y 中关于 ψ 为正。令 $\psi^{\perp}(\bar{x},\ \bar{X})$ 为由 $\psi(\bar{x},\ Y,\ X)$ 将每个原子式 $Y(t)$ 替换为 $\perp$（等价地，将 Y 解释为空集）得到的公式。那么对于任意 G，$\bar{a}$ 和 B，

$$G \models \forall Y\, \psi(\bar{a}, Y, \bar{B}) \quad \iff \quad G \models \psi^{\perp}(\bar{a}, \bar{B}).$$

对于正向，取 $Y = \emptyset$。对于反向，若 $G \models \psi^{\perp}(\bar{a},\ \bar{B})$，则根据单调性，由于 Y 中的正性，我们有：对于任意 $Y \supseteq \emptyset$，$G \models \psi(\bar{a},\ Y,\ B)$，即对于任意集合 Y，因此 $G \models \forall Y\, \psi(\bar{a},\ Y)$。

消去所有集合量词后，我们得到一个与原正 MSO 公式等价的正 FO 公式。该构造保留了存在性限制（若存在），因此同样的论证也能得出所述的存在性版本。

□

参考文献

[1] Hans Adler 和 Isolde Adler. 将处处稀疏图类诠释为模型论中的一个经典概念. 《欧洲组合学杂志》, 36:322–330, 2014年.[2] John T. Baldwin 和 Saharon Shelah. 二阶量词与理论的复杂度. Notre Dame Journal of Formal Logic, 26(3):229–303, 1985.[3] Edouard Bonnet, Samuel Braunfeld, Ioannis Eleftheriadis, Colin Geniet, Nikolas M¨ahlmann, Michał Pilipczuk, Wojciech Przybyszewski 和 Szymon Toru´nczyk. 单子依赖图类的可分性. 收录于 Keren Censor-Hillel、Fabrizio Grandoni、Jo¨el Ouaknine 和 Gabriele Puppis 编，国际自动机、语言与程序设计学术会议第52届（ICALP 2025），第334卷《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs），第147:1–147:19页，德国达格施图尔，2025年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik.[4] Edouard Bonnet, Colin Geniet, Eun Jung Kim, St´ephan Thomass´e 和 R´emi Watrigant. 双宽度 II：小类. Combinatorial Theory, 2(2), 2022年.[5] Edouard Bonnet, Eun Jung Kim, St´ephan Thomass´e 和 R´emi Watrigant. 双宽度 I：可处理的一阶模型检验. J. ACM, 69(1), 2021年11月.[6] Bruno Courcelle 和 Stephan Olariu. 图的团宽上界. Discrete Applied Mathematics, 101(1):77–114, 2000年.[7] Reinhard Diestel. 《图论》, 第4版，Graduate Texts in Mathematics第173卷. 施普林格, 2012年.[8] Jan Dreier, Ioannis Eleftheriadis, Nikolas M¨ahlmann, Rose McCarty, Michał Pilipczuk 和 Szymon Toru´nczyk. 单子稳定图类上的一阶模型检验. 收录于2024年 IEEE 第65届计算机科学基础年会（FOCS），第21–30页，美国加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯，2024年10月。IEEE计算机学会.[9] Jan Dreier, Jakub Gajarsk´y 和 Michał Pilipczuk. 稀疏图类转导的高效逆转. arXiv预印本 arXiv:2601.14906, 2026年.[10] Jan Dreier, Nikolas M¨ahlmann, Amer E. Mouawad, Sebastian Siebertz 和 Alexandre Vigny. 单子稳定性的组合与算法方面. 收录于 Sang Won Bae 和 Heejin Park 编，算法与计算国际研讨会第33届（ISAAC 2022），第248卷《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs），第11:1–11:17页，德国达格施图尔，2022年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik.[11] Jan Dreier, Nikolas M¨ahlmann 和 Sebastian Siebertz. 结构稀疏图类上的一阶模型检验. 收录于第55届 ACM 计算理论年会论文集（STOC 2023），第567–580页，美国纽约州纽约市，2023年。美国计算机协会。

