arXiv:2601.15907v1 [math.MG] 22 Jan 2026

乘积空间中的度量构造与不动点定理

Doan Huu Hieu、Vo Minh Tam 和 Nguyen Duy Cuong

摘要。本文研究一种一般性方案：借助一族连续凸函数，在度量空间的乘积上构造度量。该构造包括传统的p-度量，并生成与传统度量拓扑等价的度量。作为应用，我们研究赋予所构造度量的乘积空间上非扩张映射的不动点性质和近似不动点性质。我们证明，已有的此类不动点结果均可由我们的框架推得。文中给出若干示例，以说明所得结果。我们还运用这一构造方法研究长度空间和测地空间的乘积。所得结果涵盖已有结果，并为今后研究这些乘积空间上的不动点性质提供了基础。

2010年数学主题分类。主要分类 47Hxx、54Exx；次要分类 47H09、47H10、54E35。
关键词。不动点、近似不动点序列、度量空间、长度空间、测地空间。

1. 引言

度量不动点理论是非线性分析的基石，在优化、博弈论、均衡问题、变分不等式、微分方程以及纯数学和应用数学的许多其他领域中有着广泛的应用。该理论源于庞加莱关于动力系统的研究′，随后在巴拿赫的基础性贡献下得到发展 [1]，并结合布劳威尔的贡献 [2] 和绍德尔的贡献 [3]。度量空间结构在该理论中发挥着关键作用，因为距离、完备性、收敛等概念对于不动点结果的表述与分析至关重要 [4]– [5。7]

如果每个具有性质 P 的自映射都存在不动点，则称度量空间具有性质 P 的不动点性质。对于两个度量空间的乘积上的自映射，一个基本问题是：映射的哪些性质与分量空间的不动点性质相结合，能够保证不动点的存在。文献中已对此问题进行了深入研究；

例如，参见 [8–13] 及其中的参考文献。然而，在某些情况下，无法保证存在精确不动点。因此，人们开始研究近似不动点的概念 [14,15]。其中一种概念是近似不动点序列，即要求存在一个不动点误差趋于零的序列 [12]。如果每个具有性质 P的自映射都存在近似不动点序列，则称度量空间具有性质 P的近似不动点性质。

其中 [12],作者证明了：当两个分量空间具有适当的不动点性质时，两个度量空间的乘积上的非扩张自映射存在不动点。此外，如果一个空间具有非扩张映射的近似不动点性质，而另一个是巴拿赫空间，作者证明每个非扩张自映射都存在一个近似不动点序列。值得一提的是，这些结果是在乘积空间赋予最大度量的假设下得到的。自然会问，当乘积空间赋予一般度量时，上述结果的类似结论是否仍然成立。本文通过建立适用于一大类度量的乘积空间的不动点结果和近似不动点结果，回答这一问题。具体而言，我们表明，已有的此类结果都是我们框架的特例。文中还给出了示例，以说明所建立的结果。

给定一个度量空间的有限族，在乘积空间上构造度量的一种常规方法，是为乘积空间赋予某个 p-度量，其中 $p \in [1,\infty]$。在这种情况下，和度量与最大度量分别对应于 $p = 1$和 $p = \infty$。更一般地，可以在 $\mathbb{R}^n$ 上使用任意满足关于逐坐标序 [16–18] 的单调性条件的范数来构造乘积度量。施加这些单调性假设，是为了确保所得函数满足三角不等式。然而，这种方法的一个局限在于，满足这些单调性条件的范数类别尚未得到明确刻画。

本文提出一种在乘积空间上构造度量的替代方法。我们的构造方案基于定义在 $\mathbb{R}^n$ 的标准单纯形上的一类连续凸函数。给定有限族集合及其上定义的函数，我们通过一个连续凸函数，利用各分量函数在乘积集上构造一个新函数。我们证明，当且仅当每个分量函数都是相应单个集合上的度量时，所得函数才是乘积空间上的度量。特别地，将适当的凸函数代入所构造的公式，即可得到 p-度量。我们证明，通过这种构造得到的任何度量都与常规度量拓扑等价。

如果任意两点之间的距离等于连接这两点的可求长曲线长度的下确界，则称该度量空间为长度空间；如果总能取到这个下确界，则称其为测地空间。一般度量空间中的距离可能缺乏道路层面的解释，而长度空间和测地空间则为点与点之间的运动提供了定义良好的概念。因此，它们为研究最短路径、凸性、曲率及其他

性质 [19]提供了便利的框架。不过，据我们所知，现有的长度空间和测地空间乘积构造仅适用于 p-度量，其中 $p \in [1,\infty]$；例如参见 [20]。

长度空间和测地空间中的不动点结果一直是一个活跃的研究领域；参见 [14,21–26] 及其中的参考文献。本文将一种用于乘积空间的度量构造方案应用于长度空间和测地空间。具体而言，给定有限族度量空间，我们证明，赋予所构造度量的乘积空间是长度空间（测地空间），当且仅当每个分量都是长度空间（测地空间）。除其他用途外，这一构造还为研究赋有相应度量的长度空间和测地空间的乘积中的不动点结果提供了框架。

我们想指出，除其他应用外，长度空间和测地空间为变分分析中误差界、度量正则性和横截性的研究提供了方便的背景 [27]。在完备度量空间中，这些性质的基于斜率的充分条件通常通过 Ekeland变分原理得到 [28], ，而相应的必要条件通常依赖于对相关函数、集合及集值映射施加的某些凸性假设 [29,30]。然而，在长度空间中，这些凸性假设可以省去 [31,32]。因此，本文建立的长度空间和测地空间的乘积构造，不仅为研究此类空间的乘积中的不动点结果提供了框架，也有助于更深入地理解上述性质的分析。

下一节2 介绍了全文将用到的基本定义和预备结果。第3 节提出了一种在度量空间的乘积上构造度量的一般方案。该构造既能得到传统的p度量，也能生成与传统度量拓扑等价的度量。第4 节和第5节分别研究了在赋予所构造距离的度量空间乘积上，非扩张映射的不动点和近似不动点序列的存在性。我们证明，已有的此类结果均可作为我们一般框架的推论得出，并通过示例说明所得结果。第6 节和第7 节研究了长度空间和测地空间上的乘积构造。特别地，我们给出了一个公式，可根据曲线各分量曲线的长度计算乘积空间中曲线的长度。所得结果涵盖了已有结果，并为进一步研究赋予一般度量的长度空间和测地空间乘积上的不动点结果奠定了基础。

2. 预备知识

以下陈述回顾了本研究所需的一些基本概念；例如，参见 [5,12]。

定义 2.1. 设$f\colon X \to Y$ 是度量空间之间的一个映射。映射f 是

(i) 以常数 $\theta > 0$ 利普希茨连续，当且仅当

$$d(f(x), f(x')) \leq \theta \cdot d(x, x') \text{ for all } x, x' \in X; \tag{1}$$

(ii) 当 1 成立时为非扩张，且 $\theta = 1$；(iii) 若 $d(f(x), f(x')) < d(x, x')$ 对所有 $x, x' \in X$ 满足 $x \neq x'$ 时，称其为严格压缩。

定义 2.2。设 X 为一个度量空间，且 $f: X \to X$。

(i) 若点 $\bar{x} \in X$ 是 f 的不动点，则称其为不动点。所有 f 的不动点组成的集合记为 Fix f。(ii) 若序列 $\{x_n\} \subset X$ 满足 $d(x_n, f(x_n)) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，则称其为 f 的近似不动点序列。

注 释 2.3. (i) 由定义2.1可知

严格压缩性 $\subset$ 非扩张性 $\subset$ 利普希茨连续性。

如果一个严格压缩映射有不动点，那么该不动点是唯一的。

（ii）根据定义2.2，不动点的存在立即意味着存在一个近似不动点序列。反过来则一般不成立。事实上，令 $X := (0,1)$ 配备由范数 $|\cdot|$ 在 $\mathbb{R}$ 上诱导的度量。函数 $f(x) := x^2$ 在 X 中没有不动点。然而，序列 $x_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ 是 f 的一个近似不动点序列。

以下定义回顾了度量几何中的基本概念，这些概念是后续研究所需的；参见 [19,20]。

定义 2.4。设 (X, d) 为度量空间，且 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足 $a \leq b$。连续映射 $\sigma: [a, b] \to X$ 称为 X 中的一条曲线（或一条道路）。如果 $\sigma(a) = x$ 且 $\sigma(b) = y$，那么 σ 称为连接 x 和 y 的曲线。

定义 2.5。设 (X, d) 为一个度量空间，且 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足 $a \leq b$。曲线 $\sigma: [a, b] \to X$ 称为

(i) 测地线，当

$$d(\sigma(t), \sigma(t')) = |t - t'| \text{ for all } t, t' \in [a, b];$$

(ii) 编号为 $\lambda \geq 0$ 的恒速测地线，当

$$d(\sigma(t), \sigma(t')) = \lambda \cdot |t - t'| \text{ for all } t, t' \in [a, b].$$

下面的命题给出了一种通过恒速测地线构造测地线的方法。

命题 2.6。设 (X, d) 为一个度量空间，且 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足 $a \leq b$。若曲线 $\sigma: [a, b] \to X$ 是一条编号为 $\lambda > 0$ 的恒速测地线，则曲线

$$\gamma(t) := \sigma\left(a + \frac{t}{\lambda}\right) \text{ for all } t \in [0, \lambda(b - a)] \tag{2}$$

是一条测地线。

证明。 设 $t,t' \in [0,\lambda(b-a)]$。那么 $a+_L\lambda, a+_L\frac{t'}{\lambda} \in [a,b]$。根据定义 2.5(ii),

$$d(\gamma(t),\gamma(t')) = d\left(\sigma\left(a+\frac{t}{\lambda}\right),\sigma\left(a+\frac{t'}{\lambda}\right)\right) = \lambda\cdot\left|\left(a+\frac{t}{\lambda}\right)-\left(a+\frac{t'}{\lambda}\right)\right| = |t-t'|.$$

根据定义2.5(i), γ是一条测地线。 □

3. 乘积度量构造

本节将介绍一种在度量空间的乘积上构造度量的一般方案。设 $\Omega_n := \{(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n t_i = 1\}$，其中 $\mathbb{R}_+$表示非负实数集，且 $n \geq 2$。注意，对于所有 $(t_1,\ldots,t_n) \in \Omega_n$，均有 $\max\{t_1,\ldots,t_n\} \geq \frac{1}{n}$。集合 Ω_n是 $\mathbb{R}^n$的一个凸紧子集。记 Ψ_n为所有满足 $\psi(e_1) = \cdots = \psi(e_n) = 1$的连续凸函数 $\psi: \Omega_n \to \mathbb{R}$ 构成的类，其中 $e_1,\ldots,e_n$是 $\mathbb{R}^n$的标准基向量，并且

$$\psi(t_1,\ldots,t_n) \geq (1-t_i)\cdot\psi\left(\frac{t_1}{1-t_i},\ldots,\frac{t_{i-1}}{1-t_i},0,\frac{t_{i+1}}{1-t_i},\ldots,\frac{t_n}{1-t_i}\right)$$

对所有 $(t_1, \ldots\ldots, t_n) \in \Omega_n$其中 $t_i < 1\,(i = 1, \ldots\ldots, n)$。这类函数已在 [33,34] 中得到研究，用于在赋范空间的乘积上构造范数。

