arXiv:2601.15920v1 [math.CO] 22 Jan 2026

群环上的矩阵变异

DANI KAUFMAN 和 CARMEN ALVES SABIN

Abstract. 我们给出群环上斜可对称化矩阵变异的精确定义，并将其与折叠以及带对称性的箭图变异联系起来。这些矩阵的对角元可以非零，我们也解释了其中一些情形下的变异规则。这一新规则源于对整个箭图或子箭图进行广义变异的概念。

1. Introduction

自 Fomin 和 Zelevinsky 引入簇代数以来，箭图及其变异便构成了该理论的骨干 [7]。在这一背景下出现的箭图始终不含环或二圈；这类箭图的数据等价于一个整数元斜对称矩阵，称为交换矩阵。箭图变异等价于交换矩阵的矩阵变异。

更一般地说，在簇代数理论中，考虑斜可对称交换矩阵也很重要。这些矩阵用于构造与非单连通 Dynkin 图相关联的簇代数。斜可对称交换矩阵可以用带权箭图来描述，参见例如 [11]，并且通常可以通过折叠 [2]得到。折叠是一种作用于箭图的运算，它将节点收集成互不相交的集合，然后同时变异一个集合中的所有节点。这种集合变异运算只有在折叠集中的节点彼此不相连时才有意义。

当然没有理由将范围限制于整数值交换矩阵。例如，实值交换矩阵及其变异已在 [3]中得到研究。在本文中，我们考虑元素属于 $\mathcal{R}$ 且带有反对合 σ的非交换环中的斜对称交换矩阵。我们的主要例子是有限 $\mathbb{Z}[G]$ 群的群环，其对合σ 由 $\sigma(g) = g^{-1}$诱导。在此背景下，我们真正需要的是 σ-斜对称矩阵，即 $B = -\sigma(B^T)$。我们证明，当该群 G 作用于一个箭图 Q 并根据这一作用对其进行折叠时，这些矩阵会自然出现，具体如定理 3.4所述。

尝试对这些矩阵进行变异时，会出现一个新的难题：对角元 b_{ii} 可能不为零； $b_{ii} = a - \sigma(a)$ 作为 σ 上的斜对称矩阵中的一个元素是完全允许的。在定理 3.5 中，我们证明，由定理 3.4 给出的矩阵的变异，与将 Q 通过 G折叠所得的集合变异一致，前提是对角元为零。

论文第 4 节试图理解这些对角元非零时的情形。我们的方法依赖于广义变异这一概念，其定义见定理 4.4。这种广义变异与从绿色到红色的变异序列密切相关，该序列也称为簇 ***DT*** 变换，例如参见 [12]。我们在 $b_{ii} = \omega - \omega^{-1}$ 第4.2.1 节和4.2.2 节中明确处理了 ω 的一个生成元 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$，以及 $k = 3$，4 和$b_{ii} = 2(\omega - \omega^{-1})$ 的情形，其中 $k = 3$ 见第 4.2.3 节。

2. Basic Definitions

定义 2.1. A 箭图 Q 是一个有限有向图，包含顶点和有向边，但不含二轮或环。

Date: 2025年6月。特别感谢 Zachary Greenberg 提供的宝贵建议和意见。本研究的部分工作是在 Anna Wienhard 赞助下，于 MPI MIS 暑期实习期间完成的。本项目获得了欧盟地平线2020研究与创新计划（拨款协议编号 101018839 ）下欧洲研究委员会（ ERC ）的资助。

我们通常用 $\{1,\dots,n\}$ 标记箭图 Q 的节点，这样，置换群 S_n 就自然地作用在 Q 的顶点上。

定义 2.2。两个箭图 Q_1，Q_2 若存在置换 $\sigma \in S_n$ 使得 $\sigma(Q_1) = Q_2$，则称它们同构。

定义 2.3。在节点 k 处对 Q 进行变异，即按照以下规则改变箭头，将其变为 $Q' = \mu_k(Q)$：

(1) 对于每一对箭头 $i \to k$ 和 $k \to j$，添加一条新箭头 $i \to j$。(2) 移除所有有向二循环。(3) 反转所有与节点 k相连的箭头。

变异是对合，因此 $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$。

定义 2.4。两个箭图 Q 和 Q' 若存在一个变异序列，将 Q 变为与 Q'同构的箭图，则称它们变异等价。箭图的变异类 是所有与 Q变异等价的箭图构成的集合。

之后我们将提及两类箭图变异类，即曲面型 [4]以及与格拉斯曼流形相关的那些 [14]。

定义 2.5。设 Q是一个具有 n个可变顶点、标记为 1,...,n的箭图。那么，Q, $B^Q \in M_n(\mathbb{Z})$ 的交换矩阵 是一个系数为整数的 $n \times n$ 矩阵，定义如下：

$$(b_{ij}) = \begin{cases} l & \text{if there are } l \text{ arrows from vertex } i \text{ to vertex } j \\ -l & \text{if there are } l \text{ arrows from vertex } j \text{ to vertex } i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

通常，簇代数理论中出现的交换矩阵不一定是斜对称的，但可以是斜对称化的，例如参见 [6] 中的讨论。

定义 2.6。若存在一个对角斜对称化矩阵 D，其对角元为 d_i，使得 DB 为斜对称的，即对于所有 i 和 j，都有 $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$，则称整方阵 $B = (b_{ij})$ 为斜对称化矩阵。

箭图的变异也可以等价地用交换矩阵的变异规则来定义：

定义 2.7. 设 $a \in \mathbb{Z}$。我们分别用 $[a]_+ := \max(a, 0)$ 和 $[a]_- = \min(a, 0)$ 表示 a的正部 和负部 。

注意，a 的负部实际上是一个负数。我们认为这是一个更有用的定义，因为 $[a]_-$ 要么等于 a，要么等于 0。

定义 2.8（交换矩阵的变异）。变异 $\mu_k(B) = B'$，其中

$$(b'_{ij}) = \begin{cases} -b_{ij} & \text{for } i = k \text{ or } j = k \\ b_{ij} + [b_{ik}]_+[b_{kj}]_+ - [b_{ik}]_-[b_{kj}]_- & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