[12] Jan Dreier, Nikolas M¨ahlmann, Sebastian Siebertz 和 Szymon Toru´nczyk. 单子稳定类与单子NIP类中的不可区分集和平坦性. 收录于 Kousha Etessami、Uriel Feige 和 Gabriele Puppis 编，国际自动机、语言与程序设计学术会议第50届（ICALP 2023），2023年7月10日至14日，德国帕德博恩，第261卷 LIPIcs，第125:1–125:18页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2023年。[13] Jan Dreier, Nikolas M¨ahlmann 和 Szymon Toru´nczyk. 翻转可分性：单子依赖图类的组合二分性. 收录于第56届ACM计算理论年会论文集（STOC 2024），第1550–1560页，美国纽约州纽约市，2024年。美国计算机协会。[14] Jan Dreier 和 Szymon Toru´nczyk. 合并宽度与一阶模型检验. 收录于第57届ACM计算理论年会论文集（STOC '25），第1944–1955页，美国纽约州纽约市，2025年。美国计算机协会。[15] Zdenˇek Dvoˇr´ak. 诱导细分与有界扩张. 《欧洲组合学杂志》, 69:143–148, 2018年。[16] Grzegorz Fabianski, Michał Pilipczuk, Sebastian Siebertz 和 Szymon Toru´nczyk. 支配与独立性的渐进算法. 收录于 Rolf Niedermeier 和 Christophe Paul 编，国际计算机科学理论方面研讨会第36届（STACS 2019），第126卷《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs），第27:1–27:16页，德国达格施图尔，2019年。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik. [17] Jakub Gajarsk´y, Stephan Kreutzer, Jaroslav Neˇsetˇril, Patrice Ossona De Mendez, Michał Pilipczuk, Sebastian Siebertz 和 Szymon Toru´nczyk. 有界扩张类的一阶解释. 《ACM计算逻辑汇刊》（TOCL）, 21(4):1–41, 2020年。[18] Jakub Gajarsk´y, Nikolas M¨ahlmann, Rose McCarty, Pierre Ohlmann, Michał Pilipczuk, Wojciech Przybyszewski, Sebastian Siebertz, Marek Sokołowski 和 Szymon Toru´nczyk. 单子稳定图类的翻转游戏. 收录于 Kousha Etessami、Uriel Feige 和 Gabriele Puppis 编，国际自动机、语言与程序设计学术会议第50届（ICALP 2023），第261卷《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs），第128:1–128:16页，德国达格施图尔，2023年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik.[19] Jakub Gajarsk´y, Michał Pilipczuk 和 Szymon Toru´nczyk. 有界孪生宽度的稳定图. 收录于第37届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会论文集，第1–12页，2022年。[20] Robert Ganian, Petr Hlinˇen´y, Jaroslav Neˇsetˇril, Jan Obdrˇz´alek, Patrice Ossona de Mendez 和 Reshma Ramadurai. 树木低矮生长时：灌木与快速MSO1. 收录于 Branislav Rovan、Vladimiro Sassone 和 Peter Widmayer 编，计算机科学数学基础2012，第419–430页，柏林、海德堡，2012年。施普林格柏林海德堡。[21] Robert Ganian, Petr Hlinˇen´y, Jaroslav Nesetril, Jan Obdrz´alek 和 Patrice Ossona de Mendez. 灌木深度：刻画稠密图的高度. 《逻辑方法与计算机科学》, 15(1), 2019年。[22] Frank Gurski 和 Egon Wanke. 不含 k n, n 的团宽有界图的树宽. 收录于图论计算机科学概念国际研讨会，第196–205页。施普林格, 2000年。[23] Wilfrid Hodges. 《简明模型论》. 剑桥大学出版社, 1997年。

[24] Leonid Libkin. 有限模型论基础，第41卷。施普林格，2004年。[25] Nikolas M¨ahlmann。单子稳定与单子依赖图类：刻画与算法元定理。博士论文，不来梅大学，2024年。[26] Jaroslav Ne˘set˘ril 和 Patrice Ossona de Mendez。稀疏性：图、结构与算法，第28卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[27] Jaroslav Nesetril、Patrice Ossona de Mendez 和 Sebastian Siebertz。一阶转导准序的结构性质。*arXiv*预印本 *arXiv:2010.02607*，2020年。[28] Jaroslav Ne˘set˘ril、Patrice Ossona de Mendez、Michał Pilipczuk、Roman Rabinovich 和 Sebastian Siebertz。秩宽与稳定性相遇。载于*2021*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集（*SODA*），第2014–2033页。美国工业与应用数学学会，2021年。[29] Jaroslav Ne˘set˘ril、Roman Rabinovich、Patrice Ossona de Mendez 和 Sebastian Siebertz。线性秩宽与稳定性相遇。载于第十四届*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，第1180–1199页。美国工业与应用数学学会，2020年。[30] Jaroslav Ne˘set˘ril 和 Patrice Ossona de Mendez。Grad与有界扩张类 I：分解。《欧洲组合学杂志》，29(3):760–776，2008年。[31] Patrice Ossona de Mendez。图的一阶转导（特邀报告）。载于第*38*届国际计算机科学理论方面研讨会（*STACS 2021*），第187卷，*LIPIcs*，第2:1–2:7页。Schloss Dagstuhl — Leibniz信息学中心，2021年。[32] Michał Pilipczuk、Sebastian Siebertz 和 Szymon Toru´nczyk。稀疏图中的类型数量。载于第*33*届*ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会论文集，第799–808页，2018年。[33] Michał Pilipczuk。逻辑视角下的图类，2025年。[34] Klaus-Peter Podewski 和 Martin Ziegler。稳定图。《数学基础》，100(2):101–107，1978年。