注 3.1。 (i) 本文中，我们用 ∞ 代替 $+\infty$。对于标量 $p \in [1,\infty]$，定义

$$\psi_p(t_1,\ldots,t_n) := \begin{cases} \left(t_1^p+\cdots+t_n^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } p \in [1,\infty), \\ \max\{t_1,\ldots,t_n\} & \text{if } p = \infty \end{cases} \tag{3}$$

对所有 $(t_1, \ldots\ldots, t_n) \in \Omega_n$。可以验证 $\psi_p \in \Psi_n$；详见 [35]，其中给出了详细证明。

(ii) 设 $\psi \in \Psi_n$。那么

$$\max\{t_1,\ldots,t_n\} \leq \psi(t_1,\ldots,t_n) \leq 1 \tag{4}$$

对所有 $(t_1, \ldots\ldots, t_n) \in \Omega_n$；参见 [34]。

以下命题确立了生成函数的单调性性质；参见 [34]。这一性质在证明所构造函数在乘积集上的三角不等式时起着关键作用。

引理 3.2. 设 $\psi \in \Psi_n$、$0 < \alpha_i \leq \beta_i\ (i = 1, \ldots, n)$，$\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i$和 $\beta := \sum_{i=1}^n \beta_i$。那么

$$\alpha\cdot\psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right) \leq \beta\cdot\psi\left(\frac{\beta_1}{\beta},\ldots,\frac{\beta_n}{\beta}\right). \tag{5}$$

以下定理根据乘积空间的各个分量刻画了其度量结构。

定理 3.3。 设 X_i 是一个非空集合，d_i： $X_i \times X_i \to \mathbb{R}$（$i = 1, \ldots, n$），$M := X_1 \times \cdots \times Xn$，且 $\psi \in \Psi n$。定义

$$d_\psi(x,y) := \begin{cases} (\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)) \cdot \psi\left(\dfrac{d_1(x_1,y_1)}{\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)}, \ldots, \dfrac{d_n(x_n,y_n)}{\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)}\right) & \text{if } x \neq y, \\ 0 & \text{if } x = y \end{cases} \tag{6}$$

对所有 $x := (x_1, \ldots, x_n)$、$y := (y_1, \ldots, y_n) \in M$。则 d_i 是 $X_i (i = 1, \ldots, n)$ 上的度量，当且仅当 d_ψ 是 M 上的度量。

证明。假设 d_i 是 $X_i (i = 1, \ldots, n)$ 上的度量。要证明 d_ψ 是 M 上的度量，只需验证三角不等式，因为其他条件显然成立。设 $x := (x_1, \ldots, x_n)$、$y := (y_1, \ldots, y_n)$、$z := (z_1, \ldots, z_n) \in M$。若 $x = y$、$x = z$ 或 $y = z$，则

$$d_\psi(x,z) \le d_\psi(x,y) + d_\psi(y,z) \tag{7}$$

此时等式成立。假设 x, y, z 互不相同。设

$$\lambda_i := d_i(x_i,z_i),\ \vartheta_i := d_i(x_i,y_i),\ \xi_i := d_i(y_i,z_i)\ \ (i = 1, \ldots, n),$$

$$\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i,\ \vartheta := \sum_{i=1}^n \vartheta_i,\ \xi := \sum_{i=1}^n \xi_i,\ t := \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta}, \ldots, \frac{\vartheta_n}{\vartheta}\right),\ t' := \left(\frac{\xi_1}{\xi}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi}\right). \tag{8}$$

根据三角不等式，

$$\lambda_i \le \vartheta_i + \xi_i\ \ (i = 1, \ldots, n),\ \ \lambda \le \vartheta + \xi. \tag{9}$$

Then

$$\begin{aligned} d_\psi(x,z) &\overset{(6)}{=} \lambda \cdot \psi\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda}\right) \\ &\overset{(5),(9)}{\le} (\vartheta + \xi) \cdot \psi\left(\frac{\vartheta_1 + \xi_1}{\vartheta + \xi}, \ldots, \frac{\vartheta_n + \xi_n}{\vartheta + \xi}\right) \\ &\overset{(8)}{=} (\vartheta + \xi) \cdot \psi\left(\frac{\vartheta}{\vartheta + \xi} \cdot t + \frac{\xi}{\vartheta + \xi} \cdot t'\right) \\ &\le (\vartheta + \xi) \cdot \left(\frac{\vartheta}{\vartheta + \xi} \cdot \psi(t) + \frac{\xi}{\vartheta + \xi} \cdot \psi(t')\right) \ (\psi \text{ is convex}) \\ &= \vartheta \cdot \psi(t) + \xi \cdot \psi(t') \\ &\overset{(6)}{=} d_\psi(x,y) + d_\psi(y,z). \end{aligned}$$

因此，d_ψ 是 M 上的度量。

假设 d_ψ 是 M 上的度量。固定 $i = 1, \ldots, n$ 以及 $x_j \in X_j (j \neq i)$。令 $x_i, y_i \in X_i$ 并

$$x := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),\ \ y := (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n). \tag{10}$$

根据 (6)，$d_\psi(x, y) = d_i(x_i, y_i) \cdot \psi(e_1) = d_i(x_i, y_i)$。由于 d_ψ 是对称且非负的，因此 d_i 也具有相同性质。若 $x_i = y_i$，则 $d_\psi(x, y) = 0$，因为 $x = y$，因此 $d_i(x_i, y_i) = 0$。反过来，若 $d_i(x_i, y_i) = 0$，则 $x = y$，因为 $d_\psi(x, y) = 0$，因此 $x_i = y_i$。令 $z_i \in X_i$，并令 $z := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$。事实上

$d_\psi(x,z) \le d_\psi(x,y) + d_\psi(y,z)$ 蕴含 $d_i(x_i,z_i) \le d_i(x_i,y_i) + d_i(y_i,z_i)$。因此，$d_i$ 是 X_i 上的度量。□

备注 3.4. (i) 设 $\psi := \psi_p$ 由（3）给出，其中 $p \in [1,\infty]$，且 (X_i,d_i)（$i = 1,\dots,n$）为度量空间。由定理 3.3，可得 p-度量 M:

$$d_{\psi_p}(x,y) = \begin{cases} (d_1^p(x_1,y_1) + \cdots + d_n^p(x_n,y_n))^{\frac{1}{p}} & \text{if } p \in [1,\infty), \\ \max\{d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n)\} & \text{if } p = \infty \end{cases} \tag{11}$$

对所有 $x := (x_1,\dots,x_n)$、$y := (y_1,\dots,y_n) \in M$.

(ii) 设 $\psi \in \Psi_n$。由备注 3.1(ii) 和定理 3.3，

$$\max_{1\le i\le n} d_i(x_i,y_i) \le d_\psi(x,y) \le \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i) \tag{12}$$

对所有 $x := (x_1,\dots,x_n), y := (y_1,\dots,y_n) \in M$。因此，构造的度量与常规的$p$-度量拓扑等价。

(iii) 定理 3.3的直接推论似乎强化了 [36, 定义 3]，因为它涵盖了此处未涉及的最大度量。

引理 3.5。设 $\psi \in \Psi_2$ 且

$$\lambda := 2\psi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad \theta := (1+\lambda)\psi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{1}{\lambda+1}\right). \tag{13}$$

则 $1 \le \lambda \le 2$ 且 $\lambda \le \theta \le 1+\lambda$。

证明。由（4），可得 $1 \le \lambda \le 2$，且

$$\lambda = (1+\lambda)\max\left\{\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{1}{\lambda+1}\right\} \le \theta \le (1+\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+1}\right) = 1+\lambda.$$

证明完毕。 □

4. 乘积空间中的不动点定理

设 (X_1,d_1) 和 (X_2,d_2) 是度量空间，且 $X := X_1 \times X_2$ 赋有由（$d\psi$）给出的度量6，其中 $\psi \in \Psi_2$。定义 $T : X \to X$ 为

$$T(x_1,x_2) := (T_1(x_1,x_2), T_2(x_1,x_2)) \text{ for all } (x_1,x_2) \in X, \tag{14}$$

其中 $T_1 : X \to X_1$ 和 $T_2 : X \to X_2$。

下面的定理证明了乘积空间上非扩张映射不动点的存在性。

定理 4.1. 设 λ 和 θ 由(13)给出。假设满足以下条件：

(i) X_1 具有严格压缩映射不动点性质；(ii) X_2 对于常数为 θ 的利普希茨连续映射具有不动点性质；(iii) T 是满足以下条件的非扩张映射

$$d_1(T_1(x_1,x_2), T_1(x_1',x_2')) < \frac{\lambda}{\theta}\cdot d_\psi((x_1,x_2),(x_1',x_2')) \tag{15}$$

对于所有 (x_1,x_2)，$(x_1',x_2') \in X$，且 $d_1(x_1,x_1') > \lambda d_2(x_2,x_2')$。

那么 T 有一个不动点。

证明。 **断言 1**。 对于每个 $x_2 \in X_2$, 由下式给出的映射 $T_{x_2}: X_1 \to X_1$

$$T_{x_2}(x_1) := T_1(x_1, x_2) \text{ for all } x_1 \in X_1 \tag{16}$$

有唯一不动点 $\xi(x_2) \in X_1$。事实上，设 $x_1, x_1' \in X_1$ 且 $x_1 \neq x_1'$。则 $d_1(x_1, x_1') > 0$，因此，

$$\begin{aligned} d_1(T_{x_2}(x_1), T_{x_2}(x_1')) &\overset{(16)}{=} d_1(T_1(x_1,x_2), T_1(x_1',x_2)) \\ &\overset{(15)}{<} \frac{\lambda}{\theta} d_\psi((x_1,x_2),(x_1',x_2)) \\ &\overset{(6)}{=} \frac{\lambda}{\theta} d_1(x_1,x_1')\psi(1,0) \le d_1(x_1,x_1'), \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由以下事实得出： $\psi(1,0) = 1$ 且 $\lambda/\theta \le 1$ (引理 3.5)。因此，T_{x_2} 在 X_1 上是严格压缩的。根据假设（i），它有唯一不动点 $\xi(x_2) \in X_1$。

断言 2. 对于任意 $x_2, x_2' \in X_2$,

$$A_1 \le \lambda \cdot A_2, \tag{17}$$

其中

$$A_1 := d_1(\xi(x_2), \xi(x_2')) \text{ and } A_2 := d_2(x_2, x_2'). \tag{18}$$

事实上，设 $\xi(x_2)$ 和 $\xi(x_2')$ 分别是映射 T_{x_2} 和 $T_{x_2'}$ 的不动点。那么

$$\xi(x_2) = T_1(\xi(x_2), x_2), \ \ \xi(x_2') = T_1(\xi(x_2'), x_2'). \tag{19}$$

假设 $A_1 > \lambda A_2$。那么

$$\begin{aligned} A_1 &\overset{(19)}{=} d_1(T_1(\xi(x_2),x_2), T_1(\xi(x_2'),x_2')) \\ &\overset{(15)}{<} \frac{\lambda}{\theta} d_\psi((\xi(x_2),x_2),(\xi(x_2'),x_2')) \\ &\overset{(6)}{=} \frac{\lambda}{\theta}(A_1+A_2)\psi\left(\frac{A_1}{A_1+A_2}, \frac{A_2}{A_1+A_2}\right) \\ &\overset{(5)}{\le} \frac{\lambda}{\theta}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\psi\left(\frac{A_1}{A_1+A_1/\lambda}, \frac{A_1/\lambda}{A_1+A_1/\lambda}\right)\cdot A_1 \\ &= \frac{\lambda}{\theta}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\psi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1}\right)\cdot A_1 = A_1, \end{aligned} \tag{20}$$