定义 2.9. 我们记 $a \circ b := [a]_+[b]_+ - [a]_-[b]_-$。

这样就可以方便地将变异规则写成 $b'_{ij} = b_{ij} + b_{ik} \circ b_{kj}$。

2.1. **群环上的交换矩阵**。设 R 是一个环，且 $\sigma : R \to R$ 是一个反对合，即 $\sigma(ab) = \sigma(b)\sigma(a)$。

定义 2.10。在 R 上的一个 σ 斜对称矩阵 是指矩阵 $B \in M_n(R)$，满足$b_{ij} = -\sigma(b_{ji})$。

如果存在一个对角矩阵 D，其元素d_{ii} 属于 $\mathcal{R}$ 的中心，并且在 σ 下保持不变，使得 DB 是 σ 斜对称的，则称矩阵 $B \in M_n(R)$是 σ 斜对称化的。

这类环的主要例子将是有限群的群环 $\mathbb{Z}[G]$，其对合由 $\sigma(g) = g^{-1}$给出。我们始终假设对合 σ 以这种方式给出。出于技术原因，我们将把此环扩充为包含 $||G||^{-1}$。

对于群环 $\mathbb{Z}[G][||G||^{-1}]$，元素的正部和负部有一种自然的选取方式。

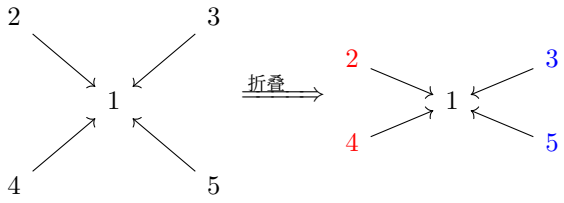


FIGURE 1. 将 Q 折叠为 3 个折叠集，即 {1}、{2,4} 和 {3,5}。

定义2.11。对于 $a = \sum a_g g$， $a_g \in \mathbb{Z}$ 我们记作 $[a]_\pm = \sum [a_g]_\pm g$。

据此，我们可以尝试使用与之前完全相同的公式，来定义 σ 上的斜对称化矩阵变异。我们的目标是说明，这类矩阵及其变异自然地源自箭图的折叠。

我们将用 ϵ、ω、ζ 表示循环群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$（分别对应 $n = 2$、3、4）的生成元。

3. SYMMETRIC FOLDING

折叠 是箭图上的一种自然操作，可用于由斜对称矩阵构造斜对称化矩阵。折叠箭图时，我们将其节点分成若干互不相交的集合，并通过一次性变异给定集合中的所有节点来进行变异。现在，我们回顾 [10]中的折叠概念（术语略有调整）。

定义3.1。 对具有节点 1,...,n 的箭图 Q 进行折叠，是指选取 k 个互不相交且非空的节点集，称为折叠集，这些集合的并集包含 Q的所有节点。若某个折叠集中的节点构成一个不连通的子箭图，则称该折叠集无环。在无环折叠集上进行集合变异，是指依次对集合中的每个节点各进行一次变异。

自然地，我们可以通过集合变异来定义在无环折叠集上对折叠箭图进行变异。由于该集合中的节点之间没有环或箭头，因此只要集合中的每个节点仅变异一次，先变异哪个节点并不重要。这一操作用于将箭图的折叠与 [2]中的斜对称化交换矩阵的变异联系起来。

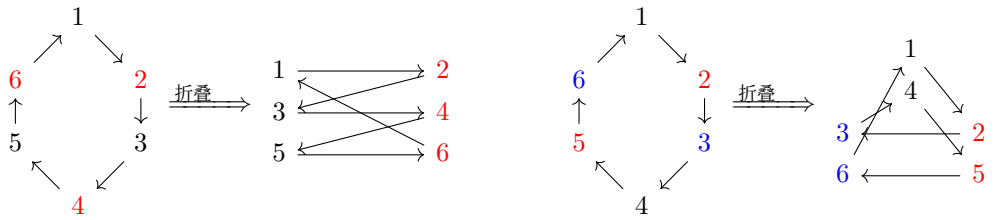
3.1. 群作用下的折叠。

设 Q 是一个以 n 为节点的箭图，且 $G \subset S_n$ 是一个通过箭图同构作用于 Q 的有限群。

定义3.2。 由 G 得到的折叠箭图记为 Q_G，它是对 Q 进行的折叠，其群由 G在 Q上的作用的轨道给出。

我们的目标是定义一个 σ 斜对称化交换矩阵，其元素属于群环 $\mathbb{Z}[G]$，并用于描述折叠箭图 Q_G。我们将 G 在 Q上的轨道记为集合$O_1 \ldots,\ O_m$

构造 3.3. 为每个轨道选取一个代表元， $x_k \in O_k$ 并将 H_k :=Stab(x_k) 记为 x_j 的稳定子子群。对于 $g \in G$，我们用 $B^Q_{x_i x_j}(g)$ 表示从节点 x_i 到节点 $g \cdot x_j$ 的箭头数。



(A) 关于 $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$的折叠。 (B) 关于 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的折叠。

FIGURE 2. 关于两个不同群折叠同一个箭图。

Q 关于 G, $B_G^Q(x_1,\dots,x_m)$ 的折叠交换矩阵 $=[c_{ij}]$ 是一个 $m\times m$ 矩阵，其元素定义如下：

$$c_{ij}=\frac{1}{||H_j||}\sum_{g\in G}B^Q_{x_ix_j}(g)g. \tag{3}$$

定理 3.4。 矩阵 $B_G^Q(x_1,\dots,x_m)$ 是群环$\mathbb{Z}[G]$上的斜对称可对称化矩阵。

证明。 我们可以看出，从 x_i 到 gx_j 的一条箭头，由于 G对称性，意味着存在一条从 $g^{-1}x_i$ 到 x_j的箭头。这表明 $B^Q_{x_ix_j}(g)=-B^Q_{x_jx_i}(g^{-1})$，因此

$$c_{ji}=-\frac{||H_j||}{||H_i||}\sigma(c_{ij}).$$

因此，这个矩阵是斜对称可对称化的，其对称化子为 $d_{ii}=||H_i||^{-1}$ □

矩阵变异公式 定理 2.8对于这些矩阵同样完全适用 .