这就产生了矛盾。

断言 3. 映射 $G: X_2 \to X_2$ 由下式给出

$$G(x_2) = T_2(\xi(x_2), x_2) \text{ for all } x_2 \in X_2 \tag{21}$$

其为利普希茨连续映射，常数为 θ。事实上，对于任意 $x_2,x_2' \in X_2$,

$$\begin{aligned}
d_2(G(x_2),G(x_2')) &\overset{(21)}{=} d_2(T_2(\xi(x_2),x_2),T_2(\xi(x_2'),x_2')) \\
&\overset{(12)}{\leq} d_\psi(T(\xi(x_2),x_2),T(\xi(x_2'),x_2')) \\
&\leq d_\psi((\xi(x_2),x_2),(\xi(x_2'),x_2')) \quad (T \text{ is nonexpansive}) \\
&\overset{(6)}{=} (A_1+A_2)\psi\left(\frac{A_1}{A_1+A_2},\frac{A_2}{A_1+A_2}\right) \\
&\overset{(5),(17)}{\leq} (1+\lambda)\psi\left(\frac{\lambda A_2}{\lambda A_2+A_2},\frac{A_2}{\lambda A_2+A_2}\right)\cdot A_2 \\
&= (1+\lambda)\psi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{1}{\lambda+1}\right)\cdot A_2 \\
&= \theta d_2(x_2,x_2').
\end{aligned}$$

断言 4. 存在一个 $\bar{x}_2 \in X_2$，使得 $\xi(\bar{x}_2)\ \bar{x}_2) = T(\xi(\bar{x}_2)\ \bar{x}_2)$。事实上，根据断言 3 和假设 (ii)，存在一点 $\bar{x}_2 \in X_2$，使得 $\bar{x}_2 = T_2(\xi(\bar{x}_2)\ \bar{x}_2)$。鉴于 $\xi(\bar{x}_2)$ 的性质，我们有 $\xi(\bar{x}_2) = T_1(\xi(\bar{x}_2)\ \bar{x}_2)$。证明至此完成。□

注记4.2. (i) 一般而言，非扩张映射不一定存在不动点。不过，在对底空间或映射附加假设的情况下，可以保证不动点的存在；例如参见[37, 定理 5]。类似地，如果施加适当的假设，也可以保证 Lipschitz 映射的不动点存在；参见 [38, 定理 2。7], [39,引理 3。1] 以及 [40,定理 6]。

(ii) 定理4.1 研究赋有一般度量的度量空间乘积上的非扩张映射的不动点性质。关于在不同假设下配备 p-范数的巴拿赫空间乘积上的不动点结果 ($p \in [1,\infty]$) 可参见 [41, 定理 2.1、2.2 和 2.3] 以及 [11, 定理 2.1 和 2.2]。

(iii) 根据引理 3.5，$\frac{\lambda}{\theta} \leq 1$ 对任意 $\psi \in \Psi_2$。令 $\Omega_2 := \{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid t_1+t_2 = 1\}$并考虑函数 ψ_∞ 由（3）给出，即:

$$\psi_\infty(t_1,t_2) := \max\{t_1,t_2\} \text{ for all } (t_1,t_2) \in \Omega_2. \tag{22}$$

由（11），

$$d_{\psi_\infty}((x_1,x_2),(x_1',x_2')) = \max\{d_1(x_1,x_1'),d_2(x_2,x_2')\} \tag{23}$$

对所有 (x_1,x_2)、$(x_1',x_2') \in X_1 \times X_2$.，由（13）和（22），可得 $\lambda = \theta = 1$。在这种情况下，常数为 θ 的利普希茨连续性退化为非扩张性，因此，定理 4.1 加强了 [12,定理 3.1]，因为条件（15）要求对所有满足 $d_1(x_1,x_1') > d_2(x_2,x_2')$ 的点对成立，而在 [12, 定理 3.1] 中，相应条件则要求对所有满足 $d_1(x_1,x_1') \neq d_2(x_2,x_2')$ 的点对成立。

下一个例子说明了定理4.1。

例 4.3。 设 $X_1 = X_2 := [-1,1]$ 配备由范数诱导的度量 $|\cdot|$ 于 $\mathbb{R}$，且 $X := X_1 \times X_2$ 配备度量 d_{ψ_p} 其中 ψ_p 由式（3）给出，对某个 $p \in [1,\infty)$。那么

$$\lambda := 2\psi_p\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{p}}, \quad \theta := (1+\lambda)\psi_p\left(\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{1}{\lambda+1}\right) = 3^{\frac{1}{p}}. \tag{24}$$

设 $\alpha := \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$，$\beta := \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$ 和 $\gamma := \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$，定义 $T: X \to X$ 为

$$T(x) := (T_1(x), T_2(x)) := (\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_2) \text{ for all } x := (x_1, x_2) \in X.$$

由于 $p \geq 1$，函数 $f(t) := t^{\frac{1}{p}}$ 对所有 $t \geq 0$ 都是凹函数，因此，

$$\alpha + \beta = \frac{f(2/3) + f(4/3)}{2} \leq f\left(\frac{2/3 + 4/3}{2}\right) = f(1) = 1.$$

于是 $|T_1(x_1,x_2)| = |\alpha x_1 + \beta x_2| \leq \alpha|x_1| + \beta|x_2| \leq \alpha + \beta \leq 1$ 且 $|T_2(x_1,x_2)| = |\gamma x_2| = \gamma|x_2| \leq 1$ 对所有 $(x_1,x_2) \in X$ 均成立。因此，映射 T 定义良好。注意到

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \text{ for all } a,b \geq 0. \tag{25}$$

事实上，由于 $p \geq 1$，函数 $g(t) := t^p$ 对所有 $t \geq 0$ 都是凸函数。因此，

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{g(a)+g(b)}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2} \Leftrightarrow (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p).$$

设 $x := (x_1,x_2)$，$x' := (x_1', x_2') \in X$。那么

$$\begin{aligned}
d_{\psi_p}(T(x),T(x')) &= \left(|\alpha(x_1-x_1') + \beta(x_2-x_2')|^p + |\gamma(x_2-x_2')|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left((\alpha|x_1-x_1'| + \beta|x_2-x_2'|)^p + \gamma^p|(x_2-x_2')|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(2^{p-1}\alpha^p|x_1-x_1'|^p + (2^{p-1}\beta^p + \gamma^p)|x_2-x_2'|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{3}|x_1-x_1'|^p + |x_2-x_2'|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(|x_1-x_1'|^p + |x_2-x_2'|^p\right)^{\frac{1}{p}} = d_{\psi_p}(x,x').
\end{aligned}$$

因此，T 是非扩张的。若 $|x_1-x_1'| > \lambda|x_2-x_2'|$，则

$$\begin{aligned}
|T_1(x) - T_1(x')| &= |\alpha(x_1-x_1') + \beta(x_2-x_2')| \\
&< \left(\alpha + \frac{\beta}{\lambda}\right)|x_1-x_1'| \\
&= \left(\frac{\lambda}{2\theta} + \frac{\lambda}{2\theta}\right)|x_1-x_1'| \leq \frac{\lambda}{\theta}\cdot d_{\psi_p}(x,x').
\end{aligned}$$

因此，条件（15）成立。根据介值定理，X_1 和 X_2 对每个连续自映射都具有不动点性质。因此，定理 4.1 中的条件（i）和（ii）均成立。因此，$\mathrm{Fix}T \neq \emptyset$。此外，直接计算可得 $\mathrm{Fix}T = \{(0,0)\}$。

下述定理给出了与定理 4.1 平行的不动点结果。

定理 4.4。 设 λ 和 θ 由 (13)给出。假设满足以下条件：

（i） X_1 具有非扩张映射的不动点性质；（ii） X_2 对于常数为 θ的利普希茨映射，具有不动点性质；（iii） T 是一个非扩张映射，并且条件 （15）对所有 （x_1,x_2），（x_1'，x_2'） $\in X$ 中的 $x_1 \neq x_1'$ 且 $x_2 \neq x_2'$ 成立。

于是，T 有一个不动点。

证明。 对每个 $x_2 \in X_2$,，映射 $T_{x_2} : X_1 \to X_1$ 由（16）给出，且是非扩张的。事实上，对任意 $x_1, x_1' \in X_1$,，有

$$\begin{aligned} d_1(T_{x_2}(x_1), T_{x_2}(x_1')) &\overset{(16)}{=} d_1(T_1(x_1,x_2), T_1(x_1',x_2)) \\ &\overset{(12)}{\leq} d_\psi(T(x_1,x_2), T(x_1',x_2)) \\ &\leq d_\psi((x_1,x_2),(x_1',x_2)) \ (T \text{ is nonexpansive}) \\ &\overset{(6)}{=} d_1(x_1,x_1'). \end{aligned}$$

因此，T_{x_2} 是非扩张的。根据假设 (i)，集合 $\mathrm{Fix}T_{x_2}$ 非空。令 $\xi : X_2 \to X_1$ 为集值映射 $x_2 \mapsto \mathrm{Fix}T_{x_2}$的一个选择。设 $x_2, x_2' \in X_2$，并令 A_1, A_2由（18）给出。则条件（17）成立。事实上，若 $\xi(x_2) = \xi(x_2')$，则（17）显然成立。若 $\xi(x_2) \neq \xi(x_2')$，则必有 $x_2 \neq x_2'$。我们有

$$\begin{aligned} A_1 &\overset{(19)}{=} d_1(T_1(\xi(x_2),x_2), T_1(\xi(x_2'),x_2')) \\ &\overset{(15)}{<} \frac{\lambda}{\theta} d_\psi((\xi(x_2),x_2),(\xi(x_2'),x_2')) \\ &\overset{(6)}{=} \frac{\lambda}{\theta}(A_1+A_2)\psi\left(\frac{A_1}{A_1+A_2}, \frac{A_2}{A_1+A_2}\right). \end{aligned}$$

若$A_1 > \lambda A_2$,，则如（20）所示，我们得到矛盾：$A_1 < A_1$。令$G: X_2 \to X_2$ 由（21）定义。根据定理 4.1证明中的断言 3，映射G 是利普希茨连续的，其常数为 θ。证明的其余部分与定理 4.1证明中的断言 4 类似。 □

注 4.5. （i）当 $\psi := \psi_\infty$ 由（22）给出时，我们有 $\lambda = \theta = 1$，因此利普希茨连续性简化为非扩张性。在这种情况下，定理 4.4 重新得到 [12, 定理 3。3]。

（ii）定理 4.1 和4.4 不可比较，因为一般而言，两个定理中满足条件（15）的点集无法相互比较。尽管如此，根据注 2.3(i)，定理 i）中的假设（i）4.4 比定理 i）中的假设（i）更强4.1。

下面的例子说明了定理 4.4。

例 4.6. 设 X_1 和 X_2 为例 4.3 中给出的度量空间，$X := X_1 \times X_2$ 配备度量 d_{ψ_p}，其中 ψ_p 由式 (3) 给出，且 $p \in [1,\infty)$， λ和 θ 由式 (24) 给出。定义 $T : X \to X$ 为

$$T(x_1,x_2) := (T_1(x), T_2(x)) := \left(\frac{\lambda}{2\theta} \cdot x_1, x_2\right) \text{ for all } (x_1,x_2) \in X.$$

注意，$\frac{\lambda}{2\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$。映射 T^{Ω} 是良定义的，因为

$$|T_1(x_1,x_2)| = \frac{\lambda}{2\theta}|x_1| \leq 1 \text{ and } |T_2(x_1,x_2)| = |x_2| \leq 1 \text{ for any } (x_1,x_2) \in X.$$

设 $x := (x_1,x_2)$，$x' := (x_1', x_2') \in X$。则

$$d_{\psi_p}(T(x),T(x')) = \left(\left|\frac{\lambda}{2\theta}(x_1 - x_1')\right|^p + |x_2 - x_2'|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq d_{\psi_p}(x,x').$$

因此，T 是非扩张的。若 $x_1 \neq x_1'$ 且 $x_2 \neq x_2'$，则

$$|T_1(x) - T_1(x')| = \left|\frac{\lambda}{2\theta}(x_1 - x_1')\right| < \frac{\lambda}{\theta}|x_1 - x_1'| \leq \frac{\lambda}{\theta} d_{\psi_p}(x,x').$$

因此，条件（iii）得到满足。根据介值定理，X_1 和 X_2 对每个连续自映射都具有不动点性质。因此，定理 4.4 中的条件（i）和（ii）得到满足。因此，$\mathrm{Fix}T \neq /0$。此外，直接计算表明 $\mathrm{Fix}T = \{0\} \times [-1,1]$。

5. 乘积空间中的近似不动点定理

在本节中，我们研究第4节所研究模型的一个特殊情形。更确切地说，我们假设（$X1$，$\|\cdot\|$）是一个赋范向量空间，其关联度量为

$$d_1(x_1,x_1') := \|x_1 - x_1'\| \text{ for all } x_1, x_1' \in X_1.$$

设 Ω 是X_1,的非空有界闭凸子集，并且$T^{\Omega} := (T_1^{\Omega}, T_2)$ 是映射$T := (T_1, T_2)$ 在14式所给出的X_{Ω} 上的限制：$= \Omega \times X_2$。

以下结果是我们研究所需的；参见 [42,定理1。1] 以及 [43,备注，第69]页。

引理5.1。设 X_1 是巴拿赫空间，Q： $\Omega \to \Omega$ 是非扩张映射，$\omega \in \Omega$、$\alpha \in (0,1)$，且 P： $\Omega \to \Omega$ 由 P： $= \alpha I + (1-\alpha)Q$ 给出，其中 I 是恒等映射。则

$$\|P^{n+1}(\omega) - P^n(\omega)\| \to 0 \ as \ n \to \infty.$$

以下定理证明了乘积空间上的非扩张映射存在近似不动点序列。

定理5.2。设 $\psi \in \Psi_2$，λ 取自(13)，X_1 是巴拿赫空间，且 X_2 是具有近似不动点性质的度量空间，且该性质适用于常数为 λ的利普希茨连续映射。假设 T^{Ω} 是满足下列条件的非扩张映射

$$\|T_1^{\Omega}(x_1,x_2) - T_1^{\Omega}(x_1',x_2')\| \leq \frac{1}{\lambda} \cdot d_{\psi}((x_1,x_2),(x_1',x_2')) \tag{26}$$

对于所有(x_1,x_2)、$(x_1',x_2') \in X_{\Omega}$，若存在 $\|x_1 - x_1'\| \leq d_2(x_2,x_2')$，则 T^{Ω}有一个近似不动点序列。

证明。 对每个 $x_2 \in X_2$, 令 $T^{\Omega}_{x_2}\colon \Omega \to X_1$ 为 $T_{x_2}: X_1 \to X_1$ 由（16）给出的限制。固定 $\alpha \in (0,1)$ 并定义 $P_{x_2}\colon \Omega \to \Omega$ 如下

$$P_{x_2} := \alpha I + (1-\alpha)T^{\Omega}_{x_2}, \tag{27}$$

其中 I是恒等映射。固定 $\omega \in \Omega$。令 $x_2, x_2' \in X_2$ 且 $\beta := d_2(x_2, x_2')$。则

$$\begin{aligned}
\|P_{x_2}(\omega) - P_{x_2'}(\omega)\| &\overset{(27)}{=} (1-\alpha)\|T^{\Omega}_{x_2}(\omega) - T^{\Omega}_{x_2'}(\omega)\| \\
&\overset{(16)}{=} (1-\alpha)\|T^{\Omega}_1(\omega, x_2) - T^{\Omega}_1(\omega, x_2')\| \\
&\overset{(12)}{\leq} (1-\alpha) d_\psi(T^{\Omega}(\omega, x_2), T^{\Omega}(\omega, x_2')) \\
&\leq (1-\alpha) d_\psi((\omega, x_2), (\omega, x_2')) \ (T \text{ is nonexpansive}) \\
&\overset{(6)}{=} (1-\alpha)\beta \\
&\leq \beta.
\end{aligned}$$

设

$$\|P^n_{x_2}(\omega) - P^n_{x_2'}(\omega)\| \leq \beta \ \text{ for some } \ n \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

令 $u_n := P^n_{x_2}(\omega)$, $u_n' := P^n{}_{x_2'}(\omega)$ 且 $\gamma_n := \|u_n - u_n'\|$。则

$$\begin{aligned}
\|P^{n+1}_{x_2}(\omega) - P^{n+1}_{x_2'}(\omega)\| &= \|P^{n+1}_{x_2}(u_n) - P^{n+1}_{x_2'}(u_n')\| \\
&\overset{(27)}{=} \|\alpha(u_n - u_n') + (1-\alpha)(T^{\Omega}_{x_2}(u_n) - T^{\Omega}_{x_2}(u_n'))\| \\
&\leq \alpha\gamma_n + (1-\alpha)\|T^{\Omega}_{x_2}(u_n) - T^{\Omega}_{x_2}(u_n')\| \\
&\overset{(16),(28)}{\leq} \alpha\beta + (1-\alpha)\|T^{\Omega}_1(u_n, x_2) - T^{\Omega}_1(u_n', x_2')\| \\
&\overset{(26)}{\leq} \alpha\beta + \frac{1-\alpha}{\lambda} d_\psi((u_n, x_2), (u_n', x_2')) \\
&\overset{(6)}{=} \alpha\beta + \frac{1-\alpha}{\lambda}(\gamma_n + \beta)\psi\left(\frac{\gamma_n}{\gamma_n+\beta}, \frac{\beta}{\gamma_n+\beta}\right) \\
&\overset{(5),(28)}{\leq} \alpha\beta + \frac{1-\alpha}{\lambda} \cdot 2\beta\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \alpha\beta + (1-\alpha)\beta = \beta.
\end{aligned}$$

由归纳法可得

$$\gamma_n \leq \beta \ \text{ for all } \ n \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

令$n \in \mathbb{N}$ 并定义$H_n : X_2 \to X_2$， 使得

$$H_n(z) := T_2(P^n_z(\omega), z) \ \text{ for all } \ z \in X_2. \tag{30}$$

Then

$$\begin{aligned} d_2(H_n(x_2),H_n(x_2')) &\overset{(30)}{=} d_2(T_2(u_n,x_2),T_2(u_n',x_2')) \\ &\overset{(12)}{\leq} d_\psi(T(u_n,x_2),T(u_n',x_2')) \\ &\leq d_\psi((u_n,x_2),(u_n',x_2')) \ (T \text{ is nonexpansive}) \\ &\overset{(6)}{=} (\gamma_n+\beta)\psi\left(\frac{\gamma_n}{\gamma_n+\beta},\frac{\beta}{\gamma_n+\beta}\right) \\ &\overset{(5),(29)}{\leq} 2\psi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\beta = \lambda\beta. \end{aligned}$$

因此，映射 H_n 是利普希茨连续的，其常数为 λ。根据假设和定义 2.2(ii)，存在一个序列 $\{z^k\} \subset X_2$ <style id='26'>使得 $d_2(z^k,H_n(z^k)) \to 0$ 当 $k \to \infty$。因此，存在一个 $k_n \in \mathbb{N}$ 使得

$$b_n(\omega) := d_2(z_n, T_2(P_{z_n}^n(\omega), z_n)) \leq \frac{1}{n} \tag{31}$$

当 $z_n := z^{k_n}$。注意，序列 $\{k_n\}$ 可以选取为使得 $k_n \to \infty$ 与 $n \to \infty$。根据引理 5.1，

$$\begin{aligned} a_n(\omega) &:= \|P_{z_n}^n(\omega) - T_1^\Omega(P_{z_n}^n(\omega), z_n)\| \\ &\overset{(16)}{=} \|P_{z_n}^n(\omega) - T_{z_n}^\Omega(P_{z_n}^n(\omega))\| \\ &\overset{(27)}{=} \frac{1}{1-\alpha}\|P_{z_n}^n(\omega) - P_{z_n}^{n+1}(\omega)\| \to 0 \ \text{ as } \ n \to \infty. \end{aligned} \tag{32}$$

令 $y_n := (P_{z_n}^n(\omega), z_n) \ (n \in \mathbb{N})$。根据（12）、（31）和（32），

$$\begin{aligned} d_\psi(y_n, T^\Omega(y_n)) &= d_\psi(y_n, (T_1^\Omega(y_n), T_2(y_n))) \\ &\leq \|P_{z_n}^n(\omega) - T_1^\Omega(y_n)\| + d_2(z_n, T_2(y_n)) \\ &= a_n(\omega) + b_n(\omega) \to 0 \ \text{ as } \ n \to \infty. \end{aligned}$$

根据定义 2.2(ii)，$\{y_n\}$ 是 T^Ω 的近似不动点序列。 □

注 5.3。当 $\psi := \psi_\infty$ 由（22）给出时，有 $\lambda = 1$，因此条件（26）可以省略，因为它是 T 的非扩张性直接推论。在这种情况下，定理 5.2 重新得到 [12, 定理 4。2]。

下面的例子说明定理5.2。

例5.4. 设 $X_1 := \mathbb{R}^2$ 和 $X_2 := [-1,1]$ 分别配备欧几里得范数 $\|\cdot\|$ 和标准度量 $|\cdot|$，$\Omega := \{\omega \in \mathbb{R}^2 \mid \|\omega\| \leq 1\}$，$e_1 := (1,0) \in \Omega$，$X_\Omega := \Omega \times X_2$ 配备度量 d_{ψ_p}，其中 ψ_p 由式 (3) 给出，$p \in [1,\infty)$，且 $\lambda := 2\psi_p\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2^{1/p}$。对任意 $x := (x_1,x_2) \in X_\Omega$，定义 $T^\Omega : X_\Omega \to X_\Omega$ 为

$$T^\Omega(x) := (T_1^\Omega(x), T_2(x)) := \left(\frac{1}{2^{1+1/p}} \cdot x_1 + \frac{1}{2^{1+1/p}} x_2 \cdot e_1, \frac{1}{2}\langle x_1, e_1\rangle + \frac{1}{2}x_2\right). \tag{33}$$