定理 3.5。 设有一个箭图 Q，以及一个群 G作用于 Q。假设 Q 在 G 作用下的折叠满足轨道 O_j 无圈，即 $B_G^Q(x_1,\dots,x_m)$ 的第 b_{jj} 个元素为零。那么， $\mu_j(B_G^Q(x_1,\dots,x_m))$ 与 $B_G^{Q'}$ 一致，其中 Q' 是通过在轨道 O_j处进行集合变异得到的箭图。

证明。 令 j 表示我们进行变异的群。显然，变异后矩阵中有一个指标等于 j 的各项都正确改变了。其他各项 $c'_{ik}=c_{ik}+[c_{ij}]_+[c_{jk}]_+-[c_{ij}]_-[c_{jk}]_-$。我们将两个正部的乘积写作

$$\begin{aligned}[c_{ij}]_+[c_{jk}]_+&=\frac{1}{||H_j||\cdot||H_k||}\sum_{h\in G}[B^Q_{x_ix_j}(h)]_+h\sum_{g\in G}[B^Q_{x_jx_k}(g)]_+g\\&=\frac{1}{||H_j||\cdot||H_k||}\sum_{h,g\in G}[B^Q_{x_ix_j}(h)]_+[B^Q_{x_jx_k}(h^{-1}g)]_+g\\&=\frac{1}{||H_k||}\sum_{hH_j\in G/H_j,g\in G}[B^Q_{x_ix_j}(h)]_+[B^Q_{x_jx_k}(h^{-1}g)]_+g.\end{aligned}$$

我们可以类似地写出两个负部乘积的表达式。另一方面， $B_G^{Q'}(x_1,\dots,x_m)$ 的 e_{ik} 项可以如下计算：每当出现一对箭头 $(x_i\to hx_j)$,$(hx_j\to gx_k)$ 时，我们就添加一条箭头 $(x_i\to gx_k)$；反方向的箭头也同样处理。因此我们有

$$e_{ik}=c_{ik}+\frac{1}{||H_k||}\sum_{g\in G}\left(\sum_{hH_j\in G/H_j}B^Q_{x_ix_j}(h)\circ B^Q_{x_jx_k}(h^{-1}g)\right)$$

这等于 c'_{ik}。 □

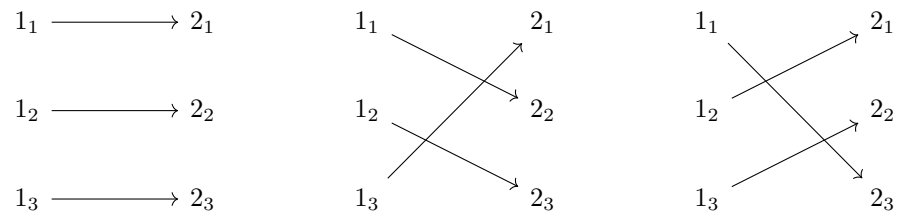
当此处的项 $b_{jj}\neq 0$ 尚无明确界定的集合变异概念时，我们稍后会再讨论这种情况。

3.2. **编织**。 折叠交换矩阵 B_G^Q 取决于每个 G轨道所选的代表元。

命题 3.6。 折叠交换矩阵 $B_G^Q(x_1,\dots,gx_j,\dots,x_m)$ 由$B_G^Q(x_1,\dots,x_m)$ 通过对角矩阵 $D_j(g)=diag(1,\dots,g,\dots,1)$ 进行共轭得到，其中 g 位于 j^{th} 位置。

证明。 $B^Q_{x_igx_j}(h)$ 是从 x_i 到 hgx_j 的箭头数，等于 $B^Q_{x_ix_j}(hg)$；同时我们还有 $B^Q_{gx_jx_i}(h)=B^Q_{x_jx_i}(g^{-1}h)$。因此， $B_G^Q(x_1,\dots,gx_j,\dots,x_m)$ 的第 e_{ij} 项为

$$e_{ij}=\frac{1}{||H_j||}\sum_{h\in G}B_{x_igx_j}(h)h=\frac{1}{||H_j||}\sum_{h\in G}B_{x_ix_j}(hg)h=\frac{1}{||H_j||}\sum_{h\in G}B_{x_ix_j}(h)hg^{-1}$$



(A) $g = 1$ (B) $g = \omega$ (C) $g = \omega^2$

FIGURE 3. 具有两个各含3个节点的折叠集、且赋有 $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{1, \omega, \omega^2\}$中元素的Q的箭头组合。

而第

$$e_{ji} = \frac{1}{||H_i||} \sum_{h \in G} B_{gx_j x_i}(h)h = \frac{1}{||H_i||} \sum_{h \in G} B_{x_j x_i}(h)gh.$$

这意味着 $B_G^Q(x_1, \ldots, gx_j, \ldots, x_m) = D_j(g) B_G^Q(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m) D_j(g)^{-1}$ □

定义3.7。我们将代表元从 x_i 变为 gx_i 称为群 i上由群元素 g给出的编织。若两个群环 $\mathbb{Z}[G]$ 上的矩阵 B 和 B' 可通过一个以群元素 $d_{ii} = g_i$ 为对角元的对角矩阵与一个置换矩阵的乘积相互共轭，则称它们编织同构。

我们可以将编织视为 G 仅作用于轨道 i中的节点。编织与箭图的变异彼此可交换。

例 3.8。 设 $G = S_3$。考虑 S_3 中的元素 (123)。在集合 i 上进行编织，将得到:



3.3. **展开**。

定义3.9。 群环 $\mathbb{Z}[G]$ 上斜对称化矩阵 B 的对称展开 是一个箭图 Q，它带有 G 的作用，且其折叠交换矩阵为 B。

如果我们限制在斜对称矩阵的情形，那么总能构造一种称为典范展开的展开:

构造3.10。 设 B 是一个 $m \times m$ 矩阵，并令 n 为 G 的大小。我们构造一个具有 mn 个节点的箭图 Q，这些节点标记为 $1_{g_1} \ldots, 1_{g_n}, 2_{g_1}, \ldots, 2_{g_n}, \ldots m_{g_n}$。现在，对于每个元素 b_{ij}，取其正部并记作 $[b_{ij}]_+ = \sum_k a_{g_k} g_k$，然后对所有 $h \in G$，从节点 i_h 到 j_{hg_k}添加 a_{g_k} 个箭头。

I容易看出， G通过 $g \cdot i_h = i_{gh}$作用于该箭图，而由此作用进行折叠得到 $1_e, \ldots, m_e$作为轨道代表元，可以还原矩阵 B。