对于任意 $(x_1,x_2)\in X_\Omega$，我们有

$$\|T_1^\Omega(x_1,x_2)\|\le\frac{\|x_1\|}{2^{1+1/p}}+\frac{|x_2|}{2^{1+1/p}}\le\frac{2}{2^{1+1/p}}<1,$$
$$|T_2(x_1,x_2)|=\left|\frac{1}{2}\langle x_1,\mathbf{e}_1\rangle+\frac{1}{2}x_2\right|\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

因此，T^Ω是良定义的。设$x:=(x_1,x_2),x':=(x_1',x_2')\in X_\Omega$, $u_1:=x_1-x_1'$和$u_2:=x_2-x_2'$。那么

$$\begin{aligned}
d_{\psi_p}(T^\Omega(x),T^\Omega(x')) &\overset{(33)}{=} \left(\left\|\frac{1}{2^{1+1/p}}\cdot u_1+\frac{1}{2^{1+1/p}}u_2\cdot\mathbf{e}_1\right\|^p+\left|\frac{1}{2}\langle u_1,\mathbf{e}_1\rangle+\frac{1}{2}u_2\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \left[\left(\frac{1}{2}\|u_1\|+\frac{1}{2}|u_2|\right)^p+\left(\frac{1}{2}\|u_1\|+\frac{1}{2}|u_2|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\overset{(25)}{\le} \left[2^p\left(\frac{1}{2^p}\|u_1\|^p+\frac{1}{2^p}|u_2|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&= (\|u_1\|^p+|u_2|^p)^{\frac{1}{p}}=d_{\psi_p}(x,x'),
\end{aligned}$$

并因此，T^Ω是非扩张的。若 $\|u_1\|\le|u_2|$，则

$$\begin{aligned}
\|T_1^\Omega(x)-T_1^\Omega(x')\| &\overset{(33)}{=} \left\|\frac{1}{2^{1+1/p}}\cdot u_1+\frac{1}{2^{1+1/p}}u_2\cdot\mathbf{e}_1\right\|\\
&\le \frac{1}{2^{1+1/p}}\|u_1\|+\frac{1}{2^{1+1/p}}|u_2|\\
&\le \frac{1}{2^{1/p}}|u_2|\overset{(12)}{\le}\frac{1}{2^{1/p}}\cdot d_{\psi_p}(x,x')=\frac{1}{\lambda}\cdot d_{\psi_p}(x,x').
\end{aligned}$$

因此，条件 (26) 得到满足。显然，$(X1,\|\cdot\|)$是一个巴拿赫空间，而 Ω 是 X_1的非空有界闭凸子集。另一方面，由于介值定理，$(X2,|\cdot|)$具有连续自映射的不动点性质，因此，$(X2,|\cdot|)$具有利普希茨连续映射的近似不动点性质。根据定理5.2，T^Ω 存在一个近似不动点序列。注意，序列 $x^n:=(\frac{1}{n}e1,-\frac{1}{n})\in X_\Omega(n\in\mathbb{N})$ 是 T^Ω的一个近似不动点序列。事实上，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $T_1^\Omega(x^n)=T_2(x^n)=0$，因此，

$$\begin{aligned}
d_{\psi_p}(x^n,T^\Omega(x^n)) &= d_{\psi_p}(x^n,(T_1^\Omega(x^n),T_2(x^n))\\
&\overset{(11)}{=} \left(\left\|\frac{1}{n}\mathbf{e}_1-T_1^\Omega(x^n)\right\|^p+\left|-\frac{1}{n}-T_2(x^n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\left\|\frac{1}{n}\mathbf{e}_1\right\|^p+\left|\frac{1}{n}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{2^{\frac{1}{p}}}{n}\longrightarrow 0\quad \text{as } n\to\infty.
\end{aligned}$$

6. 长度空间的乘积构造

以下定义回顾曲线长度的概念 [20, 定义 1。18]。

定义 6.1. 设 (X,d) 为一个度量空间，且 $a,b \in \mathbb{R}$ 满足 $a \le b$。曲线长度定义为

$$L(\sigma) := \sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b} \sum_{i=1}^{n} d(\sigma(t_{i-1}),\sigma(t_i)), \tag{34}$$

其中，上确界取遍 $[a,b]$ 的所有分割，并约定空集上的上确界等于 0。

注6.2. (i) 曲线长度在重新参数化下保持不变 [19,命题 1.1.8]。

(ii) 若 $L(\sigma) < \infty$，则称该曲线为可求长曲线。非可求长曲线的例子可见于 [20, 例 1.19] 和 [19, 例 1.1.6 和 1.1.11]。

(iii) 对于一对 u,v $\in$X，我们将 $R^X_{[a,b]}$(u, v) 记为连接 u 和 v 的所有可求长曲线σ: [a, b] $\to$X 的集合，即 L(σ) $< \infty$, σ(a) =u 且 σ(b) =v。根据定义 6.1，

$$d(u,v) \le \inf_{\sigma \in \mathbf{R}^X_{[a,b]}(u,v)} L(\sigma) := \mathbf{d}(u,v) \text{ for all } u,v \in X, \tag{35}$$

约定空集上的下确界等于 ∞。值得一提的是**d** 是X上的一个度量；参见 [20, 命题 3。2] 和 [19, 命题 2.1。5]。

(iv) 根据 [20, 注 1，22], 对于任意可求长曲线 γ: $[a,b] \to X$，存在一条可求长曲线 σ: $[0,1] \to X$使得 $L(\sigma) = L(\gamma)$，并且

$$L(\sigma|_{[0,t]}) = t \cdot L(\sigma) \text{ for all } t \in [0,1], \tag{36}$$

$$L(\sigma) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{m} d\left(\sigma\left(\frac{j-1}{m}\right), \sigma\left(\frac{j}{m}\right)\right). \tag{37}$$

满足条件 (36) 的可求长曲线称为 按弧长成比例参数化 [20, 定义 1。21]。

下面的定义回顾长度空间的概念；参见 [20, 定义3。1]和 [19, 定义 2.1。2]。

定义 6.3。 如果一个度量空间（X，d）中任意两点之间的距离都等于连接这两点的可求长曲线长度的下确界，则称其为长度空间，即

$$d(u,v) = \inf_{\sigma \in \mathbf{R}^X_{[a,b]}(u,v)} L(\sigma) \text{ for all } u,v \in X.$$

注 6.4。 如果（X，d）是长度空间，则对于所有 u，$v \in X$，$\mathbf{R}^X_{[a,b]}$（u，v）都非空。

下面的定理给出了乘积空间成为长度空间的充要条件。

定理 6.5。 设 $(X_i,d_i)\,(i=1,\ldots,n)$ 是度量空间，$M:=X_1\times\cdots\times X_n$, 且$\psi\in\mathbf{\Psi}_n$。那么，$(X_i,\,d_i)\,(i=1,\ldots,n)$ 是长度空间，当且仅当$(M,\,d_\psi)$ 是长度空间。

证明。设 (X_i,d_i)（$i=1,\ldots,n$）均为长度空间。由定理 3.3，$(M,\,d_\psi)$ 是一个度量空间。令 $x:=(x_1,\ldots,x_n)$、$y:=(y_1,\ldots,y_n)\in M$。令 $\varepsilon>0$, $\alpha_i:=d_i(x_i,y_i)$（$i=1,\ldots,n$），且 $\alpha:=\sum_{i=1}^n\alpha_i$。取一个 $\beta>0$，使得 $\beta<\frac{\varepsilon}{\alpha}$。由于$\psi$ 在紧集 Ω_n上连续，因此它关于 $\mathbb{R}^n$上的标准最大范数在 Ω_n 上一致连续。于是，存在一个 $\tau>0$，使得

$$|\psi(t)-\psi(t')|<\beta \text{ if } |t_i-t_i'|<\tau\ (i=1,\ldots,n) \tag{38}$$

对于所有 $t:=(t_1,\ldots,t_n),t':=(t_1',\ldots,t_n')\in\Omega_n$。取一个 $\delta>0$，使得

$$\delta<\min\left\{\frac{\varepsilon-\alpha\beta}{(\beta+1)n},\frac{\alpha^2\tau}{\alpha+(n-2)\cdot\max\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}}\right\}. \tag{39}$$

由长度空间性质和注6.2(iv)，存在曲线 $\sigma_i\in\mathbf{实数集}_{[0,1]}^{X_i}(x_i,y_i)$使得

$$L(\sigma_i)<\alpha_i+\delta, \tag{40}$$

$$L(\sigma_i|_{[0,t]})=t\cdot L(\sigma_i)\ \text{ for all }\ t\in[0,1] \tag{41}$$

对于 $i=1,\ldots,n$。令 $\sigma:=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ 以及 $L:=\sum_{i=1}^n L(\sigma_i)$。则 $\sigma\in\mathbf{实数集}_{[0,1]}^{M}(x,y)$。由(35)和(41),

$$\alpha\le L<\alpha+n\delta \text{ and } L(\sigma)\ge d_\psi(x,y). \tag{42}$$

令$m\in\mathbb{N}$。对于每个$i=1,\ldots,n$，有

$$\lambda_{ij}:=d_i\left(\sigma_i\left(\frac{j-1}{m}\right)\sigma_i\left(\frac{j}{m}\right)\right)\overset{(35)}{\le}L\left(\sigma_i|_{\left[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}\right]}\right)\overset{(41)}{=}\frac{L(\sigma_i)}{m} \tag{43}$$

对于所有 $j=1,\ldots,m$。由(40),

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n|\alpha_j\cdot L(\sigma_i)-\alpha_i\cdot L(\sigma_j)|&\le\sum_{j\ne i}(\alpha_j\cdot|L(\sigma_i)-\alpha_i|+\alpha_i\cdot|\alpha_j-L(\sigma_j)|)\\&<\delta\cdot\sum_{j\ne i}(\alpha_j+\alpha_i)=\delta\,(\alpha+(n-2)\alpha_i)\end{aligned} \tag{44}$$

对于所有 $i=1,\ldots,n$。由(39)和(44),

$$\begin{aligned}\left|\frac{L(\sigma_i)}{L}-\frac{\alpha_i}{\alpha}\right|&\le\frac{\sum_{j=1}^n|\alpha_j\cdot L(\sigma_i)-\alpha_i\cdot L(\sigma_j)|}{L\cdot\alpha}\\&<\delta\cdot\frac{\alpha+(n-2)\alpha_i}{\alpha^2}<\tau\ (i=1,\ldots,n).\end{aligned} \tag{45}$$

根据（38）和（45），

$$\psi\left(\frac{L(\sigma_1)}{L},\ldots,\frac{L(\sigma_n)}{L}\right)<\psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)+\beta. \tag{46}$$

对于$j = 1, \ldots, m$,

$$d_\psi\left(\sigma\left(\frac{j-1}{m}\right), \sigma\left(\frac{j}{m}\right)\right) \overset{(6)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}\right) \cdot \psi\left(\frac{\lambda_{1j}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}}, \ldots, \frac{\lambda_{nj}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}}\right) \overset{(5),(43)}{\leq} \frac{L}{m} \cdot \psi\left(\frac{L(\sigma_1)}{L}, \ldots, \frac{L(\sigma_n)}{L}\right). \tag{47}$$