3.4. **示例**。

例 3.11. 考虑箭图 Q 及其对应的交换矩阵:

$$Q:\quad \begin{array}{ccccc} 1_1 & \longrightarrow & 2_1 & \longleftarrow & 3_1 \\ & & \searrow\ \swarrow & & \\ 1_2 & \longrightarrow & 2_2 & \longleftarrow & 3_2 \end{array} \qquad B^Q = \begin{array}{c} \\ 1_1 \\ 1_2 \\ 2_1 \\ 2_2 \\ 3_1 \\ 3_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1_1 & 1_2 & 2_1 & 2_2 & 3_1 & 3_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

选取代表元 $1_1, 2_1$ 和 $3_1,$ ，可得以下折叠交换矩阵:

$$B^Q_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(1_1, 2_1, 3_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \epsilon - 1 \\ 0 & 1 - \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

若改为选取代表元 $1_2, 2_1$ 和 $3_1,$ ，则得到以下折叠交换矩阵:

$$B^Q_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(1_2, 2_1, 3_1) = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ -\epsilon & 0 & \epsilon - 1 \\ 0 & 1 - \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

例 3.12。 图 2 中的折叠 图 2 可由以下交换矩阵表示

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 - \omega^{-1} \\ -1 + \omega & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\epsilon \\ -1 & 0 & 1 \\ \epsilon & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ up to weaving respectively.}$$

例 3.13。 考虑一个有 12 个顶点的图，它是立方八面体的 1-骨架。将该图转化为箭图 Q: 将每条边定向，使正方形面沿顺时针方向，三角形面沿逆时针方向。由于 S_4 是立方八面体的对称群，该箭图在对称群 S_4的作用下保持不变。我们可以计算各种子群 $G \subset S_4$对应的 B^Q_G 。

我们有

$$B^Q_{<(1234)>}: \begin{bmatrix} (1234) - (1432) & 1 - (1234) & 0 \\ -1 + (1432) & 0 & 1 - (1432) \\ 0 & -1 + (1234) & (1432) - (1234) \end{bmatrix}$$

$$B^Q_{<(12)(34),(13)(24)>}: \begin{bmatrix} 0 & 1 - (12)(34) & -1 + (13)(24) \\ -1 + (12)(34) & 0 & 1 - (14)(23) \\ 1 - (13)(24) & -1 + (14)(23) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^Q_{<(123)>}: \begin{bmatrix} (123) - (132) & 1 & -(123) & 0 \\ -1 & 0 & 1 + (123) & -1 \\ (132) & -1 - (132) & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & (132) - (123) \end{bmatrix}$$

$$B^Q_{<(1234),(13)>}: \begin{bmatrix} (1234) - (1432) & \frac{1}{2}(1 - (1234) + (24) - (13)) \\ -1 + (1432) - (24) + (13) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^Q_G: \left[\tfrac{1}{2}\left((1234) - (1432) + (1342) - (1243)\right)\right]$$

4. Exchange Matrices and Mutations over Cyclic Groups

现在，我们的目标是尝试理解群环上斜可对称化矩阵的一般变异

。

若 B 是这样的矩阵，且 $b_{ii} = 0$，那么 定理 3.5 表明，矩阵变异规则与 B的任意对称展开的集合变异一致。如果 $b_{ii} \neq 0$呢? 我们的计划是在这个集合上执行一系列变异，使其表现得如同一次变异，然后重新折叠箭图，看看矩阵 B 应如何变化。

这个变异序列应当是对合的，并使连接到轨道 i 的箭头方向翻转。将箭图中向外的箭头变为向内的箭头的变异序列称为绿变红序列。

4.1. **绿到红变异序列**。

定义 4.1。 框架箭图 Fr(Q) 是箭图 Q 的扩展，方法是为每个顶点 i 添加一个新的冻结节点 i' 和一条箭头 $i \to i'$。我们称这些冻结节点为框架节点。在非冻结节点处对 Fr(Q) 进行变异所得到的箭图集合称为 Q 的框架变异类。如果存在一个固定冻结节点并实现它们之间箭图同构的置换，则 Q 的框架变异类中的两个箭图框架同构。

备注 4.2。 框架变异类中的元素与箭图 Q所对应的簇代数中的簇一一对应。这为研究与 Q相关的簇代数的簇组合学提供了一种便捷方法，而无需实际计算任何簇变量或交换关系。

在 Fr(Q) 的非冻结节点处进行若干次变异后，框架节点将以更复杂的方式与可变节点相连。

设 R 是 Q的框架变异类中的一个箭图。

De定义 4.3. 如果不存在箭头 $j' \to i$，则可变顶点 i 是 R 的绿顶点 。如果
mu表格节点没有箭头 $i \to j'$ ，那么它就称为红色。

最初，Fr(Q) 中所有可变顶点都是绿色。事实证明，所有节点都必须是绿色或红色，这源于 c-向量著名的符号相干性；我们不会用到这一事实。

定义 4.4. 若一个变异序列 $P = \mu_{i_1} ... \mu_{i_N}$ 满足：执行这些变异后，箭图 P(Fr(Q)) 的所有顶点均为红色，则称其为变红序列。如果 P 满足存在一个框架同构 P^2(Fr(Q)) $\simeq$ Fr(Q)，则称该序列为箭图 Q 的广义变异。

4.2. **循环群**。现在我们构造一些广义变异的例子，其中 $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 。我们用 ω 表示 G的生成元。 $\mathbb{Z}[G]$中最简单的斜对称元素是$\omega - \omega^{-1}$。当 $b_{ii} = k(\omega - \omega^{-1})$ 时，典范展开 B 中 i^{th} 集合内的节点由 k 条箭头连接成一个有向环。

下面结论的证明只需简单计算，利用[4]的曲面型簇代数，其中包括带孔曲面的带标记三角剖分这一概念。这里不回顾这些概念，因为它们仅用于本命题。

命题 4.5。 设 Q是一个由单箭头构成、长度为 n的有向环。那么$P = \mu_1\mu_2 \ldots$、$\mu_n\mu_{n-2}\mu_{n-3} \ldots \mu_1$ 以及由置换$(n-1, n)$ 给出的箭图同构，是 Q的一种广义变异。