Then

$$\begin{aligned} L(\sigma) &\overset{(37)}{=} \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{m} d_\psi\left(\sigma\left(\frac{j-1}{m}\right), \sigma\left(\frac{j}{m}\right)\right) \\ &\overset{(6),(47)}{\leq} L \cdot \psi\left(\frac{L(\sigma_1)}{L}, \ldots, \frac{L(\sigma_n)}{L}\right) \\ &\overset{(42),(46)}{<} (\alpha + n\delta) \cdot \left[\psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right) + \beta\right] \\ &= \alpha \cdot \psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right) + \beta(\alpha + n\delta) + n\delta \cdot \psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha}\right) \\ &\overset{(4),(6)}{\leq} d_\psi(x, y) + \beta(\alpha + n\delta) + n\delta \\ &\overset{(39)}{<} d_\psi(x, y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

因此,

$$d_\psi(x, y) = \inf_{\sigma \in \mathbf{R}^M_{[0,1]}(x,y)} L(\sigma).$$

根据定义6.3，$(M, d\psi)$是一个长度空间。

假设 (M, dψ) 是一个长度空间。设 i = 1,. . . , n 且 $x_i, y_i \in X_i$。对于某些 x j ∈X*j* (j ≠i)，根据 (10) 定义 x, y ∈M。令 $\varepsilon > 0$。由 (6) 和 (10),

$$d_\psi(x, y) = d_i(x_i, y_i) \cdot \psi(\mathbf{e}_i) = d_i(x_i, y_i). \tag{48}$$

根据定义6.3，存在一条曲线 σ:=$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in$**实数集**$^M_{[a,b]}(x,\ y)$使得 at

$$d_\psi(x, y) + \varepsilon > L(\sigma). \tag{49}$$

Then

$$\begin{aligned} d_i(x_i, y_i) + \varepsilon &\overset{(48)}{=} d_\psi(x, y) + \varepsilon \\ &\overset{(49)}{>} L(\sigma) \\ &\overset{(34)}{=} \sup_{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b} \sum_{i=1}^{n} d_\psi(\sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i)) \\ &\overset{(12)}{\geq} \sup_{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b} \sum_{i=1}^{n} d_i(\sigma_i(t_{i-1}), \sigma_i(t_i)) = L(\sigma_i). \end{aligned}$$

注意到 $\sigma_i \in$**实数集**$^{X_i}_{[a,b]}(x_i, y_i)$。因此,

$$d_i(x_i, y_i) = \inf_{\gamma \in \mathbf{R}^{X_i}_{[a,b]}(x_i, y_i)} L(\gamma).$$

根据定义 6.3，(X_i,d_i) 是一个长度空间。 □

注记 6.6。 当 $\psi:=\psi_p$ 由（3）定义，且 $p\in[1,\infty]$时，定理 6.5 重新捕捉了 [20, 命题 5.3(1) & 习题 5.5(1)]。

下面的陈述回顾了长度空间的刻画；参见 [20,第 32] 页和 [27, 定理 3.4]。

引理 6.7。 完备度量空间 (X,d) 是长度空间，当且仅当对于所有 $x,y\in X$ 和 $\varepsilon>0$，存在一个 $\bar{}x\in X$，使得

$$\max\{d(x,\bar{x}),d(y,\bar{x})\}\le\frac{1}{2}d(x,y)+\varepsilon. \tag{50}$$

定理 6.5 的证明使用了长度空间的定义（定义 6.3）。当 $(X_i,\ d_i)$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ 是完备度量空间时，可以利用引理 6.7给出另一种证明。

定理 6.5 在完备性假设下的证明。 由注 3.4(ii) 和定理 3.3 可知，(M,d_ψ) 是一个完备度量空间。

设 (X_i,d_i) $(i=1,\ldots,n)$ 为长度空间。令 $x:=(x_1,\ldots,x_n)$、$y:=(y_1,\ldots,y_n)\in M$，$\varepsilon>0$，$\alpha_i:=d_i(x_i,y_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ 且 $\alpha:=\sum_{i=1}^n\alpha_i$。选取一个$a\beta>0$使得 $\beta<\frac{2\varepsilon}{\alpha}$。于是存在一个 $\tau>0$，使条件 (38) 对所有 $t:=(t_1,\ldots,t_n)$, $t':=(t'_1,\ldots,t'_n)\in\Omega_n$ 均成立。选取一个 $\delta>0$ 使得

$$\delta<\min\left\{\frac{\alpha}{4n},\frac{\alpha^2\tau}{4(\alpha+(n-2)\cdot\max\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\})},\frac{2\varepsilon-\alpha\beta}{2(\beta+1)n}\right\}. \tag{51}$$

由引理 6.7，存在点 $\bar{}x_i\in X_i\,(i=1,\ldots,n)$ 使得

$$\max\{d_i(x_i,\bar{x}_i),d_i(y_i,\bar{x}_i)\}\le\frac{\alpha_i}{2}+\delta\ \ (i=1,\ldots,n). \tag{52}$$

令 $\bar{}x:=(\bar{}x_1,\ldots,\bar{}x_n)$，$\theta_i:=d_i(x_i,\bar{}x_i)$ $(i=1,\ldots,n)$，以及 $\theta:=\sum_{i=1}^n\theta_i$。我们将证明

$$d_\psi(x,\bar{x})<\frac{1}{2}d_\psi(x,y)+\varepsilon. \tag{53}$$

由（52）和三角不等式可得，

$$\frac{\alpha_i}{2}+\delta\ge\theta_i\ge\alpha_i-d_i(y_i,\bar{x}_i)\ge\frac{\alpha_i}{2}-\delta\ \ (i=1,\ldots,n). \tag{54}$$

由（51）和（54）可得，

$$\left|\theta_i-\frac{\alpha_i}{2}\right|\le\delta\ \ (i=1,\ldots,n)\ \text{ and }\ \frac{\alpha}{2}+n\delta\ge\theta\ge\frac{\alpha}{2}-n\delta>\frac{\alpha}{4}. \tag{55}$$

根据（55），

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n|\alpha_j\cdot\theta_i-\alpha_i\cdot\theta_j|&\le\sum_{j\ne i}\left(\alpha_j\cdot\left|\theta_i-\frac{\alpha_i}{2}\right|+\alpha_i\cdot\left|\frac{\alpha_j}{2}-\theta_j\right|\right)\\&\le\delta\cdot\sum_{j\ne i}(\alpha_j+\alpha_i)=\delta\,(\alpha+(n-2)\alpha_i)\ \ (i=1,\ldots,n).\end{aligned} \tag{56}$$

根据（51）、（55）和（56），

$$\left|\frac{\theta_i}{\theta}-\frac{\alpha_i}{\alpha}\right| \le \frac{\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j\cdot\theta_i-\alpha_i\cdot\theta_j|}{\theta\cdot\alpha} < \delta\cdot\frac{4(\alpha+(n-2)\alpha_i)}{\alpha^2} < \tau \ \ (i=1,\ldots,n). \tag{57}$$

由（38）和（57），

$$\psi\left(\frac{\theta_1}{\theta},\ldots,\frac{\theta_n}{\theta}\right) < \psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)+\beta. \tag{58}$$

Then

$$\begin{aligned} d_\psi(x,\bar{x}) &\overset{(6)}{=} \theta\cdot\psi\left(\frac{\theta_1}{\theta},\ldots,\frac{\theta_n}{\theta}\right)\\ &\overset{(55),(58)}{<} \left(\frac{\alpha}{2}+n\delta\right)\cdot\left[\psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)+\beta\right]\\ &= \frac{1}{2}\alpha\cdot\psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)+\beta\left(\frac{\alpha}{2}+n\delta\right)+n\delta\cdot\psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)\\ &\overset{(4),(6)}{\le} \frac{1}{2}d_\psi(x,y)+\beta\left(\frac{\alpha}{2}+n\delta\right)+n\delta\\ &\overset{(51)}{<} \frac{1}{2}d_\psi(x,y)+\varepsilon. \end{aligned}$$

因此，条件（53）成立。使用类似的论证，我们得到 $d\psi(y\ \bar{}x)\ <12\ d\psi(x,y)$ $+\varepsilon$. 因此，

$$\max\{d_\psi(x,\bar{x}),d_\psi(y,\bar{x})\} \le \frac{1}{2}d_\psi(x,y)+\varepsilon. \tag{59}$$

由引理 6.7，$(M,d\psi)$ 是一个长度空间。

假设 (M, dψ) 是一个长度空间。令 i $=$ 1,. . . , n 且 $x_i, y_i \in X_i$。对某个 x j $\in$ X_j(j $\neq$ i)，按 (10) 定义 x, y $\in$M。则条件 (48) 成立。令 $\varepsilon>0$。由引理 6.7，存在一个 a $\bar{}$x :=($\bar{}$x1, . . . , $\bar{}$x$_n$) $\in$M，使得条件 (59) 得以满足。由 (12)，

$$d_i(x_i,\bar{x}_i) \le d_\psi(x,\bar{x}),\ \ d_i(y_i,\bar{x}_i) \le d_\psi(y,\bar{x}). \tag{60}$$

由式（48）、（59）和（60），

$$\max\{d_i(x_i,\bar{x}_i),d_i(y_i,\bar{x}_i)\} \le \frac{1}{2}d_i(x_i,y_i)+\varepsilon.$$

根据引理 6.7，（X_i，d_i）是一个长度空间。 □

注记 6.8. 定理 6.5的完备性假设并非必不可少。不过，我们仍保留上述证明，以说明连续凸函数类为处理长度空间乘积构造中涉及的技术细节提供了便利的框架。

7. 测地空间的乘积构造

下面的定义回顾测地空间的概念；参见 [20, 定义1。3] 和 [19, 定义2.4。1]。

定义 7.1。 如果对于任意 $x,\ y \in X$，都存在一条连接 x 和 y 的测地线，即存在一条曲线 $\gamma\colon\ [0,d(x,\ y)] \to X$，使得 $\gamma(0) = x,\ \gamma(d(x,\ y)) = y$，则称度量空间（$X,\ d$）为测地空间，并且

$$d(\gamma(t),\gamma(t')) = |t-t'| \text{ for all } t,t' \in [0,d(x,y)]. \tag{61}$$

注记 7.2。 测地空间的例子见 [19, 例 2.4。3]。每个测地空间都是长度空间 [19, 命题 2.4。2],，但反之一般不成立 [19, 例 2.4。4]。根据 Hopf–Rinow 定理[20, 命题 3。7], ，如果长度空间是完备且局部紧的，则它是测地空间。

命题 7.3。 度量空间 (X,d) 是测地空间，当且仅当对于任意 $x, y \in X$，都存在一条曲线 $\sigma\colon [0,1] \to X$，使得 $\sigma(0) = x,\ \sigma(1) = y$，并且

$$d(\sigma(t),\sigma(t')) = d(x,y)\cdot|t-t'| \ \textit{for all}\ t,t' \in [0,1]. \tag{62}$$

证明。假设 (X, d) 是一个测地空间。令 x, y ∈X。根据定义 7.1，存在一条曲线 $\gamma\colon$ [0, d(x, y)] →X，使得 $\gamma(0)$ =x，γ(d(x, y)) =y，并且满足条件 (61)。令 σ(t) := γ (t ·d(x, y))，对所有 t ∈ [0, 1] 均成立。则 $\sigma(0)$ =x，$\sigma(1)$ =y，并且条件 (62) 成立。