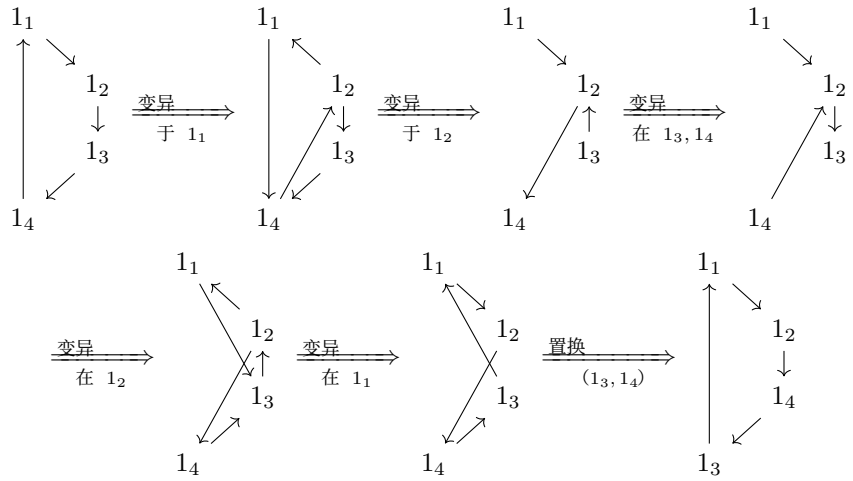
证明。 这个箭图变异等价于某个 D_n 型 Dynkin 图的一个定向；其变异组合学和绿到红元素已有充分研究 [9]。 D_n 型变异类中的箭图与带孔 n边形的三角剖分相对应；该有向环对应于轮式三角剖分。所给出的变异序列将三角剖分变为轮式三角剖分，且其中所有弧在孔处均带有标记。绿到红变换通过交换孔处的标记并将边界顺时针旋转一步得到；由于轮式三角剖分在旋转下保持不变，我们只需为三角剖分的弧添加标记，而这恰好由所给的变异序列实现。□

图4 展示了一个4-环的广义变异序列。

注 4.6。 $n = 3$ 的变异序列已在文献中的多个不同语境下出现，例如， [1] 在表示 Reidemeister 第三类变换的变异序列中，以及 [13]作为实现与 Painlev´e VI 方程相关的双有理变换的变异。

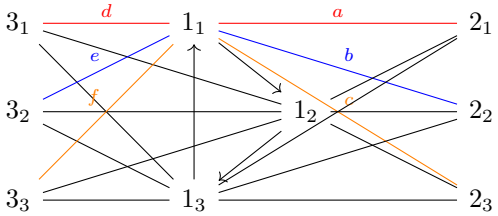
4.2.1. *3*-环。现在我们将此广义变异序列用于 $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。考虑以下交换矩阵：

$$B = \begin{bmatrix} \omega - \omega^{-1} & a + b\omega + c\omega^{-1} & -(d + e\omega^{-1} + f\omega) \\ -(a + b\omega^{-1} + c\omega) & 0 & 0 \\ (d + e\omega + f\omega^{-1}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



执行广义变异后，FIGURE 4. 4-循环回到自身。

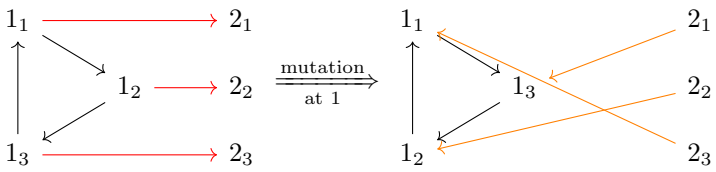
该矩阵的典范展开由以下箭图给出



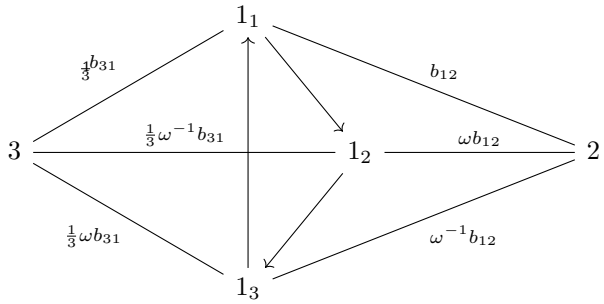
其中 a, b, c 是表示一个节点到另一个节点的箭头数目的整数，可以为正数或负数。

我们对集合1进行的广义变异是变异序列 $\mu_{1_1}\mu_{1_2}\mu_{1_3}\mu_{1_1}$，随后交换节点 1_2 和 1_3的置换。

例 4.7. 例如，按照上述规则对下面的箭图在集合1处进行变异，结果如下：



对于 b_{12}, b_{31} 的一般取值，计算这一变异序列的效果很简单，但过程繁琐。我们可以用群环元素来表示这些计算，从而将它们汇总起来。实质上，我们只展开集合1，同时保持节点2和3不展开：



现在计算变异序列，得到以下结果：

命题 4.8。 设 $b_{kk}=\omega-\omega^{-1}$。在 k 处进行变异会按以下方式改变 B：

$$(b'_{ij})=\begin{cases} b_{ij}-[\omega^{-1}b_{ij}+[b_{ij}]_+]_+-[\omega b_{ij}+[b_{ij}]_-]_-, & for\ i=k\ or\ j=k,\\ b_{ij}+\frac{1}{3}\Big(b_{ik}\circ b_{kj}-b'_{ik}\circ b'_{kj} \\ \qquad +(\omega^{-1}b_{ik}+[b_{ik}]_+)\circ(\omega b_{kj}+[b_{kj}]_-) & otherwise.\\ \qquad +(\omega b_{ik}+[b_{ik}]_-)\circ(\omega^{-1}b_{kj}+[b_{kj}]_+)\Big), \end{cases} \tag{4}$$

若 $b_{12}=a+b\omega+c\omega^{-1}$，则写作 $b'_{12}=a'+b'\omega+c'\omega^{-1}$，我们可以计算得出 $a'=a-[b+[a]_+]_+-[c+[a]_-]_-$。我们可以逐一分析各种情况，得到：

$$a'=\begin{cases} \text{if } a>0 \begin{cases} \text{if } b+a>0 \begin{cases} \text{if } c>0 & \text{=-b}\\ \text{if } c<0 & \text{=-b-c} \end{cases}\\ \text{if } b+a<0 \begin{cases} \text{if } c>0 & \text{=a}\\ \text{if } c<0 & \text{=a-c} \end{cases} \end{cases}\\ \text{if } a<0 \begin{cases} \text{if } c+a>0 \begin{cases} \text{if } b>0 & \text{=a-b}\\ \text{if } b<0 & \text{=a} \end{cases}\\ \text{if } c+a<0 \begin{cases} \text{if } b>0 & \text{=-b-c}\\ \text{if } b<0 & \text{=-c} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