现在证明反向蕴含。令 x, y ∈ X。若 x = y，则根据定义 2.5(i)，由 γ (0) = x 给出的曲线 $\gamma\colon$ [0, 0] → X 是一条测地线。假设 x ≠y。根据假设，存在一条曲线 $\sigma\colon$ [0, 1] →X，使得 $\sigma(0)$ =x，$\sigma(1)$ =y，并且满足条件 (62)。根据定义 2.5(ii)，σ 是一条长度为 d(x,y) > 0 的恒速测地线。根据命题 2.6，由下式定义的曲线 $\gamma\colon$ [0, d(x, y)] →X

$$\gamma(t) := \sigma\left(\frac{t}{d(x,y)}\right) \text{ for all } t \in [0,d(x,y)]$$

是测地线。注意 γ（0） $= x$ 和 γ（d（x，y））$= y$。根据定义 7.1，（X，d）是一个测地空间。□

注 7.4。命题 7.3 中区间 [0, 1] 的选择仅仅是一种归一化。更准确地说，可以考虑任意区间 [a,b]，其中 a < b，并定义一条曲线 $\tilde{\sigma}\colon$ [a, b] →X，满足 $\tilde{\sigma}$(a) =x、$\tilde{\sigma}$ (b) =y，以及

$$d(\tilde{\sigma}(t),\tilde{\sigma}(t')) = \frac{d(x,y)}{b-a}\cdot|t-t'| \text{ for all } t,t' \in [a,b].$$

令 $\sigma\colon$ [0, 1] →X 由 σ(t) := $\tilde{\sigma}$(a +t(b −a)) 对所有 t ∈ [0, 1] 定义。则 $\sigma(0)$ =x、$\sigma(1)$ = y，并且满足条件 (62)。

下面的定理给出了乘积空间成为测地空间的充要条件。

定理 7.5. 设 $(X_i,d_i)\,(i=1,\ldots,n)$ 为度量空间，$M:=X_1\times\cdots\times X_n$，且 $\psi\in\Psi_n$。那么，$(X_i,d_i)\,(i=1,\ldots,n)$ 是测地空间，当且仅当 (M,d_ψ) 是测地空间。

证明。根据定理 3.3，(M,d_ψ) 是一个度量空间。假设 (X_i,d_i)（$i=1,\ldots,n$）是测地空间。设 $x:=(x_1,\ldots,x_n)$，$y:=(y_1,\ldots,y_n)\in M$。根据命题 7.3，存在曲线 $\sigma_i:[0,1]\to X_i$，满足 $\sigma_i(0)=x_i$、$\sigma_i(1)=y_i$，并且

$$d_i(\sigma_i(t),\sigma_i(t'))=d_i(x_i,y_i)\cdot|t-t'|\ \text{ for all }\ t\in[0,1] \tag{63}$$

$(i=1,\ldots,n)$。令 $\sigma:=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$。于是 $\sigma(0)=x$ 且 $\sigma(1)=y$。根据（6）和（63），

$$\begin{aligned} d_\psi(\sigma(t),\sigma(t')) &= d_\psi((\sigma_1(t),\ldots,\sigma_n(t)),(\sigma_1(t'),\ldots,\sigma_n(t'))) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)\right)\cdot\psi\left(\frac{d_1(x_1,y_1)}{\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)},\ldots,\frac{d_n(x_n,y_n)}{\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)}\right)\cdot|t-t'| \\ &= d_\psi(x,y)\cdot|t-t'| \end{aligned}$$

对所有 $t,\ t'\in[0,1]$。根据命题 7.3，$(M,\ d_\psi)$ 是一个测地空间。

设 (M,d_ψ) 是一个测地空间。令 $i=1,\ldots,n$ 以及 $x_i,y_i\in X_i$。根据 (10) 对某些 $x_j\in X_j\,(j\neq i)$ 定义 $x,y\in M$。由命题 7.3，存在一条曲线 $\sigma:[0,1]\to M$，满足 $\sigma(0)=x$、$\sigma(1)=y$，且

$$d_\psi(\sigma(t),\sigma(t'))=d_\psi(x,y)\cdot|t-t'|\ \text{ for all }\ t,t'\in[0,1]. \tag{64}$$

注意，对于某个 $\sigma_i:[0,1]\to X_i(i=1,\ldots,n)$，有 $\sigma:=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$。固定 $i=1,\ldots,n$。于是 $\sigma_i(0)=x_i$，$\sigma_i(1)=y_i$，且

$$d_i(\sigma_i(t),\sigma_i(t'))\overset{(12)}{\leq}d_\psi(\sigma(t),\sigma(t'))\overset{(64)}{=}d_\psi(x,y)\cdot|t-t'|\overset{(48)}{=}d_i(x_i,y_i)\cdot|t-t'| \tag{65}$$

for all $t,t'\in[0,1]$. We have

$$d_i(x_i,\sigma_i(t))=t\cdot d_i(x_i,y_i)\ \text{ and }\ d_i(\sigma_i(t),y_i)=(1-t)\cdot d_i(x_i,y_i) \tag{66}$$

对所有 $t\in[0,1]$ 均成立。事实上，对于任意 $t\in[0,1]$，由 (65) 可得 $d_i(x_i,\sigma_i(t))\leq t\cdot d_i(x_i,y_i)$，以及 $d_i(\sigma_i(t),y_i)\leq(1-t)\cdot d_i(x_i,y_i)$，因此，

$$d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,\sigma_i(t))+d_i(\sigma_i(t),y_i)\leq t\cdot d_i(x_i,y_i)+(1-t)\cdot d_i(x_i,y_i)=d_i(x_i,y_i).$$

因此，条件（66）成立。于是

$$d_i(\sigma_i(t),\sigma_i(t'))\geq\left|d_i(x_i,\sigma_i(t))-d_i(x_i,\sigma_i(t'))\right|\overset{(66)}{=}d_i(x_i,y_i)\cdot|t-t'| \tag{67}$$

对所有 t、$t'\in[0,1]$。由（65）和（67），

$$d_i(\sigma_i(t),\sigma_i(t'))=d_i(x_i,y_i)\cdot|t-t'|\ \text{ for all }\ t,t'\in[0,1].$$

根据命题 7.3，$(X_i,\ d_i)$ 是一个测地空间。 □

注 7.6。当 $\psi:=\psi_p$ 由（3）定义，且 $p\in[1,\infty]$ 时，定理 7.5 重新概括了 [20, 命题 5.3(2) & 习题 5.5(1)] 并改进了 [19, 命题 2.6。6]。

下面的命题回顾了测地空间的中点刻画；参见 [20, 备注 1.4(1)] 和 [19, 定理 2.6.2(ii) &(iv)]。

引理 7.7。 完备度量空间 (X,d) 是测地空间，当且仅当对于任意 $x,y \in X$，都存在一个 $\bar{x} \in X$，使得

$$d(x,\bar{x}) = d(y,\bar{x}) = \frac{1}{2}d(x,y). \tag{68}$$

定理 7.5 的证明使用了测地空间的定义。当$(X_i,\ d_i)\,(i = 1,\ \ldots,\ n)$是完备度量空间时，可以采用引理7.7给出另一种证明。

在完备性假设下定理 7.5 的证明。由注 3.4(ii)和定理 3.3，(M, dψ)是完备度量空间。设$(X_i, d_i)(i = 1, \ldots, n)$是测地空间。令 $x := (x1,\ \ldots,\ x_n)$，$y := (y1,\ \ldots,\ y_n) \in M$。根据引理 7.7，存在点 $\bar{x}_i \in X_i$ 使得

$$d_i(x_i,\bar{x}_i) = d_i(y_i,\bar{x}_i) = \frac{1}{2}d_i(x_i,y_i)\ \ (i = 1,\ldots,n). \tag{69}$$

令 $\theta_i := d_i(x_i, \bar{x}_i)$，$\alpha_i := d_i(x_i,y_i)(i = 1,\ldots,\ n)$，$\theta := \sum_{i=1}^n \theta_i$，$\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i$，以及$\bar{x} := (\bar{x}1,\ \ldots,\ \bar{x}_n)$。由(6)和(69)，

$$d_\psi(x,\bar{x}) = \theta \cdot \psi\left(\frac{\theta_1}{\theta},\ldots,\frac{\theta_n}{\theta}\right) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}d_\psi(x,y).$$

用类似的论证，我们得到 $d_\psi(y\ \bar{x}) = \frac{1}{2}d_\psi(x,y)$。由引理 7.7，$(M,d_\psi)$是一个测地空间。

设 (M, dψ) 是一个测地空间。固定 $i = 1,\ldots,n$ 以及 $x_i, y_i \in X_i$。设 $x, y \in M$ 如式 (10) 所示，其中某些 $x_j \in X_j (j \neq i)$。则条件 (48) 成立。由引理 7.7，存在一个 $\bar{x} := (\bar{x}1,\ldots,\bar{x}_n) \in M$，使得

$$d_\psi(x,\bar{x}) = d_\psi(y,\bar{x}) = \frac{1}{2}d_\psi(x,y) = \frac{1}{2}d_i(x_i,y_i). \tag{70}$$

注意，条件 (60) 成立。由此以及 (70)，

$$d_i(x_i,\bar{x}_i) \le \frac{1}{2}d_i(x_i,y_i)\ \text{ and }\ d_i(y_i,\bar{x}_i) \le \frac{1}{2}d_i(x_i,y_i). \tag{71}$$

由三角不等式，

$$d_i(x_i,y_i) \le d_i(x_i,\bar{x}_i) + d_i(y_i,\bar{x}_i). \tag{72}$$

由 (71) 和 (72)，我们有 $d_i(x_i, \bar{x}_i) = d_i(y_i, \bar{x}_i) = \frac{1}{2}d_i(x_i,y_i)$。由引理 7.7，$(X_i,d_i)$是一个测地空间。□

我们将建立一个公式，通过各分量曲线的长度来计算乘积空间中一条曲线的长度。首先，我们回顾仿射（重新参数化）测地线 [19, 定义 2.2。8]。

定义 7.8。 设 (X,d) 为一个度量空间。若曲线 $\sigma\colon [a,b] \to X$ 满足以下条件之一，则称其为仿射测地线：要么 σ为常值，要么存在一条测地线 $\sigma'\colon [c,d] \to X$使得 $\sigma = \sigma' \circ \theta$，其中 $\theta\colon [a,b] \to [c,d]$ 由下式唯一确定

$$\theta(t) := \frac{(d-c)t + bc - ad}{b-a}\ \text{ for all }\ t \in [a,b].$$

下面的命题给出了仿射测地线的刻画；参见 [19,命题 2.2.9 和 2.2。10]。

命题 7.9. 设(X, d) 是一个度量空间，且 $\sigma\colon [0,1]\to X$。

(i) 若 σ 是仿射测地线，则它是恒速测地线，其长度为$\lambda := L(\sigma)$。(ii) 若 σ 是长度为 $\lambda \geq 0$的恒速测地线，则它是仿射测地线，且 $\lambda = L(\sigma)$。