对于 b' 和 c'，也有类似的公式。

例 4.9。 箭图 Q_{3n} 属于变异型 A_{3n}，对应于一个$3n+3$边形的三角剖分。

$$Q_{3n}:=\quad \begin{array}{ccccccccc} 1_1 & \longleftarrow & 2_1 & \longleftarrow & 3_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & n_1\\ \uparrow & \searrow & & & & & & & \\ 1_2 & \longleftarrow & 2_2 & \longleftarrow & 3_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & n_2\\ \downarrow & \swarrow & & & & & & & \\ 1_3 & \longleftarrow & 2_3 & \longleftarrow & 3_3 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & n_3 \end{array}$$

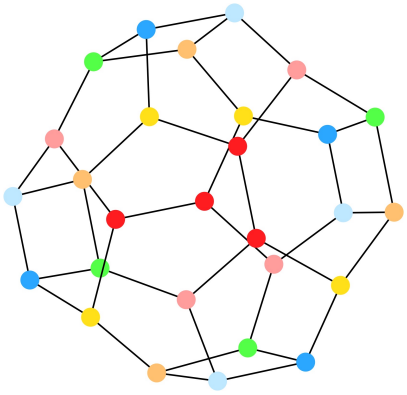
它在 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 下的对称折叠也属于有限变异型；不难看出，其变异对应于一个 $3n+3$ 边形的三重对称三角剖分。

例 4.10。 交换矩阵

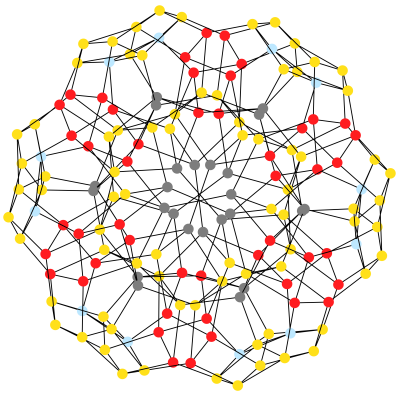
$$W_3=\begin{bmatrix} 0 & 1-\omega & 0\\ -1+\omega^{-1} & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\quad W_4=\begin{bmatrix} 0 & 1-\omega & 0 & -1\\ -1+\omega^{-1} & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_5=\begin{bmatrix} 0 & 1-\omega & 0 & 0 & 0\\ -1+\omega^{-1} & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1+\omega\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\omega\\ 0 & 1 & -1-\omega^{-1} & \omega^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

均属于有限变异型。利用定理 4.2，如定理 4.10所示，我们可以通过框架化这些矩阵的典范展开，计算与这些矩阵相关的簇代数的交换图。这些矩阵 W_3 和 W_4 的典范展开属于格拉斯曼簇代数 $Gr(4,8)$ 和 $Gr(4,9)$ 的变异类，而 W_5 的展开属于与基仿射空间相关的三角形箭 quiver 的变异类 $\mathbb{C}[SL_7(\mathbb{C})]$，例如文献[5]中对此有讨论。格拉斯曼簇代数 $Gr(4,9)$ 沿 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 折叠得到 W_4，其对应的循环对称性通过将 9 个向量平移 $v_i\to v_{i+3}$，见 [8]。



(A) W_3的交换图



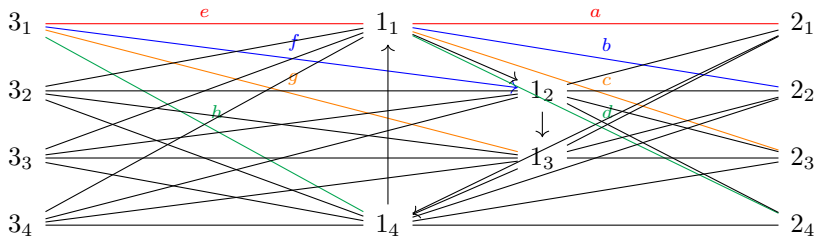
(B) W_4的交换图

4.2.2. *4*-环。接下来显而易见的问题是：如果不再是3节点循环，而是4节点环，会发生什么？此时的变异公式又是什么？我们考虑交换矩阵 B:

$$B = \begin{bmatrix} \zeta - \zeta^{-1} & a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 & -(e + f\zeta^3 + g\zeta^2 + h\zeta) \\ -(a + b\zeta^3 + c\zeta^2 + d\zeta) & 0 & 0 \\ e + f\zeta + g\zeta^2 + h\zeta^4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

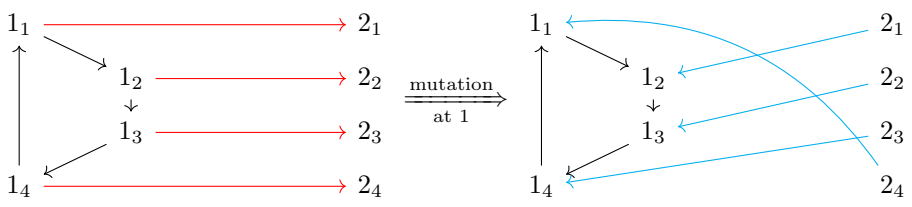
其中，箭头的组合可以用群 $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3\}$ 的元素表示。

那么，该矩阵的典范展开由以下箭图给出：

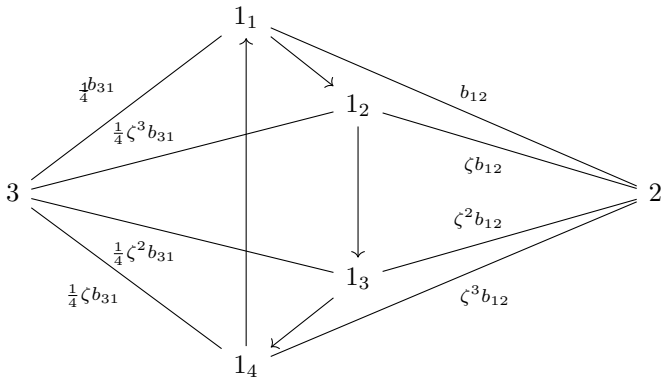


与集合1中有 3 个节点的情况类似，我们需要一个变异序列和一个置换，使该环回到自身，这对应于在节点集合 1 上进行变异。本例中的序列为： $\mu_1\mu_2\mu_4\mu_3\mu_2\mu_1$ ，置换交换 1_3 和 1_4。