下面的结论给出了计算乘积空间中曲线长度的公式。

定理 *7.10.* 设(X_i,d_i)为测地空间，$x_i, y_i \in X_i$，$\sigma_i\colon [0,1]\to X_i$为一条仿射测地线，满足 $\sigma_i(0) = x_i$且 $\sigma_i(1) = y_i (i = 1,\ldots, n)$，$x := (x1,\ldots, x_n)$，$y := (y1,\ldots, y_n)$，$M := X_1\times\cdots\times X_n$，$\psi \in \Psi_n$，且 $\sigma := (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$。则 σ是测地空间(M, d_ψ)中连接x与y的一条仿射测地线，并且

$$L(\sigma) = \left(\sum_{i=1}^{n} L(\sigma_i)\right)\cdot\psi\left(\frac{L(\sigma_1)}{\sum_{i=1}^{n} L(\sigma_i)},\ldots,\frac{L(\sigma_n)}{\sum_{i=1}^{n} L(\sigma_i)}\right). \tag{73}$$

证明。 根据定理 7.5，(M, d_ψ)是一个测地空间。显然， σ连接 x和 y。设 t，$t' \in [0,1]$。根据定义 2.5(ii) 和命题 7.9(i)，

$$d_i(\sigma_i(t),\sigma_i(t')) = L(\sigma_i)\cdot|t - t'| \quad (i = 1,\ldots,n). \tag{74}$$

设 λ 为（73）右端的数。由（6）和（74），

$$d_\psi(\sigma(t),\sigma(t')) = d_\psi((\sigma_1(t),\ldots,\sigma_n(t)),(\sigma_1(t'),\ldots,\sigma_n(t'))) = \lambda\cdot|t - t'|.$$

根据定义 2.5(ii)，曲线 σ 是速度为 λ 的恒速测地线。由命题 7.9(ii)，曲线 σ 是仿射测地线，且 $\lambda = L(\sigma)$。证毕。 □

注记 7.11。 当 $\psi := \psi_p$ 由（3）给出，且 $p \in [1,\infty]$时，定理 7.10 重新得到了 [19, 命题 2.6。7]。

下面的例子说明定理7.10。

例 7.12。 设 $X_i := \mathbb{R}$ 赋予度量 $d_i(x, y) := |x^{2i-1} - y^{2i-1}|$对所有 $x, y \in \mathbb{R} (i = 1, \ldots, n)$。对每个 $i = 1, \ldots, n$，令 $u, v \in X_i$并定义一条曲线$\xi_i\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ 如下

$$\xi_i(t) := \left((1-t)\cdot u^{2i-1} + t\cdot v^{2i-1}\right)^{\frac{1}{2i-1}} \quad \text{for all } t \in [0,1].$$

那么，对于所有的 t,t′ ∈ [0,1]，$d_i(\xi_i(t)\ \xi_i(t')) = d_i(u, v)\cdot|t - t'|$。根据命题 7.3，$(X_i, d_i)$ (i = 1, . . . , n) 都是测地空间。令 $M := X_1\times\cdots\times X_n$，以及 $\psi \in \Psi_n$。根据定理 7.5，(M, d_ψ)是一个测地空间。

对于每个 i = 1, . .. ,n，考虑一条曲线 $\sigma_i\colon [0,1]\to\mathbb{R}$由 $\sigma_i(t) := (i\cdot t)$ $12i-1$对所有 t ∈ [0,1]给出。显然， σ_i连接 0 和 i $12i-1$(i = 1, . . . , n)。令$\sigma := (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$。那么 σ连接 (0, .. .,0) 和 (1, . . . , i $12i-1$, . . . , n $12n-1$)。对于所有 t,t′ ∈ [0,1]，我们有 $d_i(\sigma_i(t)\ \sigma_i(t')) = i\cdot|t - t'|$。根据定义 2.5(ii)， σ_i是一个常

速度为 i 的测地线i。根据命题 7.9(ii)， σ_i 是仿射测地线，并且$L(\sigma_i)=i$。根据定理 7.10， σ 是仿射测地线，并且

$$\begin{aligned} L(\sigma) &= \left(\sum_{i=1}^{n} L(\sigma_i)\right) \cdot \psi\left(\frac{L(\sigma_1)}{\sum_{i=1}^{n} L(\sigma_i)}, \ldots, \frac{L(\sigma_n)}{\sum_{i=1}^{n} L(\sigma_i)}\right) \\ &= (1+\cdots+n) \cdot \psi\left(\frac{1}{1+\cdots+n}, \ldots, \frac{n}{1+\cdots+n}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \psi\left(\frac{2}{n(n+1)}, \frac{4}{n(n+1)}, \ldots, \frac{2n}{n(n+1)}\right). \end{aligned}$$

若 $\psi := \psi_p$ 由（3）给出，且 $p \in [1,\infty]$，则

$$L(\sigma) = \begin{cases} (1^p + 2^p + \cdots + n^p)^{\frac{1}{p}} & \text{if } p \in [1,\infty), \\ n & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

作者贡献

所有作者对本研究的贡献均等。

资助

本研究未获得任何资助。

数据可用性声明

本研究期间未生成或分析任何数据集。

声明

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Poincar´e H. 关于由微分方程定义的曲线（第四部分）。纯粹与应用数学杂志。1886年；2：151–217。[2] Banach S. 关于抽象集合上的运算及其在积分方程中的应用。数学基础。1922年；3：133–181。.[3] Brouwer LEJ. 关于流形的映射。数学年刊。1912年；71：97–115。[4] Schauder J. 函数空间中的不动点定理。数学研究。1930年；2(1)：171–180。[5] Ansari QH, Sahu DR. 度量空间中的不动点理论与变分原理。剑桥：剑桥大学出版社；2023年。

[6] Gopal D, Agarwal P, Kumam P，编。度量结构与不动点理论。博卡拉顿：Chapman & Hall/CRC；2021年。[7] Khamsi MA, Kirk WA. 度量空间与不动点理论导论。纽约：John Wiley & Sons；2001年。[8] Nadler S. 压缩映射序列与不动点。《太平洋数学杂志》。1968年；27(3)：579–585。[9] Fora A. 乘积空间中的一个不动点定理。《太平洋数学杂志》。1982年；99(2)：327–335。[10] Kirk WA, Sternfeld Y. 某些乘积空间中非扩张映射的不动点性质。《休斯敦数学杂志》。1984年；10(2)：207–214。[11] Tan KK, Xu HK. 关于乘积空间中非扩张映射的不动点定理。《美国数学会会刊》。1991年；113(4)：983–989。[12] Esp´ınola R, Kirk WA. 乘积空间中的不动点与近似不动点。《台湾数学杂志》。2001年；5(2)：405–416。[13] Kuczumow T. 乘积空间中的不动点定理。《美国数学会会刊》。1990年；108(3)：727–729。[14] Kohlenbach U, Leuştean L. 乘积空间中的近似不动点性质。《非线性分析》。2007年；66(4)：806–818。[15] Brˆanzei R, Morgan J, Scalzo V, 等。巴拿赫空间中的近似不动点定理及其在博弈论中的应用。《数学分析与应用杂志》。2003年；285(2)：619–628。[16] Loomis LH, Sternberg S. 高等微积分。Jones and Bartlett Publishers；1990年。[17] Johnson CR, Nylen P. 范数的单调性。《线性代数及其应用》。1991年；148：43–58。[18] Bauer FL, Stoer J, Witzgall C. 绝对范数与单调范数。《数值数学》。1961年；3：257–264。[19] Papadopoulos A. 度量空间、凸性与非正曲率。第2版。法国斯特拉斯堡：EMS Press；2014年。IRMA 专著。[20] Bridson R Martin Haefliger A. 非正曲率度量空间。柏林与海德堡：Springer-Verlag；1999年。[21] Kirk WA. CAT空间与 $\mathbb{R}$-树中的不动点定理。《不动点理论与应用》。2004年；4：309–316。[22] Ariza-Ruiz D, Li C, L´opez-Acedo G. 测地空间中的绍德尔不动点定理。《数学分析与应用杂志》。2014年；417(1)：345–360。[23] Kirk W, Shahzad N. 测地空间中局部非扩张映射的不动点。《数学分析与应用杂志》。2017年；447(2)：705–715。[24] Kirk WA, Shahzad N. 距离空间中的不动点理论。查姆：Springer International Publishing；2014年。[25] Ariza-Ruiz D, Leuştean L, L´opez-Acedo G. 若干类测地空间中的牢固非扩张映射。《美国数学会汇刊》。2014年；366(8)：4299–4322。

[26] Reich S, Zaslavski AJ. 长度空间中非自映非线性压缩映射的不动点定理. 非线性分析中的拓扑方法 . 2024 年 ; 63(1):13 – 22.[27] Ioffe AD. 正则映射的变分分析：理论与应用. 施普林格; 2017年. 施普林格数学专著.[28] Az´e D, Corvellec JN, Lucchetti RE. 变分对及其在非光滑分析稳定性中的应用. 非线性分析，A辑：理论与方法. 2002年; 49(5):643–670.[29] Cuong ND,Kruger A. 重新审视误差界. 优化. 2022年;71(4):1021–1053.[30] Cuong ND, Kruger AY. 集值映射的一致正则性与隐式多值映射的稳定性. 非光滑分析与优化杂志. 2021年6月;第2卷:3.[31] Ioffe A. 探索度量正则性的度量理论. 载于：Lassonde M，编者. 逼近、优化与数理经济学；海德堡. Physica-Verlag HD; 2001年. 第165–176页.[32] Az´e D, Corvellec JN. 度量空间上下半连续函数误差界的刻画. ESAIM：控制、优化与变分法. 2004年; 10(3):409–425.[33] Saito KS, Kato M, Takahashi Y. $\mathbb{C}^n$上的绝对范数. 数学分析与应用杂志. 2000年;252(2):879–905.[34] Cuong ND. 符号对称范数的原始与对偶刻画；2025年. https://arxiv.org/abs/2504.19642.[35] Cuong ND. 范数最小化问题的对偶刻画；2026年. https://arxiv.org/abs/2601.08153.[36] Avgustinovich S, Fon-Der-Flaass D. 图与度量空间的笛卡尔积. 欧洲组合数学杂志. 2000年;21(7):847–851.[37] Baillon J. 非扩张映射与超凸空间. 载于：不动点理论及其应用.（当代数学；第72卷）. 美国数学会; 1988年. 第11–19页.[38] Bisht RK. 利普希茨型映射的不动点. 应用广义拓扑学. 2023年10月;24(2):449–454.[39] G´ornicki J. 对合的不动点. 日本数学. 1996年;43(1):151–155.[40] G´ornicki J. 希尔伯特空间中利普希茨映射的一些不动点结果综述. 非线性分析：理论、方法与应用. 2001年; 47(4):2743–2751.[41] Yanez CM, Kirk WA. 乘积空间中的非扩张映射与局部非扩张映射. 非线性分析. 1988年;12(7):719–725.[42] Berinde V, Rus IA. 渐近正则性、不动点与逐次逼近. Filomat. 2020年; 34(3):965–981.[43] Ishikawa S. 巴拿赫空间中非扩张映射的不动点与迭代. 美国数学会会刊. 1976年;59(1):65–71.

Doan HuuHieu 数学系 自然科学学院，芹苴大学 越南芹苴市 电子邮件：
dhhieu3107@gmail.com

Vo Minh Tam 数学系 同塔大学 越南同塔省 电子邮箱：
vmtam@dthu.edu.vn

Nguyen Duy Cuong 数学系 自然科学学院，芹苴大学 越南芹苴市 电子邮箱：
ndcuong@ctu.edu.vn