例 4.11。 例如，使用上述序列对下方箭图在集合1处进行变异，效果如下：



折叠节点2和3，并将1保持为展开状态，我们得到：



命题 *4.12. </style}*假设 $b_{kk}=\zeta-\zeta^{-1}$。那么在 k 处的变异按如下方式改变 B：对于 $i=k$ 或 $j=k$:

$$\begin{aligned} b'_{ij} = \quad & b_{ij} - [b_{ij}\zeta + [b_{ij}]_-]_- \\ & - \big[-b_{ij}\zeta - [b_{ij}]_- + [b_{ij}\zeta^2 + [b_{ij}\zeta + [b_{ij}]_-]_-]_- \\ & + [b_{ij}\zeta^3 + [b_{ij}]_+ + [b_{ij}\zeta + [b_{ij}]_-]_+]_+\big]_+, \end{aligned}$$

否则，我们有： $b'_{ij}=$

$$\begin{aligned} & b_{ij} + \frac{1}{4}\Big[b_{ik}\circ b_{kj} - b'_{ik}\circ b'_{kj} \\ & \quad + (b_{ik}\zeta^{-1} + [b_{ik}]_+)\circ(b_{kj}\zeta + [b_{kj}]_-) \\ & \quad + (b_{ik}\zeta^2 + [b_{ik}\zeta^{-1} + [b_{ik}]_+]_+)\circ(b_{kj}\zeta^2 + [b_{kj}\zeta + [b_{kj}]_-]_-) \\ & \quad + (b_{ik}\zeta + [b_{ik}]_- + [b_{ik}\zeta^{-1} + [b_{ik}]_+]_-)\circ(b_{kj}\zeta^{-1} + [b_{kj}]_+ + [b_{kj}\zeta + [b_{kj}]_-]_+) \\ & \quad + (-b_{ik}\zeta^{-1} - [b_{ik}]_+ + [b_{ik}\zeta^2 + [b_{ik}\zeta^{-1} + [b_{ik}]_+]_+]_+ + [b_{ik}\zeta + [b_{ik}]_- + [b_{ik}\zeta^{-1} + [b_{ik}]_+]_-]_-) \\ & \quad \circ(-b_{kj}\zeta - [b_{kj}]_- + [b_{kj}\zeta^2 + [b_{kj}\zeta + [b_{kj}]_-]_-]_- + [b_{kj}\zeta^{-1} + [b_{kj}]_+ + [b_{kj}\zeta + [b_{kj}]_-]_+]_+)\Big], \end{aligned}$$

如果 $b_{12}=a+b\zeta+c\zeta^2+d\zeta^3$ 那么 $b'_{12}=a'+b'\zeta+c'\zeta^2+d'\zeta^3$ 我们得到 $a'=a-[d+[a]_-]_- - [-d-[a]_-+[c+[d+[a]_-]_-]_-+[b+[a]_++[d+[a]_-]_+]_+]_+$，并且可以分析每种情况，得到：

$$a'=\begin{cases} \text{if } a>0 \begin{cases} \text{if } d>0 \begin{cases} \text{if } c>0 \begin{cases} \text{if } b+a+d>0 & =-b \\ \text{if } b+a+d<0 & =a \end{cases} \\ \text{if } c<0 \begin{cases} \text{if } b+a+d>0 & =a-(b+a+c)_+ \\ \text{if } b+a+d<0 & =a \end{cases} \end{cases} \\ \text{if } d<0 \begin{cases} \text{if } c+d>0 \begin{cases} \text{if } b+a>0 & =-b \\ \text{if } b+a<0 & =a \end{cases} \\ \text{if } c+d<0 \begin{cases} \text{if } b+a>0 & =a-d-(c+a+b)_+ \\ \text{if } b+a<0 & =a-d \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \text{if } a<0 \begin{cases} \text{if } a+d>0 \begin{cases} \text{if } b+a+d>0 \begin{cases} \text{if } c>0 & =a-b \\ \text{if } c<0 & =a-(c+b)_+ \end{cases} \\ \text{if } b+a+d<0 \begin{cases} \text{if } c>0 & =a \\ \text{if } c<0 & =a \end{cases} \end{cases} \\ \text{if } a+d<0 \begin{cases} \text{if } b>0 \begin{cases} \text{if } c+d+a>0 & =a-b \\ \text{if } c+d+a<0 & =-d-(c+b)_+ \end{cases} \\ \text{if } b<0 \begin{cases} \text{if } c+d+a>0 & =a \\ \text{if } c+d+a<0 & =-d \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

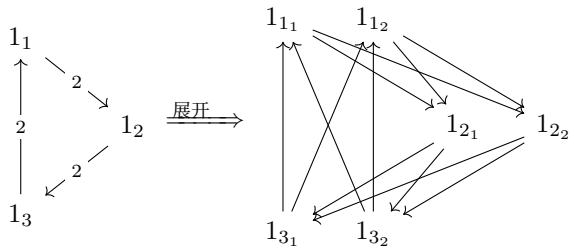


FIGURE 6. 双重3-循环的展开

注 4.13。 定理4.12中的第一个公式 是通过考察执行变异序列后节点之间的箭头 1_1 和2得到的。对其他节点 1_i 与2之间的箭头进行对称计算会得到相同的结果；然而，这会给出非常不同的公式。利用这些不等价的形式，或许可以简化该表达式。

例 4.14. 交换矩阵

$$U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1-\zeta & 0 \\ -1+\zeta^{-1} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad U_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1-\zeta & 0 & 0 \\ -1+\zeta^{-1} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1+\zeta \\ 0 & -1 & -1-\zeta^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

属于有限变异型。后者 U_4 的变异类中，在编织同构意义下只有 7 个元素。其典范展开与格拉斯曼簇代数 $Gr(5,10)$ 所对应箭图的可变部分变异等价。

4.2.3. 双重*3*-循环。 除了增加循环中的节点数，我们还可以增加环中连接每个节点的箭头数。在这种情况下，目前尚不清楚能否找到一种广义变异。

双重3-循环是众所周知的马尔可夫箭图，它是与一次打孔环面相关联的曲面型箭图，并且已知不存在绿到红变异序列 [12]。为了解决这个问题，我们可以将3-循环展开，如下所示，并为展开箭图找到一种广义变异，然后再将其折叠回原始的双重3-循环箭图，见图6。

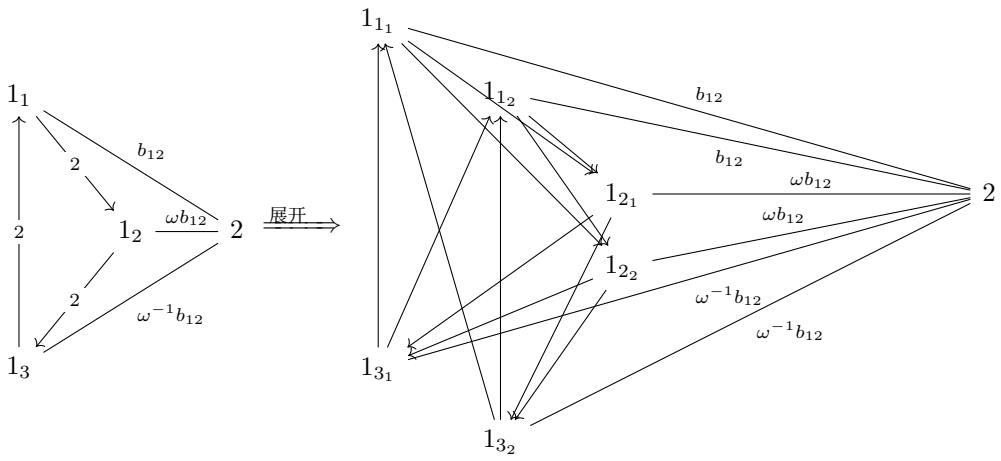
展开后的3-循环是与四次打孔球面相关联的箭图；该箭图具有一个二阶的红到绿元素，这让人想起3节点循环的情形，即每个节点之间有一条箭头：

$$(\mu_{1_{12}}\mu_{1_{32}}\mu_{1_{31}}\mu_{1_{22}}\mu_{1_{21}}\mu_{1_{12}})(\mu_{1_{11}}\mu_{1_{32}}\mu_{1_{31}}\mu_{1_{22}}\mu_{1_{21}}\mu_{1_{11}})$$

设 $B = \begin{bmatrix} 0 & \omega-\omega^{-1} & a+b\omega+c\omega^{-1} & (a+b\omega^{-1}+c\omega)\,0 \end{bmatrix}$。我们进一步展开第一 矩阵·

为简单起见，我们只计算交换矩

个群：



现在我们执行变异序列并计算 b_{12}。计算中涉及的中间量如下：

$$C := \omega b_{12} + [b_{12}]_- \qquad D := \omega^{-1} b_{12} + [b_{12}]_+$$
$$E := -b_{12} + 2[C]_- + 2[D]_+ \qquad F := b_{12} + 2[C]_+ + 2[D]_-$$
$$G := -C + [E]_- + [F]_+ \qquad H := -D + [E]_+ + [F]_-$$

最后我们找到 $b'_{12} = -E + 2[G]_- + 2[H]_+$。

References

[1] V´eronique Bazier-Matte 和 Ralf Schiffler。《纽结理论与簇代数 II：纽结簇》。2024年。arXiv: 2405.16592 [math.CO].[2] A. Felikson、M. Shapiro 和 P. Tumarkin。“通过展开得到的有限变异型簇代数”。英文。载于：《国际数学研究通知》（2011年5月），rnr072.ISSN: 1073-7928, 1687-0247. DOI: 10.1093/imrn/rnr072.[3] Anna Felikson 和 Pavel Tumarkin。“具有实权的有限变异箭图”。载于：《数学论坛：西格玛》11（2023年），e9。DOI: 10.1017/fms.2023.8.[4] Sergey Fomin、Michael Shapiro 和 Dylan Thurston。“簇代数与三角剖分曲面。第一部分：簇复形”。英文。载于：《数学学报》201.1（2008年），第83–146页。ISSN: 0001-5962。 DOI: 10.1007/s11511-008-0030-7.[5] Sergey Fomin、Lauren Williams 和 Andrei Zelevinsky。《簇代数导论》。第6章。2021年。arXiv: 2008.09189 [math.AC].[6] Sergey Fomin、Lauren Williams 和 Andrei Zelevinsky。《簇代数导论》。第1至3章。2024年。arXiv: 1608.05735 [math.CO].[7] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。“《簇代数 I：基础》”。载于：《美国数学会杂志》15.2（2002年），第497–529页。[8] Chris Fraser。《格拉斯曼流形中的循环对称轨迹》。arXiv:2010.05972 [math]。2020年10月。[9] Alexander Goncharov 和 Linhui Shen。《局部系统模空间的量子几何与表示论》。2022年6月。arXiv: 1904.10491 [math-ph].[10] D. Kaufman。“箭图的特殊折叠与簇代数”。载于：《斯堪的纳维亚数学学报》130.2（2024年）。 DOI: https://doi.org/10.7146/math.scand.a-143446.[11] Dani Kaufman 和 Zachary Greenberg。“仿射簇代数与双扩张簇代数的簇模群”。英文。载于：《数学杂志》310.2（2025年4月），第31页。ISSN: 1432-1823。 DOI: 10.1007/s00209-025-03708-8.[12] Bernhard Keller。“箭图变异与组合 DT 不变量”。载于：FPSAC（2013年）。DOI: 10.48550/arXiv.1709.03143.[13] D. Dal Martello。《冈本对称性在第六 Painlev´e 方程表示空间上的作用》。2024年。arXiv: 2411.17397 [math-ph].[14] Joshua S. Scott。“《格拉斯曼流形与簇代数》”。英文。载于：《伦敦数学会会刊》92.2（2006年3月），第345–380页。 ISSN: 0024-6115, 1460-244X。 DOI: 10.1112/S0024611505015571。